Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur.

In zwei Bänden.

Handbuch der Astronomie
ihrer Geschichte und Litteratur.

Von

Dr. Rudolf Wolf,
Professor in Zürich.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

In zwei Bänden.

Dritter Halbband.

Zürich
Druck und Verlag von F. Schulthess
1892. 2086

Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur

in vier Büchern.

Drittes Buch:

Theorie der Instrumente und Messungen.

XIII. Die Theorie der Instrumente.

Dans les sciences il n'y a jamais rien de plus aisé que ce qu'on a fait hier, et rien de plus difficile que ce que l'on fera demain. *(Biot.)*

---

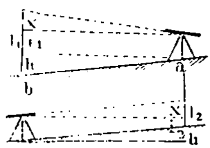
321. Lot, Setzwage und Kanalwage. — Um ihre Aufgabe auf dem einzig zuverlässigen Wege, nämlich durch Messung und Berechnung, lösen zu können, bedarf die Astronomie vor allem aus zweckmässiger Instrumente zur Bestimmung von Längen-, Richtungs- und Zeit-Unterschieden, und es ist daher angegeben, sich in erster Linie mit den in älterer und neuerer Zeit angewandten Hilfsmitteln dieser Art, soweit es nicht in den zwei ersten Büchern schon beiläufig geschehen ist, bekannt zu machen[a]. — Ich beginne mit den ältern Mitteln um die Lage gegen den Horizont zu untersuchen und allfällig zu berichtigen, und habe da zunächst zu erwähnen, dass neben dem unzweifelhaft schon im höchsten Altertume bekannten **Lote** (Bleilot, Senkblei) und der wohl ebenfalls sehr frühe aus ihm abgeleiteten **Setzwage** (Bleiwage)[b], auch häufig, und noch von den spätern Arabern, zur Untersuchung der Horizontalität einer Fläche etwas Flüssigkeit auf dieselbe gegossen und dann nachgesehen wurde, ob sich letztere gleichmässig auf ersterer ausbreite[c]. — Die auf dem Principe der kommunizierenden Röhren beruhende, fast ausschliesslich zu Gefällsbestimmungen verwendete **Kanalwage** (Wasserwage) kömmt hier nur darum in Betracht, weil sie früher, wie übrigens auch die Setzwage, häufig als „Libella" bezeichnet und darum noch in der neuern Zeit wiederholt mit der sofort zu besprechenden Röhrenlibelle verwechselt wurde[d].

Zu 321: *a.* Aus der grossen betreffenden Litteratur erwähne ich vorläufig: „José **Zaragoza** (Alcalà bei Valencia 1627 — Madrid 1678; Jesuit; Prof. math. Madrid), Fabrica y uso de varios instrumentos mathematicos. Madrid 1675 in 4., — Nicolas **Bion** (1653? — Paris 1733; Landkarten- und Globenhändler in Paris), Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques. Paris 1713 in 8. (auch 1716 und später; deutsch durch Doppelmayr, Nürnberg 1717 und später; engl. durch E. Stone, London 1758), — John **Robertson** (1712 — London 1776; Vorsteher einer math. Schule in London), Treatise on mathematical instruments. London 1757 in 8., — Pierre-Charles **Le Monnier** (Paris 1715 — Héril bei Baïeux 1799; Prof. phys. und Akad. Paris; vgl. Cuvier in Mém. de l'Inst. I 3), Description et usage des principaux instruments d'astronomie. Paris 1774 in fol., — Enno Heeren **Dirksen** (Hamswerum in Ostfriesland 1792 — Paris 1850; Prof. math. und Akad. Berlin), Historiæ progressuum instrumentorum, mensuræ angulorum accuratiori inservientium, adumbratio. Gottingæ 1819 in 4., — W. **Simms**, On the principal mathematical instruments. London 1836 in 8. (7. ed. 1849), — **Vizcarrondo**, Tratado de la descripcion y manejo de varios instrumentos de astronomia y navegacion. Cadix 1846 in 8., — C. F. **Schneitler**, Die Instrumente der höhern und niedern Messkunst. Leipzig 1848 in 8. (2. A. 1852), — Karl **Engelbreit**, Die Instrumente der Geodäsie. Nürnberg 1852 in 8., Atl. in fol., — Philipp **Carl** (Neustadt a. d. Aisch 1837 — München 1891; Prof. phys. München), Die Principien der astronomischen Instrumentenkunde. Leipzig 1863 in 8., — Georg Christian Konrad **Hunäus** (Goslar 1802 — Hannover 1882; Prof. geod. Hannover), Die geometrischen Instrumente der gesammten praktischen Geometrie. Hannover 1864 in 8., — Handbuch der nautischen Instrumente. Hydrographisches Amt der Admiralität. Berlin 1882 in 8. (2. A. 1890), — Ernst **Gerland** (Kassel 1838 geb.; Doc. Bergakademie Klausthal), Beiträge zur Geschichte der Physik (Leopoldina; Heft 18 von 1882), — Leopold **Löwenherz** (Czarnikau bei Posen 1847 geb.; Dir. techn. Abteil. der phys. Reichsanstalt in Berlin), Zur Geschichte der Entwicklung der mechanischen Kunst (Z. f. Instr. 1882—87), — Alfred **Westphal** (Lentesdorf bei Neuwied 1850 geb.; Mitglied des k. geodät. Inst. in Berlin und Red. Zeitschr. f. Instr.), Die geodätischen und astronomischen Instrumente zur Zeit des Beginnes exacter Gradmessungen (Z. f. Instr. 1884), — Arthur **Breusing** (Osnabrück 1818 geb.; Dir. Seefahrtschule Bremen), Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten. Bremen 1890 in 8., — etc." — ***b.*** Lot und Setzwage zu beschreiben dürfte unnötig sein; dagegen mag noch angeführt werden, dass im Almagest (Ed. Halma I 316) das Senkblei (fil-à-plomb, plumb-line) als „κάθετος μόλυβδος = heruntergelassenes Blei" aufgeführt wird, — dass nach **Houzeau** dem „Erzinventierer" **Hooke** auch das Verdienst zukömmt „de plonger le poids d'un fil-à-plomb dans un liquide, afin d'en diminuer les mouvements", — und dass nach „Barth. **Scultetus**, Von allerley Solarien. Görlitz 1572 in fol." zur Zeit für die Setzwage auch die Namen „Bleyscheidt, Alpharium, etc." gebräuchlich waren. — ***c.*** Vgl. „**Sédillot**, Prolégomènes des tables astronomiques d'Oloug-Beg. Paris 1847—1853, 2 Vol. in 8." — ***d.*** Wenn Francesco **Patricio** in seinem „Pancosmios. Ferrara 1591 in fol." von einem mit Hilfe einer „libella æquissima" ausgeführten Nivellement spricht, so hat man ohne Zweifel ebenfalls an eine solche Kanalwage zu denken.

322. Die sog. Röhrenlibelle. — Gegenwärtig sind Lot, Setzwage und Kanalwage fast ganz durch die sog. **Röhrenlibelle** (Libella, Niveau à bulle d'air, Spirit level) verdrängt, welche der französische Gelehrte Melchisedec **Thévenot** um 1660 erfand, im folgenden Jahre in einem Briefe an Viviani beschrieb, und sodann auch in einem anonymen Schriftchen, das den Titel „Machine nouvelle pour la conduite des eaux, pour les bâtimens, pour la navigation et pour la plupart des autres arts. Paris 1666 in 8." besass, zur allgemeinen Kenntnis brachte[a]. — Für die Theorie der Libelle auf die folgenden Nummern verweisend, habe ich noch beizufügen, dass die erwähnte Verdrängung keineswegs sofort statt hatte, sondern das neue Hilfsmittel anfänglich mit einigem Misstrauen aufgenommen wurde, zumal seine Ausführung ziemlich lange höchst unvollkommen blieb[b]. Erst als es nach und nach gelang, letztere wesentlich zu verbessern[c], fand die Libelle mehr und mehr Eingang, und man kann etwa den Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts als die Epoche bezeichnen, zu der sie sich unter den Präcisionsinstrumenten einbürgerte und zu einem der vielgebrauchtesten Hilfsapparate wurde[d].

Zu 322: *a.* Als ich 1857 im Journal des Savans (1666 XI 5) eine Reproduktion des längst vergessenen Schriftchens auffand, glaubte ich dasselbe, und damit die Erfindung der Libelle, aus verschiedenen Gründen (vgl. Zürch. Viert. 1857) dem in Paris lebenden Mechaniker **Chapotot** zuschreiben zu sollen. Da jedoch der anonyme Verfasser erwähnt hatte, er habe seine Erfindung der Roy. Society und der Akademie in Florenz mitgeteilt, so erliess ich später (Bull. Bonc. 1869), um ganz sicher zu gehen, noch eine öffentliche Aufforderung, zunächst in Florenz, betreffende Nachforschungen anzustellen, — in London war kaum etwas zu erwarten, da nach andern Vorkommnissen anzunehmen war, es habe **Hooke** die Mitteilung abgefangen, um sich dann alsbald (wie es auch wirklich geschah) selbst als Erfinder produzieren zu können. Dieser Aufruf hatte die gute Folge, dass sich Prof. **Govi** für die Sache interessierte, den erwähnten Brief auffand und überhaupt die wirkliche Urgeschichte der Libelle definitiv feststellte (vgl. Bull. Bonc. 1870 und Zürch. Viert. 1871). Überdies gelang es dem unermüdlichen **Boncompagni**, das Originalschriftchen aufzufinden; auch zeigte sich, dass die **Chapotot** von seinen Zeitgenossen zugeschriebene und mich irre führende Erfindung in einer neuen Abart des damals für „nivellements à distance" beliebten, jetzt mit Recht längst vergessenen „Niveau pendule" bestand. — *b.* Die Hauptstelle des Schriftchens von **Thévenot** lautet wie folgt: „C'est un **niveau d'air** beaucoup plus juste et plus commode que les niveaux ordinaires. La construction en est aisée: On choisit un tuyau de verre qui ayt les costez paralleles, dont le diamètre puisse recevoir le petit doigt et qui soit environ sept ou huit fois plus long que large. Après avoir fermé ce tuyau par un des bouts, on y met quelque liqueur, et ayant laissé un peu moins de vuide dans le tuyau qu'il n'a de diamètre, on le bouche ou le scelle par le feu. De toutes les liqueurs l'esprit de vin est le plus propre pour cet instrument, parce qu'il ne fait point de sédiment et qu'il ne gèle jamais." Man sieht hieraus, wie unrichtig, ja lächerlich die in „Guido **Schreiber** (Rastatt 1799 geb.; Prof. prakt. Geom. Karlsruhe bis 1851, wo er entlassen wurde), Praktische Geometrie. Karlsruhe 1842 in 4." enthaltene Notiz ist: „Anfänglich nahm man Wasser zum Füllen der Röhre, und so lag die Ideenverbindung nahe **Es flattert um die Quelle — Die wechselnde Libelle** (Göthe), — daher denn der Name des Instrumentes". Ferner ist anzuführen, dass die von **Thévenot** beigegebene Kupfertafel nicht nur die Libelle mit einer begrenzten und relativ kleinen Blase darstellt, somit die Angabe vollständig widerlegt, es habe erst **Hooke** den leeren Raum in dieser Weise reduziert, — sondern auch eine gefasste Libelle zeigt, sowie ihre Anwendung auf Höhenquadrant, Nivellierinstrument, etc. andeutet. Dagegen scheint allerdings die mechanische

Ausführung der vortrefflichen Ideen von **Thévenot** anfänglich ziemlich mangelhaft gewesen zu sein und der allgemeinen Aufnahme der Erfindung Eintrag gethan zu haben. — *c.* Während man sich zuerst darauf beschränkte, möglichst cylindrische Röhren auszusuchen, wurden letztere später, wie uns z. B. ein von **Repsold** 1817 V 12 an Horner geschriebener Brief (Not. 179) zeigt, im Innern noch sorgfältig ausgeschliffen. Ferner wurde (vgl. Berl. Jahrb. 1778) nach einem schon 1775 durch **Fontana** gemachten Vorschlage, wenigstens zum Füllen feinerer Libellen, Äther oder Naphta verwendet, — die Röhre vor dem Schliessen durch Erwärmen luftleer gemacht, — und der Schluss wohl auch, anstatt durch Zuschmelzen, durch eingeschliffene Glasstöpsel zu erhalten gesucht, wodurch man allerdings, aber nur auf Kosten ganz sichern Verschlusses, vor dem Zerspringen etwas gesicherter war. Die Libellenfassungen wurden namentlich durch **Reichenbach** und den ältern **Ertel** verbessert, und so z. B. für letztern die gute Idee beansprucht, bei den Libellen, wie bei den Lagern für horizontale Axen, das eine Ende vertikal, das andere horizontal verschiebbar zu machen. In der neuesten Zeit werden die durch C. **Reichel** in Berlin gelieferten Libellen sehr gerühmt. — *d.* Die Verbindung von Fernrohr und Libelle, aus der unser gegenwärtiges Nivellierinstrument hervorgegangen ist, soll schon 1684 der französische Ingenieur **Lebion** ausgeführt haben. Hat man nämlich ein auf einem Pyramidalstative ruhendes Fernrohr, welches eine zu seiner optischen Axe parallele, sog. Längslibelle trägt, so kann man leicht eine Folge von Höhendifferenzen bestimmen, da beim Einspielen der Libelle die Visierlinie horizontal sein soll: Gesetzt aber, letztere habe noch eine kleine Elevation, so wird sie, wenn das Instrument in a und eine Messlatte (Mire) in einem um h tiefern Punkte b aufgestellt wird, diese letztere in $l_1 = x + i_1 + h$ treffen, wo i_1 die Höhe des Okulares über a und x den durch jene Elevation verursachten Fehler bezeichnet; wechselt man sodann Instrument und Messlatte, so erhält man $l_2 = x + i_2 - h$, und es ergeben sich



$$2h = l_1 - l_2 - (i_1 - i_2) \qquad 2x = l_1 + l_2 - (i_1 + i_2)$$

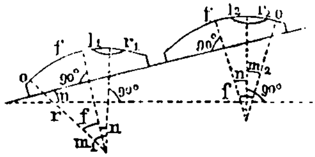
so dass x bestimmt, und mit Hilfe der Korrektionsschraube der Libelle gehoben werden kann. Ist aber letzteres geschehen, so kann man die Höhendifferenz zweier Punkte noch einfacher bestimmen, indem man das Instrument zwischen ihnen aufstellt, für beide Punkte die Latthöhe abliest und deren Differenz nimmt. — Für weitern Detail vgl. die Speciallitteratur wie z. B. „Sim. **Stampfer**, Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren. Wien 1845 in 8. (7. A. durch Herr 1872)", — wohl auch die von **Plantamour** und **Hirsch** gegebenen Aufschlüsse über das „Nivellement de précision de la Suisse", für welches Emil **Kern** (Aarau 1830 geb.; Mechaniker in Aarau) ganz vorzügliche Instrumente geliefert hat und dessen Bedeutung aus 433 hervorgehen wird.

323. Theorie und Untersuchung der Libelle. — Setzt man eine Libelle auf eine um n geneigte Gerade auf, — wendet sie sodann um, — und liest in beiden Lagen an einer von dem einen Ende auslaufenden Längsteilung die Stände $l_1\, r_1$ und $l_2\, r_2$ der Blasenenden ab, so erhält man, wenn f den Stand der Blasenmitte für $n = 0$ und v den Winkelwert eines Teilstriches bezeichnet, die Formeln

$$n = \tfrac{1}{4}(l_1 + r_1 - l_2 - r_2) \cdot v \qquad f = \tfrac{1}{4}(l_1 + r_1 + l_2 + r_2) \cdot v \qquad \mathbf{1}$$

nach welchen n und f nach Bestimmung von v berechnet werden können[a]. Für letztere Bestimmung befestigt man die Libelle auf ein um eine Axe drehbares Fernrohr, bringt nach und nach durch Drehen des Fernrohrs das eine Blasenende mit verschiedenen Teilstrichen zum Einspielen, und liest jeweilen **entweder** an einem an der Axe befindlichen Teilkreise, **oder** an einer in bekannter Distanz aufgestellten Messlatte, die Stellung des Fernrohrs und damit die dem Wege der Blase entsprechende Drehung ab[b]. Je kleiner v ausfällt, desto empfindlicher ist die Libelle, und je weniger sein Wert variiert, wenn man ihn aus Ablesungen an verschiedenen Stellen bestimmt, desto zuverlässiger ist dieselbe[c].

Zu 323: *a.* Unter Voraussetzung, dass die Röhre wenigstens nach oben kreisförmig ausgeschliffen sei, folglich die Mitte der Luftblase beständig den höchsten Punkt einnehme, hat man offenbar für die beiden Lagen



$$n = m_1 - f = \tfrac{1}{2}(l_1 + r_1) \cdot v - f$$
$$n = f - m_2 = f - \tfrac{1}{2}(l_2 + r_2) \cdot v \qquad \mathbf{2}$$

woraus die 1 ohne weiteres hervorgehen, während die Länge eines Teilstriches

$$d = r \cdot v \cdot \mathrm{Si}\, 1'' \qquad \mathbf{3}$$

ist. Setzt man die Blasenlänge als konstant voraus, so muss $r_1 - l_1 = l_2 - r_2$ sein, und hiefür gehen die 1 in

$$n = \tfrac{1}{2}(l_1 - r_2) \cdot v \qquad f = \frac{1}{2}(l_1 + l_2) \cdot v \qquad \mathbf{4}$$

über; aber diese scheinbar einfachern Formeln sind nicht zu empfehlen, da die Blase bei der geringsten Wärmeveränderung ihre Länge wechselt, also die Voraussetzung selten zutrifft. — *b.* So erhielt ich z. B. 1879 mit Hilfe des Zürcher-Meridiankreises, unter a die Kreisablesung, unter m die Stellung der Blasenmitte an der Libellenscale und unter l die Blasenlänge in Scalenteilen verstehend, bei einer Libelle, welche vom einen Ende aus in Pariserlinien geteilt war, folgende Serie korrespondierender Ablesungen:

a	m	l	a'	a — a'	△a : △m
"			"	"	
424,26	89,20	47,4	424,18	0,08	9,889
385,20	85,25	3	385,05	0,15	10,222
342,78	81,10	2	343,94	— 1,16	9,420
305,10	77,10	2	301,31	0,79	9,963
251,80	71,75	1	251,31	0,49	10,059
180,38	64,65	3	180,98	— 0,60	9,727
132,71	59,75	3	132,43	0,28	9,900
62,42	52,65	3	62,09	0,33	10,012
— 4,66	45,95	3	— 4,29	— 0,37	9,869
— 114,70	34,80	0	— 114,73	0,03	
Mittel		47,24		± 0,48	9,896

Der Bewegung $m_1 - m_{10} = 54{,}40$ der Blase entspricht somit der Stellungsunterschied $a_1 - a_{10} = 538'',96$ und es ist daher der Wert eines Libellenteiles angenähert $v = 9'',907$. Genauer kann man ihn unter Benutzung sämtlicher Ablesungen z. B. in der Weise finden, dass man, unter x die m = 60 entsprechende Ablesung verstehend, die Gleichung

$$a = x + (m - 60) \cdot v, \qquad 5$$

für alle 10 Wertenpaare aufschreibt, und zur Bestimmung von x und v die Methode der kleinsten Quadrate (52) anwendet, wodurch man

$$a' = 134'',911 + (m - 60) \cdot 9'',9065 \qquad 6$$

und damit die in die Tafel eingetragene Vergleichung erhält. — Versteht man unter Δa oder Δm die Differenz zweier sich folgender a oder m, so erhält man die ebenfalls eingetragenen 9 Werte von $\Delta a : \Delta m = v$, die neuerdings zeigen, dass die untersuchte Libelle von grössern systematischen Fehlern frei, dagegen allerdings nicht sehr empfindlich ist, da eine Pariserlinie Ausschlag schon ganz gut für $v = 1''$ erhältlich ist. So erhielt ich 1866 bei einer für den Meridiankreis selbst bestimmten, ebenfalls in Pariserlinien geteilten Libelle nach derselben Methode vorerst $v = 1'',348$ und sodann nach Einlegen in die Fassung $v = 1'',213$, woraus zugleich die Regel hervorgeht, die definitive Bestimmung erst nach diesem Einlegen vorzunehmen. — Wendet man 3 auf die untersuchte Libelle an, d. h. setzt $d = 1'''$ P. und $v = 9'',907$, so folgt $r = 20820''' = 145'$ P., während sich $d = 1^{mm}$, $v = 1''$ und $r = 206^m$ entsprechen würden. — *c.* Anhangsweise mag noch erinnert werden, dass man sich bei etwas empfindlichen Libellen namentlich auch vor einseitiger Erwärmung hüten muss, da die Blase immer gegen das wärmere Ende hin geht. Es scheint dieser Umstand zuerst von Anne-Jean-Pascal-Chrysostome **Duc-la-Chapelle** (Montauban 1765 — ebenda 1814; reicher Privatastronom zu Montauban in Tarn-et-Garonne) bemerkt und 1802 in der Conn. d. t. besprochen worden zu sein, — jedenfalls nicht erst von Giuseppe **Belli** (Callasca in Piemont 1791 — Pavia 1860; Prof. phys. Mailand, Padua und Pavia) in seiner 1829 in die Mem. Soc. Ital. eingerückten Note.

324. Die sog. Axenlibelle. — Soll die Libelle zum Nivellieren einer Axe dienen, so kann sie nur auf die immer etwas ungleichen Stahlzapfen, welche die Axe umhüllen, aufgesetzt oder an dieselben gehängt werden. Bezeichnet nun d die Länge der Axe, $\Delta r = r_2 - r_1$ die erwähnte Zapfen-Ungleichheit, α den halben Winkel der Libellen-Füsse oder Haken, a den halben Lagerwinkel, und setzt man

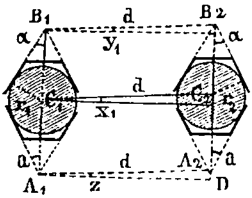
$$1 : m = d \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 1 : n = d \cdot \mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 1$$

so ergeben sich die Gleichheiten

$$\Delta r = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2) : (m + n), \quad x_1 = y_1 - m \cdot \Delta r, \quad x_2 = y_2 + m \cdot \Delta r \qquad 2$$

wo y_1 und y_2 die vor und nach Umlegen der Axe in ihren Lagern aus den Libellen-Ablesungen (nach 323 : 1) ohne Rücksicht auf die Zapfen-Ungleichheit berechneten Werte, x_1 und x_2 aber die entsprechenden wirklichen Neigungen der Axe sind[a].

Zu 324: *a.* Aus der auf nebenstehender Seite folgenden Figur ergeben sich sofort die Beziehungen



$$d \cdot \mathrm{Si}\, x_1 = C_2 A_2 + A_2 D - C_1 A_1 = \Delta r \cdot \mathrm{Cs}\, a + d \cdot \mathrm{Si}\, z$$
$$d \cdot \mathrm{Si}\, y_1 = B_2 C_2 + C_2 A_2 + A_2 D - B_1 C_1 - C_1 A_1 =$$
$$= \Delta r \cdot \mathrm{Cs}\, \alpha + \Delta r \cdot \mathrm{Cs}\, a + d \cdot \mathrm{Si}\, z$$

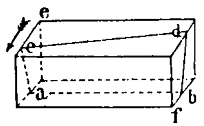
oder, da x, y, z nach vorläufiger Rektifikation des betreffenden Instrumentes nur ganz kleine Grössen sind, unter Benutzung der 1 sehr nahe

$$x_1 = z + n \cdot \Delta r \qquad y_1 = z + (m + n) \cdot \Delta r \qquad \mathbf{3}$$

während analog bei umgelegter Axe, da hiefür nur die r wechseln, also Δr das entgegengesetzte Zeichen annimmt,

$$x_2 = z - n \cdot \Delta r \qquad y_2 = z - (m + n) \cdot \Delta r \qquad \mathbf{4}$$

Aus Kombination der 3 und 4 gehen aber sofort die 2 hervor. — Bei der 323:b erwähnten Libelle meines Meridiankreises erhielt ich vor dem Umlegen im Mittel aus sechs sehr wenig von einander differierenden Ablesungen bei je hoher, horizontaler und tiefer Lage des erst nach Nord, dann nach Süd gewendeten Okularendes: $l_1 = 29.9$, $r_1 = 64.3$, $l_2 = 60.2$, $r_2 = 26.0$, wo die l dem Ostende der Blase entsprachen, — auf analoge Weise nach dem Umlegen: $l_3 = 30.8$, $r_3 = 65.1$, $l_4 = 59.5$, $r_4 = 25.2$, — hieraus (323:4) $y_1 = 2''.426$, $y_2 = 3''.396$, — und endlich nach 1 und 2, da $d = 1110^{mm}$, $\alpha = 45^0$ und $a = 50^0$ war, $m = 262.80$, $n = 242.58$ und $\Delta r = -0^{mm}.0010$ oder $m \cdot \Delta r = -0'',263$. — Dass eine solche Bestimmung von Zeit zu Zeit, und namentlich jedesmal nach Erneuerung des Öles, zu wiederholen ist, braucht kaum gesagt zu werden; dagegen ist noch auf folgenden Umstand aufmerksam zu machen: Dreht man



ein Prisma ef in der Richtung des Pfeiles um ab, und ist cd nicht parallel ab, sondern c näher und d ferner, so sinkt c, während d steigt. Entsprechend wird, wenn die Axe der Libelle derjenigen des Instrumentes nicht parallel ist oder eine sog. **Lateralabweichung** hat, die Blase bei jeder kleinen Drehung der Libelle um die Aufsetzlinie sich dem **fernern** Ende **nähern**, — ein Vorgang, welcher ein sicheres Nivellieren unmöglich macht, aber, sobald er erkannt ist, nach seiner Ursache mit Hilfe der hiefür an der Fassung angebrachten seitlichen Korrektionsschrauben leicht beseitigt werden kann.

325. Die ersten Distanzbestimmungen. — Gegenüber blossen Distanzschätzungen war schon das Abschreiten oder Abfahren einer Distanz ein wesentlicher Fortschritt, besonders als sog. **Pedometer** oder **Hodometer** erfunden wurden, um das sichere Zählen der Schritte oder Radumläufe zu erleichtern [a]. Viel grössere Genauigkeit wurde dann allerdings erreicht, als man Messlatten, Messleinen, Messketten und dergleichen zur Anwendung brachte, und nach und nach die Konstruktion dieser Hilfsapparate, sowie die Manipulation mit denselben, zu verbessern wusste [b].

Zu 325: *a.* Schon im Altertum scheinen gewisse **Pedometer** (von πέδον = Boden, Erde, Land) oder **Hodometer** (von ὁδός = Weg, Strasse, Reise) in Anwendung gekommen zu sein, — möglicherweise (413) schon zur Zeit von **Eratosthenes** durch die egyptischen Wegmesser, jedenfalls aber vor **Vitruv**, da dieser in seiner „Architectura (lib. X, cap. 14)“ von solchen spricht. Bei dem Wagen, welchen (415) **Fernel** bei seiner angeblichen Gradmessung benutzt haben will, schlug bei jeder Umdrehung des Rades ein Hammer an eine im Wagen angebrachte Glocke, und es mussten die Schläge direkt gezählt werden, während bei dem von Levin **Hulsius** im „Vierdten Tractat der mechanischen Instrumenten. Franckfurt 1604 in 4." beschriebenen „Viator oder Wegzähler, so zu Fuss, zu Pferdt und zu Gutschen gebraucht werden kann" dieses Zählen bereits wie bei den neuern Apparaten dieser Art einer uhrähnlichen Vorrichtung anheimfällt, auf welche bei jedem Schritt oder Radumgang ein Zug ausgeübt wird. — *b.* Es ehrt die Araber, dass sie (414) bei ihrer Gradmessung bereits von Stäben Gebrauch machten. Beschaffenheit und Manipulation sind leider unbekannt, während man dagegen weiss, dass sich (416) **Snellius** eiserner und (418) **Picard** hölzerner Stäbe von je 12' Länge bedienten, welche längs einer gespannten Schnur direkt auf den Boden gelegt wurden. Überhaupt benutzten die Feldmesser im 16. und noch bis in das 17. Jahrhundert hinein, wie uns **Pühler** (1563), **Reinhold** (1574), **Reymers** (1583), **Zubler** (1607), etc., berichten, zu Längenmessungen meist „Messruten" von 10 oder 16 „schuch" Länge, zuweilen allerdings auch eine „wider sinns gedrehte, in öl gesotne und wol gewixte schnur". — Von unserer **Messkette** (Catena mensoria, chaîne d'arpenteur, catena da misurare, surveyors chain, Meetketting) fand ich die erste Erwähnung und Abbildung in „**Stevin**, Wisconstighe Ghedachtnissen van de Meetdaet. Leyden 1605 in fol. (pag. 48)"; dann aber scheint sie sich rasch auch in andern Ländern, und so namentlich durch Ed. **Gunter** in England, eingebürgert zu haben. **Norwood** bediente sich derselben (417) zu seiner Gradmessung, und noch gegen Ende des vorigen Jahrhunderts brachten General **Roy** in England und Professor **Tralles** in der Schweiz durch **Ramsden** konstruierte Stahlketten mit gutem Erfolge zur Verwendung.

326. Die ältern Basisapparate. — Der erste eigentliche Basisapparat war derjenige, welcher für die Gradmessung in Peru (421) mit grosser Umsicht konstruiert und mit dem sodann auch untadelhaft manipuliert wurde [a]. Ihm ähnlich, jedoch nach Konstruktion und Manipulation eher etwas unvollkommener, war der für die Gradmessung in Lappland (422) benutzte Apparat [b], und auch die zu Nachmessungen in Frankreich (423), zu einer Messung am Kap (424) und einigen spätern Basismessungen (425) verwendeten Systeme erreichten im allgemeinen kaum die Höhe ihres Vorbildes [c].

Zu 326: *a.* Der in Peru benutzte Apparat bestand aus drei hölzernen, 20-füssigen, verschieden bemalten Latten, welche am einen Ende einen horizontalen, am andern einen vertikalen Sägeschnitt besassen, in deren jedem eine Kupferlamelle so befestigt war, dass sie circa $1\frac{1}{2}''$ vorragte, — und aus einer genügenden Anzahl von zum Tragen der Latten bestimmten Böcken (chevalets), die behufs Horizontalstellung der erstern etwas erhöht oder erniedrigt werden konnten. Beim Gebrauche wurden zuerst alle drei Latten in einer bestimmten Folge gelegt, — dann mit Hilfe einer gespannten Schnur und einer Libelle aligniert und nivelliert, — und hierauf sachte zur Berührung gebracht; nachher wurde die erste Latte abgehoben und vorgelegt, — u. s. f. Erlaubten die Böcke, infolge beständigen Steigens oder Fallens des Bodens, schliesslich nicht mehr, die vorgelegte Latte in das Niveau der übrigen zu bringen, so wurde unter Anwendung eines Senkels eine neue Lage begonnen, so dass also gewissermassen treppenförmig (par échelons) gemessen wurde.

