微分方程式 演習問題 (9) 定数係数の 2 階非斉次線形微分方程式 (未定係数法バージョン)

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿

問題 以下の微分方程式を解け。

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$
2. $y'' - 2y' + y = e^{x}$
3. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$
4. $y'' + 4y = 2\cos 2x$

[解答]

(1) まず、(右辺)=0 とおいた**斉次方程式** の解を求める。$y = e^{\lambda x}$ と置いたときに得られる特性方程式を解くと

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0 \\ \lambda &= 1, 2 \end{aligned}$$

よって、**斉次方程式** の基本解は $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ となる。

一方、$y_p = Ce^{3x}$ の形の**特別解**を仮定しよう。

$$\begin{aligned} y_p' &= 3Ce^{3x} \\ y_p'' &= 9Ce^{3x} \end{aligned}$$

を問題文の微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} 9Ce^{3x} - 3(3Ce^{3x}) + 2Ce^{3x} &= e^{3x} \\ (2C - 1)e^{3x} &= 0 \end{aligned}$$

これが満たされるためには $C = \frac{1}{2}$ でなければならず、結局特解は $y_p = \frac{1}{2}e^{3x}$。

非斉次方程式の一般解は (特解) + (斉次方程式の一般解) で与えられるから、解は

$$\underline{y = \frac{1}{2}e^{3x} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$$

(2) まず、(右辺)=0 とおいた**斉次方程式** の解を求める。$y = e^{\lambda x}$ と置いたときに得られる特性方程式を解くと

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

重解であるから、**斉次方程式** の基本解は $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ となる。

一方、$y_p = Cx^2e^x$ の形の**特別解**を仮定しよう。

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Cxe^x + Cx^2e^x \\ &= C(2x + x^2)e^x \\ y_p'' &= C(2 + 2x)e^x + C(2x + x^2)e^x \\ &= C(x^2 + 4x + 2)e^x \end{aligned}$$

を問題文の微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} C(x^2 + 4x + 2)e^x - 2C(2x + x^2)e^x + Cx^2e^x &= e^x \\ (2C - 1)e^x &= 0 \end{aligned}$$

これが満たされるためには $C = \frac{1}{2}$ でなければならず、結局特解は $y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$。

非斉次方程式の一般解は (特解) + (斉次方程式の一般解) で与えられるから、解は

$$\underline{y = \frac{1}{2}x^2e^x + C_1 e^x + C_2 xe^x}$$

(3) **斉次方程式** は (2) と共通であるから、基本解が $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ であることはあらかじめわかっている。

一方、$y_p = Ce^{2x}$ の形の**特別解**を仮定しよう。

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ce^{2x} \\ y_p'' &= 4Ce^{2x} \end{aligned}$$

を問題文の微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} 4Ce^{2x} - 2(2Ce^{2x}) + Ce^{2x} &= e^{2x} \\ (C - 1)e^{2x} &= 0 \end{aligned}$$

これが満たされるためには $C = 1$ でなければならず、結局特解は $y_p = e^{2x}$ である。

非斉次方程式の一般解は (特解) + (斉次方程式の一般解) で与えられるから、解は

$$\underline{y = e^{2x} + C_1 e^x + C_2 xe^x}$$

(4) まず、(右辺)=0 とおいた**斉次方程式** の解を求める。$y = e^{\lambda x}$ と置いたときに得られる特性方程式を解くと

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda &= \pm 2i \end{aligned}$$

異なる二つの複素数であるから、**斉次方程式** の基本解は $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$ となる。

一方、$y_p = x(C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x)$ の形の**特別解**を仮定しよう。

$$
\begin{aligned}
y_p' &= (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + x(-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x) \\
&= (C_1 + 2C_2 x)\cos 2x + (C_2 - 2C_1 x)\sin 2x \\
y_p'' &= 2C_2\cos 2x - 2(C_1 + 2C_2 x)\sin 2x \\
&\quad -2C_1\sin 2x + 2(C_2 - 2C_1 x)\cos 2x \\
&= 4(C_2 - C_1 x)\cos 2x - 4(C_1 + C_2 x)\sin 2x
\end{aligned}
$$

を問題文の微分方程式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&4(C_2 - C_1 x)\cos 2x - 4(C_1 + C_2 x)\sin 2x \\
&\qquad +4x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) = 2\cos 2x \\
&(4C_2 - 2)\cos 2x - 4C_1\sin 2x = 0
\end{aligned}
$$

これが満たされるためには $C_1 = 0,\ C_2 = \frac{1}{2}$ でなければならず、結局特解は $y_p = \frac{1}{2}x\sin 2x$ である。

非斉次方程式の一般解は (特解) + (斉次方程式の一般解) で与えられるから、解は

$$
\underline{y = \frac{1}{2}x\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x}
$$

である。