Abends wurde die Endlage des Apparates sorgfältig versichert, und zwar erzählt „**Bouguer,** La figure de la terre. Paris 1749 in 4." in Beziehung hierauf: „Pour terminer le travail de chaque journée, et marquer avec précision le point où nous devions commencer le lendemain, nous faisions planter avec force dans la terre deux gros piquets à l'extrémité de la dernière perche; nous tendions de la tête de l'un à la tête de l'autre un fil horizontal, perpendiculaire à la direction de la base, lequel rasoit l'extrémité de la perche, et nous marquions sur la tête des piquets les points par lesquels passoit le fil". Überdies wurde Nachts der Apparat bewacht und ein für das hiezu beorderte Personal aufgestelltes Zelt diente zugleich dazu, einen Eisenstab, auf welchem die Normal-Toise sorgfältig abgetragen war und mit dem die Latten täglich wenigstens Ein Mal verglichen wurden, um ihre mit der Feuchtigkeit wechselnde Korrektion (équation) zu bestimmen, am Schatten halten zu können. — *b.* In Lappland kamen Latten von 30' Länge zur Verwendung, über deren Ajüstierung in „**Outhier,** Journal d'un voyage au Nord en 1736 et 1737. Paris 1744 in 4." folgendes mitgeteilt wird: „Nous avions porté de Paris une toise de fer, bien ajustée sur celles du Châtelet, avec un étalon aussi de fer, dans lequel la toise entrait bien exactement. On avait ajusté l'un à l'autre à Paris dans un tems que les thermomètres étaient à 14° au-dessus de zéro. Le 19 déc. 1736 nous conservâmes à cette même hauteur les thermomètres dans une chambre au moyen d'un bon feu. Nous fîmes cinq toises de bois de sapin, nous les armâmes à chacune de leurs extrémités d'un gros clou arrondi, que nous diminuâmes avec la lime, jusqu'à ce que la toise entrât bien exactement dans l'étalon. Nous poussâmes la précision jusqu'à l'épaisseur d'une feuille de papier". In ähnlicher Weise wurden sodann mit diesen fünf Toisen die grossen Latten in Übereinstimmung gebracht: Erstere wurden auf einer Unterlage aneinander gelegt und dann zwei Nägel eingeschlagen, zwischen die sie genau passten; dann wurden die grossen Stäbe ebenfalls armiert und an diesen Armaturen wieder so lange herumgefeilt, bis sie zwischen jene Nägel gelegt werden konnten. — Die Manipulation bei der Messung selbst scheint eine analoge wie in Peru gewesen zu sein; jedoch erfährt man nichts Genaueres über das Alignieren und Nivellieren der Stäbe, die Verwendung der „Supports", die Nachtversicherung der letzten Lage der Messlatten, die von Zeit zu Zeit vorgenommenen Untersuchungen der Länge der Latten und ihrer allfälligen Durchbiegung, etc., und hört bloss, dass lange nach beendigter Messung, nämlich 1737 V 1, eine Revision der Latten vorgenommen wurde, indem **Outhier** berichtet: „Mr Camus et moi avons remis à leur juste longueur de 5' les quatres perches qu'on avait fait venir d'Öfwer-Tornea et qui se trouvaient trop courtes chacune d'environ une demie ligne". — *c.* Zu der 1756 vorgenommenen Neumessung der Picard'schen Basis wurden (vgl. Mém. Par. 1761) mit Ölfarbe bemalte hölzerne und an beiden Enden mit Eisen beschlagene Stäbe verwendet. Da **Lemonnier** gefunden hatte, dass Temperaturwechsel auf diese Stäbe keinen merklichen Einfluss ausübe, während sie sich bei Befeuchtung etwas verlängerten, so bewahrte er sie an einem trockenen Orte auf; nichts destoweniger ergab sich ihm, als er sie 1761 nochmals mit dem früher gebrauchten Etalon von 40' verglich, dass sie sich in den 5 Jahren um volle $1\frac{1}{2}'''$ d. d. oder um $\frac{1}{40}$ Procent **verlängert** hatten, so dass er ausrief: „Il semble qu'à mesure qu'on veut approcher de plus près de la précision, il naisse, pour ainsi dire, de nouveaux obstacles à surmonter, desquels on n'avait aucune idée". — Der einzige erhebliche Fortschritt in jener Zeit war, dass **Boscovich** bei seiner

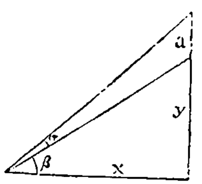
Messung im Kirchenstaate mit der bisherigen Anwendung von Endmasstäben brach: Er legte auf seinen Holzlatten, die etwas mehr als 27 römische Spannen à $99^1/_{30}$''' P. hielten, entsprechend seinem Normalmasse drei Intervalle von je 9 Spannen durch Messinglamellen, auf denen je ein feiner Punkt markirt war, fest, — und brachte sodann beim Gebrauche die Latten nicht völlig zum Kontakte, sondern bestimmte mit Zirkel und Transversal-Masstab die Distanz der benachbarten Endpunkte.

327. Die neuern Basisapparate. — Die neuern, d. h. die seit dem Ende des 18. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart konstruierten Basisapparate haben, mögen die eigentlichen Mass-Stäbe aus Eisen, Platin, Glas, etc. bestehen, das gemein, dass diese Stäbe auf sorgfältig konstruierte Stative zu liegen kommen, welche in horizontalem und vertikalem Sinne die für das Alignieren und Nivellieren wünschbaren Verschiebungen mikrometrisch auszuführen erlauben, — und dass Vorsorge getroffen ist, um die Temperatur der Stäbe fortwährend bestimmen, folglich deren Variationen in Länge eliminieren zu können [a]. Ferner werden die Stäbe, zur Verhütung von Verschiebungen, nicht zur wirklichen Berührung gebracht, sondern es wird jeweilen entweder ein kleiner Zwischenraum belassen und dieser mikrometrisch gemessen [b], — oder es wird, was entschieden noch vorzüglicher ist, das Ende des Stabes optisch fixiert und sodann der Stab nach Neulage verschoben, bis sein Anfang in optischem Kontakt mit dem Bilde des Endes steht [c]. — Für weitern Detail und andere Vorschläge muss auf die eigentliche Fachlitteratur verwiesen werden [d].

Zu 327: *a.* Die Temperatur der Stäbe wird entweder, wie z. B. bei dem durch **Schumacher** und **Repsold** für die dänische Gradmessung konstruierten, und später durch **Horner** und Joh. Georg **Oeri** (Zürich 1780 — ebenda 1852; Mechaniker in Zürich; vgl. Biogr. II) für die schweizerischen Vermessungen etwas modifizierten Apparate, direkt an eingelegten Thermometern abgelesen, — oder, wie z. B. an dem durch **Borda** und **Lenoir,** für die zur Grundlage des metrischen Systemes angeordneten Messungen, ausgeführten Apparate, aus der mikroskopisch abgelesenen Bewegung berechnet, welche das freie Ende eines Metallstabes (Kupfer von 0,0000 1717 Ausdehnung für 1° C.) macht, dessen anderes Ende auf dem eigentlichen Masstabe (Platin von 0,0000 0884 für 1° C.) festgeschraubt ist. — *b.* Unter Adoption dieser (326), schon durch **Boscovich** beliebten Methode, wurde bei ersterm der eben angeführten Apparate der Zwischenraum durch Einsenken des von **Reichenbach** zu diesem Zwecke vorgeschlagenen Messkeiles, — bei letzterm durch Vorschieben einer Zunge gemessen. — *c.* Der optische Kontakt, der mit Einem Stabe zu operieren erlaubt, wurde schon 1797 durch Joh. Georg **Tralles** (Hamburg 1763 — London 1822; Prof. math. et phys. Bern, dann Akad. Berlin; vgl. Graf in Bern. Biogr.) und Ferdinand Rudolf **Hassler** (Aarau 1770 — Boston 1843; Prof. math. West-Point und Superintendent der Coast Survey; vgl. Biogr. II und „Memoirs. Nice 1882 in 8.") in folgender Weise zur Anwendung gebracht: War der Stab, dessen Enden mit Spinnefaden markiert waren, und der auf seinem Stative auch in der Längenrichtung verschoben werden konnte, zum ersten Male gelegt, so wurde über sein Ende ein, auf eigenem Stative am Boden ruhendes und nach allen Richtungen verschiebbares Mikroskop so aufgestellt, dass dessen festes Fadenkreuz damit coincidierte; dann wurde der Stab neu gelegt, so dass sein Anfang in dasselbe Kreuz fiel, — nunmehr das Mikroskop wieder über das Ende versetzt, — und so fort. Es kann darüber kein Zweifel bestehen, da nicht nur **Tralles** in seinem Voranschlage für 1797 unter den beabsichtigten geodätischen Arbeiten „die Wiedermessung der (1791 mit einer Ramsden'schen Stahlkette, vgl. 325, gemessenen) Hauptbasis (bei Aarberg) **nach einer Methode,** von welcher zu erwarten ist, dass alle ähnlichen Messungen an Genauigkeit übertroffen werden“ aufzählt, — sondern sein damaliger Mitarbeiter **Hassler** in seinen „Papers on various subjects. Philadelphia 1824 in 4.“ nach Beschreibung des von ihm 1816 bei der amerikanischen Küstenvermessung gebrauchten Apparates mit optischem Kontakte, bei Erwähnung der Aarberger Basis ausdrücklich sagt: „This base was measured twice: first with a chain similar to that made by Ramsden for the english survey, — and secondly with an apparatus some what similar to that above described“. Allerdings ist dann jener erste Apparat, dessen Princip 1810 auch von François **d'Aubuisson** de Voisins (Toulouse 1769 — ebenda 1841; Minen-Ingenieur) benutzt wurde, teils durch **Hassler** selbst, teils durch Ignacio **Porro** (Pignerol 1801 — Mailand 1875; Ingenieur) und namentlich durch Don Carlos **Ibannez** (Barcelona 1825 — Nizza 1891; Generaldirektor des span. geogr. Instit.) und **Brunner** noch ungemein vervollkommnet worden. — *d.* Vgl. **Delambre** et **Méchain,** Base du système métrique. Paris 1806—1810, 3 Vol. in 4., — **Schumacher,** Schreiben an Olbers über den Apparat zur Messung der Basis bei Braack. Altona 1821 in 4., — C. **Ibannez,** Base centrale de la triangulation géodésique d'Espagne. Tradu. par A. Laussedat. Madrid 1863 in 8., — A. **Westphal,** Basisapparate und Basismessungen (Z. f. Instr. 1885—88), — E. **Jäderin,** Geodätische Längenmessung mit Stahlbändern und Metalldrähten. Stockholm 1885 in 8., — etc.“

328. Die sog. Distanzmesser. — Die Erläuterung der in der Astronomie zur Anwendung kommenden Methoden für indirekte Distanzbestimmung spätern Abschnitten vorbehaltend, erinnere ich hier nur beiläufig an die verschiedenen Hilfsmittel, welche man als **Distanzmesser** (Tachymeter) behufs rascher, wenn auch nur angenäherter Ermittlung der Entfernung eines sog. unzugänglichen Punktes erfunden hat“.

Zu 328: *a.* Schon Ludwig **Wenz** (Basel 1695 — ebenda 1772; Prof. mech. und Stadtnotar in Basel) zeigte in seiner „Solutio famosissimi problematis geometrico-practici de invenienda distantia objecti remoti ope unicæ et cujus cunque, ut vocant stationis (Acta helv. IV von 1760)“, dass, wenn man die beiden Höhenwinkel $(\alpha + \beta)$ und β zweier im Abstande a vertikal übereinander stehender Punkte messe, daraus die Horizontaldistanz x gefunden werden könne, indem man sofort



$$x \cdot \mathrm{Tg}\,(\alpha + \beta) - x \cdot \mathrm{Tg}\,\beta = a \qquad \mathbf{1}$$

erhalte, und somit x berechnen könne. Da in allen Anwendungen a gegen x klein ist und überdies β auf einen kleinen Winkel reduziert werden kann, so ergiebt sich

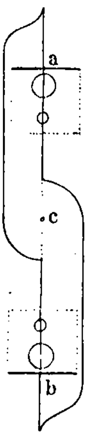
$x = a \cdot Ct\,\alpha \cdot Co^2\beta$ und sodann $y = 1/2 \cdot a \cdot Ct\,\alpha \cdot Si\,2\beta$ **2**

und man kann daher, bei Anwendung eines Fernrohrs mit zwei horizontalen Faden der Winkeldistanz α, durch Ablesung der zwischen die Faden fallenden Strecke a einer an dem zu bestimmenden Punkte aufgestellten Messlatte und des Höhenwinkels β, die gesuchten x und y leicht berechnen, ja sich sogar diese Rechnung bei Anwendung eines geeigneten Rechenstabes auch noch ersparen, wie dies des Nähern aus „Joh. **Wild**, Über die topographische Vermessung des Kantons Zürich, nebst Erklärung des dabei angewandten logarithmischen Rechenstabes (Verh. techn. Ges. Zürich 1847)“ zu ersehen ist. — Auf andere Tachymeter kann ich hier nicht eintreten.

329. Die allgemeinen Principien der Winkelmessung. — Das Messen eines Winkels besteht im allgemeinen darin, dass man eine geeignete, alsbald näher in Betracht zu ziehende Vorrichtung, ein sog. **Winkelinstrument**, über dem Scheitel desselben **aufstellt**, — sodann gewisse bewegliche Teile des Instrumentes, sei es gleichzeitig, sei es successive, den beiden Objekten accomodiert, welche die Schenkel des Winkels markieren, oder, wie man sagt, nach diesen **visiert**, — nunmehr die Lage jeder dieser Visuren, sei es auf graphischem Wege fixiert, sei es, was das Gewöhnlichere ist, entweder an einer geradlinigen Scale oder an einer Kreisteilung **abliest**, — und endlich aus diesen Aufzeichnungen oder Ablesungen auf die Grösse des Winkels schliesst, sagen wir, denselben **berechnet.** Die Genauigkeit einer Winkelmessung wird somit wesentlich von der Sicherheit abhängen, mit welcher diese verschiedenen Operationen ausgeführt werden können, und diese Sicherheit wird ihrerseits an die Beachtung gewisser allgemeiner Principien gebunden, aber auch von dem Bau der einzelnen Instrumente abhängig sein. Das folgende wird in diesem Sinne erst das Allgemeine, dann das Specielle möglichst gedrängt abhandeln.

330. Die ältern Visiermittel. — Es gehört zu den vielen Verdiensten von **Hipparch**, der Winkelmessung grössere Sorgfalt zugewandt, und so z. B. behufs genauerer Visuren an den beiden Enden des über einem geteilten Kreise drehbaren Radius oder Durchmessers, als sog. **Absehen** oder **Diopter**, kleine prismatische Blättchen mit sich entsprechenden kreisrunden Öffnungen aufgesetzt zu haben[a]. Überdies hatte er den guten Gedanken, solche Diopter auch zur direkten Bestimmung kleiner Winkel zu verwenden, indem er das eine, das dem Auge zugewandte **Okulardiopter**, welchem er eine ganz kleine Öffnung gab, am Ende eines etwa vier Ellen langen Stabes fest aufstellte, — das andere oder **Objektivdiopter**, welches eine etwas grössere Öffnung erhielt, dagegen längs des Stabes verschob, bis der Durchmesser des durch die beiden Öffnungen bestimmten Gesichtskegels der zu messenden scheinbaren Distanz entsprach, — und schliesslich aus dem dafür nötigen Abstande der beiden Diopter den gewünschten Winkel ableitete [b].

Zu 330: *a.* Der Name **Diopter** kömmt von διόπτρα = Werkzeug zum Durchsehen. **Ptolemäus** braucht im Almagest statt dessen meist die Bezeichnung πρισμάτια κύκλων, doch kömmt auch einmal (Alm. Halma I 339) dafür das Wort διόπτρα vor, das übrigens ja schon in der von **Heron** mutmasslich (65: a) noch früher verfassten Anleitung zum Feldmessen „Ἥρωνος Ἀλεξανδρέως περὶ διόπτρας (von Alex. Vincent mit franz. Übers. in den Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale, Vol. 19 von 1858, publiziert)“ als Benennung eines Instrumentes erscheint, das aus einem 4 Ellen langen, auf einer runden Scheibe drehbaren Stabe bestand, der an beiden Enden Absehen trug, welche aber allerdings, statt kreisrunden Öffnungen, kreuzweise Einschnitte gehabt haben sollen. Sonst kommen auch wohl statt Diopter die Namen pinna = Flosse (Vitalis: Lexicon 1668), pinnula (Köbel: Astrolabium 1532; daher pinnule), pinnacidia (Tycho: Epistolæ 1596), buco = Loch (Danti: Astrolabium 1578), Gesichtsblechlein mit Löchlein (Ritter: Astrolabium 1613), tabella = Bretchen (Köbel l. c.), assicella = Bretchen (Danti l. c.), etc., vor. — Von den Griechen gingen die Diopter zu den Arabern über, welche die mit ihnen erhältliche Visur dadurch wesentlich verschärften, dass sie dieselben nicht nur zum Niederlegen und Aufklappen mit Charnieren versahen, sondern in a und b auf einem um das Centrum c drehbaren Stabe von beistehender Gestalt, der in ihren Spitzen zugleich Indices darbietenden sog. **Alidade**, so aufsetzten, dass die Visierlinie einem wirklichen Durchmesser, der sog. **Linea fiduciæ** (von fiducia = Zutrauen), entsprach. In dieser Form finden wir dann auch die Dioptra von mehreren abendländischen Schriftstellern aus der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts (so von Köbel l. c.) beschrieben, — ja noch an einem 1599 durch Antonius **Gianin** in Rom verfertigten „Astrolabium planisphærium (360)“ erscheint genau dieselbe Konstruktion, und zwar ist $ab = 19^{cm}$, während die beiden Diopter 22^{mm} Höhe auf 32^{mm} Breite haben, und der Durchmesser der obern Öffnung etwa $^2/_3$, derjenige der untern etwa 3^{mm} hält. — Früher wurde „Alhidade“ geschrieben, in der Meinung, dass dies Wort aus „Al Hidad (der Zähler)“ entstanden sei; in der neuern Zeit hat man dagegen (vgl. Zöppritz in 162) in einem von der Konstruktion des Astrolabiums handelnden arabischen Manuskript die bestimmte Angabe gefunden, dass das Wort „al-'idâda“ eine Art „mastara“ oder Lineal bezeichne, also sich auf den Diopterlineal beziehe und somit „Alidade“ zu schreiben sei. Statt Alidade kommen auch die Bezeichnungen Radius visualis, Ostensor = Zeiger (Vitalis l. c.), Regula, Volvella (von volvo = ich drehe), Mediclinium = Mittellinie (Köbel l. c.), etc., vor. — In der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts wurden beim Okulardiopter die kreisrunden Öffnungen meistens durch Spalten, sog. **Rimulæ**, ersetzt, während das Objektivdiopter in ein Rähmchen überging, in dessen Mitte ein zum Lineal senkrechtes Metallblättchen oder Rosshaar eingesetzt wurde, das nunmehr mit der Rimula die Linea fiduciæ bestimmte. Ob die „Rimulæ pinnacidiorum“, welche etwa 1583 Paulus **Wittichius** von Hveen nach Kassel brachte,

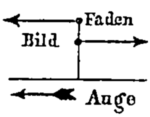


eine selbständige Erfindung von **Tycho** oder auch ihm zugebracht waren, muss dahingestellt bleiben; dagegen mag noch angeführt werden, dass **Tycho,** wenigstens bei einzelnen seiner grossen Quadranten, im Centrum als Objektivdiopter ein Cylinderchen aufstellen liess, das bei Nacht beleuchtet wurde, während die am Limbus spielenden, von zwei verschiedenen Beobachtern zu bedienenden Okulardiopter je zwei Spalten erhielten, welche um den Durchmesser des Cylinderchens von einander abstanden, — dass **Bürgi** dagegen, der nur Einen Beobachter voraussetzte, das Okulardiopter am Centrum beliess, — dass ferner häufig die beiden Diopter so konstruiert waren, dass das eine oben als Okular und unten als Objektiv, das andere unten als Okular und oben als Objektiv dienen konnte, so dass sie ein sog. **Amphidiopter** (von ἀμφίς = auf beiden Seiten, d. h. vor- und rückwärts zu gebrauchen) bildeten, — und dass endlich **Brander** (vgl. Verz. 300) solche Doppeldiopter verfertigte, bei welchen die Okulare durch Bohrungen, die Objektive dagegen durch Glasscheibchen mit eingeritzten Kreuzlinien dargestellt waren. — *b.* **Bürgi** konstruierte (vgl. Mitth. 45 von 1878) zu gewissen Zwecken, so z. B. um à la Hipparch scheinbare Durchmesser bestimmen zu können ohne das Objektiv verschieben zu müssen, Diopter, bei welchen die Weite der Spalte messbar verändert werden konnte. — Anhangsweise füge ich bei, dass auf der Scheibe von **Herons** Dioptra zwei kleine Zäpfchen angebracht waren, bis zu welchen successive der Stab gedreht werden musste, um einen rechten Winkel zu erhalten, und somit sein Instrument bereits die nachmals von den Geometern des Abendlandes vielgebrauchte, so z. B. von Johannes **Ardüser** (Lenz 1584 — Zürich 1665; Ingenieur Zürich; vgl. Biogr. IV) in seinen „Geometriæ theoricæ et practicæ XII Bücher. Zürich 1627 in 4. (2. A. in 14 B. 1646)" einlässlich behandelte **Kreuzscheibe** (Winkelkreuz, Equerre d'arpenteur), vertrat. Da ferner jene Scheibe, wie aus „**Cantor,** Die römischen Agrimensoren. Leipzig 1875 in 8. (pag. 20)" hervorgeht, mit einer kleinen Kanalwage horizontal gestellt werden konnte, auch der Stab **auf** und **mit** der Scheibe, also in vertikalem und horizontalem Sinne, drehbar war, so fehlte so ziemlich nur noch eine Kreisteilung, um die Dioptra als Vorläufer des Azimutalquadranten (319) betrachten zu können.

331. Das Fernrohr mit Fadenkreuz. — Nach Erstellung des Fernrohrs lag der Gedanke nahe, dasselbe auch an Instrumenten als Visiermittel anzubringen [a]; aber in erfolgreicher Weise geschah dies erst, als Will. **Gascoigne** etwa 1640 darauf verfiel, den Umstand zu benutzen, dass man in einem astronomischen Fernrohr neben dem reellen Bilde eines äussern Objektes auch jeden in die Bildebene gebrachten Gegenstand, wie etwa einen über letztere gespannten Faden, sehen, also die Linea fiduciæ der Alten z. B. durch die Verbindungslinie des optischen Mittelpunktes der Objektivlinse mit dem Schnitte zweier solchen Faden, dem sog. **Fadenkreuze,** ersetzen kann [b]. Dieses Procedere wurde jedoch anfänglich von andern kaum beachtet [c], und so kam es, dass Adrien **Auzout** [d] und Jean **Picard** dasselbe etwa 1667 nochmals erfinden und nunmehr definitiv in die Astronomie einführen konnten [e]. Da schon diese letztgenannten den schädlichen Einfluss der sog. **Fadenparallaxe** bemerkten und auch eine allfällige **Kollimation** in Betracht zogen [f], so blieb es der neuern Zeit fast nur vorbehalten, das Material, die Anlage und die Beleuchtung der Fadennetze nach und nach zu vervollkommnen, was dann aber allerdings in ausgiebiger Weise gelang [g].

Zu 331: *a.* Aus „Jean-Baptiste **Morin** (Ville-Franche in Beaujolais 1583 — Paris 1656; erst Arzt, dann Prof. math. Paris), Longitudinum scientia. Parisiis 1634 in 4." geht unzweifelhaft hervor, dass schon dieser Gelehrte dem Visieren mit dem Fernrohr nachhelfen wollte; aber da er nur „belgische" Fernröhren besass und diese einfach auf die, hiefür oben etwas ausgeschnittenen, Absehen seiner Instrumente auflegte, so kann er nur als Vorläufer dieser Neuerung, nicht als Erfinder derselben bezeichnet werden. Die für **Henrion** erhobenen Ansprüche beruhen wohl nur auf dem Umstande, dass man aus dem Titel seiner Schrift „L'usage du Mécomètre. Paris 1630 in 8." glaubte schliessen zu dürfen, er behandle in derselben eine mikrometrische Vorrichtung, während er nur ein etwas abgeändertes Astrolabium beschrieb, das weder Fernrohr noch Mikrometer besass. — *b.* Aus den Briefen von Will. **Gascoigne** an Will. Crabtree und Will. Oughtred folgt unumstösslich, dass er nicht nur schon 1640 seine Fernröhren mit mikrometrischen Vorrichtungen versah (391), sondern auch an seinem Höhenquadranten ein Fernrohr anbrachte, in dessen Focus ein Haar (hair, thread) gespannt war, welches er Nachts mit einer Lampe (a candle in a lantern) sichtbar zu machen wusste. Vgl. „**Derham**, Extracts from Mr. Gascoigne's and Mr. Crabtree's Letters, proving Mr. Gascoigne to have been the inventor of the telescopic sights of mathematical instruments (Ph. Tr. 1717), — Correspondence of scientific men of the 17. century. Oxford 1841, 2 Vol. in 8. (I 33—59), — **Grant**, History of physical Astronomy. London 1852 in 8. (p. 451 f.), — etc." — *c.* Es scheint, dass die Erfindung von **Gascoigne** lange Jahre ausserhalb England ganz unbekannt blieb, und so dürften Francesco **Generini** (Florenz 1593? — ebenda 1663; Bildhauer, Kupferstecher, Wasserbaumeister und Mechaniker), in dessen Nachlass sich (vgl. Zach in Zeitschr. f. Astr. IV 3—10) ein „Brevissimo discorso del telescopare gli strumenti geometrici" vorfand, und Cornelio **Malvasia** (Bologna 1603 — Pamano bei Bologna 1664; General in päpstlichen Diensten), der 1662 in seinen Ephemeriden behauptete, schon „lange Jahre" ein im Focus des Fernrohrs stehendes Netz aus Silberfaden (393) zu gebrauchen, ebenfalls ein gewisses Anrecht auf selbstständige Erfindung haben. — *d.* Adrien **Auzout** (Rouen 1640? — Rom 1691) gehörte zu den ersten und vorzüglichsten Mitgliedern der Pariser Akademie, wurde aber schon 1668 durch eine Intrigue beseitigt, worauf er in Florenz und Rom privatisierte. — *e.* Ob **Huygens**, der (vgl. dessen „Systema Saturnium" von 1659 und unsere 393) schon vor 1659 sein Fernrohr mit einer mikrometrischen Vorrichtung versehen und vielleicht zu ähnlichen Zwecken auch Faden eingezogen hatte, seine beiden Kollegen **Auzout** und **Picard** zu einer solchen Neuerung veranlasste, weiss man nicht genau, — gewiss ist dagegen (vgl. „Le Monnier, Histoire céleste. Paris 1741 in 4., p. 11" und unsere 391), dass letztere von 1667 hinweg ihre Instrumente mit Fernröhren versahen, welche teils Fadenkreuze, teils Mikrometer besassen, und dass sodann dieser Gebrauch, wenigstens bei den grössern Instrumenten der Astronomen, bald ziemlich allgemein wurde. Nur **Hevel**, dem es nicht recht klar geworden zu sein scheint, dass das Fadenkreuz keineswegs ein einzelner Punkt ist, sondern eine sichere Visierlinie bestimmt, hielt unentwegt an seinen, ungefähr nach Art der Bürgi'schen konstruierten, Diopteru fest, und als ihm **Hooke** etwa

1669 zur Empfehlung des Fernrohrs als Visiermittel seine „Description of the dioptric telescope“ zusandte, antwortete er, dass er seine Beobachtungen für ebensogut als die von Hooke mit dem Fernrohr gemachten halte. Dies verdross **Hooke** und er sprach sich 1674 in sog. „Animadversiones“ in so arroganter Weise über den im Vorjahre erschienenen ersten Teil der „Machina coelestis“ aus, dass sich **Hevel** ernstlich beleidigt fühlte und die Roy. Society ersuchte, den Sachverhalt durch eines ihrer Mitglieder prüfen zu lassen. Die Wahl fiel auf den jungen **Halley,** der hierauf mit Hooke'schen Instrumenten nach Danzig reiste und dort von 1679 V 26 bis VII 18 an der Seite von Hevel vergleichende Beobachtungen anstellte, deren unerwartetes Resultat darin bestand, dass Halley erklären musste, **es beobachte Hevel mit blossem Auge und seinen Dioptern ebensogut als er mit seinem Fernrohr.** Für weitern Detail auf „**Hevel,** Annus climactericus. Gedani 1685 in fol.“ und die Ph. Tr. von 1685 verweisend, bemerke ich noch, dass somit die Diopter, dank dem scharfen Auge und der seltenen Beobachtungsgabe von **Hevel,** ihren Rückzug in ehrenvollster Weise antreten konnten. — *f.* Auf die **Kollimation** werde ich in 350 näher eintreten; dagegen mag schon hier in Beziehung auf die, eine sichere Visur verhindernde **Fadenparallaxe,** bemerkt werden, dass dieselbe entsteht, wenn die Fadenplatte nicht genau mit der Bildebene des Objektives zusammenfällt.



Es wird nämlich in diesem Falle offenbar, wenn man das Auge vor dem Okulare hin- und herbewegt, der Faden oder das Bild mit dem Auge zu gehen scheinen, je nachdem die Fadenplatte ferner oder näher als die Bildebene ist. Sobald man aber hierüber ins klare gekommen, hat es keine Schwierigkeit, diese Fehlerquelle zu verstopfen, da an jedem Instrumente schon durch den Mechaniker dafür gesorgt wird, dass man die Fadenplatte etwas verschieben kann. — *g.* Die Fadenkreuze von **Auzout** und **Picard** bestanden (wie bei Gascoigne) aus Haaren (cheveux), — während **La Hire** die Verwendung von feinen Glasfaden empfohlen haben soll, — **Rost** 1727 entweder einen „subtilen Seidenfaden“, oder ein „Menschenhaar“, oder noch besser (mit Malvasia) einen „silbernen Drat“ angewandt wissen wollte, — **Brander** häufig (vgl. seine „Beschreibung des Planisphærium astrognosticum æquatorialis. Augsburg 1775 in 8.“ und unsere 300 : a), statt Faden, Gläser mit eingeritzten Linien verwendete, — und endlich Felice **Fontana** (Pomarolo im Tirol 1730 — Florenz 1805; Prof. phys. Pisa, dann Dir. Mus. Florenz) in seinem „Saggio del real gabinetto di fisica et di storia naturale. Roma 1775 in 4.“ die Einführung von Spinnefaden beliebte. Von letzterm Vorschlage nahm **Brander** (vgl. Verz. 259) alsbald Notiz, — namentlich aber wurde er von **Rittenhouse** (vgl. dessen Schrift von 1786 in 166 : a), sowie etwas später von **Troughton** und **Zach** sehr lebhaft begrüsst, und man liest z. B., wie mir Guillaume **Bigourdan** (Sittels in Tarn et Garonne 1851 geb.; Obs. Toulouse und Paris) freundlichst mitteilte, in dem Beobachtungsbuche von **Flaugergues** im Mai 1805 die bezügliche Note: „M. le Baron de Zach, lors de son passage à Donzère, me conseilla de garnir mes instruments avec des fils d'araignée qui sont bien plus fins que ceux de cocons et beaucoup plus élastiques, et il m'enseigna la manière de les placer: il faut pour cela les coller par les deux bouts aux branches d'un compas; on écarte ensuite ces branches peu à peu jusqu'à ce que le fil soit tendu au point d'être près de se rompre; on l'applique alors sur le diaphragme et le fixe avec du mastic“. Es verbreitete sich sodann diese Anwendung der Spinnefaden in unserm Jahrhundert fast allgemein, teils wegen derer relativ grosser Dauerhaftigkeit, teils namentlich auch wegen ihrer fast beliebig zu wählenden Feinheit. In Beziehung auf letztere kann z. B. angeführt werden, dass nach **Struve** beim Pulkowaer Refraktor die Faden des Mikrometers bei einer Focaldistanz von 22,55 Fuss einen scheinbaren Durchmesser von 0″,32 oder also einen wahren Durchmesser von $0{,}011^{mm} = 11^{\prime\prime}$ besitzen, und **Wolfer** entsprechend für die Faden des Positionsmikrometers am Zürcher Achtfüsser den scheinbaren Durchmesser gleich 0″,949 oder den wahren Durchmesser gleich $11{,}5^{\prime\prime}$ fand. — Für die gegenwärtig bei den verschiedenen Instrumenten gebräuchlichen Kombinationen von festen und beweglichen Faden auf deren später folgende Beschreibung verweisend, bleibt noch zu erwähnen, dass die Faden bei Nacht in geeigneter Weise, wie es schon **Gascoigne** anstrebte, sichtbar gemacht werden müssen. Es wird dies entweder nach dem Vorschlage von **Römer** dadurch erreicht, dass man mit einem durchbrochenen Vorsteckspiegel durch das Objektiv, oder noch besser nach **Ramsden** (vgl. Piazzi im Journ. d. Sav. 1788) durch die hohle Drehaxe und einen in ihrem Durchschnitte mit der optischen Axe angebrachten, etwas drehbaren Spiegelring, der in neuerer Zeit wohl auch zu Gunsten centrischer Beleuchtung durch eine Kombination von kleinen Prismen und Spiegeln ersetzt worden ist, das Gesichtsfeld mässig beleuchtet, wobei die Faden als dunkle Linien auf hellem Grunde erscheinen, — oder endlich nach dem Vorschlage von M. A. **Pictet** (vgl. Bibl. univ. 1827) durch eine Seitenöffnung an der Okularröhre Licht auf die Faden wirft, die sich sodann als helle Linien vom dunkeln Hintergrunde abheben. Bei Beobachtung sehr heller Gestirne (Sonne, Venus, etc.) ist umgekehrt eine angemessene Abblendung notwendig, welche meist durch Vorsetzen farbiger oder berusster Gläser erreicht wird, wie solche (vgl. Delambre IV 681 und Apians Astronomicon) schon vor Erfindung des Fernrohrs durch die holländischen Seefahrer und durch Peter **Apian** benutzt wurden.

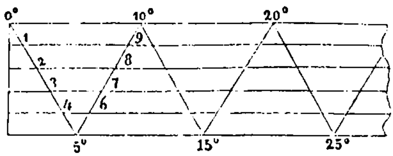
332. Die graphische Bestimmung der Winkel. — In den ältesten Zeiten waren die Begriffe von wahren und scheinbaren Grössen oder Abständen noch nicht recht ausgeschieden, sonst würde man nicht Feuerkugeln nach ihrer Grösse mit Pflaumen, Heubündeln u. s. f. verglichen, — Mond und Sonne als Scheiben von Ein Fuss Durchmesser beschrieben, — Distanzen von Sternen in Ellen angegeben haben, — etc., und man hätte es nicht schon als einen grossen Fortschritt zu bezeichnen, dass letztere etwas später zuweilen in Mondbreiten ausgedrückt wurden. Erst nachdem man sich über jenen Unterschied klar geworden war, konnte die Rede von Winkelabständen sein und das Bedürfnis entstehen, dieselben darzustellen, zu vergleichen und zu messen. Aus diesem letztern ging sodann zunächst die sog. **Schmiege**[a] und aus dieser nach und nach der sog. **Messtisch** mit **Diopterlineal** hervor[b], nach dessen späterer Vervollkommnung sich in Verbindung mit dem durch Tob. **Mayer** eingeführten **Principe der Multiplikation** auch ein Mittel ergab, auf graphischem Wege einen Horizontalwinkel mit grosser Annäherung zu bestimmen[c].

Zu 332: *a.* Die dem Zirkel verwandte **Schmiege** (le récipiangle, l'équerre fausse) bestand aus zwei, um einen Punkt oder Kopf drehbaren Stäben oder Schenkeln. Beim Gebrauche wurde der Kopf ans Auge gesetzt; sodann richtete man die Schenkel durch Öffnen oder Schliessen auf die beiden Winkelobjekte und erhielt so direkt den Winkel. Letzterer wurde dann nachher in der Regel auf ein Brett abgetragen, — aus dem Scheitel ein beliebiger Hilfskreis beschrieben, — und auf diesem die durch den Winkel bestimmte Sehne in der Weise herumgetragen, wie es schon früher (57) auseinander gesetzt wurde. — *b.* Da besonders häufig Horizontalwinkel zu messen waren, so fand man es später ratsam, dem Brette ein Stativ zu geben, mit dem es horizontal gestellt werden konnte, — die Schmiege durch ein Diopterlineal zu ersetzen, — und die Visierlinien direkt längs diesem zu ziehen; d. h. es entstand der sog. **Messtisch** (die Mensel, la planchette), welcher sich bei den Geometern mit Recht bis in die Gegenwart erhalten hat. — Die Geschichte dieses nützlichen, aber eben nach und nach aus einem unansehnlichen Anfange hervorgegangenen Instrumentes, lässt sich kaum mit Sicherheit feststellen; denn obschon es Thatsache ist, dass bereits **Stevin** 1605 in seinen „Wisconstige Gedachtenissen (II 30)" das Princip des Messtisches aussprach, und auch das in „**Schwenter,** Beschreibung des nutzlichen geometrischen Tischleins von Joh. Prætorio erfunden. Nürnberg 1619 in 4. (auch 1627 als Tractat III von dessen Geom. pract.)" enthaltene Zeugnis, es habe sein Lehrer Johannes **Prätorius** (Joachimsthal 1537 — Altdorf 1616; Mech. Nürnberg, dann Prof. math. Wittenberg und Altdorf) die nach ihm benannte „mensula prætoriana" spätestens 1611 in einer gewissen Vollkommenheit in die Praxis eingeführt, als durchaus glaubwürdig bezeichnet werden muss, so ist nicht zu vergessen, dass auch noch andere berechtigte Ansprüche vorhanden sind: Nicht nur geht aus „Johan **Sems** en Jan-Pietersz **Dou**, Practyck des Landmetens. Amsterdam 1600 in 4. (und später; auch deutsch durch Seb. Curtius 1616)" ziemlich unzweifelhaft hervor, dass verschiedene holländische Feldmesser schon vor Stevin einen rohen Messtisch benutzten, sondern es geschah solches ohne nachweisbaren Zusammenhang nicht minder frühe in der Schweiz, da Leonhard **Zubler** (Zürich 1563 — ebenda 1609; Mech. und Ratsherr Zürich) in seiner „Fabrica et usus instrumenti chorographici, das ist newe, planimetrische Beschreibung u. s. f. Basel 1607 in 4. (auch lat. durch J. C. Waser)" angiebt, es sei ihm „nit zu wissen dass dergleichen einfaltiges und doch nutzliches Instrument in den Truck kommen", sondern ihm die Idee durch Philipp **Eberhard** (Zürich 1563 — ebenda 1627; Steinmetz und Stadtdachdecker in Zürich) mitgeteilt worden, ja noch der etwas spätere **Ardüser** (vgl. 330 : b), ohne etwas von Stevin und Prätorius zu wissen, die betreffenden Operationen auf einem mit Papier überspannten, auf einem Stuhl „nach dem Horizont" gelegten Brett auszuführen lehrt. — *c.* Ein näheres Eingehen auf die successive Ausbildung des für den Topographen noch jetzt unentbehrlichen Messtisches und die damit auf graphischem Wege lösbaren Aufgaben, unter welchen die Pothenot'sche (vgl. 67) hervorragt, wäre hier kaum gerechtfertigt, und es mag einzig noch folgendes beigefügt werden: Sucht man, z. B. mit Hilfe der schon von **Schwenter** erwähnten **Einlotzange,** den über dem Scheitel des zu messenden Winkels stehenden Punkt des Tisches auf, — visiert von diesem nach dem einen Winkelpunkte und dann nach dem andern, — stellt nun durch Drehen des Tisches das Diopterlineal wieder auf den ersten Punkt zurück, und visiert nochmals auf den zweiten, — dreht dann wieder den Tisch, etc., bis nach n solchen Doppeloperationen die letzte

Visur einen Winkel von etwas mehr als b Umdrehungen mit der ersten bildet, so hat man, wenn c die Distanz der dem Radius r entsprechenden Punkte der ersten und letzten Visierlinie, a aber den zu messenden Winkel bezeichnet,

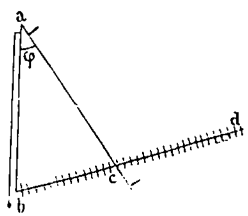
$$n \cdot a = b \cdot 360^0 + \mathrm{Ast}\,(c:r) \qquad \mathbf{1}$$

woraus sich a mit Hilfe einer Sehnentafel oder des durch Tob. **Mayer** eingeführten **geradlinigen Transporteurs** (vgl. Fig., in welcher zum Auftrage der Sehnen von 5°, 10°, etc. ein Decimeter für r = St 60° angenommen wurde) bei Vermeidung konstanter Fehler offenbar um so genauer bestimmen lässt, je grösser n ist. Das hiebei in Anwendung gekommene „Princip der Multiplikation" wurde in „Tob. **Mayer,** Nova methodus perficiendi instrumenta geometrica et novum instrumentum geometricum (Comm. Gott. II von 1752)" zuerst ausgesprochen.



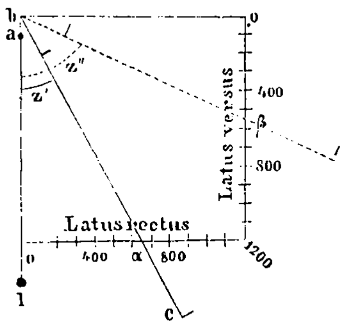
333. Die Instrumente mit Gerad-Teilungen. — Der **Schmiege** machten nach und nach andere, etwas grössere Genauigkeit bietende, mit Längs- oder Kreis-Teilungen versehene Vorrichtungen zum Winkelmessen Konkurrenz, und zwar dürfte von denjenigen mit **Gerad-Teilung** die älteste das von **Ptolemäus** beschriebene und für alle Zeiten wegen dem von ihm durch **Coppernicus** (263) gemachten Gebrauch ehrwürdige **Triquetrum** (Regula Ptolemaica, parallaktischer Lineal) sein [a]. Dann folgte etwa das schon bei den Arabern auftauchende und offenbar mit ihrer Entwicklung der Goniometrie (62) zusammenhängende, im Abendlande durch **Purbach** beliebte und daher oft nach ihm benannte **Quadratum geometricum** [b]. Endlich erscheint, spätestens von der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts hinweg, neben ihnen der allerdings erst durch **Regiomontan** und den in der Nautik davon gemachten Gebrauch zu grösserm Ansehen gekommene **Jakobsstab** (Baculus astronomicus, Gradstock, arbalestrille, cross-staff) [c].

Zu 333: *a.* Das **Triquetrum** bestand aus einem lotrecht und drehbar aufgestellten Stabe ab, um dessen obern Endpunkt a sich ein Stab ac mit Diopteru drehte, welcher in der Distanz ac = ab eine Schlaufe besass, durch die ein ebenfalls um b drehbarer und mit einer Teilung versehener Stab $bd = ab \cdot \sqrt{2}$ ging, so dass, wenn c und d zusammengebracht wurden, ac eine horizontale Lage erhielt. Beim Gebrauche wurde ac mit Hilfe der Diopter auf den Punkt, dessen Höhe bestimmt werden sollte, eingestellt, dann der Stand von c an der Scale abgelesen, und schliesslich der dem Komplemente der Höhe gleiche Winkel φ entweder in einer Sehnentafel aufgeschlagen oder nach der Formel



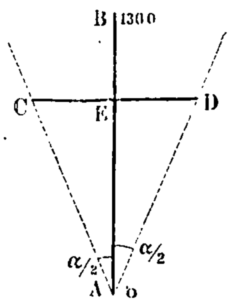
$$\varphi = 2 \cdot \mathrm{Asi}\,\frac{bc}{2 \cdot ab} \quad \text{aus welcher} \quad d\varphi = \frac{d(bc)}{ab \cdot \mathrm{Co}\,\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \mathrm{Si}\,1''} \qquad \mathbf{1}$$

folgt, berechnet. Bei dem Triquetrum, das sich **Coppernicus** selbst aus Holz verfertigt hatte und das später von **Tycho** als Reliquie aufbewahrt und (Astr. mech. C) beschrieben wurde, mass a b nach Ptolemäischer Vorschrift 4 Ellen und b d hatte 1414 mit Tinte aufgetragene Teile, von welchen 1000 auf a b gingen; es ist daher kaum zu weit gegriffen, wenn man bei diesem Instrumente den aus Einstellung, Teilung und Ablesung resultierenden Fehler d (b c) = 1 (circa 1‴ Par.) setzt, wofür nach 1 (für $\varphi = 90^0$) der Maximalfehler $d\varphi = 292'$ folgt, und man darf daher (vgl. 263) die Genauigkeit einer Messung wohl kaum auf 5′ taxieren. Noch ist beizufügen, dass bei dem von **Ptolemäus** selbst beschriebenen Triquetrum b d noch keine Teilung besass, sondern a b sexagesimal abgeteilt war und jeweilen b c an dieser Scale abgemessen wurde, welche erst **Regiomontan** auf b d verlegte. — ***b.*** Das **Quadratum geometricum** war ein wirkliches, später meist auf einer Messingtafel dargestelltes Quadrat, dessen eine Seite mittelst einem in a aufgehängten Lote l vertikal gestellt wurde, während zwei andere Seiten, über welche sich der um b drehbare Diopterlineal bewegte, je in 12 Hauptteile (Hunderter) à 10 Unterabteilungen (Zehner) geteilt waren, somit erlaubten, die einer Visur entsprechende Ablesung α am sog. **Latus rectus** oder β am sog. **Latus versus** zu machen, aus welcher nachher die Zenitdistanz z nach einer der Formeln



$$\operatorname{Tg} z = \frac{\alpha}{1200} = \frac{1200}{\beta} \qquad \operatorname{Si} z = \frac{\alpha}{\sqrt{1200^2 + \alpha^2}} = \frac{1200}{\sqrt{1200^2 + \beta^2}} \qquad \mathbf{2}$$

berechnet werden konnte. Es wurde schon von den Arabern eingeführt und auf ihren Planisphärien (360) angebracht; dagegen mag **Purbach**, der dasselbe in seinem „Libellus de quadrato geometrico (Norimbergæ 1516 in fol.; auch 1544 als Anhang zu den Scripta Regiomontani)“, unter Beigabe einer nach 2″ berechneten Tafel, behandelte, der erste gewesen sein, welcher dieses Quadrat als selbständiges Instrument und in grösserm Masstabe ausführte und dadurch spätere veranlasste, ihm seinen Namen beizulegen. — ***c.*** Der von **Regiomontan** konstruierte und (389) benutzte, von ihm nicht benannte, dagegen später meist als **Baculus astronomicus** bezeichnete Messapparat bestand nach der Beschreibung, welche er in seiner Schrift „De Cometæ Problemata XVI (in den eben erwähnten Scripta Regiomontani abgedruckt)“ von demselben gab, aus einem viereckigen, hölzernen, mit einer Längenscale von 1300 Teilen versehenen Stabe A B von mindestens 5 Ellen Länge, an welchen sich verschiedene Querstäbe C D, sog. „Regulellæ“, anstecken liessen, die je nach ihrer Länge Scalen von 10 bis 210 ebensolchen Teilen trugen; bei A, C und D befanden sich Absehen (claviculi subtiles aut acus). Sollte eine Winkeldistanz gemessen werden, so wurde ein ihrer Grösse angemessener Querstab angesteckt, — das Instrument bei A an das Auge gehalten, — der Querstab so lange verschoben, bis A C und A D die Distanz zwischen sich fassten, — sodann A E abgelesen, — und schliesslich der Winkel α entweder nach



$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\,CD : AE \qquad \mathbf{3}$$

mit Hilfe einer Tangententafel (Tabula fecunda in 63) berechnet, oder auch in einer eigens dafür konstruierten Tafel aufgeschlagen. So z. B. hatte **Regiomontan** am Morgen des 9. September 1471, wo ihm Mars fast in der Mitte zwischen γ Orionis und α Geminorum zu stehen schien, den Querstab 210 für erstern Stern und Mars auf 674, für letztern Stern und Mars aber auf 662 zu stellen, was nach 3, aber allerdings, wegen Unsicherheit von AE um mindestens einen Teil, nur auf etwa 3′ genau, den Distanzen 17° 42′ und 18° 2′ entsprach. — Der Baculus von **Regiomontan** kömmt, abgesehen von dessen grössern Dimensionen, mit dem zur Zeit von den Feldmessern und Seeleuten viel gebrauchten **Jakobsstabe** überein, der entschieden schon lange vor ihm existierte; denn wenn man auch jetzt mit Recht über die in „**Ramus,** Meetkonst in XXVII boeken vervat. Ut het Latijn in't Neerduyts overghezet by Dirck Hendricxz **Houtman.** Oversien, verrijcht en verklaert door Will. **Snellium.** Amsterdam 1622 in 4.“ unter der Aufschrift „Kruys is een winckelhaeck met oneven (ungleichen) beenen“ enthaltene Anmerkung „Tis een seer oudt Instrument, ende wordt ghemenlij de stock Jacobs (Baculus Jacob) ghenoemt, ghelijck of se wel eer van den H. Patriarch Jacob ghevonden waer“, und ähnliche Stellen bei andern ältern Schriftstellern lächelt, ja höchstens (unter der Annahme, dass früher die Teilung in einer Folge von farbigen Streifen bestanden habe) mit **Bartsch** und **Schickard** in dem Namen eine Reminiscenz an Genesis 30:37 findet, so ist nicht zu übersehen, dass **Günther** (vgl. Bibl. math. 1885) in einem Codex der Münchner-Bibliothek, welcher in den Jahren 1445—50 von Theodorich **Ruffo,** Lektor des Minoriten-Klosters Groneberg, zusammengestellt wurde, eine Abhandlung „De baculo geometrico“ entdeckte, welche bereits den Jakobsstab der Geometer beschreibt und auch den Namen „Baculus Jacob“ kennt, — ja dies Instrumentchen sogar (vgl. seinen „Martin Behaim“ in dem 1890 erschienenen Bd. 13 der Bayer. Bibl.) seither schon in einer bereits 1342 aus dem Hebräischen ins Lateinische übersetzten Schrift des 1370 verstorbenen spanischen Juden **Levi** ben Gerson erwähnt fand; denn hiedurch ist offenbar des Bestimmtesten erwiesen, dass der Jakobsstab schon um die Mitte des 14. Jahrhunderts existierte, — ferner ziemlich wahrscheinlich gemacht, dass **Regiomontan** denselben in Wien, wo auch **Ruffo** unter **Johannes** von Gmünden studiert zu haben scheint, kennen lernte, — und überdies die frühere Vermutung widerlegt, es möchte sein Name mit dem Vornamen von Jakob **Köbel** oder Cobilinius (Heidelberg 1470? — Oppenheim 1533; Studiengenosse von Coppernicus in Krakau, dann Stadtschreiber in Oppenheim) zusammenhängen, der von demselben in seiner „Geometrey. Mainz 1535 in 4.“ handelte, sowie die Annahme, dass **Johannes,** der sich allerdings als Erfinder und Verfertiger mathematischer Instrumente auszeichnete, auch der Jakobsstab zu verdanken sei; dagegen habe ich noch anzuführen, dass **Ruffo** für den Querstab die Bezeichnung „Volvella“ benutzte, während er sonst wohl auch „Hammer (marteau, martello = martolojo = martologio, vgl. 63:a)“ genannt worden sein soll. Vgl. auch die früher (321:a) erwähnte Schrift von **Breusing,** welche in mehreren Einzelnheiten von meiner Darstellung etwas abweicht.

334. Die Instrumente mit Kreisteilungen und die ältern Teilmethoden. — Bei der grossen Mehrzahl der zu Winkelmessungen bestimmten Instrumente kommen geteilte Kreise zur Verwendung. Theoretisch kann nun allerdings die Teilung der Umdrehung oder eines Kreises in beliebiger Weise vorgenommen, mit unbegrenzter Genauigkeit ausgeführt und bis ins Unendliche fortgesetzt werden, — praktisch dagegen kann man nicht über eine gewisse Grenze hinauskommen, welche selbstverständlich vom Radius, ausserdem aber wesentlich auch von dem bei Ausführung der Teilung angewandten Verfahren abhängt. Letzteres bestand in der frühern Zeit fast ausschliesslich in der sog. **Handteilungsmethode** mit Hilfe des Zirkels, welche schon die Araber anwandten [a], nachher **Bürgi** merklich verbesserte [b], und sodann namentlich **Graham** unter Beiziehung einer Sehnentafel noch weiter zu vervollkommnen wusste [c], während der von **Hooke** gemachte Vorschlag, dieselbe durch eine **mechanische Teilmethode** zu ersetzen, nicht den von ihm erwarteten praktischen Erfolg hatte [d].

Zu 334: *a.* Wie die Griechen bei der Teilung von Kreisen vorgingen, weiss man nicht; dagegen ist es ziemlich sicher, dass die Araber den Kreis zuerst durch zwei zu einander senkrechte Durchmesser in Quadranten zerlegten und dann diese Grundteilung noch mit einem Zirkel verifizierten. Nachher gingen sie zur Teilung des Quadranten in seine 90 Grade über, und zwar wieder mit dem Zirkel, — also wohl erst mit dem Radius in $1/3$, und dann durch Versuch successive in $1/2$, $1/3$, $1/5$, — immer wieder die betreffende Öffnung des Zirkels durch wiederholtes Auftragen prüfend. In Unterabteilungen gingen sie in der Regel auf 20′, bisweilen auf 10′, selten auf 5′; die Angabe, dass sie die Teilung ausnahmsweise bis auf Sekunden fortgeführt haben, scheint auf Missverständnis der Thatsache zu beruhen, dass sie (191) aus Beobachtungen an hohen Gnomonen die Schiefe der Ekliptik bis auf Sekunden ableiteten. — *b.* Im Abendlande wurde anfänglich die Teilmethode der Araber beibehalten, ja noch **Bürgi** gebrauchte dieselbe; nur übertraf wohl der von ihm dafür „in Stahl ausgeführte“ Zirkel die ähnlichen Hilfsmittel der frühern erheblich, und überdies hatte er den Takt, von der Sechsteilung auszugehen. In der Einleitung zu dem Hessischen Sternverzeichnisse liest man nämlich (vgl. Mitth. 45 von 1878): „Die Einteilung in Grade ergiebt sich von selbst, da der Radius einen Bogen von 60° abschneidet, welcher durch Halbierung einen solchen von 30°, dann von 15° verschafft; letzterer wird in 3, dann in 5 Teile zerlegt und so 1° erhalten. Zur Prüfung nimmt man z. B. einen Bogen von 5° in den Zirkel, setzt etwa den ersten Fuss auf das Ende des ersten Grades, sieht, ob der andere auf das Ende des 6. Grades trifft, etc. Um den Bogen des Quadranten zu erhalten, fügt man dem Bogen von 60° noch seine Hälfte zu, u. s. f.“ — *c.* Die Teilmethode, welcher sich George **Graham** 1725 bei einem von **Halley** für Greenwich bestellten achtfüssigen Mauerquadranten bediente, bestand nämlich nach „**Lemonnier,** Description et usage des principaux instrumens d'astronomie. Paris 1774 in fol.“ wesentlich in folgendem: Er berechnete für den gegebenen Radius die Sehnen von 60°, 42° 40′, 30°, 15°, 10° 20′ und 4° 40′, mit welchen er auf verschiedene Weise die Punkte 30°, 60°, 85° 20′ und 90° festlegen konnte. Namentlich erhielt er so, da $85^0\,20' = 2 \times 42^0\,40' = 60^0 + 15^0 + 10^0\,20' = 90^0 - 4^0\,40'$ ist, den Punkt 85° 20′ mit grosser Sicherheit. Da nun $85^0\,20' = 2^{10} \cdot 5'$, so konnte er diesen Hauptbogen durch fortwährende Bisection von 5 zu 5′ abteilen. Den ihm so unter anderm bekannt gewordenen Bogen von 40′ trug er sodann über 90° hinaus ab, wodurch der noch zu teilende Rest auf $90^0\,40' - 85^0\,20' = 5^0\,20' = 2^6 \times 5'$

gebracht wurde, also auch noch dieser durch Bisection absolvierbar war. Zur Kontrolle teilte er ferner einen konzentrischen Quadranten nach voriger Weise in seine Drittel, und dann jeden von diesen durch Bisection in $2^5 = 32$ Teile, und erhielt so eine zweite Teilung, bei welcher jeder Teilstrich von dem folgenden um 56′ 15″ abstand, und jeder vierte Teilstrich mit einem Teilstriche der Hauptteilung coincidieren musste. — Diese sich praktisch ganz gut bewährende Methode wurde noch später von den **Bird**, **Brander**, etc. vielfach gebraucht. — *d.* Rob. **Hooke** proponierte nämlich 1674 in seinen „Animadversiones“, mit Hilfe einer Schraube ohne Ende in den Rand eines Quadranten Zähne einzuschneiden, — entsprechend letztern auf dem Limbus Teilpunkte anzubringen, — und sodann den Abstand je zweier dieser Punkte aus der Anzahl der auf den ganzen Quadranten kommenden Schraubengänge zu bestimmen. Als dann 1688/9 **Tompion** und **Sharp** diesen Vorschlag bei einem durch **Flamsteed** für Greenwich bestellten Mauerquadranten praktisch verwerten wollten, bewährte er sich allerdings nicht sehr gut; aber immerhin gebrauchten noch später **Ramsden**, **Simms**, etc. mit Nutzen ähnliche Verfahren, um provisorische Teilungen zu erstellen und sich so die Anwendung anderer Methoden (vgl. 335) zu erleichtern.

335. Die neuern Teilmethoden. — Nach der Mitte des 18. Jahrhunderts erwarb sich der Herzog **v. Chaulnes** [a] das Verdienst, ein wesentlich neues Verfahren für die Kreisteilung vorzuschlagen, welches man als das **mikroskopische** bezeichnen könnte [b] und das wesentlich dazu beitrug, den monströsen Quadranten und Sectoren der frühern Zeit durch feingeteilte Vollkreise von mässigen Dimensionen wirksame Konkurrenz machen zu können [c]. Es bürgerte sich dann auch dieses Verfahren verhältnismässig rasch ein und bildet noch gegenwärtig, wenn auch im Laufe der Zeiten einzelne Modifikationen beliebt und manche bei andern Verfahren bewährte Manipulationen damit verquickt wurden, die Hauptgrundlage der für Erstellung und Prüfung von Originalteilungen angewandten Methoden [d].

Zu 335: *a.* Michel-Ferdinand d'Albert d'Ailly, Duc de **Chaulnes** (Paris 1714 — ebenda 1769) war Pair von Frankreich, Generallieutenant und Gouverneur der Picardie, aber auch Ehrenmitglied der Pariser Akademie. — *b.* Das neue Verfahren, welches **Chaulnes** 1765 III 23 der Pariser Akademie auseinander setzte und sodann teils in seinem „Mémoire sur quelques moyens de perfectionner les instrumens d'astronomie (Mém. Par. 1765)“, teils in seiner damit grossenteils, aber doch nicht vollständig übereinstimmenden Schrift „Nouvelle méthode pour diviser les instrumens de mathématique et d'astronomie. Paris 1768 in fol.“ veröffentlichte, bestand wesentlich in folgendem: An dem wallartigen Rande der zu teilenden Scheibe wurden nahe diametral zwei mit Strichen versehene Metallstückchen a und b aufgeschraubt, und über dieselben zwei mit Fadenkreuz versehene Mikroskope A und B gestellt. Dann wurde die Scheibe gedreht, bis b unter A zu stehen kam und nun nachgesehen, ob auch a unter B eingetroffen sei. War letzteres nicht der Fall, so wurden b und B etwas verschoben, die Probe wiederholt, etc., bis alles genau klappte. Hierauf wurde B durch einen Reisser ersetzt, mit welchem nun somit Striche eingegraben werden konnten, die dem jeweilen unter A stehenden Punkte oder Striche diametral gegenüberstanden. Waren einmal zwei, um 180° von einander abstehende Striche vorhanden, so wurden zwischen ihnen, nahe in Abständen von 60°, zwei neue Marken c und d angebracht und das Mikroskop B über c aufgestellt, während A und der Reisser stehen blieben, — dann B, c, d so lange verschoben, bis beim Drehen successive a und c, c und d, d und b je gleichzeitig unter den beiden Fadenkreuzen standen, also die Dreiteilung des Halbkreises vollzogen war, — worauf die Gegenstriche und sodann sie selbst mit dem Reisser gezogen wurden. Analog operierend wurde so fortgefahren, bis der Kreis von 10 zu 10° geteilt war, — nunmehr B auf circa 9° von A eingestellt, — wieder so lange korrigiert, bis AB in dem Bogen von 0 bis 90° genau 10 mal enthalten war, — somit die Gradstriche 9, 18, 27, ... eingegraben werden konnten. Zum Schlusse wurde B auf die Distanz 10° von A gebracht, womit sich dann offenbar alle noch fehlenden Gradstriche erhalten liessen. Um die allfällig noch wünschbare Unterabteilung der Grade zu erhalten, wurde auf einem Hilfsstabe eine entsprechende geradlinige Teilung ausgeführt, und nun dieser in solche Entfernung vom Teilkreise gebracht, dass ein um das Centrum des letztern drehbares Fernrohr bei Drehung um 1° von dem einen Ende des Stabes zum andern gelangte; dann stellte man das Fernrohr auf jeden Teilpunkt des Stabes ein und zog die betreffenden Striche. — **Chaulnes** sagt in seinem „Mémoire", er habe nach dieser Methode einen Kreis von 11 Zoll Radius so genau geteilt, dass kein Strich einen Fehler von 2 Sekunden haben könne, — eine Genauigkeit, mit welcher früher kaum Kreise von 8 bis 9 Fuss Durchmesser geteilt worden seien, auch abgesehen davon, dass bei so grossen Kreisen die Schwierigkeit in Konstruktion und Manipulation die scheinbare Zunahme der Genauigkeit grossenteils kompensiere. — *c.* Die Vorzüge von Vollkreisen, wie solche die Methode von **Chaulnes** im Gegensatze zu derjenigen von **Graham** für Originalteilungen förmlich fordert, wurden mutmasslich schon durch P. **Apian** (vgl. dessen durch Galgemair publizierte nachgelassene Schriften) und jedenfalls spätestens durch **Römer** erkannt, indem letzterer (Misc. Berol. III 277) sagte: „Ich ziehe einen Kreis von 4 Fussen einem Quadranten von 10 Fussen vor". Wie sehr ferner **Ramsden** und seine Schule dieselben würdigten, geht sowohl aus einem Briefe von **Piazzi** an Lalande (Journ. d. Sav. 1788), als aus der Schrift „Mor. v. **Brühl**, On the investigation of astronomical circles. London 1794 in 4. (deutsch in Hindenburgs Archiv von 1795)" sattsam hervor, ja letzterer hatte (Berl. Jahrb. 1792) schon 1789 aus London geschrieben: „Ein junger Künstler und Schüler des berühmten Ramsden, William **Cary**, verfertiget Circul von 1—2 Schuhen, die in Ansehung der Festigkeit, Genauigkeit der Eintheilung und leichten Berichtigung beträchtliche Vortheile über Quadranten von gleichem und auch grösserm Masse besitzen, und bei weitem nicht so hoch zu stehen kommen". — Es soll dadurch übrigens keineswegs bestritten werden, dass zu bestimmten Zwecken oder unter besondern Verhältnissen auch der Bau von Sectoren in Anwendung kommen darf, zumal bei solchen nötigenfalls (421) die eigentliche Teilung ganz wegfallen kann. — *d.* Für weitern Detail verweise ich auf: „John **Bird**, The method of dividing astronomical instruments. London 1767 in 4. (vgl. Kästner, Astr. Abh. 2), und: The method of constructing Mural-Quadrant. London 1768 in 4. (mit ersterm zusammen auch London 1785 in 4.), — **Ramsden**, Description of an Engine for dividing mathematical instruments. London 1777 in 4. (sehr selten, da die meisten Exemplare bei einem „accident" verloren gingen; franz. durch Lalande, Paris 1790 in 4.; deutsch in Geisler), — John **Smeaton** (Austhorpe 1724 — ebenda 1792; erst Jurist, dann Mech. London), Observations on the graduation of astronomical instruments (Ph. Tr. 1786), — Joh. Leonhard **Späth** (Augsburg 1759 — München 1842; Prof. math et phys. Altdorf und München), Abhandlung zur Berechnung der Genauigkeit, mit welcher ein Mauerquadrant nach Bird und Brander getheilt werden kann. Leipzig 1788 in 4., — Joh. Gottlieb **Geisler** (Zittau 1753 — ebenda 1820; Litterat in Zittau), Über die Bemühungen der Gelehrten und Künstler, mathematische und astronomische Instrumente einzutheilen. Dresden 1792 in 8., — Ed. **Troughton**, An account of a method of dividing astronomical and other instruments by ocular inspection (Ph. Tr. 1809), — H. **Kater**, Improved method of dividing circles (Ph. Tr. 1814), — **Pictet**, Sur la manière à diviser et le théodolithe construit par M. Schenk à Berne (Bibl. brit. 1815), — Karl Philipp Heinrich **Pistor** (Berlin 1778 — ebenda 1847; Mech. Berlin), Nachricht über eine in Berlin erbaute Theilmaschine für Kreise. Berlin 1819 in 4., — G. v. **Reichenbach**, Berichtigung der von Herrn Mechanikus Liebherr in München abgegebenen Erklärung über die Erfindung meiner Kreistheilungsmethode (Gilb. Annalen 68 von 1821; Reichenbach giebt eine Beschreibung seiner Methode und hält gegenüber Liebherr seine Priorität fest, worin ihm auch Horner Recht gab, indem er 1821 VIII 11 an Gautier schrieb: „Il suffirait de voir les deux artistes l'un à côté de l'autre, pour distinguer le maître et le garçon".), — W. **Simms**, On a self acting circular dividing Engine (Mem. A. S. 15 von 1846), — Rapport sur les machines à diviser de **Perreaux** et de **Gambey** (Compt. rend. 1849), — Armand-Pierre **Séguier** (Montpellier 1803 geb.; Akad. Paris), Méthode suivie par feu Gambey pour diviser le grand cercle mural de l'observatoire de Paris (Compt. rend. 1869), — **Löwenherz**, Die Feintheilung von Kreisen (Z. f. Instr. 1882/3), — etc."

336. Die Teilmaschinen. — Schon **Chaulnes** dachte daran, dass, wenn man einmal eine gute Originalteilung erstellt habe, es möglich sein müsse, dieselbe mit Hilfe einer geeigneten Vorrichtung auf andere Kreise überzutragen, d. h. eine sog. **Teilmaschine** zu konstruieren [a], — und derselbe Gedanke wurde unabhängig von ihm auch durch andere verfolgt [b], so namentlich durch **Ramsden**, welchem es schon in den Siebzigerjahren des vorigen Jahrhunderts gelang, einen ganz vorzüglichen Hilfsapparat dieser Art zu erstellen [c]. Nach und nach folgten dann so ziemlich alle Präcisions-Mechaniker seinem Beispiele [d], ja es bildete bald die Güte der vorhandenen Teilmaschine ein Hauptkriterium für die Bedeutung einer mechanischen Werkstätte [e].

Zu 336: *a.* In seinem Mémoire von 1765 schlug nämlich **Chaulnes** vor, „une plate-forme" von 4' Radius zu konstruieren, welche man nach seiner Methode bis auf Halbsekunden (circa 3 μ) genau teilen könne, und sagte sodann: „Cette plateforme une fois divisée, l'on n'aurait plus d'autre opération à faire pour diviser tel instrument que l'on voudrait, que de le centrer sur la plateforme et de placer l'outil, qui porte le tracelet, sur le premier point: après quoi, en faisant tourner la plateforme sous le microscope qui en observerait les divisions, sans table, sans calcul et sans aucune espèce d'adresse, l'on serait sûr de tracer toutes les divisions dans les points où elles devraient être et dans la plus parfaite exactitude". Dass **Chaulnes** somit einen vollständigen Begriff von der Möglichkeit und dem Nutzen einer Teilmaschine hatte, steht ausser Frage; ob er seine Idee auch praktisch verwirklichte, bleibt dagegen ungewiss. — *b.* Schon um 1740 konstruierte der Uhrmacher Henry **Hindley** zu York eine, allerdings zunächst zum Schneiden von Uhrrädern bestimmte Teilmaschine, von der man aber erst 1786 durch die erwähnte Abhandlung von **Smeaton** Kenntnis erhielt. — *c.* Ganz unabhängig von **Chaulnes** beschäftigte sich von 1760 hinweg auch **Ramsden** mit der Aufgabe, eine Teilmaschine zu erstellen, und hatte schon etwa nach drei Jahren einen ganz brauchbaren Apparat fertig, welcher später für 1000 Louisd'or an den Präsidenten **Saron** und nach dessen Ermordung für 25 Louisd'or an das „Dépôt des machines de l'école des mines" überging. **Ramsden** selbst betrachtete diesen ersten Apparat nur als eine Art Modell und baute sich nun erst in weitern zehn Jahren die berühmte Teilmaschine, für welche ihm der Board of Longitude, unter Bedingung, dass er die bereits erwähnte Beschreibung publiziere, einen Preis von 600 Guineen erteilte. Mit dieser neuen Maschine soll er so leicht gearbeitet haben, dass zur Teilung eines Sextanten die Zeit von 20^{m} ausreichte, und dass er sich anheischig machen konnte, jeden Sextanten für 3 Shilling zu teilen. — *d.* Auf unserm Kontinente baute sich mutmasslich zuerst und jedenfalls mit grossem Geschicke G. **v. Reichenbach** eine Teilmaschine; sodann folgten successive **Repsold** in Hamburg, Ulrich **Schenk** (Signau 1786 — Worblaufen bei Bern 1845; ein Schüler von Reichenbach) in Bern, **Gambey** in Paris, Karl Theodor Nathan **Mendelssohn** (Berlin 1782 — ebenda 1852; Sohn von Moses Mendelssohn und Lehrer von Pistor) in Berlin, etc. — *e.* Für weitern Detail vgl. die früher gegebene und namentlich in 335 : d ergänzte Litteratur.

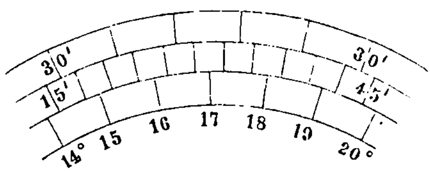
337. Das Teilungsmaterial. — Die Genauigkeit der Teilung hängt nicht nur von der Lage, sondern auch von der Beschaffenheit der Teilstriche, also nicht nur von der Teilmethode, sondern auch von dem Material ab, auf welches geteilt wird. Als so im Laufe der Zeiten die Instrumente erst aus Holz, dann aus Eisen und später fast ausschliesslich aus Messing gebaut wurden, war es jeweilen ein grosser Fortschritt, wenn die zu teilende Stelle eine Einlage von Elfenbein [a], Kupfer [b] oder Silber [c] erhielt, und so die Möglichkeit gegeben war, immer feinere Teilungen auszuführen [d].

Zu 337: *a.* Während **Coppernicus** bei seinem Triquetrum (333) die Teilstriche mit Tinte direkt auf dem Holze gezogen hatte, waren sie bei dem früher (57) erwähnten hölzernen Kreise von 1570 bereits auf einer Elfenbeineinlage angebracht. — *b.* So benutzte noch 1676 **Halley** auf St. Helena einen eisernen Sextanten von $5^1/_2{}'$ Radius, bei welchem sich die Teilung auf einem Messingrande befand, während **Richer** und **Cassini** Instrumente mit kupfernen Limben besassen. — *c.* Als es von der Zeit Tychos und des Landgrafen hinweg immer mehr üblich wurde, die Instrumente aus Messing zu bauen, wurde die Teilung direkt auf diesem Metalle ausgeführt, und die noch vorhandenen Instrumente der **Ramsden, Cary,** etc. zeigen, dass so ganz hübsche Teilungen erhältlich waren; aber immerhin war es ein nicht unbedeutender Fortschritt, als **Reichenbach** zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts (vgl. Mon. Corr. 9

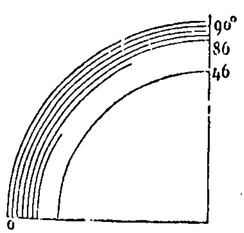
von 1804, p. 379) anfing, in den Rand seiner Kreise Silberstreifen einzulegen und auf diese zu teilen, — ein Verfahren, das übrigens auch **Fortin** nahe gleichzeitig angewandt haben soll. — *d.* Anhangsweise mag noch angeführt werden, dass **Brander** einzelne Instrumente aus einem dem Solenhofen'schen ähnlichen feinkörnigen Steine ausführte und auf diesem auch sehr schön zu teilen wusste (vgl. Verz. 259). — Ferner ist hervorzuheben, dass, während die englischen Künstler ihre Kreise aus einzelnen Stücken zusammensetzten und mit hohlen Speichen versahen, **Reichenbach** die Übung einführte, Kreis samt Speichen massiv in Einem Stücke zu giessen, um so eine homogene Masse zu erhalten, bei welcher die Verziehung durch Temperatureinflüsse auf ein Minimum reduziert war.

338. Die ältern Ablesemittel. — Genauere Teilungen auf besserem Material tragen nur dann reife Früchte, wenn die nötigen Hilfsmittel vorhanden sind, um die Stellung des Index an denselben mit entsprechender Sicherheit abzulesen. Diese Hilfsmittel wurden in älterer Zeit dadurch zu erhalten gesucht, dass man dem Teilkreise eine Anzahl konzentrischer Hilfskreise beigab und diese entweder in etwas abgeänderter Weise ebenfalls abteilte, um die Anzahl der Teilstriche ohne Überladung der Hauptteilung wesentlich vergrössern zu können [a], — oder wohl auch benutzte, um das schon längst bei geradlinigen Teilungen, namentlich bei den sog. verjüngten oder Transversal-Masstäben, mit gutem Erfolge angewandte Princip auch auf Kreise überzutragen [b].

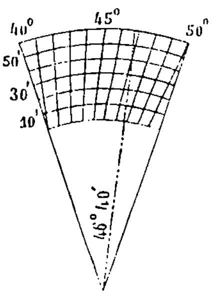
Zu 338: *a.* Nachdem man zu der Einsicht gekommen war, dass sich die Genauigkeit der direkten Ablesung weder durch Vergrösserung des Radius noch durch Vermehrung der Teilstriche hinlänglich steigern lasse, wandte man zunächst und in der That nicht ohne einen gewissen Erfolg das Verfahren an, einem in Grade geteilten Kreise noch zwei Hilfskreise beizugeben, von



welchen der äussere ebenfalls auf 1°, der innere auf $^1/_2{}^0$ geteilt war, — dabei diese neuen Teilstriche so versetzend, dass die erstern den Mitten, die zweiten den ersten und letzten Vierteln der Grade des Hauptkreises entsprachen, also die Ablesung auf 15' ermöglicht wurde. Schon diesem Verfahren lag implicite der fruchtbare Gedanke zu Grunde, man könne weitergehender Teilung **verschiedene Teilung desselben Bogens** substituieren und so direkt nicht mehr darstellbare Grössen als **Differenzen** sichtbar machen, und noch mehr war dies bei dem von **Nonius** in seiner Schrift „De crepusculis. Olyssipone 1542 in 4." gemachten Vorschlage der Fall, einem in 90 Grade geteilten Quadranten noch 44 konzentrische Hilfsquadranten beizugeben und diese der Reihe nach in 89, 88, 87, … 46 Teile zu zerlegen. Wenn nun eine gewisse Richtung des beweglichen Radius mit keinem Striche der Hauptteilung zusammentreffe, so werde sie doch



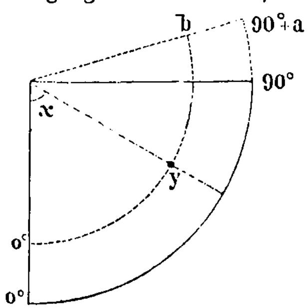
nahe mit einem der Hilfsstriche übereinstimmen, dessen Wert ja leicht berechnet werden könne. Praktischen Wert konnte jedoch derselbe kaum beanspruchen, da es gar nicht so leicht war, den nächsten Teilstrich auszumitteln, ja dieser (vgl. Delambre III 402 f.) in manchen Fällen nicht einmal eine grosse Annäherung darbot, — ferner dabei volle 45 verschiedene Teilungen auszuführen waren, von welchen manche (47, 53, 59, ...) sogar Primzahlen entsprachen. Es ist daher leicht zu begreifen, dass **Tycho** (vgl. Astr. inst. folio A) an dem ersten Versuche, den Vorschlag von Nonius wirklich auszuführen, mehr als genug hatte. — *b.* **Tycho** erzählt (l. c. folio G), dass er 1564 nach der Vorschrift von **Gemma** einen hölzernen Radius (Jakobsstab in 333) habe anfertigen lassen, und dass sodann sein Freund **Scultetus** auf demselben nach der Methode von Johannes **Hommel** (Memmingen 1518 — Leipzig 1562; Prof. math. Leipzig) sog. „puncta transversalia" angebracht habe. **Scultetus** selbst aber teilt auf folio B_2 seiner Gnomonik von 1572 (vgl. 195) nicht nur Näheres über die Methode, durch Transversalen „den Circulum in Minuten zutheilen" mit, sondern fügt ausdrücklich bei, dass dieselbe schon „vor zeiten in brauch gehabt die zwene fürtrefflichen Mathematici G. **Purbachius** und J. **Regiomontanus**", und hiemit klappt, dass sie auch durch Christoph **Pühler**, der um 1520 mit Peter Apian in Wien studierte, 1563 auf Blatt 97 seiner Geometrie ganz klar auseinandergesetzt wurde: Man hat nämlich nach letzterm zwei konzentrische Quadranten je in 90° zu teilen, sodann jeden Teilstrich des Innern mit dem folgenden des Äussern zu verbinden, und endlich, je nachdem man 20, 15, 12 oder (wie in Fig.) 10 Minuten ablesen will, 2, 3, 4 oder 5 Zwischenquadranten zu ziehen. — Statt dessen kann man auch, entsprechend dem bemerkenswerten Vorschlage von **Bürgi** (vgl. Mitth. 33 von 1873), nachdem man wie zuvor einen Teilstrich der innern Teilung mit dem folgenden der äussern verbunden hat, von diesem letztern auf den nunmehr folgenden der innern



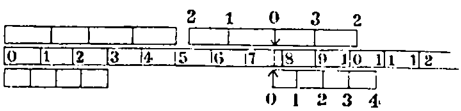
übergeben, u. s. f., und sich die Zwischenkreise dadurch ersparen, dass man auf dem beweglichen Radius eine entsprechende Teilung anbringt, — oder, wie es **Tycho** wenigstens auf einzelnen seiner Instrumente ausführen liess, einfach da Punkte aufsetzt, wo die Bürgi'schen Zickzack-Transversalen von den Hilfskreisen getroffen würden. — Da Thomas **Digges** (Bristol 1530? — London 1595; wie sein etwa 1573 verstorbener Vater Leonard, Militär) in seiner Schrift „Alæ seu scalæ mathematicæ. Londini 1573 in 4." die Einführung der Transversalen dem kurz zuvor verstorbenen englischen Mechaniker Richard **Chansler** zuschreibt, so ist es möglich, dass letzterer ebenfalls unabhängiger Erfinder war, jedenfalls aber nicht **Digges** selbst, wie man nach „N. **Lockyer,** The movements of the earth (Nature 1883)" glauben könnte. Die Hauptsache bleibt natürlich, dass durch die Zuhilfenahme der Transversalen die Genauigkeit der Ablesungen wesentlich gehoben wurde und derselben ein grosser Teil der Fortschritte gutzuschreiben ist, welche die messende Astronomie im 17. Jahrhundert machte, — benutzte ja noch **Richer** bei seinen berühmten Beobachtungen in Cayenne (441) einen 6-füssigen Oktanten, dessen direkt in Minuten geteilter kupferner Limbus mit Hilfe von Transversalen 10" gab. — Zum Schlusse mag noch erwähnt werden, dass strenge genommen, wie z. B. der spanische Instrumentenmacher Joh. **Ferrerius** hervorhob, und man übrigens auch in Kassel wusste, statt geradlinigen Transversalen, durch das Centrum gehende Transversalkreisbogen angewandt werden sollten, — dass aber praktisch dadurch nichts Besseres erreicht würde.

339. Der Vernier. — Im Laufe des 17. Jahrhunderts machte der von Pierre **Vernier** eingeführte „Secteur mobile", d. h. ein mit dem Index verbundener, also mit ihm an dem geteilten Kreise herumgeführter Hilfsbogen, auf welchem $n \pm 1$ Teile der Hauptteilung in n Teile abgeteilt, und somit Differenzen sichtbar gemacht werden, welche $^1/_n$ eines Teiles der Hauptteilung und seinen Vielfachen entsprechen, den Transversalen immer grössere Konkurrenz, um letztere schliesslich ganz aus dem Felde zu schlagen [a]. Diese früher fälschlich „Nonius", jetzt fast allgemein **Vernier** genannte, auch auf geradlinige Scalen übergetragene Hilfsteilung [b] bildet noch immer, wenn auch bei grössern Kreisen meist in Verbindung mit dem sofort zu beschreibenden Ablesemikroskope, unser Hauptmittel um sichere und genaue Ablesungen zu erhalten [c].

Zu 339: *a.* Pierre **Vernier** machte nämlich in seiner Schrift „La construction, l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de mathématiques. Brusselles 1631 in 8.", für deren Detail ich auf Mitth. 33 von 1873 verweise, den Vorschlag, einem geteilten Quadranten einen beweglichen Hilfssector beizugeben, auf welchem ein $n + 1$ Teilen der Hauptteilung entsprechender Bogen nur in n Teile zerlegt sei; speciell wählte er für einen in Halbgrade geteilten Quadranten von ein Fuss Radius einen Hilfsbogen, dessen Länge 31 Halbgrade betrug, und teilte denselben nur in 30 Teile, so dass ein Hilfsteil um $^1/_{30}$ länger als ein Hauptteil war, also vergleichungsweise eine einzelne Minute gegeben wurde, und man bei irgend einer Stellung des Index nur zwei zusammenfallende Striche der beiden Teilungen aufzusuchen brauchte, um zu wissen, wie viele Minuten man dem abgelesenen Halbgrade beizufügen habe. — Schon Jean-Bapt. **Morin** zog in seiner „Longitudinum scientia. Parisiis 1634 in 4." den neuen Vorschlag beifällig in Betracht, und mehr und mehr befreundeten sich auch andere damit, so dass die Transversalmethode immer seltener zur Verwendung kam und im 18. Jahrhundert nur noch ausnahmsweise (vgl. Verz. 40 und 304) gebraucht wurde. — *b.* Wenn auch der Grundgedanke von **Vernier** demjenigen von **Nonius** verwandt war, so ist es doch offenbar ganz unzulässig, in dem unpraktischen Vorschlage dieses letztern die Berechtigung finden zu wollen, dem so nützlichen Hilfsbogen des erstern den Namen „Nonius" beilegen zu wollen, während ihm der Name „Vernier" ganz gut steht, jedenfalls noch eher mit „Clavius" vertauscht werden könnte. **Clavius** teilte nämlich in seiner „Geometria practica. Roma 1604 in 4." (auch Opera II) mit, dass Jak. **Curtius**, mit welchem er zur Zeit, wo dieser als kaiserlicher Legat beim Papste in Rom stand, viel verkehrte, die theoretisch ganz hübsche Idee gehabt habe, den Vorschlag von Nonius dadurch zu verbessern, dass man jeden Hilfsquadranten um a verlängere und



sodann $90^0 + a$ in b Teile zerlege, so dass der Teilstrich y der Hilfsteilung dem Winkel $x = {}^1/_b \cdot (90^0 + a) \cdot y$ entspreche, — wobei er successive $a = 1^0, 2^0, 3^0$, etc., dagegen beständig $b = 90$ annahm. Nachdem **Clavius** sodann noch angeführt hatte, dass der bequemern Teilung wegen $b = 2^7 = 128$ vorzuziehen sein dürfte, teilte er die bemerkenswerte Idee mit, dass man auch statt dessen bei geradlinigen oder Kreisteilungen $^1/_n$ eines Teiles und dessen Vielfache darstellen und abschätzen könne, wenn man $(n + 1)$ solcher Teile in n zerfälle und die so erhaltene Hilfsteilung an die Hauptteilung anlege. Er wurde so zum entschiedenen Vorläufer von **Vernier**; aber doch immerhin nur zu einem Vorläufer, da bei **Clavius** die gerade praktisch so wertvolle Verbindung des Hilfsbogens mit dem beweglichen Radius noch fehlt, sowie das Ersetzen des Index durch den Nullpunkt der Hilfsteilung. — Anhangsweise ist noch anzuführen, dass auch in „Benedict **Hedræus** (Westmanland 1608? — Upsala 1659; Prof. math. Upsala), Nova et accurata astrolabii structura. Lugd. Bat. 1643 in 8." die Erfindung von **Vernier** besprochen wurde, aber ohne ihn zu nennen, und dass somit einzelne, wie z. B. **Hevel**, in Hedräus den Erfinder vermuteten. — *c.* Früher wurden meist in Übereinstimmung mit **Vernier** $(n + 1)$ Teile in n abgeteilt, — in neuerer Zeit in der Regel $(n - 1)$ in n, da in letzterm Falle der Vernier mit der Teilung läuft, wie aus der beistehenden Figur (mit Teilung $^5/_4$ und $^3/_4$; gemeinsame Ablesung $7^3/_4$), welche zugleich die üblichen Bezifferungen veranschaulicht, sattsam erhellt.



— Bei in Viertelgrade geteilten Kreisen wählt man gewöhnlich für den Vernier $^{14}/_{15}$, bei in Sechstelsgrade geteilten $^{59}/_{60}$, etc., — hütet sich überhaupt vor zu grossen Werten von n, da bei solchen das sichere Aufsuchen der zusammenfallenden Striche erschwert und eine geringere Genauigkeit als durch Konsultieren der vorgehenden und nachfolgenden Striche erhalten wird. — Für geradlinige Teilungen ist vorzugsweise $^9/_{10}$ gebräuchlich; wie aber in die deutsche Ausgabe von Thomson und Taits „Natural philosophy" der Passus Aufnahme finden konnte: „Wenn Längen bis zu Zehnteln eines Teiles der Scale bestimmt werden sollen, so müssen 10 Teile des Vernier gleich 9 Teilen der Scale sein, **daher der Name Nonius**", ist mir unbegreiflich. — **Brander** suchte die bei aufliegenden oder sog. „fliegenden" Verniers die Ablesung unsicher machende Parallaxe dadurch zu vermeiden, dass er die Verniers auf Glas einritzte und somit auf die Teilung selbst legen konnte. — Die schon von **Cary** und **Reichenbach** eingeführten „Blenden" ermöglichen eine gleichförmige Beleuchtung.

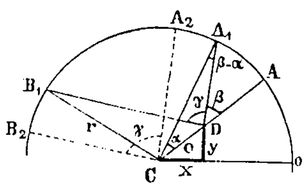
340. Das Ablesemikroskop. — Nachdem anfänglich die Alidade eine ihr gegebene Stellung nur durch Reibung beibehielt, kam nach und nach der Gebrauch in Übung, sie durch eine Klemme in derselben festzuhalten, und bald wurde sodann mit dieser noch eine Schraube von engem Gange, eine sog. **Mikrometerschraube**, verbunden, um nach vollzogener, meist eine kleine Verschiebung bewirkender Klemmung, die eigentliche Feinstellung zu ermöglichen. Sobald diese Schraube da war, lag aber der Gedanke nahe, dieselbe mit einem geteilten Kopfe, einer „Trommel", zu versehen, um messbare Bewegungen ausführen zu können, und hiedurch war ein neues

Ablesemittel geschaffen [a], welches später bei grossen und feingeteilten Kreisen noch in der Weise zweckmässig abgeändert wurde, dass man über denselben zusammengesetzte Mikroskope aufstellt, in deren Bildebene sich ein Rähmchen befindet, welches einen zum Kreise radialen Doppelfaden besitzt und mittelst einer Schraube messbar verschoben werden kann [b]. Dass diese, anfänglich von einzelnen mit Misstrauen aufgenommene Neuerung [c], einen wesentlichen Fortschritt bezeichnet, wird jetzt kaum mehr in Abrede gestellt, — jedoch ist es allerdings notwendig, auf alle Nebenumstände zu achten, wenn nicht die grössere Genauigkeit der Ablesung illusorisch werden soll [d].

Zu 340: *a.* Um bei irgend einer Stellung des Index seinen Abstand x von dem vorhergehenden Teilstriche zu erhalten, hatte man nur nötig, sich die ihr entsprechende Trommelstellung c zu merken, — dann durch Drehen der Schraube einmal zum vorhergehenden und einmal zum nachfolgenden Teilstriche zu gehen, — beide mal die Stellungen a und b an der Trommel abzulesen, — und endlich, wenn d den bekannten Abstand der beiden Teilstriche bezeichnet, x aus der Proportion $x : d = (c - a) : (b - a)$ zu berechnen, was besonders leicht geht, wenn d und $(b - a)$ schon bei Konstruktion des Instrumentes in ein einfaches Verhältnis gebracht werden. — In der That wurde dieses Mittel schon durch **Hevel** neben Transversalen und Vernier mit Erfolg benutzt, — dann wieder durch **Louville** in seiner „Application du micromètre à la lunette du quart de cercle astronomique (Mém. Par. 1714)“, sowie durch G. **Graham** und T. **Mayer** beliebt, — und noch gegen Ende des vorigen Jahrhunderts durch **Cary** angewandt. — *b.* Beim Ablesemikroskope ist die Manipulation wesentlich dieselbe, wie bei der einfachen Mikrometerschraube, nur dass sie sich genauer ausführen lässt und dass namentlich das gewünschte einfache Verhältnis leichter erhältlich ist, da sich nun der Faden nicht über die Teilung selbst, sondern nur über ein Bild derselben bewegt, und dieses Bild durch Verschieben des Mikroskopes vergrössert oder verkleinert werden kann. — Nachdem schon **Römer** (vgl. 377 : a) die Nützlichkeit angedeutet, wurden solche Ablesungsmikroskope namentlich durch den Duc de **Chaulnes** und durch **Ramsden** ausgeführt. So z. B. befanden sich bei dem $2\frac{1}{2}$-füssigen Azimutalkreise, welchen letzterer 1797 für die von **Tralles** in der Schweiz (vgl. Gesch. der Verm.) beabsichtigten trigonometrischen Messungen lieferte, zwei Ablesemikroskope, bei welchen auf ein Interval ($\frac{1}{6}^0$ auf Messing) 10 Schraubengänge gingen, während die Schraubentrommel 20 Teile hatte, so dass 3″ abgelesen werden konnten. — Bei 20- und mehrzölligen Kreisen, bei welchen die Feinteilung auf 2′ getrieben ist, wählt man in der Regel ein Mikroskop, dessen Schraube 2 Umdrehungen nötig hat, um das Bild der 2′ zu durchlaufen, und giebt der Trommel 60 Teile, so dass man an der letztern einzelne Sekunden ablesen, ja noch deren Zehntel abschätzen kann. Am bequemsten ist es, dabei die Trommel so zu stellen, dass an ihr Null abgelesen wird, wenn der bewegliche Faden auf dem Index im Gesichtsfelde des Mikroskopes steht, während ihre Bezifferung derjenigen des Kreises entgegenläuft. — Andrew **Graham** (Fermanagh in Irland 1815 geb.; Obs. Markree-Castle und Cambridge E.) hat an einem Meridiankreise von Troughton und Simms von 914^{mm} Durchmesser mit einem Mikroskope von 60-facher Vergrösserung 100 Einstellungen auf denselben Teilstrich gemacht und daraus den wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung gleich $0'',1 = \frac{1}{4}\,\mu$ gefunden. — *c.* Während **Bessel** schon 1815 an Gauss schrieb: „Es kann nichts vollkommneres geben als die mikroskopischen Ablesungen", hatte er noch 1817 Olbers mitzuteilen: „Ich habe, was mir leid thut, nicht durchsetzen können, dass **Reichenbach** (für den bei ihm bestellten 3-füssigen Meridiankreis) Mikroskope statt den Nonien nimmt". — *d.* So muss z. B. der sog. „Error of runs" berücksichtigt, d. h. für jede Beobachtungsreihe der momentane Wert eines Trommelteiles bestimmt und in Rechnung gebracht werden. Vgl. dafür z. B. „Ladislaus **Weinek** (Ofen 1848 geb.; Dir. Obs. Prag), Der Mikroskop-Run (A. N. 2605 von 1884)".

341. Die Excentricität und ihre Elimination. — Die Differenz der Ablesungen an einem geteilten Kreise giebt offenbar nur dann ein richtiges Mass für den Stellungsunterschied des Fernrohrs, wenn der Drehpunkt des letztern keine merkliche Excentricität zum Kreise hat, und es gehört zu den vielen Verdiensten von Tob. **Mayer**, dass er nicht nur auf diesen **Excentricitätsfehler** aufmerksam machte, sondern auch zeigte, dass derselbe im Mittel aus den Ablesungen an zwei einander diametral gegenüberliegenden Stellen nahezu verschwindet[a].

Zu 341: *a.* Bezeichnet A denjenigen Stand des Index, bei welchem sein Drehpunkt D und der Mittelpunkt C des geteilten Kreises mit ihm in einer Geraden liegen, — A_1 den Stand, welchen er an der Teilung nach einer Drehung um β einnimmt, — A_2 denjenigen, welchen er einnehmen sollte, um diese Drehung wirklich zu verzeigen, — und e die (gegenwärtig bei sorgfältig konstruierten Instrumenten nie $\frac{1}{100}'''$ P. $= 20\,\mu$ betragende) Excentricität, so hat man



$$\mathrm{Si}\,(\beta - \alpha) : \mathrm{Si}\,\beta = \mathrm{e} : \mathrm{r} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{A_2 - A} = \beta - \alpha = \frac{\mathrm{e \cdot Si}\,\beta}{\mathrm{r \cdot Si}\,1''}$$

und somit

$$\mathrm{A_2 = A_1} + \frac{\mathrm{e \cdot Si\,(A_2 - A)}}{\mathrm{r \cdot Si}\,1''} = \mathrm{A_1 + x' \cdot Si\,A_2 - y'\,Co\,A_2} \qquad \mathbf{1}$$

wo

$$\mathrm{x'} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r \cdot Si}\,1''} \qquad \mathrm{y'} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{r \cdot Si}\,1''}$$

Entsprechend erhält man für einen zweiten Index

$$\mathrm{B_2 = B_1} + \frac{\mathrm{e \cdot Si\,(B_2 - A)}}{\mathrm{r \cdot Si}\,1''} = \mathrm{B_1 + x' \cdot Si\,B_2 - y' \cdot Co\,B_2} \qquad \mathbf{2}$$

so dass, wenn die Distanz der beiden Indices $\gamma = \mathrm{B_2 - A_2} = 180^\circ + \varepsilon$ ist, wo ε eine kleine Grösse bezeichnet,

$$\frac{\mathrm{A_2 + B_2}}{2} = \frac{\mathrm{A_1 + B_1}}{2} + \mathrm{e} \cdot \frac{\mathrm{Si\,(A_2 - A) + Si\,(B_2 - A)}}{2\,\mathrm{r \cdot Si}\,1''} = \frac{\mathrm{A_1 + B_1}}{2} - \frac{\mathrm{e} \cdot \varepsilon}{2\,\mathrm{r}} \cdot \mathrm{Co\,(A_2 - A)} \qquad \mathbf{3}$$

wird. Während also nach 1 der von der Excentricität herrührende Maximalfehler einer einzelnen Ablesung

$$\mathrm{M} = \pm \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r \cdot Si}\,1''} \qquad \text{z. B. für } \mathrm{e} = 10 \cdot \mu \text{ und } \mathrm{r} = 0^{\mathrm{m}},1 \qquad \mathrm{M} = \pm\, 20'',16$$

beträgt, so ist nach 3 derjenige des Mittels zweier an nahe diametralen Stellen gemachten Ablesungen nur

$$m = \pm \frac{e \cdot \varepsilon}{2\,r} \qquad \text{z. B. für obige Werte und } \varepsilon = 30'' \qquad m = \pm\, 0'',0015$$

und kann daher vernachlässigt werden. Es wird somit die Excentricität durch eine solche Kombination, und überhaupt bei Anwendung einer Anzahl über den Kreis gleichförmig verteilter Ablesestellen, sehr nahe eliminiert.

342. Die Bestimmung der Excentricität. — Statt den Einfluss der Excentricität zu eliminieren, kann man auch die Grösse und Richtung der letztern zu bestimmen suchen und sodann erstern berechnen [a]. Da nun das hiefür dienliche Verfahren zugleich wertvolle Anhaltspunkte für die Beurteilung des untersuchten Kreises giebt [b], so ist dasselbe auf jedes Winkelinstrument wenigstens Ein Mal in Anwendung zu bringen [c].

Zu 342: *a.* Versteht man nämlich unter D die durch Einstellung und Ablesung beliebig oft erhältliche Grösse $B_1 - A_1 - 180^0$, benutzt 341 : 1, 2, und vertauscht in den die kleinen Faktoren x' und y' enthaltenden Gliedern die A_2 und B_2 mit A_1 und $180^0 + A_1$, so erhält man

$$D = \varepsilon + 2\,x' \cdot \mathrm{Si}\, A_1 - 2\,y' \cdot \mathrm{Co}\, A_1 \tag{1}$$

Ersetzt man in dieser Beziehung A_1 successive durch α und $180^0 + \alpha$, so erhält man

$$D_1 = \varepsilon + 2x' \cdot \mathrm{Si}\,\alpha - 2y' \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \qquad D_2 = \varepsilon - 2x' \cdot \mathrm{Si}\,\alpha + 2y' \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \qquad D_1 + D_2 = 2\varepsilon \tag{2}$$

Man kann somit aus jeden zwei diametralen Einstellungen und Ablesungen, unabhängig von der Excentricität, einen Wert von ε finden, und, indem man das Mittel aus mehreren solchen Bestimmungen nimmt, diese Grösse genau ermitteln und von D abrechnen. Sodann ergeben sich aus den sämtlichen 1 die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma\,(D - \varepsilon) \cdot \mathrm{Si}\, A_1 &= 2x' \cdot \Sigma\, \mathrm{Si}^2 A_1 - 2y' \cdot \Sigma\, \mathrm{Si}\, A_1 \cdot \mathrm{Co}\, A_1 \\ \Sigma\,(D - \varepsilon) \cdot \mathrm{Co}\, A_1 &= 2x' \cdot \Sigma\, \mathrm{Si}\, A_1 \cdot \mathrm{Co}\, A_1 - 2y' \cdot \Sigma\, \mathrm{Co}^2 A_1 \end{aligned} \tag{3}$$

welche zur Bestimmung von x' und y' hinreichen und sich, wenn z. B. 12 Einstellungen von 30^0 zu 30^0 gemacht werden, noch bedeutend vereinfachen, da sich in diesem Falle zu jedem Werte von A_1 auch sein Komplement und sein Supplement vorfindet, folglich $\Sigma\, \mathrm{Si}^2 A_1 = 6 = \Sigma\, \mathrm{Co}^2 A_1$ und $\Sigma\, \mathrm{Si}\, A_1 \cdot \mathrm{Co}\, A_1 = 0$ wird. Sind aber einmal x' und y' berechnet, so lassen sich Richtung und Grösse der Excentricität nach

$$A = \mathrm{Atg}\, \frac{y}{x} = \mathrm{Atg}\, \frac{y'}{x'} \qquad \text{und} \qquad e = \frac{y}{\mathrm{Si}\, A} = \frac{y' \cdot r \cdot \mathrm{Si}\, 1''}{\mathrm{Si}\, A} \tag{4}$$

ohne Schwierigkeit finden, und mit Hilfe dieser Werte kann sodann nach 341 : 1 der Einfluss der Excentricität auf jede beliebige Ablesung ermittelt, also diese korrigiert werden. — So z. B. erhielt **Encke** an einem 14-zölligen Kreise von Pistor die Wertepaare

$A_1 =$	0^0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330^0
$D =$	$6'',7$	-5,5	-14,6	-15,8	-14,0	-17,5	-19,5	-8,5	0,6	5,9	4,2	$4'',5$

und hieraus ergeben sich successive für dieses Instrument

$$\Sigma\, D = -\,73'',5 \qquad \varepsilon = {}^1\!/_{12}\, \Sigma\, D = -\,6'',1 \qquad x' = -\,5'',01 \qquad y' = -\,4'',11$$

$$A = 219^0 \qquad e = 0''',00264\ P = 6 \cdot \mu \qquad M = 6'',48$$

und sodann nach 1

$$D' = -6'',1 - 10'',02 \cdot \text{Si}\, A_1 + 8'',22 \cdot \text{Co}\, A_1 \qquad 5$$

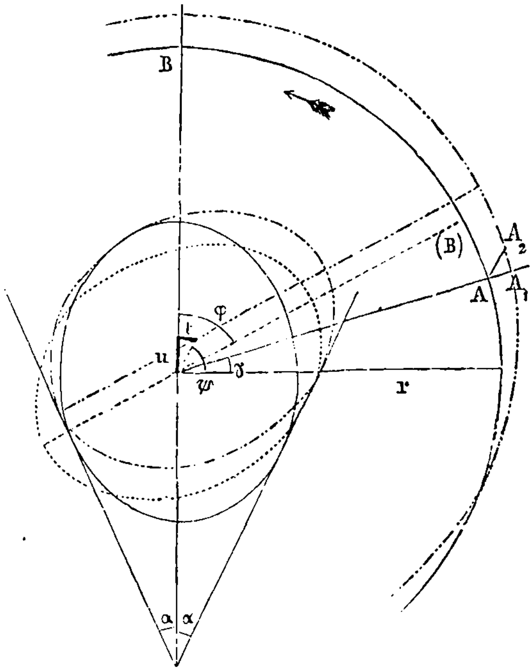
— *b.* Berechnet man nach 5 rückwärts die sämtlichen zwölf D', so erhält man
D' = 3'',6 -2,9 -10,3 -16,5 -20,0 -19,7 -15,8 -9,3 -1,9 4,3 7,8 7'',5
so dass wirklich im grossen Ganzen die D durch die erhaltene Excentricität gefordert werden, aber doch immer noch für D — D' die beträchtlichen Werte
3'',1 —2,6 —4,3 0,7 6,0 2,2 —3,7 0,8 2,5 1,6 —3,6 —3'',0
übrig bleiben, welche eine Kritik des Instrumentes ergeben, indem sie wohl (vgl. 344—45) zunächst als Teilungsfehler aufzufassen sind. — *c.* Besitzt ein Kreis nur Eine Ablesungsstelle, was zwar bei Vollkreisen kaum mehr, dagegen bei allen Sectoren (346) und dann namentlich beim Spiegelsextanten (352) vorkömmt, so kann die Excentricität natürlich nicht auf die in a erläuterte Weise bestimmt werden; da aber nach 341 : 2, 1

$$B_2 - A_2 = B_1 - A_1 + ax' - by' \quad \text{wo} \quad a = \text{Si}\, B_1 - \text{Si}\, A_1 \quad b = \text{Co}\, B_1 - \text{Co}\, A_1 \qquad 6$$

aus den Ablesungen bestimmbare Zahlen sind, so hat man in diesem Falle nur zwei anderweitig gut bestimmte Winkel $(B_2 - A_2)$ mit ihren an dem zu untersuchenden Instrumente erhaltenen scheinbaren Massen $(B_1 - A_1)$ zu vergleichen, um nach 6 zwei zur Bestimmung von x' und y' dienliche Gleichungen aufschreiben zu können.

343. Der Einfluss der Axengestalt. — Besitzen die Zapfen, auf welchen die Axe eines Vertikalkreises in den Lagern ruht, auch nur eine ganz geringe, am Niveau kaum erkennbare Ellipticität, so werden dadurch die Ablesungen merklich beeinflusst, indem während einer Umdrehung des Kreises der Mittelpunkt desselben zweimal eine kleine, von der Excentricität und dem Lagerwinkel abhängige Ellipse durchläuft, deren grosse Axe in die Bisectrix des letztern fällt, wodurch natürlich auch die Lage des Kreises gegenüber dem feststehenden Index systematisch etwas modifiziert wird“.

Zu 343: *a.* Schon 1814 hob **Bessel** in einem Briefe an Olbers diesen Umstand beiläufig hervor und gab für den speciellen Fall eines Lagerwinkels von 90°, obschon er sich über die Natur der Bewegung des Kreismittelpunktes nicht ganz klar wurde, den hier in Betracht kommenden Effekt ganz richtig an. Durch seine Notiz angeregt, habe ich mich sodann wiederholt mit dieser Frage beschäftigt und dieselbe noch neuerlich (Mitth. 72 von 1888) dem oben mitgeteilten entsprechend in allgemeinerer Weise beantwortet. — Geht man, um den Einfluss der Axengestalt zu übersehen, von derjenigen Lage des Kreises aus, bei welchem die nach einem gewissen Teilstriche B gerichtete grosse Axe $2a$ des Zapfens den Lagerwinkel 2α halbiert oder vertikal steht, so wird ein um γ von der Horizontalen abweichender Index auf $A = B - (90^0 - \gamma)$ weisen. Dreht man sodann den Kreis um φ, so sollte man, wenn die Teilung im Sinne des Pfeiles beziffert ist, die Ablesung $A_2 = A + \varphi$ erhalten, wird aber, da infolge der Ellipticität der Mittelpunkt des Kreises in den Punkt (u, t) gehoben wird und somit ein tieferer Punkt an den Index zu stehen kömmt, nur $A_1 = A_2 - \Delta A$ ablesen, wo (s. Fig. auf folgender Seite)



$$\Delta A \cdot r \cdot \mathrm{Si}\, 1'' = \sqrt{u^2+t^2} \cdot \mathrm{Si}(\psi-\gamma), \quad \mathrm{Tg}\,\psi = \frac{u}{t}, \quad \mathrm{Si}\,\psi = \frac{u}{\sqrt{u^2+t^2}}, \quad \mathrm{Co}\,\psi = \frac{t}{\sqrt{u^2+t^2}} \qquad \mathbf{1}$$

ist. Benutzt man somit die l. c. abgeleiteten Werte

$$u = \frac{a e^2 \cdot \mathrm{Co}\, 2\alpha}{4 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}(1 - \mathrm{Co}\, 2\varphi) = U \cdot r \cdot \mathrm{Si}\, 1''(1 - \mathrm{Co}\, 2\varphi) \quad \text{wo} \quad U = \frac{a e^2 \cdot \mathrm{Co}\, 2\alpha}{4 r \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\, 1''}$$

$$t = \frac{a e^2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{2} \cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi = T \cdot r \cdot \mathrm{Si}\, 1'' \cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi \qquad T = \frac{a e^2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{2 r \cdot \mathrm{Si}\, 1''} \qquad \mathbf{2}$$

und führt nach oben

$$\varphi = A_2 - A = A_1 + \Delta A - B - \gamma + 90^0 \quad \text{oder} \quad 2\varphi = 2(A_1 - B - \gamma) + 180^0 \qquad \mathbf{3}$$

ein, so erhält man successive

$$A_2 - A_1 = \frac{1}{r\,\mathrm{Si}\, 1''} \cdot (u \cdot \mathrm{Co}\,\gamma - t \cdot \mathrm{Si}\,\gamma) = \qquad \mathbf{4}$$
$$= U\,[1 + \mathrm{Co}\, 2(A_1 - B - \gamma)] \cdot \mathrm{Co}\,\gamma + T \cdot \mathrm{Si}\, 2(A_1 - B - \gamma) \cdot \mathrm{Si}\,\gamma$$

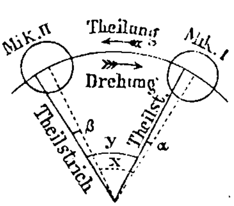
und somit eine Formel, nach welcher man den Einfluss der Elliptieität berechnen kann, sobald einmal die Konstanten U, T und B bekannt sind. Um diese letztern zu finden, kann man aber z. B. in der Weise vorgehen, dass man an den, entsprechend 342 für $\gamma = 0$ und $\gamma = 180^0$ erhaltenen D die Differenz der sich nach 4 in diesen beiden Fällen ergebenden Korrektionen, nämlich die Grösse $2U \cdot [1 + \mathrm{Co}\, 2(A_1 - B)]$, anbringt, — aus den nunmehr nach 342 : 1 gebildeten 12 Gleichungen neben den x' und y' auch die U und B bestimmt, — und nach der aus 2 folgenden Proportion $T : U = 2\,\mathrm{Si}^2\alpha : \mathrm{Co}\, 2\alpha$ schliesslich noch T berechnet. Besitzt man auch $\gamma = 90^0$ und $\gamma = 270^0$ entsprechende Ablesungsstellen, so kann entsprechend ein zweites System von Gleichungen gebildet und daraus zur Probe T und B neuerdings ermittelt werden.

344. Die Elimination zufälliger Teilungsfehler. — Die kleinen Differenzen, welche durch die vorhergehenden Untersuchungen unerklärt bleiben, zeigen in der Regel keinen systematischen Gang mehr und sind wohl zunächst durch kleine Unrichtigkeiten einzelner Teilstriche veranlasst [a]. Um den Einfluss solcher zufälliger Teilungsfehler unschädlich zu machen, reicht es bei kleinern Kreisen vollständig hin, das schon früher (332) erwähnte **Multiplikationsverfahren** anzuwenden, oder wohl noch besser das sog. **Repetitionsverfahren**, welches letztere darin besteht, dass man einen Winkel bei verschiedenen Stellungen des Limbus misst, also mit den Ablesestellen die beeinflussenden Teilungsfehler wechselt, folglich erwarten kann, dass dieselben sich im Mittelwerte nahezu eliminieren werden [b].

Zu 344: *a.* Ich verweise auf die in 342 : b erhaltenen Zahlen. — *b.* Beide Verfahren setzen mehr oder weniger Vollkreise voraus, sowie die Möglichkeit, den Limbus zu drehen. — Als historische Notiz füge ich bei, dass **Lalande** (Journ. d. S. 1791) sagt: „Nous devons annoncer qu'à l'Observatoire de Paris on a fait au solstice d'été 1790 l'essai d'un cercle qui n'a que 15'' de diamètre et qui, en multipliant les observations sur tous les points de la circonférence, a donné la hauteur solsticiale avec la précision d'une seconde: c'est à M. **Borda** à qui nous avons l'obligation de cette heureuse tentative; l'on n'avait point encore fait un aussi bon usage de l'idée ingénieuse que Tobie **Mayer** avait eue et qu'il consigna en 1752 dans les Mém. de Gott. Cependant M. **Bugge**, dans ses Observations publiées à Copenhague, dit que depuis 1762 il s'était servi, pour la carte du Seeland, de cette multiplication des angles".

345. Die Bestimmung der Teilungsfehler. — Bei grössern Kreisen und in Fällen, wo der Bau des Instrumentes die für Anwendung der obigen Verfahren nötigen Manipulationen nicht gestattet, ist es notwendig, die Fehler der einzelnen Teilstriche zu bestimmen, um dieselben in Rechnung bringen zu können. Es lässt sich diese Bestimmung entsprechend den früher besprochenen Teilungsverfahren in verschiedener Weise durchführen, jedoch wohl am besten, indem man über dem zu untersuchenden Kreise zwei Ablesemikroskope in der Weise aufstellt, dass deren Distanz jeweilen einem gewissen Teile des Kreises oder eines schon bekannt gewordenen Bogens des letztern entspricht [a].

Zu 345: *a.* Fällt nämlich der Nullstrich des Kreises in das erste, der Teilstrich $Z = 360^0 : n$ in das zweite Mikroskop, und misst man mit den beweglichen Faden die Distanzen α und β, um welche diese Striche im Sinne der Teilung von dem betreffenden Index abstehen, so erhält man die Gleichung



$$y = x - \alpha + \beta \qquad 1$$

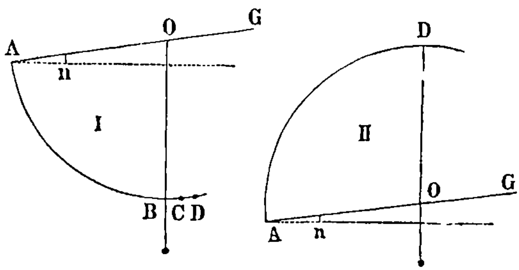
in welcher x die Distanz der beiden Mikroskope, y diejenige der beiden Teilstriche bezeichnet. Eine entsprechende Beziehung ergiebt sich, wenn man bei unverändertem Stande der Mikroskope durch Drehen des Kreises den Teilstrich Z in das erste, folglich den Teilstrich 2 Z in das zweite Mikroskop bringt, — dann 2 Z und 3 Z, — etc., bis der Kreis erschöpft ist. Die Summe aller dieser n Gleichungen 1 giebt aber offenbar die neue Gleichung

$$360^0 = n \cdot x - \Sigma \alpha + \Sigma \beta \qquad 2$$

aus welcher man x, und sodann nach den 1 die Werte aller einzelnen y berechnen, folglich durch Vergleichung dieser letztern mit ihrem Nennwerte die Fehler aller benutzten Striche finden kann. Nachher nimmt man in ähnlicher Weise, sei es für andere Werte von n, sei es durch Anknüpfen an zwei der schon bekannten Teilstriche, weitere Bestimmungen vor, bis man hinlängliche Anhaltspunkte hat, um die übrigen Teilstriche direkt mit einem der Ablesemikroskope vergleichen zu können. — Für weitern Detail und zum Teil etwas abgeänderte Dispositionen vergleiche „C. A. **Peters**, Untersuchungen der Teilungsfehler des Ertel'schen Vertikalkreises der Pulkowaer Sternwarte (Mém. Pet. 1847), — Félix-Victor **Mauvais** (Romboz im Dép. du Doubs 1809 — Paris 1854, wo er sich, als Republikaner entsetzt, aus Verzweiflung erschoss; Obs. und Mitgl. des Bureau des long. Paris), Détermination des erreurs de division du cercle mural de Fortin à l'Observatoire de Paris (Compt. rend. 1853), — Ch. **Wolf**, Etudes des divisions du cercle méridien de Secrétan-Eichens (Ann. Obs. Par., Observat. 19), — Wilhelm **Schur** (Altona 1846 geb.; damals Obs. Strassburg, jetzt Dir. Obs. Göttingen), Bestimmung der Teilungsfehler des Repsold'schen Meridiankreises der Strassburger Sternwarte (A. N. 2532 von 1883), — Magn. **Nyrén**, Untersuchung der Repsold'schen Teilung des Pulkowaer Vertikalkreises. Petersburg 1886 in 4., — O. **Schreiber**, Untersuchung von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen (Zeitschr. f. Instr. 6 von 1886), — etc.".

346. Die Höhenquadranten, Zenitsectoren und Höhenkreise. — Zu Gunsten der Messung von Höhenwinkeln wurden seit den ältesten Zeiten vielfach **Quadranten** konstruiert, welche in der Regel so aufgestellt waren, dass ihre Ebene in jeden Vertikal gebracht und an der Teilung die momentane Lage der Visierlinie gegen die aus der Lotrichtung abgeleitete Horizontale abgelesen werden konnte, — sei es, dass der Quadrant mit Hilfe des Lotes orientiert und die Visiervorrichtung mit einem drehbaren Radius verbunden war, — sei es, dass beide sich mit einander drehten und der Schnitt des Lotes mit der Teilung gewissermassen als Index diente [a]. — Zu speciellen Zwecken und namentlich in dem Falle, wo es sich ausschliesslich darum handelte, den Zenit des Beobachters gegen benachbarte Sterne festzulegen, wurde wohl auch der Quadrant auf einen kleinern Sector reduziert, da es in diesem Falle konstruktiv möglich war, den Radius und damit die Leistungsfähigkeit bedeutend zu vergrössern, und es entstanden so z. B. die **Zenitsectoren**, mit deren Hilfe (264) die Aberration entdeckt wurde [b]. — In allen Fällen dagegen, wo nicht solche Specialitäten ins Auge zu fassen sind, hat die neuere Zeit aus bereits mehrfach angegebenen Gründen umgekehrt die Quadranten durch Vollkreise von mässigen Dimensionen, aber möglichst sorgfältiger Ausführung ersetzt, und die Erfahrung hat die Zweckmässigkeit dieser Neuerung ausser Frage gestellt [c].

Zu 346: *a.* Schon ein Schüler von Aristoteles, der Grieche **Dikäarch** (Messene 350 — ebenda 290; Philosoph und Geograph), dürfte einen Quadranten mit Diooptern besessen haben; denn die Angabe von Eratosthenes (vgl. „Eratosthenica, ed. Bernhardy. Berolini 1822 in 8.“; fragm. 39), dass derselbe mit „dioptrischen Messwerkzeugen“ Höhenwinkel von Berggipfeln gemessen habe, lässt sich kaum anders deuten. — Auch bei den spätern Griechen, sodann wieder bei den Arabern und im Abendlande, waren unzweifelhaft Höhenquadranten im Gebrauche, und so bildete z. B. **Tycho** in seiner schon mehrfach citierten „Astronomia instaurata“ verschiedene Instrumente solcher Art ab. Während aber noch diese letztern ausschliesslich der erstern Kategorie angehörten, zog dagegen **Picard** bei Konstruktion des für seine berühmte Gradmessung (418) bestimmten Höhenquadranten die zweite vor. Dieser nachher lange als mustergiltig betrachtete Quadrant, der einen kupfernen und mit Hilfe von Transversalen Minuten gebenden Limbus von 38 Zoll Radius besass, war nämlich an einem Stative in seinem Schwerpunkte so aufgehängt, dass er sich samt dem an ihm festen Fernrohr AO (A = Okular, O = Objektiv und Centrum) drehen und umschlagen liess, und sein Horizontpunkt C in folgender Weise bestimmt werden konnte: Das Fernrohr wurde auf einen dem Horizonte nahen, dagegen vom Beobachter möglichst entfernten Gegenstand G



eingestellt, und nun mit dem Lote der unter dem Centrum liegende Punkt B der Teilung aufgesucht, so dass $AB = 90^0 - n$ war; dann wurde der Quadrant umgedreht, umgeschlagen, das Fernrohr nochmals auf G gerichtet, und mit dem Lote der nunmehr über dem Centrum in der Distanz $AD = 90^0 + n$ liegende Punkt D der Teilung aufgesucht; man hatte also den von n unabhängigen Wert $\frac{1}{2}(AB + AD) = 90^0$ oder es lag der gesuchte Punkt C genau in der Mitte zwischen B und D. — *b.* Für die von **Molyneux** und **Bradley** verwendeten Zenitsectoren auf 264 verweisend, sind hier namentlich diejenigen zu erwähnen, welche bei den Gradmessungen in Frankreich, Peru und Lappland (418, 421, 422) zur Bestimmung der Breitendifferenzen dienten: Derjenige von **Picard** hatte 10′ Radius auf 18^0 Bogenlänge und gab mittelst Transversalen 20″, liess jedoch mindestens 4″ abschätzen, — der nach Peru mitgenommene besass 12′ Radius bei 30^0 Bogenlänge, gab direkt Minuten und mit Hilfe eines **Louville**'schen Mikrometers (340) einzelne Sekunden, — und der in Lappland angewandte, durch **Graham** in ganz vorzüglicher Weise ausgeführte Sector von 8′ Radius auf angeblich $5\frac{1}{2}^0$, strenge genommen $5^0\,29'\,56\frac{1}{4}''$ Bogenlänge, war durch Punkte in Achtelsgrade eingeteilt, liess aber mikrometrisch ebenfalls einzelne Sekunden ablesen. — Speciell ist anzuführen, dass, während **Picard** den Zenitpunkt wiederholt mittelst eines zenitalen Sternes in entsprechender Weise wie den Horizontalpunkt seines Quadranten bestimmte, und auch in Peru regelmässig Umlegungen vorgenommen wurden, in Lappland letzteres unterlassen und sogar nach Transport des Instrumentes angenommen wurde, es sei die Kollimation unverändert geblieben. — Ferner ist zu erwähnen, dass man in Peru und Lappland bei Beobachtung eines Sternes dem Fernrohr vorerst eine Lage gab, bei welcher das Lot mit einem Teilstriche oder Teilpunkte coincidierte, — dann aber in Peru einen beweglichen, in Lappland dagegen den festen Faden mit einer Mikrometerschraube zum Sterne führte. — Für die höchst ingenieuse Art, in der sich die französischen Akademiker in Peru zu helfen wussten, als ihnen Zweifel an der Richtigkeit ihres Sectors aufstiegen, muss auf „**La Condamine**, Mesure des trois premiers degrès du méridien austral. Paris 1751 in 4. (pag. 116—21)“ verwiesen werden. — *c.* Vergleiche das in 335 darüber beigebrachte. — Aus einem 1783 VI 19 von Henry **Ussher** (1735? — Dublin 1790; Dr. theol. und Prof. astr. Dublin) an Joh. III Bernoulli geschriebenen Briefe (Mém. Berl. 1782) geht hervor, dass **Ramsden** für die damals im Bau begriffene Dubliner Sternwarte einen 10-füssigen Vollkreis in Arbeit hatte, der um eine vertikale Axe drehbar war.

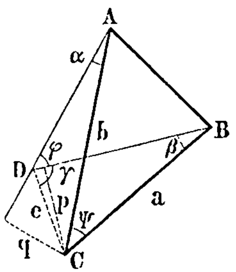
347. Die Astrolabien und der Bordakreis. — In der frühern Zeit kam sehr häufig unter dem Namen **Astrolabium** ein geteilter Halbkreis zur Verwendung, der zwei feste, der Null-Linie entsprechende Diopter, ferner einen um das Centrum drehbaren Diopterlineal besass, meist auch eine Boussole trug, und mit einem Dreifusse mittelst einer sog. **Nuss** (genou) so verbunden war, dass er in die Winkelebene gebracht, folglich jeder Winkel direkt gemessen werden konnte [a]. — Später trat an dessen Stelle meist ein Quadrant oder Sextant von etwas grösserm Radius, der eine analoge, wenn auch wesentlich vervollkommnete Aufstellung besass, sowie von der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts hinweg, statt der Diopter, Fernröhren mit Fadenkreuz erhielt [b], — und nach der Mitte des 18. Jahrhunderts führte **Borda** den nach ihm benannten Kreis ein, der neben den Vorzügen des Vollkreises sich durch eine mustergiltige Aufstellung auszeichnete, welche unter Anwendung des Principes der Multiplikation oder Repetition verhältnismässig leicht erlaubte, jeden beliebigen Winkelabstand mit Genauigkeit zu bestimmen [c].

Zu 347: *a.* In der ältern Zeit wurde der Name **Astrolabium** (von ἄστρον = Stern und λαμβάνω = ich fasse) nicht nur für die oben beschriebenen, sondern so ziemlich für alle mit Kreisteilungen versehenen Instrumente gebraucht, — namentlich auch für die **Planisphärien** (360), und einen von **Ptolemäus** (386) ausgedachten Apparat, um die Längen und Breiten der Sterne direkt zu bestimmen. — *b.* Der anfänglich von **Snellius** bei seiner Gradmessung (416) gebrauchte zweifüssige, messingene Quadrant war noch ziemlich primitiv, indem er mittelst Transversalen nur notdürftig Minuten gab. Dagegen besassen **Tycho** und **Hevel** bereits bedeutend bessere Instrumente dieser Art, und der von

Picard zu seiner Triangulation (418) verwendete Quadrant, welcher sich von dessen Höhenquadranten (346) nur durch sein Stativ und die Beigabe eines zweiten und drehbaren Fernrohrs unterschieden zu haben scheint, leistete offenbar noch wesentlich mehr. — Der Kuriosität wegen mag hier anhangsweise auch der, beim Gebrauche drei Mann in Anspruch nehmende, 7-füssige Sextant erwähnt werden, welchen Jonas **Moore** (Whitbee in Lancashire 1617 — Godalming 1679; erst Prof. math. London, dann Genie-Inspektor), der Protektor von **Flamsteed**, 1676 für diesen auf eigene Kosten als Hauptinstrument der ersten Sternwarte in Greenwich konstruieren liess: Derselbe konnte mit Hilfe eines Räderwerks in die Ebene zweier Gestirne, deren Distanz gemessen werden sollte, gebracht werden; nachher wurde er in dieser Ebene so gedreht, dass der eine Stern im Fadenkreuze eines festen, dem Nullpunkte entsprechenden Fernrohrs erschien, während ein anderes, bewegliches Fernrohr auf den zweiten Stern eingestellt wurde. — *c.* Der nach den Ideen von **Borda** durch **Lenoir** ausgeführte Kreis kam zum ersten Male 1787 bei der zur Verbindung der Sternwarten von Paris und Greenwich ausgeführten Triangulation (426) in Gebrauch, spielte dann aber namentlich bei der als Grundlage des metrischen Systemes angeordneten neuen französischen Gradmessung eine so hervorragende Rolle, dass **Delambre** von demselben in der „Base du système métrique (II 160 ff.)" eine ausführliche Beschreibung mit Abbildungen zu geben hatte, auf welche es hier genügen mag, für den Detail zu verweisen, da der Bordakreis in der neuern Zeit durch die sofort zu beschreibenden Instrumente wieder ganz ausser Kurs gesetzt worden ist. — Dagegen mag noch **einerseits** erwähnt werden, dass im Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts auch **Reichenbach** und sein trefflicher Schüler U. **Schenk** vorzügliche Exemplare des Bordakreises lieferten, ja ein von letzterm verfertigter 18-Zöller noch jetzt eine Hauptzierde der kleinen Instrumentensammlung der Berner Sternwarte bildet, — und **anderseits**, da der Bordakreis namentlich auch als Repetitionskreis beliebt war, dass in den ersten Decennien unsers Jahrhunderts noch viel über die Vorteile und Nachteile solcher Instrumente herumgestritten wurde. **Littrow** sprach sich nun in seiner Abhandlung „Über den erweiterten Gebrauch der Multiplicationskreise. Prag 1820 in 8." entschieden dahin aus, dass die Repetitionsinstrumente zu empfehlen seien, wenn man sie nicht eigentlich zum Multiplizieren (wo durch das häufige Klemmen schädliche Verschiebungen entstehen können), sondern in folgender, das Eliminieren der Teilungsfehler ebenfalls bewirkender Weise anwende: Man soll für jede Serie von Beobachtungen auch den Repetitionskreis wie einen gemeinen Kreis behandeln, so bei Höhenmessungen ebenfalls in beiden Lagen (Kreis Ost und Kreis West) beobachten, etc., und nur jeweilen für eine neue Serie den äussern Kreis losklemmen und verstellen, — d. h. also dasselbe Princip zur Anwendung bringen, welches den neuern Vorschriften der Geodäsie für das Messen der Horizontalwinkel mit Repetitionstheodoliten (349) zu Grunde liegt. Anhangsweise zeigt **Littrow** an einigen eklatanten Beispielen, wie man sich arg täuschen kann, wenn man aus der Übereinstimmung innerhalb einer Serie auf die wirkliche Güte des Resultates schliesst.

348. Die Reduktion auf Centrum und Horizont. — Bei terrestrischen Operationen kömmt es häufig vor, dass man sich nicht genau im Scheitel eines zu bestimmenden Winkels aufstellen kann, sondern denselben, wie man sagt, **excentrisch** messen und somit nachträglich für Grösse und Richtung der Excentricität verbessern, d. h. eine sog. **Reduktion auf das Centrum** vornehmen muss[a]. — Da ferner jedes der Winkelobjekte in der Regel eine gewisse Höhe über dem Horizonte besitzt, so hat man zwischen ihrem wirklichen Winkelabstande und ihrem Horizontalabstande zu unterscheiden und, wenn z. B. mit Hilfe des Bordakreises der erstere gemessen wird, noch eine sog. **Reduktion auf den Horizont** auszuführen, um den letztern zu erhalten[b].

Zu 348: *a.* Bei der Gradmessung in Peru (421) wurden, wenn das Instrument nicht in dem Dreieckspunkte C selbst aufgestellt werden konnte, sondern statt ψ in einem benachbarten Punkte D der Winkel φ gemessen werden musste, von C aus (wohl mit Hilfe einer Kreuzscheibe 330) die Senkrechten p und q auf BD und AD gefällt und mit einer Schnur gemessen, — aus diesen und approximativen Werten von a und b die Winkel α und β berechnet, wofür sich **La Condamine** einer von Jean de **Lagrive** (Donchery bei Sédan 1687 — Paris 1757; erst Priester und Lehrer am Lazaristen-Kollegium in Krakau, dann als Topograph in Paris lebend) berechneten Hilfstafel bediente, — und sodann aus



$$\alpha + \varphi = \beta + \psi \qquad \text{oder} \qquad \psi = \varphi + \alpha - \beta \qquad \mathbf{1}$$

der richtige Winkel berechnet. — Jetzt misst man nach dem Vorgange von **Delambre** statt p und q meistens die **Excentricität** e und den **Direktionswinkel** γ, und berechnet α und β aus

$$\frac{\mathrm{Si}\,\alpha}{\mathrm{Si}\,(\varphi+\gamma)} = \frac{e}{b} \qquad \frac{\mathrm{Si}\,\beta}{\mathrm{Si}\,\gamma} = \frac{e}{a} \qquad \text{oder} \qquad \alpha \doteq \frac{e\cdot\mathrm{Si}\,(\varphi+\gamma)}{b\cdot\mathrm{Si}\,1''} \qquad \beta \doteq \frac{e\cdot\mathrm{Si}\,\gamma}{a\cdot\mathrm{Si}\,1''} \qquad \mathbf{2}$$

— *b.* Bezeichnet a den wahren, $A = a + x$ den auf den Horizont bezogenen Winkel zweier Objekte der Zenitdistanzen $b = 90^0 - \beta$ und $c = 90^0 - \gamma$, so hat man, wenn man sich aus dem Scheitel eine Kugelfläche von beliebigem Radius beschrieben denkt, nach 90 und unter Voraussetzung, dass β, γ, und um so mehr x, kleine Grössen seien

$$\begin{aligned}\mathrm{Co}\,a &= \mathrm{Si}\,\beta\cdot\mathrm{Si}\,\gamma + \mathrm{Co}\,\beta\cdot\mathrm{Co}\,\gamma\cdot\mathrm{Co}\,(a+x)\\ &\doteq \beta\cdot\gamma\cdot\mathrm{Si}^2\,1'' + (1 - {}^1\!/_2\,\beta^2\cdot\mathrm{Si}^2\,1'')\,(1 - {}^1\!/_2\,\gamma^2\cdot\mathrm{Si}^2\,1'')\,(\mathrm{Co}\,a - x\cdot\mathrm{Si}\,a\cdot\mathrm{Si}\,1'')\end{aligned}$$

woraus für $p = {}^1\!/_2\,(\beta+\gamma)$ und $q = {}^1\!/_2\,(\beta-\gamma)$ die schon durch **Legendre** in seinem Mémoire von 1787 gegebene Näherungsformel

$$x = \frac{\mathrm{Si}\,1''}{2\cdot\mathrm{Si}\,a}\left[2\beta\gamma - (\beta^2+\gamma^2)\cdot\mathrm{Co}\,a\right] = \left[p^2\cdot\mathrm{Tg}\,\frac{a}{2} - q^2\cdot\mathrm{Ct}\,\frac{a}{2}\right]\cdot\mathrm{Si}\,1'' \qquad \mathbf{3}$$

folgt, welcher ich jedoch die ebenfalls nach 90 bestehende strenge Formel

$$\mathrm{Co}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}\,s\cdot\mathrm{Si}\,(s-a)}{\mathrm{Si}\,b\cdot\mathrm{Si}\,c}} \qquad \text{wo} \qquad s = \frac{a+b+c}{2} \qquad \mathbf{4}$$

vorziehen möchte. — Ebenso lässt sich nach den Formeln

$$\mathrm{Co}\,a = \mathrm{Co}\,c\cdot\mathrm{Co}\,(b-x)\cdot\mathrm{Se}\,x \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Tg}\,x = \mathrm{Tg}\,c\cdot\mathrm{Co}\,A \qquad \mathbf{5}$$

auch die umgekehrte Aufgabe leicht lösen. — Vgl. ferner „A. L. Fr. **Meister**, Descriptio et examen scalæ pro reducendis ad horizontem angulis inclinatis a Tob. Mayero concinnatæ (Comm. Gott. 1785/6)“.

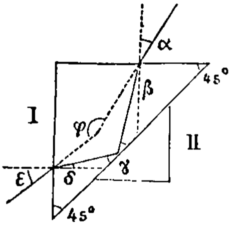
349. Azimutalquadrant, Theodolit und Universalinstrument. — Der sich als höchst fruchtbar erweisende Gedanke, Winkelinstrumente mit zwei zu einander senkrechten Kreisen zu konstruieren, an welchen sich sozusagen auf Einen Schlag die Richtungen beliebiger Visuren nach Höhe und Azimut, also offenbar auch ihre Richtungsunterschiede festlegen lassen, findet sich schon in dem **Azimutalquadranten** der Araber und dessen Nachbildungen auf Hveen, sowie in Kassel und Danzig verwirklicht[a]; aber immerhin bedurfte es noch lange Jahre und des immer fühlbarer werdenden Bedürfnisses, für geodätische Arbeiten ein tragbares Instrument von grösserer Leistungsfähigkeit zu besitzen, bis aus jenen noch ungefügigen und relativ kostbaren Apparaten nach und nach unser gegenwärtiger handlicher und leicht zu beschaffender **Theodolit**[b], und aus diesem dann wieder etwas später das, allerdings diese letztern Eigenschaften nicht mehr in gleichem Masse besitzende, aber auch den umfassendsten Anforderungen genügende und mit vollem Recht den Namen **Universalinstrument** tragende Hilfsmittel hervorging[c].

Zu 349: *a.* Die Idee, anstatt eines Winkels dessen Projektion auf eine Horizontalebene und die Projektionswinkel seiner Schenkel zu messen, ist bereits in den für die Sternwarte zu Meragah konstruierten „drehenden Quadranten" und dem wohl damit identischen „Instrument des quarts de cercle mobiles" Sédillots vertreten, da dabei übereinstimmend von einem horizontalen Kreise die Rede ist, über welchem zwei Quadranten mit Alidaden spielten, um von zwei Gestirnen in einem gegebenen Momente gleichzeitig die Höhen und Azimute messen und dadurch ihre Distanz bestimmen zu können. Leider wird über die Grösse dieses **Azimutalquadranten** von Meragah nur die unbestimmte Angabe „le plus grand possible" gemacht, — auch nur gesagt, dass Horizontalkreis und Quadranten in Grade und ihre „Unterabteilungen" geteilt waren, und die Grade am Horizontalkreise vom Ost- und Westpunkte aus gezählt wurden. — Im Abendlande findet sich die erste Spur eines solchen Instrumentes in dem schon früher (57) erwähnten Kremsmünster-Kreise von 1570, — einem hölzernen Kreise von $6^1/_2$" Durchmesser, in dessen Centrum eine vertikale Axe stand, die ein Diopterlineal trug und an welche ein elfenbeinerner, in 180 Grade geteilter Halbkreis befestigt werden konnte, über welchem ein Lot spielte. — Sodann folgte der von **Tycho** aus Messing konstruierte und daher nachmals von ihm in seiner mehrerwähnten „Astr. inst. mech." auch als „orichalcicus" aufgeführte **Quadrans azimuthalis**, der aus einem mittelst Transversalen und Nonius'schen Hilfsquadranten die einzelnen Minuten gebenden, mit Diopterlineal versehenen Höhenquadranten von $1^1/_2$ Ellen Radius bestand, welcher über einem horizontalen, ebenfalls Minuten gebenden und mittelst vier Schrauben auf Marmorsäulen ruhenden Vollkreise von zwei Ellen Durchmesser spielte. — Ungefähr gleichzeitig, und wohl nicht ohne konstruktive Verbesserungen, führte auch **Bürgi** mehrfach solche Instrumente aus, — ihren Höhenpunkt aber scheinen sie, wie uns die „Machina coelestis" zeigt, ein halbes Jahrhundert später bei **Hevel** erreicht zu haben, der unter anderm die vier Fussschrauben auf drei reduzierte, die vor ihm einfach mit der Hand ausgeführten Feinbewegungen durch Mikrometerschrauben und Schnurzüge ausführte, etc.;

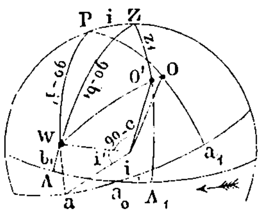
dabei besass sein Azimutalkreis 4′ Durchmesser, sein Quadrant 5′ Radius, und beide waren direkt in Minuten abgeteilt, während Transversalen 10″ abzulesen und 5″ abzuschätzen erlaubten. — *b.* Während mutmasslich **Römer** der erste war, welcher (vgl. die Bas. astr.) den Quadranten durch einen Vollkreis ersetzte, und **Ramsden** derjenige Mechaniker, welcher in dem 1789 nach Palermo gelieferten, über einem dreifüssigen Horizontalkreise spielenden fünffüssigen Vertikalkreise den grössten **Altazimut** mit Vollkreis erstellte, — kommt dagegen nach einer Note, welche **Maclaurin** 1745 seiner Übersetzung von Dav. Gregorys „Practical Geometry" beigefügt haben soll, das noch grössere Verdienst, das ganze Instrument zu einem tragbaren und dennoch leistungsfähigen Apparate kondensiert, d. h. einen ersten **Theodoliten** geschaffen zu haben, dem englischen Mechaniker John oder Jonathan **Sisson** (1690? — 1760?; Schüler von Graham, der auch Bird bei diesem einführte) zu. — Über den Ursprung des Namens „Theodolit" sind die Gelehrten nicht einig; jedoch hat die von Breton de Champ aufgestellte Ansicht, er sei durch Zusammenziehung aus „The Alidada" entstanden, viel für sich, zumal in dem Werke „Leonard **Digges**, Pantometria, a geometrical practical treatise (London 1571 in 4.; 2. ed. 1591 durch Sohn Thomas)" das einen geteilten Kreis mit Alidade beschreibende Kapitel 27 die Aufschrift „The composition of the Instrument called Theodolitus" besitzen soll. — In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts von den **Short** (vgl. 387), **Adams, Brander, Ramsden,** etc., in zahlreichen Exemplaren und fortwährend etwas besser ausgeführt, wurde sodann dem Theodoliten im Anfange des laufenden Jahrhunderts sein gegenwärtiger mustergiltiger Bau durch **Reichenbach** gegeben, auch ein sog. **Versicherungsfernrohr** zur Kontrole des unveränderten Standes beigefügt und durch Drehbarmachen der Limben beider Kreise die Multiplikation und Repetition der Winkel ermöglicht. Schon 1812 stellte Baron **v. Zach,** der 1807 eigens nach München gereist war, um Reichenbachs Theodoliten kennen zu lernen, denselben das glänzende Zeugnis aus: „Die Repetitionstheodoliten von 8 Zoll sind für die allergenausten geodätischen Vermessungen hinlänglich und schon desswegen dazu zu empfehlen, weil sie wegen ihres sehr geringen Gewichts so transportabel sind und so wenig Raum einnehmen, dass man sie auf alle Berge, Thürme, etc. bringen kann. Man gelangt bei ihnen schon nach der 10. Wiederholung (öfters früher) auf die stehende Sekunde. Was diesen Werkzeugen diese grosse Vollkommenheit gibt, ist, ausser ihrer feinen mechanischen Ausführung, ihre äusserst wohl ausgedachte Bauart". — Seit jener Zeit haben sich nun allerdings die Anforderungen sehr gesteigert, aber es ist den Mechanikern gelungen, mit denselben Schritt zu halten; namentlich ist der, noch bei den ältern Theodoliten Reichenbachs verkümmerte, ja zuweilen nur durch ein Segment vertretene Höhenkreis in gleiche Rechte wie der Horizontalkreis eingesetzt worden. — *c.* Für geographische Ortsbestimmungen war der Theodolit weniger geeignet, da für solche die Beobachtung von hohen Sternen notwendig war; aber auch da wusste sich der ausgezeichnete Münchner Mechaniker zu helfen, indem er einen, allerdings bereits 1637 von **Hevel** (vgl. Selenographia pag. 27) ausgesprochenen, aber dann wieder so ziemlich vergessenen Gedanken zu Hilfe nahm. Schon 1816 konnte nämlich **Horner** aus Zürich an Repsold schreiben: „**Reichenbach** hat eine neue Art Theodolit verfertigt, bei welchem das bewegliche Fernrohr unter einem rechten Winkel gebrochen ist, dergestalt, dass man zur Seite durch die Queraxe hineinsieht; Herr von Zach gibt ihm den seltsamen Namen **Stumpfschwanz**". — Aus der successiven Ausbildung dieses sog. „astronomischen" Theodoliten, seiner Erweiterung zum Repetitionstheodoliten, seiner Ausstattung mit Ablesemikroskopen, bequemen Beleuchtungs- und Umlegevorrichtungen, etc., ging nunmehr das unter der folgenden Nummer einlässlich zu behandelnde, gewissermassen ein transportables Observatorium darstellende **Universalinstrument** hervor, das bereits für astronomisch-geodätische Arbeiten fast unentbehrlich geworden ist, und das namentlich die jüngern **Repsold** zu einer früher kaum geahnten Vollkommenheit gebracht haben.

350. Die Theorie des Universalinstrumentes. — Damit das Universalinstrument richtig projiziere, ist es notwendig, dass der eine der beiden Kreise wirklich horizontal stehe, — dass ferner die beiden Lager der Axe, welche den andern Kreis und das Fernrohr trägt, genau denselben Abstand von jenem ersten Kreise besitzen, — und dass endlich diese Axe zu der optischen Axe des Fernrohrs senkrecht stehe, — da offenbar nur in diesem Falle die Gesichtslinie beim Drehen des Fernrohrs eine Vertikalebene beschreibt. — Damit diese drei Hauptbedingungen wenigstens sehr nahe erfüllt seien, d. h. das Instrument als zum Gebrauche bereit oder als richtig **aufgestellt** betrachtet werden könne, ist folgende Reihe von Manipulationen vorzunehmen: Zuerst wird eine Libelle auf die Drehaxe des Fernrohrs aufgesetzt, letztere über eine der Fuss-Schrauben gebracht und nun die Libelle eingestellt; dann wird die Libelle umgekehrt aufgesetzt und von ihrem allfälligen Ausschlage die Hälfte an der Fuss-Schraube, der Rest an der Libelle korrigiert; nachher dreht man die Alidade um 180° und verbessert einen neuen Ausschlag der Libelle zur Hälfte an der Fuss-Schraube, zur Hälfte an einem der Lager; hierauf stellt man die Axe parallel zu den beiden andern Fuss-Schrauben und bringt mit diesen die Libelle nochmals zum Einspielen; endlich stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs genau auf einen Gegenstand ein, — legt entweder das Fernrohr in seinen Lagern um, oder führt dasselbe, nach Drehen der Alidade um 180°, mittelst Durchschlagen auf den Gegenstand zurück, — und verbessert die Hälfte der Abweichung an den Stell-Schrauben des Fadenkreuzes oder des das gebrochene Fernrohr konstituierenden Prismas [a]. — Die kleinen Fehler, welche auch bei sorgfältiger Aufstellung übrig bleiben, sucht man zu bestimmen, um dieselben, soweit es nicht durch passende Anordnung der Beobachtungen gelingt sie unschädlich zu machen, in Rechnung bringen zu können [b].

Zu 350: *a.* Bei dem gebrochenen Fernrohr fallen die vom Objektive kommenden Strahlen auf ein in der Mitte der hohlen Drehaxe angebrachtes gleichschenklig rechtwinkliges Glasprisma I, und werden durch dasselbe in



die eine, das Okular tragende Hälfte der Drehaxe geworfen. Fällt aber ein Strahl unter dem Winkel α auf das Prisma ein, so verlässt er dasselbe (wegen $\beta + \gamma = 45^0 = \delta + \gamma$ oder $\beta = \delta$) auch unter dem Winkel $\varepsilon = \alpha$, so dass $\varphi = (\alpha - \beta) + 180^0 - 2\gamma + (\varepsilon - \delta) = 90^0 + 2\alpha$ wird, also das gebrochene Fernrohr nur für $\alpha = 0$ der Forderung, es solle die optische Axe senkrecht zur Drehaxe stehen oder keine **Kollimation** besitzen, Genüge leisten kann. — Um trotz Zwischenstellung des Prismas auch bei dem gebrochenen Fernrohr die Fadenbeleuchtung durch die Axe zu ermöglichen, hatte W. **Struve** den guten Gedanken, dem Prisma I noch ein zweites Prisma II aus demselben Glase aufzusetzen. — Anhangsweise mag darauf aufmerksam gemacht werden, dass beim astronomischen Fernrohr mit und ohne Prisma **oben-unten** als **unten-oben** erscheint, — dagegen nur ohne Prisma **links-rechts** als **rechts-links.** — Wenn man endlich die Kollimation durch Umdrehen und Durchschlagen ermittelt, so braucht man nur in beiden Lagen den Vertikalkreis abzulesen, um im Mittel der beiden Ablesungen zugleich den Zenitpunkt desselben zu erhalten. — *b.* Auch nach sorgfältiger Aufstellung wird in der Regel der sog. Horizontalkreis, dessen Pol in P liegen mag, eine kleine Neigung i gegen den wahren Horizont besitzen, so dass nur sein Teilpunkt a_0 wirklich im Horizonte liegt; ferner wird die Drehaxe des Fernrohrs nicht genau mit dem Horizontalkreise parallel sein, sondern ihr Westende W eine kleine Erhebung i' über denselben haben; endlich wird die optische Axe nicht vollständig zu der Drehaxe senkrecht stehen, sondern mit ihr einen Winkel $90^0 - c$ bilden, und während sie bei einem gewissen Stande des Instrumentes nach O weisen sollte, so wird sie nach einem benachbarten Punkte O' gerichtet sein, und somit die Ablesung a_1 am Horizontalkreise einem Punkte A_1 am Horizonte entsprechen. Nun hat man aus Dreieck PZW, wenn b_1 die Angabe der Libelle bezeichnet und a durch $90^0 + a_1$ ersetzt wird,



$$\mathrm{Si}\, b_1 = \mathrm{Si}\, i' \cdot \mathrm{Co}\, i - \mathrm{Co}\, i' \cdot \mathrm{Si}\, i \cdot \mathrm{Co}\,(a_1 - a_0) \qquad \text{oder} \qquad b_1 \fallingdotseq i' - i \cdot \mathrm{Co}\,(a_1 - a_0) \qquad \mathbf{1}$$

$$\mathrm{Si}\,(A - a_0 + 90) : \mathrm{Si}\,(a - a_0 + 90) = \mathrm{Co}\, i' : \mathrm{Co}\, b_1 \qquad A \fallingdotseq a = 90^0 + a_1 \qquad \mathbf{2}$$

Ferner folgt aus Dreieck ZWO', wenn z_1 die mit Hilfe des oben bestimmten Zenitpunktes erhaltene Zenitdistanz von O' ist,

$$\mathrm{Si}\, c = \mathrm{Si}\, b_1 \cdot \mathrm{Co}\, z_1 + \mathrm{Co}\, b_1 \cdot \mathrm{Si}\, z_1 \cdot \mathrm{Si}\,[90^0 - (A - A_1)]$$

Da nun in dieser Gleichung die Seite links und das erste Glied rechts klein sind, so muss auch das zweite Glied und somit der Faktor $\mathrm{Si}\,[90^0 - (A - A_1)]$ klein sein, also

$$c \fallingdotseq b_1 \cdot \mathrm{Co}\, z_1 + (A_1 - a_1) \cdot \mathrm{Si}\, z_1 \qquad \text{oder} \qquad A_1 = a_1 + c \cdot \mathrm{Cs}\, z_1 - b_1 \cdot \mathrm{Ct}\, z_1 \qquad \mathbf{3}$$

so dass sich also jede Ablesung mit Hilfe von 1 und 3 leicht für die übrig gebliebenen Aufstellungsfehler korrigieren lässt, sobald diese durch i, i', a_0 und c bestimmt sind. — Um die drei ersten dieser Konstanten zu erhalten, stellt man den Kreis successive auf drei Winkel a_1, $120^0 + a_1$ und $240^0 + a_1$ ein, an der Libelle die zugehörigen b_1, b_2 und b_3 ablesend. Da nämlich $\mathrm{Co}\, 120^0 = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Si}\, 120^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\mathrm{Co}\, 240^0 = -\frac{1}{2}$ und $\mathrm{Si}\, 240^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, so ergeben sich in diesem Falle nach 1 die drei Beziehungen

$$b_1 = i' - i \cdot Co\,(a_1 - a_0) \qquad b_2 = i' + \tfrac{1}{2}\, i \cdot Co\,(a_1 - a_0) + \tfrac{1}{2}\, i \cdot Si\,(a_1 - a_0) \cdot \sqrt{3}$$
$$b_3 = i' + \tfrac{1}{2}\, i \cdot Co\,(a_1 - a_0) - \tfrac{1}{2}\, i \cdot Si\,(a_1 - a_0) \cdot \sqrt{3}$$

aus welchen durch Kombination die zur Bestimmung der i', a_0 und i bequemen Gleichungen

$$b_1 + b_2 + b_3 = 3 \cdot i' \qquad b_2 - b_3 = i \cdot \sqrt{3} \cdot Si\,(a_1 - a_0) \qquad b_2 + b_3 - 2\,b_1 = i \cdot 3 \cdot Co\,(a_1 - a_0) \tag{4}$$

folgen. Um sodann noch c zu bestimmen, ist es am einfachsten, das Fernrohr in den Lagern umzulegen, wobei c das Zeichen wechselt, — nochmals zu nivellieren, wodurch man b_1' erhält, das infolge einer Zapfenungleichheit (324) etwas verschieden von b_1 ausfallen kann, — dann das Fadenkreuz auf O' zurückzuführen, — und endlich eine neue Ablesung a_1' zu machen. Da nämlich in diesem Falle nach 3

$$A_1 = a_1' - c \cdot Cs\,z_1 - b_1' \cdot Ct\,z_1$$

wird, so folgt aus Kombination mit 3

$$c = \tfrac{1}{2}\,(a_1' - a_1)\ Si\,z_1 - \tfrac{1}{2}\,(b_1' - b_1) \cdot Co\,z_1 \tag{5}$$

Wenn man bereits (342) Excentricität und Indexfehler kennt, so kann man, statt umzulegen, um 180° drehen und durchschlagen. — Anhangsweise mag noch beigefügt werden, dass nach 3 für eine zweite Stellung

$$A_2 = a_2 + c \cdot Cs\,z_2 - b_2\,Ct\,z_2$$

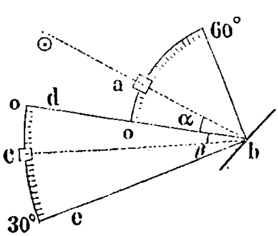
also für den durch die beiden Stellungen bestimmten Horizontalwinkel der Wert

$$A_2 - A_1 = a_2 - a_1 + c\,(Cs\,z_2 - Cs\,z_1) - (b_2\,Ct\,z_2 - b_1 \cdot Ct\,z_1) \tag{6}$$

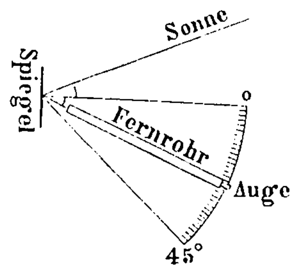
folgt. Das erste Korrektionsglied enthält beständig eine Differenz, während das zweite, wenn das eine Objekt über, das andere unter dem Stationspunkte steht, in eine Summe übergeht, also um so weniger vernachlässigt werden darf. Beide Glieder können, namentlich bei Objekten von kleiner Zenitdistanz, sehr erhebliche Beträge annehmen, welche jedoch, wenn man entsprechend 347 in beiden Lagen des Instrumentes beobachtet, im Mittel grösstenteils verschwinden.

351. Die ältern Spiegelinstrumente. — Nachdem der **Jakobsstab** (cross-staff, vgl. 333) lange für Messungen auf der See fast ausschliesslich gebraucht worden war, wurde ihm später von manchen der sog. **Davis-Quadrant** (back-staff) vorgezogen[a], — namentlich aber auch wiederholt der Versuch gemacht, durch Beiziehung eines Spiegels ein zu solchen Zwecken brauchbares Instrument herzustellen[b].

Zu 351: *a.* Der durch John Davies oder **Davis** (Sandridge in Devonshire 1550? — Küste von Malacca 1605; berühmter Seemann, nach welchem die von ihm aufgefundene Wasserstrasse zwischen Grönland und Labrador benannt ist) ausgedachte und in der Schrift „The seaman's secrets (1594)" beschriebene **Back-Staff** besteht aus zwei sich zu einem Quadranten ergänzenden Sectoren mit verschiebbaren Dioptern a und c, sowie einem Auffangsblättchen b mit Spalte; dabei ist c ein gewöhnliches Okulardiopter, während a, das ursprünglich auch nur eine Öffnung besass, später nach dem Vorschlage von **Flamsteed** und **Halley**

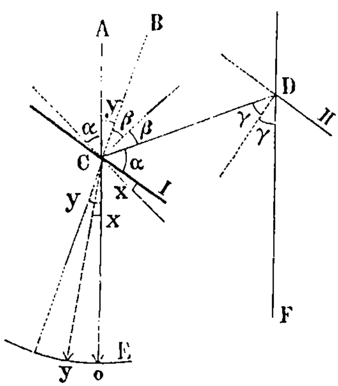


durch eine kleine Sammellinse der Brennweite ab ersetzt wurde. Beim Gebrauche hält der Beobachter das Instrumentchen bei d mit der linken, bei c mit der rechten Hand, und stellt sich so, dass er die Sonne im Rücken hat; dann dreht er den Quadranten, bis die zum voraus auf einen ganzen Grad α eingestellte a ein Sonnenbildchen auf b wirft, und verstellt endlich c nach β, bis er durch c die Spalte b nach dem Meereshorizonte gerichtet sieht: Die Summe $\alpha + \beta$ kömmt dann etwa bis auf 5' genau mit der Sonnenhöhe überein. — *b.* Abgesehen davon, dass schon Robert **Dudley** (Sheen in Surrey 1573 — Florenz 1639; später Herzog von Northumberland) in seiner Schrift „Del arcano del mare. Firenze 1630, 2 Vol. in fol.“ Messwerkzeuge mit Spiegeln abgebildet haben soll, ist bemerkenswert, dass Rob. **Hooke** um 1664 den Vorschlag machte, mit Hilfe eines Spiegels ein Instrument zu konstruieren, welches den Davis-Quadrant mit Vorteil ersetzen dürfte. Nach „**Lalande**, Abrégé de navigation. Paris 1793 in 4.“ stimmte dasselbe wesentlich mit einem 1732 durch Jean-Paul Grandjean de **Fouchy** (Paris 1707 — ebenda 1788; Sekr. Akad. Paris) der Pariser Akademie vorgelegten und in der Note „Nouvel instrument pour observer les hauteurs en mer (Gallon, Machines approuvées par l'Ac. d. Sc. VI 79)“ beschriebenen Instrumente überein, das folgende Einrichtung besass: Ein zweifüssiger Oktant, der durch Transversalen 2' gab, trug auf der Alidade ein Fernrohr und über dem Centrum einen zur Null-Linie senkrechten festen Spiegel, der so niedrig war, dass mit dem Fernrohr über ihn weggesehen werden konnte. Wurde nun letzteres bei annähernd vertikalem Stande der Oktantenfläche so gestellt, dass direkt der Meereshorizont und durch Reflexion die Sonne gesehen wurde, so entsprach offenbar die Ablesung der halben Höhe der Sonne. — Die Ideen von **Hooke** und **Fouchy** waren offenbar nicht übel; aber da das Instrument des erstern vielleicht nicht einmal wirklich ausgeführt wurde und dasjenige des zweiten erst zu einer Zeit auftauchte, wo bereits, wie wir sofort (352) zeigen werden, etwas noch Besseres erfunden war, so fielen jene ersten Spiegelinstrumente, ohne jemals eine grössere Bedeutung erlangt zu haben, sofort der Geschichte anheim. Ähnlich erging es noch später einem, dem kurz zuvor durch **Höschel** für die Geometer verfertigten „katoptrischen Zirkel (vgl. Verz. 175)“ verwandten Instrumente, auf welches sich der 1783 durch **Lexell** erstattete „Rapport au sujet d'un nouvel instrument du Capitaine **Burdett**, nommé **Compas optique** (Act. Petr. 1787)“ bezog; dasselbe war schon bei seinem Entstehen von dem Spiegelsextanten überflügelt, so dass der Berichterstatter auszusprechen hatte: „Il a les défauts de ce sextant, sans en posséder tous les avantages“. — Inwiefern der Höhenmesser, welchen **Gerbert** in seiner etwa 981—83 geschriebenen Geometrie als „Horoscopium“ ohne eingehende Beschreibung erwähnt, von Einzelnen mit Recht den katoptrischen Instrumenten zugezählt wird, kann ich nicht entscheiden, — und ebenso verhält es sich mit dem in „Jacques **Besson** (Grenoble 1510? — Orléans 1580?; Prof. math. Orléans), Le mésolabe. Paris 1567 in 4.“ beschriebenen Instrumente, da mir diese Schrift nicht vorliegt, und das von andern auszugsweise Gegebene über die Natur desselben nur höchst ungenügenden Aufschluss giebt.



352. Spiegelsextant und Spiegelkreis. — Neben dem Bordakreise und Universalinstrumente ist der, wie ersterer zum Messen scheinbarer Distanzen und wie beide zum Messen von Höhenwinkeln dienende, aber kein Stativ erfordernde, also auch zur See verwendbare, von **Newton** ausgedachte und durch **Hadley** in brauchbare Form gebrachte **Spiegelsextant** das wichtigste Winkelinstrument, und es soll daher im folgenden (353—54) ebenfalls das notwendigste aus seiner Theorie mitgeteilt werden [a]. Ferner ist zu erwähnen, dass, wie die Sectoren durch Vollkreise, so auch die Spiegelsextanten durch **Spiegelkreise** zu ersetzen versucht wurden, dass jedoch der Erfolg nicht ein ebenso durchschlagender war [b].

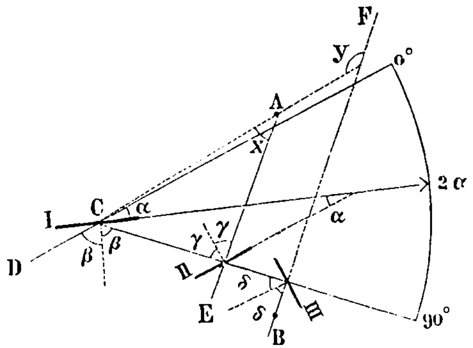
Zu 352: *a.* Ein ebener Spiegel I reflektiert den von einem Objekte A auffallenden Lichtstrahl AC so nach CD, dass $\alpha = \alpha$ ist; damit dagegen der von einem andern Objekte B auffallende Strahl BC ebenfalls nach CD zurückgeworfen werde, ist I so zu drehen, dass nunmehr die Bisectrix des Winkels $BCD = 2\beta$ normal dazu wird. Bezeichnet nun aber x die für $ACB = y$ nötige Drehung, so ist offenbar



$$2\alpha + 2\beta + y = 180^0 = 2(\alpha + \beta + x) \text{ oder } y = 2x$$

Stellt man daher einen zweiten Spiegel II so auf, dass er zur Anfangslage von I parallel ist, und ein Fernrohr so, dass dessen optische Axe mit der Reflexionsrichtung DF von CD zusammenfällt, so wird man (vorausgesetzt, die Distanz von A sei im Verhältnisse zu CD sehr gross) im Fernrohr einerseits A neben II vorbei in einer zu CA parallelen Richtung sehen, und anderseits I nur so zu drehen brauchen, dass man B durch doppelte Reflexion in derselben Richtung sieht, um die $^1/_2$ y gleiche Drehung x bewerkstelligt zu haben. Giebt man somit noch ein Mittel bei, um x messen zu können, indem man I über dem Centrum eines geteilten Kreises auf einem drehbaren Radius befestigt, so kann man, wenn man ACE dem Nullpunkt der Teilung entsprechen lässt und den Teilstrichen ihren Doppelwert beischreibt, den Winkel y direkt ablesen. — Dieser Gedankengang veranlasste **Newton**, eine Skizze für ein Instrument zu entwerfen, welche er sodann 1699 VIII 16 nebst einem kurzen erläuternden Texte der Roy. Society vorlegte; da er aber glaubte, die Forderung stellen zu sollen, dass eine Messingtafel (plate of brass) die Grundlage des Ganzen bilde und dass der vorgesehene Oktant 3 bis 4' Radius haben müsse, um ihn direkt in halbe Minuten und durch Transversalen (a diagonal scale) in $^1/_{12}$ Minuten teilen, somit y auf 10" genau ablesen zu können, so erschien sein Instrument zu schwerfällig, um praktisch brauchbar zu werden, und es ist wahrscheinlich diesem Umstande zuzuschreiben, dass **Halley** die ihm zur Prüfung übergebenen Papiere liegen liess, so dass sie erst 1742 X 28 der Roy. Society nochmals vorgelegt und nun unter dem Titel „A true copy of a paper found in the handwriting of Sir Isaac Newton among the papers of the late Dr. Halley, containing a Description of an instrument for observing the

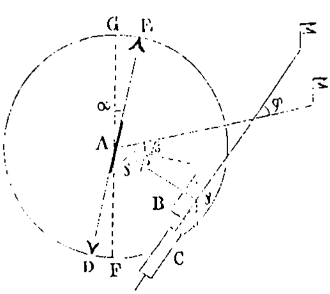
Moon's distance from the fixt stars at sea (Ph. Tr. 1742)" veröffentlicht wurden. — Inzwischen legte John **Hadley** (Bushey in Hertfordshire 1682 — London 1744; wohlhabender Grundbesitzer, der sich aus Liebhaberei mit Mechanik und Physik befasste, aber nicht „Instrument-Maker" war) 1731 V 13 der Roy. Society unter dem Titel „The description of a new instrument for taking angles (Ph. Tr. 1731)" eine Note vor, in welcher zwei Formen eines ähnlichen Instrumentes abgebildet und beschrieben waren, — **die eine** nach ihrer ganzen Anlage so nahe der Newton'schen Zeichnung entsprechend, dass man sich der Annahme kaum erwehren kann, es habe Hadley dieselbe bei Halley gesehen, — **die andere** wesentlich mit dem beistehenden Schema übereinstimmend, welches einen der historischen Sammlung der Zürcher Sternwarte (Verz. 299) zugehörenden hölzernen Oktanten von circa 40cm Radius darstellt, der zwar leider weder Name noch Jahrzahl zeigt, aber unzweifelhaft aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts stammt. Auf diesem Oktanten, welchen ich, da die durch ihn repräsentierte Form später ausschliesslich ausgeführt wurde, der weitern Beschreibung zu Grunde lege, ist auf einer Elfenbein-Einlage der Bogen von 45° in 90 Halbgrade, und jeder von diesen nochmals in drei Teile geteilt, wobei jedem Teilstriche (wie bei Newton) sein Doppelwert beigeschrieben ist, so dass man angeblich den Stand der Alidade direkt auf Drittelsgrade und mittelst Vernier auf einzelne Minuten ablesen kann. Auf der Alidade ist über dem Drehpunkte C ein Spiegel I angebracht, während der Limbus zwei feste, in der obern Hälfte (wie schon bei Hadley) unbelegte Spiegel trägt, von welchen II parallel zur Null-Linie, III dagegen senkrecht zu ihr ist. Bei A und B endlich befinden sich Okulardiopter, deren ersteres in Hadleys Zeichnung durch ein in der Richtung A II liegendes Fernröhrchen ersetzt ist. Da nun (s. Fig.)



$$x = 2\beta - 2\gamma \qquad y = (180^\circ - 2\beta) + (180^\circ - 2\delta) \qquad \alpha + 90 - \beta = 90 - \gamma \qquad \gamma + \delta = 90^\circ$$

somit $\qquad x = 2\alpha \qquad y = 180 - 2\alpha$

ist, so ergiebt sich teils die Notwendigkeit der erwähnten Verdopplung, teils die Möglichkeit, einen Winkel (von A oder B aus, je nachdem er kleiner oder grösser als 90° ist) zu messen, indem man vorerst die Fläche des Oktanten annähernd in die Winkelebene bringt, — dann das Eine Objekt (von A aus das links bei E, von B aus das rechts bei F liegende) direkt durch das sog. Fensterchen anvisiert, — und endlich die Alidade dreht, bis das mittelst doppelter Reflexion erhaltene Spiegelbild des Andern (D) mit ihm coincidiert. Dabei waren die Spiegel schon von **Hadley** mit den für ihre Richtigstellung (353) nötigen Korrektionsmitteln versehen worden, — sein Fernrohr besass ein aus drei Haaren (2 parallel und 1 dazu senkrecht) bestehendes Netz, — auch waren bereits farbige Gläser zum Schutze des Auges bei Sonnenbeobachtungen beigegeben. — Aus einer zweiten Mitteilung von **Hadley**, „An account of observations made on board the Chatham-Yacht 1732 VIII 30 bis IX 1 for the trial of an instrument for taking angles (Ph. Tr. 1732)", ersicht man, dass er 1731 der Roy. Society ein von seinem Bruder George (1685—1768; Advokat) im Sommer 1730 erstelltes hölzernes Modell der zweiten Art vorlegte, welches Minuten gab, — dass bald darauf J. **Sisson** ein Exemplar in Messing ausführte, mit dem man Viertelsminuten erhielt, und das bereits den jetzt noch üblichen Handgriff besass, — und dass mit letzterm James **Bradley**, John **Hadley** und des letztern jüngerer Bruder Henry (1697—1771; erst Arzt, dann Supercargo) die von der Admiralität verlangten Proben ausführten. Diese Proben bestanden darin, dass wiederholt, erst vor Anker und später auf offener See, Distanzen des obern Sonnenrandes vom scheinbaren Meereshorizonte gemessen, und die Ergebnisse, unter Berücksichtigung der Refraktion und Depression, mit den aus den Beobachtungszeiten berechneten Höhen verglichen wurden, — und da **Hadley** (vgl. die „Abridgements") 1734 ein Patent erhielt, so scheint man mit dem Ergebnisse dieser Proben (der mittlere Fehler einer Messung vor Anker betrug $\pm$ 0',7, — auf offener See $\pm$ 1',6) zufrieden gewesen zu sein. — Ungefähr ein Jahr nach Hadleys erster Mitteilung erhielt die Roy. Society durch James **Logan**, Gouverneur von Pennsylvanien, davon Kenntnis, dass auch der Amerikaner Thomas **Godfrey** (1700? — Philadelphia 1749; ein Glaser, der einige mathematische und astronomische Kenntnisse, sowie ungewöhnliche Erfindungsgabe, leider aber auch einen unlöschbaren Durst besass) ein ähnliches „Reflecting Instrument" erfunden und ihm 1730 ein in Holz ausgeführtes Modell vorgezeigt habe; aber da einerseits, wie ich oben zeigte, die erste Idee durch **Newton** schon längst ausgesprochen war, und anderseits die 1832 von **Allen** in sein „American biographical and historical dictionary" aufgenommene Erzählung, es sei John Hadley durch seinen Bruder Henry ein solches Godfrey'sches Instrument zugekommen, durch die **Rigaud** und **Dreyer** als Fabel erwiesen wurde, so reduziert sich das Verdienst von **Godfrey** ungemein, während **Hadley** dasjenige bleibt, das neue Instrument in mustergiltige Form gebracht und in die Praxis eingeführt zu haben, somit die Übung, ihm dessen Namen beizulegen, immerhin eine gewisse Berechtigung besitzt. — In England wurde der Hadley'sche Oktant, der später unter Weglassung des dritten Spiegels zum Sextanten erweitert wurde, durch die **Wright**, **Ramsden**, **Cary**, etc., alsbald in vielen hundert Exemplaren und in immer vollkommnerer Weise ausgeführt, — in Deutschland namentlich durch **Brander** (vgl. Verz. 329); in Frankreich, wohin ihn **Godin** schon 1735 gebracht hatte, fabrizierte man ihn anfänglich so nachlässig, dass er (vgl. Lacaille in Mém. Par. 1759) in übeln Ruf kam und erst später durch die **Lenoir**, etc. rehabilitiert wurde. — *b.* Der **Spiegelkreis** wurde schon von Tob. **Mayer** in der Abhandlung „Nova methodus perficiendi instrumenta geometrica et novum instrumentum goniometricum (Comm. Gott. 1752)", und 1754 auch direkt der englischen Admiralität empfohlen; letztere liess ihn durch **Bird** ausführen und durch **Bradley** prüfen, hielt aber schliesslich doch am Sextanten fest. Später kam **Borda** in seiner „Description et usage du cercle de réflexion. Paris 1787 in 4." auf den Spiegelkreis zurück, und in der neuern Zeit ist derselbe namentlich durch **Pistor** in Berlin vervollkommnet und vielfach ausgeführt worden. Bei seiner gegenwärtigen Konstruktion sitzt der drehbare Spiegel A auf einem Durchmesser mit zwei Verniers D und E; der feste Spiegel aber ist durch ein vor dem Fernrohr C stehendes



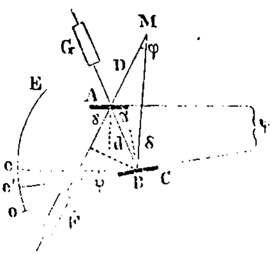
Prisma B ersetzt, dessen Reflexionsebene der Null-Linie FG parallel sein soll. Da nun für diese Kombination offenbar

$$\varphi = 180^{0} - 2\beta - 2\gamma = 2\,(90^{0} - \beta - \gamma) = 2\alpha$$

so tritt der Spiegelkreis wirklich für den Sextanten ein und besitzt auch eine wesentlich gleiche Theorie. — Noch ist beizufügen, dass wohl **Amici** der erste war, welcher die Spiegel durch Prismen zu ersetzen vorschlug; er beschrieb sein etwa von 1820 datierendes „Nouvel instrument de réflexion“ in einem 1822 VII 3 aus Modena an Zach geschriebenen Briefe (vgl. Corr. astr. VI 554); und **Horner**, der bald darauf Zach in Genua besuchte, sagte 1834 II 16 in einem Briefe an Gautier, dass er damals mit einem solchen „Sextant à prismes“ mehrere Polhöhen gemessen habe, und dass **Amici** nur durch die Schwierigkeit, reine Prismen zu erhalten, abgehalten worden sei, diese Sache weiter zu verfolgen, wie es nun **Steinheil**, ohne denselben zu nennen, in seiner Note „Neuer Reflexionskreis mit Prismen statt Glasspiegel (A. N. 243 von 1833)“ gethan habe.

353. Die Messung scheinbarer Distanzen. — Messungen mit einem Spiegelsextanten geben natürlich nur dann richtige Resultate, wenn bei ihm die Spiegel und das Fernrohr diejenige Lage haben, welche bei Entwicklung des Principes vorausgesetzt wurde, d. h. wenn die optische Axe des Fernrohrs dem Limbus parallel ist, die beiden Spiegel senkrecht zu demselben stehen und der parallele Stand dieser letztern dem Nullpunkte der Teilung entspricht. Es muss also jeder Sextant vor Beginn einer Beobachtungsserie nach diesen verschiedenen Richtungen geprüft und bestmöglich korrigiert, sowie nachträglich jedes Messungsergebnis für die übriggebliebenen kleinen Instrumentalfehler verbessert werden [a].

Zu 353: *a.* Um zu untersuchen, ob der Nullpunkt der Teilung wirklich dem parallelen Stande der Spiegel A und B entspreche, oder aber diesem Stande eine andere Ablesung, der offenbar von jedem gemessenen Winkel in Abzug zu bringende sog. **Kollimationsfehler** c, zukomme, wollen wir uns B so gedreht denken, dass derselbe Gegenstand M sowohl direkt als durch doppelte Spiegelung gesehen wird; die dieser Stellung zukommende Ablesung sei c', während φ den Winkel der von M ausgehenden Strahlen, ψ aber denjenigen der beiden Spiegel bezeichne. Man hat alsdann



$$\varphi = 2\gamma - 2\delta = 2\,[90 + \gamma - (90 + \delta)] = 2\psi \qquad \mathbf{1}$$

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{d \cdot \mathrm{Si}\, 2\gamma}{D + d \cdot \mathrm{Co}\, 2\gamma} \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{1}{\mathrm{Si}\, 1''}\left[\frac{d}{D}\,\mathrm{Si}\, 2\gamma - \frac{d^2}{2D^2}\cdot \mathrm{Si}\, 4\gamma\right] \qquad \mathbf{2}$$

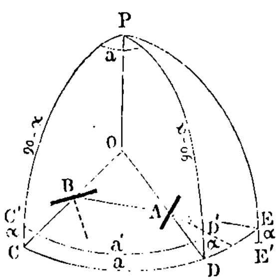
und, da jedem Teilstriche das Doppelte seines Wertes beigeschrieben ist,

$$\tfrac{1}{2}\,(c - c') = \psi = \tfrac{1}{2}\,\varphi \quad \text{oder} \quad c = c' + \varphi \qquad \mathbf{3}$$

Aus 2 geht hervor, dass für ferne Gegenstände, wie z. B. für die Sonne, φ verschwindet, und in solchem Falle giebt somit c' unmittelbar die Kollimation c; jedoch ist es bei Anwendung der Sonne besser, nicht die Deckung der Sonne mit ihrem Spiegelbilde zu beobachten, sondern letzteres successive beidseitig zur Berührung zu bringen und sodann das Mittel aus beiden Ablesungen zu nehmen. Will man dagegen nähere terrestrische Gegenstände verwenden, so muss für ein und allemal 2γ ermittelt werden, was z. B. in der Weise geschehen kann, dass man den Sextanten auf einem Stative oder auf seinen Füsschen festlegt und auf M einstellt, — dann ein mit einem Fadenkreuz versehenes Fernröhrchen G so plaziert, dass man dadurch M im Spiegel B sieht, — nunmehr mit dem Sextanten den Winkel $GBM = 2\delta$ misst, wobei sich die Ablesung s ergeben mag, — und endlich die gesuchte Grösse aus

$$2\gamma = 2\delta + \varphi = s - c + \varphi = s - c' \qquad \mathbf{4}$$

berechnet. — Um zu untersuchen, ob B senkrecht zum Limbus stehe, sehe man bei C, ob der Rand des Limbus und sein Spiegelbild in B in gleicher Höhe stehen, — oder man stelle vor B ein Diopter mit Horizontalfaden auf, bei E ein Diopter mit eben so hoher Öffnung und sehe, ob durch letztere der Faden und sein Spiegelbild in B gleiche Höhe zu haben scheinen; ist es nicht der Fall, so korrigiere man B, — stelle sodann den Index auf c ein, — sehe, ob sich nunmehr ein Stern und sein Spiegelbild decken, — und bringe sie, wenn es nicht der Fall ist, durch die Korrektionsschrauben von A zur Deckung. — Um endlich die Lage des Fernrohrs zu untersuchen, stellt man die beiden vorerwähnten Diopter so auf den Limbus, dass die durch sie bestimmte Richtung ungefähr parallel der Fernrohraxe ist, und dreht nun den natürlich bei dieser Operation wieder fest liegenden Sextanten so, dass ein bestimmter Gegenstand G in der Richtung der Diopter erscheint. Fällt nun im Fernrohr nicht G, sondern ein anderer, wir wollen annehmen ein höher liegender Gegenstand H, mitten zwischen die zwei zum Limbus parallelen Faden, so schätze man (allfällig mit dem Sextanten selbst) den Winkel $(G, H) = \alpha$ ab, und korrigiere dann entweder das Fernrohr um α oder bringe α in Rechnung. Letzteres kann auf folgende Weise geschehen: Sind C, D, E die Punkte, in welchen bei



paralleler Fernrohraxe die von den beiden Winkelobjekten kommenden und von den Spiegeln reflektierten Strahlen eine vom Scheitel O des Winkels beschriebene Kugel treffen würden, und P der Pol des sie verbindenden Kreises, so wird wegen α nunmehr D um α nach D' gehoben, — also E, da die Normale des Spiegels A immer noch mit dem einfallenden und reflektierten Strahle in derselben Ebene liegen muss, nahe um α nach E' gesenkt, — folglich C aus analogen Gründen wieder nahe um α nach C' gehoben. Nun folgt aus Dreieck P C' D'

$$\mathrm{Co}\, a' = \mathrm{Si}^2 \alpha + \mathrm{Co}^2 \alpha \cdot \mathrm{Co}\, a = \mathrm{Co}\, a + \mathrm{Si}^2 \alpha\, (1 - \mathrm{Co}\, a)$$

also hat man (42 : 4, 5)

$$a' = a - \alpha^2 \cdot \mathrm{Tg}\, {}^1\!/_2\, a \cdot \mathrm{Si}\, 1'' \qquad \mathbf{5}$$

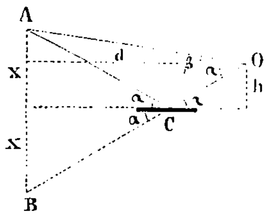
oder auch nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\mathrm{Si}^2\, {}^1\!/_2\, a' = {}^1\!/_2\, (1 - \mathrm{Co}\, a') = \mathrm{Si}^2\, {}^1\!/_2\, a \cdot \mathrm{Co}^2 \alpha \quad \text{also} \quad \mathrm{Si}\, {}^1\!/_2\, a' = \mathrm{Si}\, {}^1\!/_2\, a \cdot \mathrm{Co}\, \alpha \qquad \mathbf{6}$$

so dass sich der Einfluss von α leicht bestimmen lässt. — Nur beiläufig (im Rückblick auf 144) darauf hinweisend, dass, wenn man die für den Winkel der Sonne mit einem links von ihr liegenden Gegenstande erhaltene Ablesung, ohne die Lage des Sextanten zu verändern, rasch um die nach 4 erhaltenen 2γ vermehrt, sich der reflektierte Sonnenstrahl ebenfalls um 2γ drehen muss, also wie beim **Heliotropen** nach dem Gegenstande hingeworfen wird, so mögen dagegen zum Schlusse noch einige historisch-litterarische Notizen folgen: Die schon von **Hadley** selbst ins Auge gefasste Theorie seines Sextanten wurde dann namentlich durch **Maskelyne** in seinen „Remarks on the Hadley's Octant (Ph. Tr. 1772 und Naut. Alm. for 1774)" und durch **Borda** sowohl in seiner Abhandlung „Opérations faites à bord de la frégate la Flore (Mém. Par. 1773), als in seiner oben erwähnten „Description" von 1787 weiter ausgeführt; so z. B. verdankt man letzterm die Einführung der zur Untersuchung so bequemen kleinen Diopter (viseurs de métal) und unsere Korrektionsformel 6. Aus der grossen Zahl anderer betreffender Schriften erwähne ich: „Jan Hendrik **van Swinden** en Pieter **Nieuwland** (Diemermeer bei Amsterdam 1764 — Leyden 1794; Prof. math. Amsterdam und Leyden), Verhandeling over de inrigting en het gebruik der Octanten en Sextanten. Amsterdam 1788 in 8., — **Bohnenberger**, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung. Göttingen 1795 in 8., — **Encke**, Über den Spiegelsextanten (Berl. Jahrb. 1830; zum Teil nach Gauss), — A. **Schell**, Über den Einfluss der Fehler des Spiegelsextanten (Z. f. M. u. Ph. 17 von 1872), — etc."

354. Die Messung der Höhenwinkel. — In den ersten Zeiten wurde der Sextant fast nur auf dem Meere und meistens zu Höhenmessungen benutzt, — dabei die kürzeste Distanz eines Gestirnes vom sog. **natürlichen** oder Meereshorizonte als Höhe desselben angesehen, — und höchstens diese Distanz noch für die sog. **Depression** des Horizontes (vgl. 431) etwas korrigiert. Verschiedene Versuche, sich vom Meereshorizonte zu emanzipieren, gelangen nur teilweise [a]; dagegen wurden, als man den Sextanten etwas später, namentlich auf Reisen, auch vielfach zu Höhenmessungen auf dem Lande benutzte, zu Gunsten dieser letztern mit gutem Erfolge sog. **künstliche** Horizonte eingeführt [b].

Zu 354: *a.* Schon **Hadley** hatte, wie aus seiner Note „A spirit level to be fixed to a Quadrant for taking a meridional altitude at Sea, when the Horizon is not visible (Ph. Tr. 1733)" hervorgeht, die Idee, die Einstellung auf den natürlichen Horizont dadurch entbehrlich zu machen, dass man an dem gewöhnlichen Höhenquadranten parallel zur Null-Linie eine Libelle anbringe, und ein Hilfsbeobachter dieselbe in dem Augenblicke ablese, wo der Beobachter das Höhenobjekt einstelle. Später, und so z. B. noch von Karl Adolf **Morlot** (Neapel 1820 — Bern 1867; Geolog und Archäolog; vgl. Not. 189), wurde mehrfach der Versuch gemacht, die Libelle so am Spiegelsextanten anzubringen, dass der Beobachter selbst ihren Stand wahrnehmen könne; aber es gelang meines Wissens nie, eine ganz befriedigende Kombination zu finden. — *b.* Schon **Maskelyne** teilt (Ph. Tr. 1769) bei Anlass der von Thom. **Wright** auf der Insel Coudre bei Quebek zu Gunsten des Venusdurchganges von 1769 gemachten Zeit- und Polhöhenbestimmungen mit, dass derselbe „a brass Hadley's sextant of about 15 inches radius, with a magnifying glass to read off the observations, and a rectangle reservoir for holding quicksilver, or any other fluid, which is sheltered from the wind by two glass sides inclined to one another, and ground truly plane" besessen habe, und es lässt sich aus dieser eingehenden Beschreibung schliessen, dass ein solcher Horizont mit Schutzdach damals etwas Neues, vielleicht sogar eine Erfindung von **Wright**, der selbst die Benutzung von „a saucer of oil" erwähnt, gewesen sei. — Ganz obiger Beschreibung entsprechende **Quecksilberhorizonte** lieferte (vgl. Verz. 291) z. B. Thomas **Jones** (1775—1852; Schüler von Ramsden, dann Mech. London), während Andere **Spiegelhorizonte**, d. h. mit einer Libelle horizontal zu stellende Glasspiegel (vgl. Verz. 290), vorzogen. In beiden Fällen ist die Theorie dieselbe: Wenn nämlich A ein Gegenstand ist, B sein Bild in einem horizontalen Spiegel C, h die Höhe des Auges über diesem letztern, d die Horizontaldistanz desselben von A und B, β der Elevationswinkel von A, α der Depressionswinkel von B, und x die Höhe von A über der Spiegelebene, so hat man successive



$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{x+h}{d} \qquad \mathrm{Tg}\,\beta = \frac{x-h}{d} \qquad \mathrm{Tg}\,\alpha - \mathrm{Tg}\,\beta = \frac{2h}{d} \qquad \mathrm{Si}\,(\alpha-\beta) = \frac{2h}{d}\cdot \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\beta \qquad \mathbf{1}$$

also $$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{h}{d\cdot \mathrm{Si}\,1''}\cdot \mathrm{Co}\,\alpha\cdot \mathrm{Co}\,\beta \qquad \mathbf{2}$$

und es kann somit wirklich für einen nicht gar zu nahen Gegenstand der Winkel zwischen ihm und seinem Bilde in einem horizontalen Spiegel gleich seinem doppelten Höhenwinkel gesetzt werden. — Vgl. auch „Eugen **Gelcich** (Cattaro in Dalmatien 1858 geb.; Dir. naut. Anstalt Lussinpiccolo in Istrien), Über künstliche Horizonte (Zeitschr. f. Instr. 1885)".

XIV. Die absoluten Messungen.

Après le soin de perfectionner les observations, rien n'est plus nécessaire que de chercher à déterminer les limites des erreurs qui peuvent rester dans les observations. *(Deluc.)*

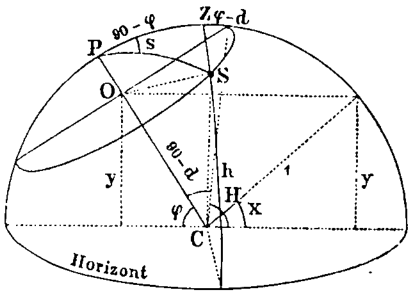
---

355. Zeitbestimmung aus einer Sternhöhe. — Da infolge der täglichen Bewegung jedes Gestirn an jedem Orte zu einer bestimmten Zeit eine bestimmte Höhe besitzt, so kann man offenbar eine Zeitangabe durch eine Höhenangabe ersetzen [a]. Ferner geht daraus hervor, dass es möglich ist, aus jeder unter gegebener Polhöhe zu einer gewissen Uhrzeit gemessenen Höhe eines nach seinen Coordinaten bekannten Gestirnes den dieser Uhrzeit zukommenden Stundenwinkel desselben zu berechnen [b]. — Dieser Stundenwinkel giebt aber (193), wenn man die Sonne beobachtet hat, unmittelbar die **wahre Zeit** der Beobachtung, — und bei jedem Gestirne, sofern man die Rektascension desselben zuzählt, die **Sternzeit,** — somit in beiden Fällen durch Vergleichung mit der Uhrzeit der Beobachtung die **Uhrkorrektion** auf die zu Grunde gelegte Zeit oder eine sog. **Zeitbestimmung** [c].

Zu 355: *a.* So lange zuverlässige Uhren fehlten, war es sehr zweckmässig das Eintreten einer Erscheinung durch eine gleichzeitige Höhenangabe zu fixieren, und es zeugt von dem feinen Takte der Araber, dass sie dieses von **Ptolemäus** nur ganz ausnahmsweise benutzte Verfahren vielfach anwandten, so z. B. **Ibn Junis** aufzeichnete, es habe 978 VI 8 zu Kairo eine Sonnenfinsternis begonnen, als die Sonne in 56° Höhe stand, und aufgehört, als die Höhe noch 26° betragen habe. Ja die Araber wussten diese Methode noch dadurch zu verfeinern, dass sie je **vor** und **nach** dem zu fixierenden Momente die Höhe eines Gestirnes massen und überdies die Anzahl der Schwingungen abzählten, welche eine an einem Faden aufgehängte Kugel von der ersten Messung bis zu jenem Momente und dann wieder bis zur zweiten Messung machte. — *b.* Beim gegenwärtigen Stande der Trigonometrie wird diese Rechnung mit grösster Leichtigkeit absolviert; denn wenn unter der Polhöhe φ ein Stern der Deklination d in der (nach 168—70) für die Refraktion verbesserten Zenitdistanz z beobachtet wird, so folgt für seinen Stundenwinkel s aus Dreieck Pol-Zenit-Stern (nach 90:4) sofort die bequeme Formel

$$\mathrm{Tg}\,\frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}\,(\varphi - g)\cdot \mathrm{Si}\,(d - g)}{\mathrm{Co}\,g \cdot \mathrm{Co}\,(z + g)}} \qquad \text{wo} \qquad g = \frac{\varphi + d - z}{2} \qquad \mathbf{1}$$

In früherer Zeit, wo geschlossene Formeln und Logarithmen fehlten, war dagegen die Sache etwas schwieriger und so ging z. B. **Kepler** (vgl. Astronomia. Pars optica. Cap. 11, oder Opera II 375) in folgender Weise vor: Er legte durch den Mittelpunkt O des Parallels des Sternes S eine Parallelebene zum Horizonte, und führte die Höhe y = Si x dieser Parallelebene, sowie die Culminationshöhe $H = 90^0 - (\varphi - d)$ als Hilfsgrössen ein, und da hiefür aus der Figur



$$\text{Si}\,x = y = O\,C \cdot \text{Si}\,\varphi = \text{Si}\,d \cdot \text{Si}\,\varphi \qquad 2$$

$$\text{Si}\,H = \text{Si}\,\varphi \cdot \text{Si}\,d + \text{Co}\,\varphi \cdot \text{Co}\,d \qquad \text{Si}\,h = \text{Si}\,\varphi \cdot \text{Si}\,d + \text{Co}\,\varphi \cdot \text{Co}\,d \cdot \text{Co}\,s$$

folgen, so erhält man in der That die einfache Formel

$$\text{Co}\,s = \frac{\text{Si}\,h - \text{Si}\,\varphi \cdot \text{Si}\,d}{\text{Co}\,\varphi \cdot \text{Co}\,d} = \frac{\text{Si}\,h - \text{Si}\,x}{\text{Si}\,H - \text{Si}\,x} \qquad 3$$

welche der Kepler'schen Regel entspricht. — Es wurde auch versucht, die Bestimmung des Stundenwinkels durch Tafeln zu erleichtern, und so gab z. B. **Lalande** 1793 in seinem „Abrégé de navigation" eine unter seiner Anleitung durch seine „Nièce" Amélie **Harlay** (Paris 1768 — ebenda 1832; Frau seines Adoptivsohnes Michel Lefrançais in 592) mit grosser Ausdauer berechnete, volle 300 Quartseiten füllende, zunächst die Bestimmung der wahren Zeit aus Sonnenhöhen ins Auge fassende „Table horaire", aus welcher man für alle Polhöhen von 0 bis 60°, alle Deklinationen von + 24 bis — 24° und alle Höhen von 0 bis 44°, mit Hilfe dreier Differenzkolumnen für die drei Eingänge, die Stundenwinkel aufschlagen kann. Grossen Vorteil bietet jedoch eine solche ausgedehnte Tafel kaum, da für etwas genaue Bestimmungen die nötigen Interpolationen gar zu mühsam werden, und für Überschlagsrechnungen eine viel gedrängtere im Genre unserer VII^{b} ausreicht; immerhin mag an die entsprechende Tafel von Chr. **Müller** in 194 erinnert und auch die seitherige Publikation „Otto **Müller**, Tavole per la determinazione del tempo dietro le altezze del sole o d'una stella. Milano 1881 in 8." erwähnt werden. — *c.* Bezeichnen $d\varphi$ und dz die Unsicherheiten der eingeführten Polhöhe und der gemessenen Zenitdistanz, so ist (177) die Unsicherheit des berechneten Stundenwinkels

$$d\,s = \frac{d\,z}{\text{Si}\,w \cdot \text{Co}\,\varphi} - \frac{\text{Ct}\,w \cdot d\,\varphi}{\text{Co}\,\varphi} \qquad 4$$

und hieraus folgt, dass für kleine Werte von w schon ganz kleine Beträge von dz und $d\varphi$ einen sehr erheblichen Einfluss auf die Zeitbestimmung erhalten: **Man hat daher bei dieser Methode Messungen in der Nähe des Meridianes zu vermeiden, und,** da $\text{Si}\,w \cdot \text{Co}\,\varphi = \text{Si}\,v \cdot \text{Si}\,p$ ist, **vorzugsweise equatoreale Sterne zu benutzen,** zumal für solche auch der Einfluss der täglichen Aberration verschwindend klein wird.

356. Bestimmung aus zwei und mehreren Höhen. — Misst man mehrere Sternhöhen, so kann man entweder jede einzelne derselben in der soeben auseinander gesetzten Weise für sich berechnen und sodann aus den erhaltenen Resultaten, unter allfälliger

Einführung des Ganges der Uhr, einen Mittelwert ableiten [a], — oder aber unter geeigneter Anordnung der Beobachtungen die ihnen entsprechenden Beziehungen so kombinieren, dass gewisse andere Vorteile erreicht, namentlich störende Einflüsse vorhandener Unsicherheiten in den gemessenen oder vorausgesetzten Grössen möglichst beseitigt werden [b].

Zu 356: *a.* Bezeichnen $u_1, u_2, \ldots u_n$ die Uhrzeiten der Beobachtungen, $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots \Delta t_n$ die aus ihnen erhaltenen Uhrkorrektionen, und ist u das Mittel der Uhrzeiten, Δt die letzterm entsprechende Uhrkorrektion, sowie g der Gang der Uhr in der für die u benutzten Zeiteinheit, so hat man offenbar

$$\Delta t = \Delta t_1 + g(u - u_1) = \Delta t_2 + g(u - u_2) = \ldots\ldots = \Delta t_n + g(u - u_n)$$

und hieraus erhält man für Δt die Normalgleichung

$$n \cdot \Delta t = \Sigma \Delta t + g(n \cdot u - \Sigma u) \qquad \text{oder} \qquad \Delta t = {}^1/_n \cdot \Sigma \Delta t \qquad \mathbf{1}$$

so dass dem Mittel der Uhrzeiten das Mittel der Uhrkorrektionen entspricht und der Gang der Uhr ausser Betracht fällt. Dagegen kömmt dem Mittel der Uhrzeiten keineswegs notwendig das Mittel der einzelnen Zenitdistanzen z_1, $z_2, \ldots z_n$ zu. Bezeichnet man nämlich die einer Veränderung Δs des Stundenwinkels s zukommende Veränderung der Zenitdistanz z mit Δz, so hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\Delta z \cdot \mathrm{Si}\, 1'' = \frac{dz}{ds} \cdot \Delta s \cdot \mathrm{Si}\, 1'' + \frac{d^2 z}{ds^2} \cdot \frac{\Delta s^2 \cdot \mathrm{Si}^2\, 1''}{2} + \ldots$$

oder, da für kleine Werte von Δs offenbar $\mathrm{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta s = {}^1/_4 \Delta s^2 \cdot \mathrm{Si}^2\, 1''$ gesetzt und mit dem zweiten Gliede abgebrochen werden kann,

$$\Delta z = \frac{dz}{ds} \cdot \Delta s + \frac{d^2 z}{ds^2} \cdot \frac{2\, \mathrm{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta s}{\mathrm{Si}\, 1''} \qquad \mathbf{2}$$

wo nach 177 : 6, 1

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\mathrm{Si}\, s \cdot \mathrm{Si}\, p \cdot \mathrm{Co}\, \varphi}{\mathrm{Si}\, z} \qquad \text{folglich} \qquad \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{dz}{ds} \cdot \mathrm{Ct}\, s - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \cdot \mathrm{Ct}\, z \qquad \mathbf{3}$$

Man hat somit, in 2 successive Δs durch $15(u - u_1) = \Delta u_1$, $15(u - u_2) = \Delta u_2$, etc., ersetzend,

$$z = z_1 - \frac{dz}{ds} \cdot \Delta u_1 - \frac{d^2 z}{ds^2} \cdot \frac{2\, \mathrm{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta u_1}{\mathrm{Si}\, 1''} = z_2 - \frac{dz}{ds} \cdot \Delta u_2 - \frac{d^2 z}{ds^2} \cdot \frac{2\, \mathrm{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta u_2}{\mathrm{Si}\, 1''} = \text{etc.}$$

woraus für z, da $\Sigma \Delta u = 0$ ist, die Normalgleichung

$$z = {}^1/_n \cdot \sum z - \frac{d^2 z}{ds^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum \frac{2\, \mathrm{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta u}{\mathrm{Si}\, 1''} \qquad \mathbf{4}$$

folgt. Man kann daher allerdings, statt aus jeder einzelnen Zenitdistanz die Uhrkorrektion und dann das Mittel zu berechnen, zuerst für das Mittel der Uhrzeiten nach 3 und 4 die diesem zukommende Zenitdistanz ermitteln, in welchem Falle dann nur Eine Rechnung nötig wird; aber einerseits ist die Ersparnis, auch wenn man für die Faktoren von $d^2 z : ds^2$ die in „Theodor **Albrecht** (Dresden 1843 geb.; Sektionschef im k. preuss. geod. Inst. in Berlin), Formeln und Hülfstafeln. Leipzig 1874 in 8. (2. A. 1879)" gegebene Tafel benutzt, ziemlich unbedeutend, und sodann büsst man die wertvolle Kontrole ein, welche auf ersterm Wege die Vergleichung der verschiedenen Einzelwerte darbietet. — *b.* Anstatt aus jeder gemessenen Zenitdistanz unmittelbar den entsprechenden Stundenwinkel zu berechnen, kann man sie auch nur in eine betreffende Beziehung, wie z. B. in die bekannte

$$\mathrm{Co}\, z = \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, d + \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Co}\, s \qquad \mathbf{5}$$

einführen, und erhält dann ebensoviele Gleichungen als man Zenitdistanzen besitzt, in welchen überdies sich die sämtlichen Stundenwinkel bei bekanntem Uhrgange auf Einen reduzieren lassen, da wegen

$$s_1 = u_1 + \triangle t_1 - a_1 \qquad \text{und} \qquad s_2 = u_2 + \triangle t_1 + g\,(u_2 - u_1) - a_2$$

die Differenz $$s_2 - s_1 = (u_2 - u_1)\,(1 + g) - (a_2 - a_1) \qquad \mathbf{6}$$

jeder zwei Stundenwinkel ebenfalls bekannt ist. Es sind somit bei n Beobachtungen (n — 1) überschüssige Gleichungen vorhanden, welche sich in der verschiedensten Weise zur Elimination oder Bestimmung anderer Grössen verwerten lassen und auch verwertet worden sind. Da jedoch die betreffenden Entwicklungen (etwa abgesehen von den in 368 noch speciell vorgeführten) mehr als Curiosa und Rechnungsübungen erscheinen, als dass sie praktisches Interesse besitzen, so beschränke ich mich auf diese Andeutungen und verweise für den Detail auf die früher aufgezählten Lehrbücher der sphärischen Astronomie. Auch in Beziehung auf die Anordnung der Beobachtungen füge ich bloss bei, dass dafür im allgemeinen die in 355 gegebenen Vorschriften zu beachten sind, wenn dieselben auch bei gewissen Kombinationen zum Teil umgangen werden können, — und dass speciell bei Anwendung des Universalinstrumentes nicht verabsäumt werden soll, abwechselnd in beiden Kreislagen zu beobachten.

357. Die Methode der korrespondierenden Höhen und die sog. Mittagsverbesserung. — Die einfachste, früher meist gebrauchte und noch jetzt bei den bloss mit Spiegelsextant und Chronometer ausgerüsteten Reisenden vorzugsweise beliebte Methode der Zeitbestimmung ist diejenige der sog. **korrespondierenden Höhen,** welche darauf beruht, dass (162) ein Stern bei gleicher Höhe vor und nach dem Meridiane auch gleichen Stundenwinkel besitzt, folglich das Mittel der diesen Höhen entsprechenden Zeiten mit der Uhrzeit der Culmination übereinstimmt, welche ihrerseits bei richtigem Stande einer nach den Sternen regulierten Uhr der Rektascension des Sternes gleich sein soll [a]. — Wird, wie es von Reisenden zumeist geschieht, die Sonne beobachtet, d. h. soll der Eintritt des wahren Mittags (oder der Mitternacht) bestimmt werden, so muss allerdings wegen der Veränderung der Sonnendeklination an jenem Mittel noch eine Korrektion, die sog. **Mittagsverbesserung** (resp. Mitternachtsverbesserung), angebracht werden, ehe man dasselbe zur Bestimmung der Uhrkorrektion auf Sternzeit oder Sonnenzeit verwendet [b]. — Wird dagegen ein Stern vor seiner Culmination beobachtet, so kann man auch, um nicht auf die Rückkehr desselben zur gleichen Höhe warten zu müssen, ihm für die zweite Beobachtung einen Stern von nahe gleicher Deklination substituieren, der bald nachher westlich vom Meridiane die gleiche Höhe erreicht [c].

Zu 357: *a.* Gewöhnlich wird so verfahren, dass man während dem Aufsteigen des Gestirnes das Höheninstrument successive auf verschiedene runde Zahlen einstellt, — jeweilen die Zeit notiert, wo die entsprechende Höhe erreicht wird, — sodann beim Absteigen in umgekehrter Folge wieder bei denselben Einstellungen beobachtet, — und schliesslich das Mittel aus sämtlichen Uhrangaben nimmt. Da nun nach 356 dieses Mittel, wenigstens bei Anwendung von Fixsternen, vom Gange der Uhr, sofern dieser regelmässig ist, nicht influiert wird, — Polhöhe und Deklination in diesem Falle nicht einmal bekannt zu sein brauchen, — die Güte der Teilung gar nicht in Betracht kömmt, — und überdies jede Rechnung wegfällt, so ist diese Methode, deren einzige Schattenseite darin besteht, dass sie etwas viel Zeit und damit auch dauerhaft hellen Himmel erfordert, wirklich vorzüglich. Es ist daher zu begreifen, dass sie schon frühe beliebt war und so z. B. schon bei Anlass der Sonnenfinsternis von 1666 VII 2 durch **Huygens**, **Roberval** und **Auzout** benutzt wurde, auch **Lacaille** von derselben fast ausschliesslich Gebrauch machte. — *b.* Aus 177 : 6, 1, 4 folgen die Beziehungen

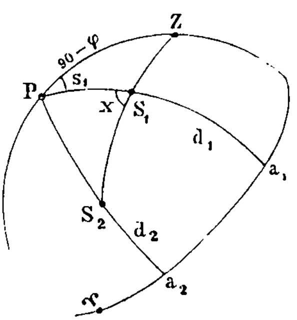
$$\frac{d\,w}{d\,d} = \frac{1}{\mathrm{Si}\,v \cdot \mathrm{Si}\,z} = \frac{1}{\mathrm{Si}\,s \cdot \mathrm{Co}\,\varphi} \qquad \mathbf{1}$$

$$\frac{d\,s}{d\,d} = \frac{\mathrm{Co}\,v}{\mathrm{Si}\,w \cdot \mathrm{Co}\,\varphi} = \frac{\mathrm{Co}\,v \cdot \mathrm{Si}\,z}{\mathrm{Si}\,v \cdot \mathrm{Si}\,z \cdot \mathrm{Co}\,d} = \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Cs}\,s - \mathrm{Tg}\,d \cdot \mathrm{Ct}\,s \qquad \mathbf{2}$$

nach welchen sich, wenn d die Deklination zur Zeit $\frac{1}{2}(u_2 + u_1)$ und μ deren ständliche Zunahme bezeichnet, für $d\,d = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cdot \mu$ berechnen lässt, um wie viel bei wachsender Deklination das Mittel der beiden Beobachtungsrichtungen zu westlich und dasjenige der beiden Uhrzeiten zu gross ist, oder welche Verbesserungen an diesen Mitteln anzubringen sind, wenn sie sich, wie man sagt, auf den **Mittag** beziehen sollen. Ist eine Abendbeobachtung mit einer folgenden Morgenbeobachtung zu verbinden, so erhält man die Reduktion auf **Mitternacht** in entsprechender Weise, nur wechselt die Korrektion das Vorzeichen. — Als historische Notiz ist beizufügen, dass die in älterer Zeit in den Beobachtungsfehlern verschwindende und darum übersehene **Mittagsverbesserung** (æquatio meridiei, équation du midi) zuerst durch **Euler** in seiner Abhandlung „Methodus computandi æquationem meridiei (Comm. Petr. VIII von 1736, ausgegeben 1741) näher ins Auge gefasst und wesentlich wie oben bestimmt wurde. — *c.* Zur Lösung der Aufgabe, welche Julius August **Koch** (Osnabrück 1752 — Danzig 1817; Arzt in Danzig) in seiner Schrift „Astronomische Tafeln zur Bestimmung der Zeit aus der beobachteten gleichen, obwohl unbekannten Höhe zweier Fixsterne. Stralsund 1797 in 8." behandelte, kann in dem ohnehin günstigsten, oben berührten Falle, offenbar ebenfalls unsere 2 benutzt werden, so dass es kaum nötig sein dürfte, näher auf dieselbe einzutreten. — Für die verwandte Aufgabe endlich, aus den Zeiten, zu welchen drei Sterne die gleiche Höhe erreichen, die Uhrkorrektion ohne Voraussetzung der Polhöhe zu bestimmen, welche **Gauss** in seiner Note „Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie (Mon. Corr. 18 von 1808)" löste, glaube ich mich auf dieses Citat und die Angabe beschränken zu sollen, dass dieselbe Aufgabe nachher auch von **Mollweide** (Mon. Corr. 19 von 1809), **Oriani** (Eph. mediol. 1810), **Delambre** (Conn. d. t. 1812), etc., behandelt wurde.

358. Bestimmung aus Durchgängen durch denselben Vertikal. — Aus dem schon frühe, namentlich auf dem Meere üblichen Verfahren, aus der Stellung der beiden Bären auf die Nachtstunde zu schliessen«[a], entwickelte sich nach und nach die Methode, dieselbe aus dem Durchgange gewisser Sterne durch den Vertikal des Polarsternes zu bestimmen[b], und nachdem man sich seit dem Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts immer mehr darüber klar geworden war, dass man in der That aus den Durchgangszeiten verschiedener Sterne durch irgend einen dem Meridiane nahen Vertikal eine gute Zeitbestimmung erhalten könne[c], kam man schliesslich zu dem Resultate, dass in dieser Beziehung bei zweckmässiger Anordnung der Beobachtungen der Vertikal des Polarsternes ganz besonders zu empfehlen sei, so dass die alte Methode in neuem Kleide mit Recht sehr beliebt geworden ist[d].

Zu 358: *a.* Vgl. 365 und für das verwandte „Nocturnal" das in 196 beigebrachte. — *b.* Die Conn. d. t. gab früher alljährlich eine Sternkarte des nördlichsten Himmels, in welcher vom Polarsterne Gerade nach einer Anzahl von Sternen gezogen waren, deren jeder beigeschrieben wurde, wie viel man der in der Ephemeride für jeden Tag gegebenen wahren Zeit der Culmination des Frühlingspunktes beizufügen habe, um die wahre Zeit zu erhalten, zu welcher der betreffende Stern im Vertikal des Polarsternes stehe. Nach 1760 blieben diese Karten weg; dagegen behandelten noch **Lambert** (Berl. Jahrb. 1769), **Cagnoli** (Ed. Chompré 223), **Lalande** (3 éd. I 382), etc. die ihnen zu Grunde liegende Methode einlässlich, und so leitete z. B. der zweitgenannte in folgender, von mir allerdings durch Abstreifen seiner unbequemen Bezeichnung und auch sonst etwas vereinfachten Weise, eine Formel ab, um den Stundenwinkel s_1 des Polarsternes S_1 für den Augenblick zu bestimmen, wo ein anderer Stern S_2 dessen Vertikal passiert: Aus den Dreiecken $S_1 P S_2$ und $S_1 P Z$ erhält man nach 90 : 3



$$\frac{\operatorname{Si}(a_1 - a_2)}{\operatorname{Co} d_1 \cdot \operatorname{Tg} d_2 - \operatorname{Si} d_1 \cdot \operatorname{Co}(a_1 - a_2)} = \operatorname{Tg} x = \frac{-\operatorname{Si} s_1}{\operatorname{Co} d_1 \cdot \operatorname{Tg} \varphi - \operatorname{Si} d_1 \cdot \operatorname{Co} s_1}$$

also

$$\operatorname{Co} s_1 + [\operatorname{Ct}(a_1 - a_2) - \operatorname{Ct} d_1 \cdot \operatorname{Tg} d_2 \cdot \operatorname{Cs}(a_1 - a_2)] \cdot \operatorname{Si} s_1 = \operatorname{Ct} d_1 \cdot \operatorname{Tg} \varphi$$

oder

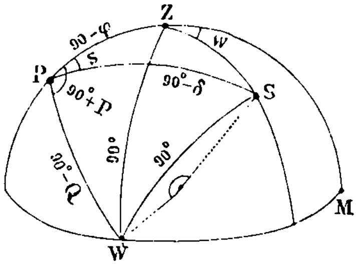
$$\operatorname{Co}(s_1 - u) = \operatorname{Ct} d_1 \cdot \operatorname{Tg} \varphi \cdot \operatorname{Co} u$$

wo

$$\operatorname{Tg} u = \operatorname{Ct}(a_1 - a_2) - \operatorname{Ct} d_1 \cdot \operatorname{Tg} d_2 \cdot \operatorname{Cs}(a_1 - a_2) \qquad \mathbf{1}$$

d. h. wirklich eine Formel, welche die gestellte Aufgabe vollständig löst. — *c.* Stellt man ein Universalinstrument in einen beliebigen Vertikal ein, so kann damit unter Voraussetzung, dass Drehaxe und optische Axe sorgfältig berichtigt seien, die Uhrkorrektion Δt leicht und scharf bestimmt werden, indem man die Durchgangszeiten t zweier Sterne S (α, δ) beobachtet: Bezeichnet nämlich w das Azimut des gewählten Vertikales, $90^0 + P$ aber den Stundenwinkel und $90^0 - Q$ die Poldistanz des Westendes der Drehaxe, so hat man aus $\triangle$ PSW, da $WS = 90^0$ ist, nach 87 : 2

$$\operatorname{Si}(P - s) = \operatorname{Tg} Q \cdot \operatorname{Tg} \delta \qquad \operatorname{Si}(P - s') = \operatorname{Tg} Q \cdot \operatorname{Tg} \delta' \qquad \mathbf{2}$$



also mit Hilfe von 62 : 4

$$\operatorname{Tg}\left(P - \frac{s' + s}{2}\right) = \frac{\operatorname{Si}(\delta + \delta')}{\operatorname{Si}(\delta - \delta')} \cdot \operatorname{Tg}\frac{s' - s}{2} \qquad \mathbf{3}$$

und kann somit, da

$$t + \triangle t = \alpha + s \qquad t' + \triangle t = \alpha' + s'$$

also $\quad s' - s = (t' - t) - (\alpha' - \alpha) \qquad \mathbf{4}$

bekannt ist, nach 3 sofort $P - \frac{1}{2}(s' + s)$, folglich $P - s = P - \frac{1}{2}(s' + s) + \frac{1}{2}(s' - s)$ und $P - s' = P - \frac{1}{2}(s' + s) - \frac{1}{2}(s' - s)$ berechnen, — nach 2 ferner Q, und endlich, da aus $\triangle$ P W Z

$$\operatorname{Si} P = \operatorname{Tg} Q \cdot \operatorname{Tg} \varphi \qquad \mathbf{5}$$

folgt, auch P. — Sind aber einmal P und Q bekannt, so lässt sich nach 2 für jeden Stern der Stundenwinkel, und sodann nach 4 die Uhrkorrektion $\triangle t$ finden. Da ferner wegen $WZ = 90^0 = WS$ auch $WZS = 90^0$ und $WM = 90^0 + w$, so folgen aus $\triangle$ W P Z

$$\operatorname{Co} w = \operatorname{Co} P \cdot \operatorname{Co} Q \qquad \operatorname{Tg} P = \operatorname{Tg} w \cdot \operatorname{Si} \varphi \qquad \operatorname{Si} Q = \operatorname{Si} w \cdot \operatorname{Co} \varphi \qquad \mathbf{6}$$

nach welchen Formeln w wenigstens annähernd erhalten und mit dessen Hilfe der Vertikal des Instrumentes so nahe in den Meridian gebracht werden kann, dass jedenfalls das neue w sehr klein wird, also nach 6 und 2

$$P \fallingdotseq w \cdot \operatorname{Si} \varphi \qquad Q \fallingdotseq w \cdot \operatorname{Co} \varphi \qquad P - s \fallingdotseq Q \cdot \operatorname{Tg} \delta \qquad s \fallingdotseq w \cdot \operatorname{Si}(\varphi - \delta) \cdot \operatorname{Se} \delta$$

gesetzt werden können, somit sich nach 4 die bequeme Näherungsformel

$$\triangle t = \alpha - t + m \cdot w \qquad \text{wo} \qquad m = \operatorname{Si}(\varphi - \delta) \cdot \operatorname{Se} \delta \qquad \mathbf{7}$$

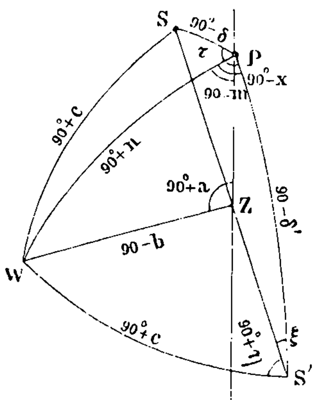
ergiebt. Entsprechend hat man für einen zweiten Stern

$$\triangle t = \alpha' - t' + m' \cdot w \qquad \text{wo} \qquad m' = \operatorname{Si}(\varphi - \delta') \cdot \operatorname{Se} \delta' \qquad \mathbf{8}$$

und setzt man die beiden Werte von $\triangle t$ einander gleich, so ergiebt sich zur Bestimmung von w die Formel

$$w = \frac{\alpha - t - (\alpha' - t')}{m' - m} \qquad \text{wo} \qquad m' - m = \frac{\operatorname{Si}(\delta - \delta') \cdot \operatorname{Co} \varphi}{\operatorname{Co} \delta \cdot \operatorname{Co} \delta'} \qquad \mathbf{9}$$

worauf nach 7 auch $\triangle t$ erhalten wird. — J. J. v. **Littrow**, der diese Formeln in seiner Abhandlung „Über den erweiterten Gebrauch der Multiplikationskreise. Prag 1820 in 8." aufstellte, sagt, dass er sich anfänglich in Kasan, wo er kein Mittagsrohr und nur einen Baumann'schen Multiplikationskreis von 16" zur Verfügung hatte, mit allen möglichen Zeitbestimmungsmethoden abgequält habe, bis er endlich auf die eben beschriebene verfallen sei, welche ihm so befriedigende Resultate ergab, dass er „für die Zukunft die lästigen und ungewissen korrespondierenden Höhen der Sonne ohne Bedauern entbehren" konnte. — Bald nach Littrow befassten sich auch die **Bessel, Bohnenberger, Hansen,** etc. mit ähnlichen Methoden (vgl. A. N. von 1828 u. f.), und der letztgenannte führte seine Untersuchungen später noch unter dem Titel „Durch Beobachtungen am Passageninstrument ausserhalb des Meridianes die Zeit zu bestimmen (A. N. 1136 von 1858)" weiter aus. Anstatt jedoch auch auf diese Arbeiten näher einzutreten oder sogar nach weitern Spuren verwandter Ideen in früherer Zeit zu suchen, wozu mich z. B. ein 1796 von **Feer** an Horner geschriebener Brief (vgl. Notiz 269) veranlassen könnte, ziehe ich vor, unter d noch die schon von **Sawitsch** in seinen „Remarques sur la méthode de déterminer le temps au moyen des observations des passages des étoiles sur le vertical de l'étoile polaire (Bull. Pét. 4 von 1845)", und dann namentlich von Joh. Heinr. Wilhelm **Döllen** (Mitau 1820 geb.; Obs Pulkowa) in seinen beiden Abhandlungen „Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsinstrumentes im Vertikale des Polarsternes. St. Petersburg 1863 und 1874 in 4." einlässlich besprochene und seither noch in ihrer Anwendung durch „Zeitstern-Ephemeriden. St. Petersburg 1886 und folgende Jahre in 8." erleichterte Methode etwas einlässlicher zu behandeln. — ***d.*** Sei P der Pol, S der Ort des Polarsternes zur Zeit der Einstellung auf denselben, S' der Ort eines kurz nachher durch den Vertikal des Instrumentes gehenden Sternes, W der dem Westende der Horizontalaxe des Instrumentes entsprechende Punkt der Himmelssphäre, welcher vom Zenite um $90^0 - b$, vom Pole um $90^0 + n$, vom Meridiane um $90^0 + a$ abstehe, und endlich $90^0 + c$ der Winkel der Horizontalaxe mit der optischen Axe. Haben ferner die beiden Sterne die Coordinaten α, δ und α', δ', sowie den Abstand $SS' = 90^0 - d$, und werden für die Winkel an P und S' die in die Figur eingetragenen Bezeichnungen eingeführt, so hat man, wenn t und t' die Uhrzeiten von Einstellung und Beobachtung, s und s' aber die entsprechenden Stundenwinkel der beiden Sterne sind, und $\triangle t$ die Uhrkorrektion bezeichnet,



$$t + \triangle t = \alpha + {}^1/_{15}\, s \qquad t' + \triangle t = \alpha' + {}^1/_{15}\, s'$$

also

$$\tau = s' - s = 15\,[\alpha - \alpha' + t' - t] \qquad \mathbf{10}$$

und aus den Dreiecken SPS', SWS' und PWS' folgen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Si}\, \xi &= \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, \tau \\ \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Co}\, \xi &= \mathrm{Si}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, \delta' - \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, \delta' \cdot \mathrm{Co}\, \tau \\ \mathrm{Si}\, d &= \mathrm{Si}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, \delta' + \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, \delta' \cdot \mathrm{Co}\, \tau \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{11}$$

$$\mathrm{Si}\, \eta = \frac{(1 - \mathrm{Si}\, d) \cdot \mathrm{Si}\, c}{\mathrm{Co}\, c \cdot \mathrm{Co}\, d} = \mathrm{Tg}\left(45^0 - \frac{d}{2}\right) \cdot \mathrm{Tg}\, c \qquad \mathbf{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Co}\, x &= \mathrm{Co}\, c \cdot \mathrm{Co}\,(\xi + \eta) \\ \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Si}\, x &= -\mathrm{Si}\, c \cdot \mathrm{Co}\, \delta' + \mathrm{Co}\, c \cdot \mathrm{Si}\, \delta' \cdot \mathrm{Si}\,(\xi + \eta) \\ \mathrm{Si}\, n &= \mathrm{Si}\, c \cdot \mathrm{Si}\, \delta' + \mathrm{Co}\, c \cdot \mathrm{Co}\, \delta' \cdot \mathrm{Si}\,(\xi + \eta) \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{13}$$

woraus successive τ, ξ und d, sowie unter Voraussetzung, dass c anderweitig, z. B. durch Umlegen, bestimmt worden sei, auch η, x und n berechnet werden können, während zugleich 12 zeigt, dass η für equatoreale Sterne nur wenig von c abweichen kann. Ferner erhält man aus $\triangle$PZW, wo $PZ = 90^0 - \varphi$ ist,

$$\mathrm{Si}\, m = \mathrm{Tg}\, n \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi + \mathrm{Si}\, b \cdot \mathrm{Se}\, n \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathrm{Si}\, a = \mathrm{Tg}\, b \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi + \mathrm{Si}\, n \cdot \mathrm{Se}\, b \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathbf{14}$$

so dass auch m und a berechnet werden können, falls man b, z. B. mit der Libelle, ermittelt hat. Endlich folgt aus 10, da $s' = x - m$ ist,

$$\triangle t = {}^1/_{15}\,(x - m) - (t' - \alpha') \qquad \mathbf{15}$$

womit nunmehr die Aufgabe vollständig gelöst ist. — Da jedoch in der Anwendung b und c immer als ganz kleine Grössen angesehen werden können, so lässt sich die Lösung noch wesentlich vereinfachen. Setzt man nämlich vorläufig b und c gleich Null, und legt den nach 12—15 berechneten Grössen für diesen Fall den Index 0 bei, so erhält man mit Hilfe von 11

$$\left.\begin{array}{ll} \eta_0 = 0 & \mathrm{Tg}\ x_0 = \mathrm{Si}\ \delta' \cdot \mathrm{Tg}\ \xi = \dfrac{\mathrm{Tg}\ \delta' \cdot \mathrm{Ct}\ \delta \cdot \mathrm{Si}\ \iota}{1 - \mathrm{Tg}\ \delta' \cdot \mathrm{Ct}\ \delta \cdot \mathrm{Co}\ \iota} \\ \mathrm{Tg}\ n_0 = \mathrm{Ct}\ \delta' \cdot \mathrm{Si}\ x_0 & \mathrm{Si}\ m_0 = \mathrm{Tg}\ n_0 \cdot \mathrm{Tg}\ \varphi = \mathrm{Ct}\ \delta' \cdot \mathrm{Tg}\ \varphi \cdot \mathrm{Si}\ x_0 \\ \mathrm{Si}\ a_0 = \mathrm{Si}\ n_0 \cdot \mathrm{Se}\ \varphi & \triangle t_0 = {}^1\!/_{15}\,(x_0 - m_0) - (t' - \alpha') \end{array}\right\} \quad \mathbf{16}$$

Sind nun b und c nicht vollständig Null, so werden η_0, x_0, n_0, m_0 und a_0 kleine Korrektionen $\triangle$ bekommen, also auch $\triangle t_0$ eine kleine Verbesserung erhalten, und zwar findet man durch Differentiation von 12--14, wenn die Produkte kleiner Grössen vernachlässigt und ihre Cosinus gleich der Einheit gesetzt werden, die Näherungswerte

$$\begin{array}{lll} \triangle \eta = c\,(\mathrm{Se}\ d - \mathrm{Tg}\ d) & \triangle x = -c \cdot \mathrm{Co}\ \delta' + \triangle \eta \cdot \mathrm{Si}\ \delta' & \triangle n = c \cdot \mathrm{Si}\ \delta' + \triangle \eta \cdot \mathrm{Co}\ \delta' \\ \triangle m = b \cdot \mathrm{Se}\ \varphi + \triangle n \cdot \mathrm{Tg}\ \varphi & \triangle a = b \cdot \mathrm{Tg}\ \varphi + \triangle n \cdot \mathrm{Se}\ \varphi & \end{array} \quad \mathbf{17}$$

und somit
$$\triangle x - \triangle m = -b \cdot B - c \cdot C \quad \mathbf{18}$$
wo
$$B = \mathrm{Se}\ \varphi \qquad C = \mathrm{Se}\ \varphi \cdot \mathrm{Se}\ d\,[\mathrm{Si}\,(\varphi - \delta') + \mathrm{Co}\,(d + \varphi - \delta')] \quad \mathbf{19}$$
so dass schliesslich nach 15 und 16
$$\triangle t = {}^1\!/_{15}\,[x_0 + \triangle x - (m_0 + \triangle m)] - (t' - \alpha') = \triangle t_0 - {}^1\!/_{15}\,(b \cdot B + c \cdot C) \quad \mathbf{20}$$

Die vorstehende Ableitung stimmt wesentlich mit der von **Döllen** überein, — nur ist er noch in weitern Detail eingetreten und hat namentlich zu Gunsten seiner bereits erwähnten Ephemeriden die Schlussformeln noch etwas umgeformt. Ich füge ferner bei, dass es zweckmässig ist, Paare von Sternen auszusuchen, welche sich in Rektascension und Deklination wenig von einander unterscheiden, — für den einen Stern bei Okular-Ost, für den andern bei Okular-West auf den Polarstern einzustellen, — und aus den so erhaltenen zwei Uhrkorrektionen das Mittel zu ziehen: Es wird nämlich so die Kollimation fast ganz herausfallen, und somit, wenn die Horizontalstellung bei jeder Beobachtung sorgfältig revidiert wird, in der Regel die Anwendung von 16 genügen. Dass neben der Zeitbestimmung, falls bei jeder Einstellung auch am Horizontalkreise abgelesen wird, durch Bestimmung von a_0 oder $\alpha_0 + \triangle a$ auch eine Azimutalbestimmung erhältlich ist, braucht kaum erwähnt zu werden.

359. Einige andere Methoden. — Abgesehen von einigen im Altertume üblichen rohen Verfahren zur Bestimmung der Nachtstunde [a] und den unter der folgenden Nummer zu besprechenden Hilfsmitteln zur Zeitbestimmung, tauchten im Laufe der Zeiten noch manche andere Methoden auf, für welche ich jedoch im allgemeinen auf die Speciallitteratur verweisen muss [b]. Ich erwähne nur noch ein für Liebhaber der Astronomie, welche so situiert sind, dass sich in ihrer Nähe eine hohe vertikale Mauerkante befindet, recht bequemes und gutes Verfahren, welches darin besteht, die Uhrzeit des Verschwindens eines Sternes an derselben zu beobachten, vorausgesetzt, es sei Ein Mal durch Zeitübertragung oder nach einer der übrigen Methoden die genaue Sternzeit desselben bestimmt worden [c].

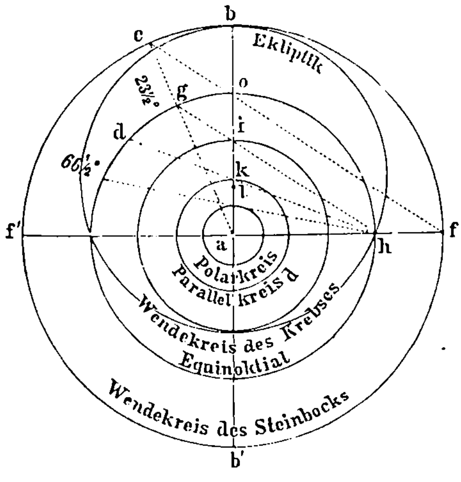
Zu 359: *a.* Neben dem in 355:a erwähnten Verfahren und der eine Höhenmessung ersparenden Notierung der Sterne, welche in dem zu bestimmenden Momente eben auf- oder untergingen, benutzte man namentlich auch die 21 von **Hipparch** (vgl. den Kommentar) ausgewählten Sterne, deren erster (nach Delambre η Can. maj.) nahe am Kolur der Solstitien stand oder um 6^h Sternzeit culminierte, während ihm der zweite (θ Hydræ) in einer Stunde, der dritte (ν Leonis) in zwei Stunden, etc., folgte: Man suchte die beiden dieser Sterne auf, zwischen welchen eben der Meridian durchlief, und fügte der Stunde des vorhergehenden Sternes durch Schätzung der Abschnitte das Nötige bei. — *b.* Der frühern Litteratur füge ich bei: „J. Ch. **Houzeau**, Méthode pour déterminer simultanément la latitude, la longitude, l'heure et l'azimuth par des passages observées dans deux verticaux (Mém. sav. étr. Brux. 25 von 1853), — Seth C. **Chandler** (Boston 1845 geb.; Privatastronom Cambridge), The Almucantar. A new instrument for the determination of time and latitude. Cambridge U. S. 1887 in 4. (auch Annals of Harv. Coll. Vol. 17), — Franz **Melde** (Grossenläder bei Fulda 1832 geb.; Prof. math. Marburg), Theorie und Praxis der astronomischen Zeitbestimmung. Tübingen 1876 in 8., — und: A. **Beck**, Über ein neues Instrument zur Zeit- und Polhöhenbestimmung (A. N. 3024 von 1891)". — *c.* Diese namentlich durch **Olbers** benutzte und von ihm (Mon. Corr. 1801 II) besprochene, daher häufig nach ihm benannte Methode, wurde schon durch **Huygens** (vgl. Horol. oscill. p. 13) zur Ermittlung des Uhrganges angewandt, und dann wieder durch Georg Moritz **Lowitz** (Fürth 1722 — Howla an der Wolga 1774, wo er ermordet wurde; Prof. math. Nürnberg und Göttingen, dann Akad. Petersburg) in der Schrift „Die richtige Verwandlung der scheinbaren Zeiten einer Pendeluhr in die wahren Sonnenzeiten, für einen Anfänger der ausübenden Sternwissenschaft. Höxter 1755 in 4.", sowie durch **Kästner** (Astr. Abh. I 163) in Erinnerung gebracht. — Aus 177 erhält man für $d\varphi = 0 = dw$

$$dt = da + ds = da - \tfrac{1}{15}\,\mathrm{Tg}\,v \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot dd \qquad \mathbf{1}$$

und kann somit auch den allmäligen Veränderungen der Sterncoordinaten leicht Rechnung tragen.

360. Das Planisphärium und andere graphische Hilfsmittel. — Das schon als eine Erfindung des Altmeisters **Hipparch** ehrwürdige *a*, in seinen Hauptteilen eine geschickte Anwendung der stereographischen Projektion repräsentierende **Astrolabium planisphærium** *b*, erlaubt annäherungsweise alle die Zeitbestimmung betreffenden Aufgaben fast spielend zu lösen *c*, und ist darum in früherer Zeit in zahlreichen, die verschiedensten Dimensionen zeigenden Exemplaren erstellt, sowie nach Konstruktion und Gebrauch vielfach abgehandelt worden *d*. — Dass es auch sonst zu allen Zeiten nicht an Versuchen fehlte, durch drehbare Scheiben, Netze und Konstruktionen die Berechnung der Beobachtungen, wenn auch auf Kosten der Genauigkeit, zu umgehen, ist schon früher wiederholt teils angedeutet, teils mit Beispielen belegt worden *e*.

Zu 360: *a.* Dass **Hipparch** das Planisphärium wirklich erfand und ausführte, ist wohl sicher, da sich in „**Synesius** (Cyrene 375 — Ptolemais 430?; Schüler der Hypatia, Bischof zu Ptolemais), Sermo de dono Astrolabii ad Paeonium (Opera interpr. D. Petavio. Paris 1631, p. 306—12)" die Stelle findet: „Dunkel hatte es der sehr ehrwürdige **Hipparchos** angedeutet und sich zuerst auf diese Betrachtung verlegt; wir aber führten es bis zum Ende durch, da das Problem in einer sehr grossen Zwischenzeit vernachlässigt worden war, indem der grosse **Ptolemäus** und die göttliche Schule seiner Nachfolger nur gerade den Gebrauch davon machten, welchen die 16 Sterne darbothen, die **Hipparch** auf das Instrument eintrug", — ja es lässt diese Stelle sogar vermuten, dass die Schrift „Ptolemæi planisphærium", welche schon um die Mitte des 12. Jahrhunderts zu Toulouse durch **Rudolf** von Brügge aus dem Arabischen übersetzt und unter Beigabe einer um 1200 durch Jordan **Nemorarius** verfassten ähnlichen Schrift in „**Valderus**, Sphæræ atque astrorum ratio. Basileæ 1536 in 8." aufgenommen wurde, dann aber „Venetiis 1558 in 4." durch F. **Commandino** unter Beigabe eines Kommentars eine korrektere Ausgabe erhielt, gar nicht von **Ptolemäus** verfasst, sondern dem Nachlasse von **Hipparch** entnommen worden sei. — *b.* Das **Astrolabium planisphærium** besteht aus 4 Hauptteilen: Der **Mater** astrolabii, dem eigentlichen **Planisphærium**, dem **Rete** (auch Aranea) und dem **Dorsum** astrolabii. — Die **Mater** ist eine vertiefte Scheibe, in welche das Planisphärium (fest) gelegt wird, dann das Rete (drehbar), und über beide ein Radius (drehbar); sie hat am Rande eine Stunden- und eine Grad-Teilung. — Das **Planisphärium** wird in folgender Weise konstruiert: Man verzeichnet zuerst einen Kreis, dessen Halbmesser ab sich nach dem Radius der Matervertiefung zu richten hat, — zieht in demselben zwei zu einander senkrechte Durchmesser bb′ und ff′, — trägt bc = 23½° ab, und von dem durch Ziehen von cf erhaltenen Nullpunkte 0 aus, auf dem von a durch ihn gelegten Kreise teils 23½°, teils beliebige d, teils 66½°, — verbindet die betreffenden Punkte mit h, — erhält so i, k, l, — und legt endlich durch diese Punkte von a aus neue Kreise: Diese letztern stellen nun in Verbindung mit dem durch 0 gelegten und

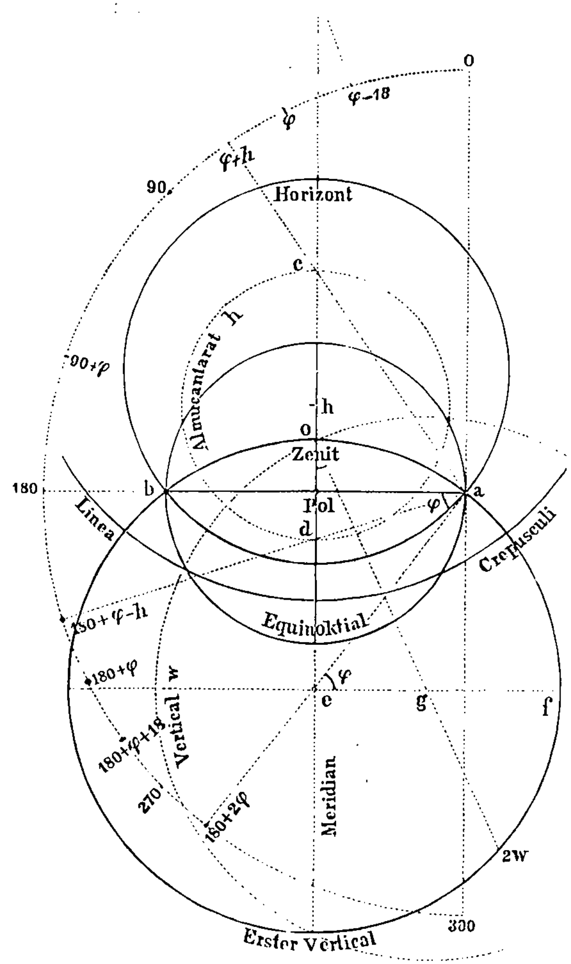


dem ursprünglichen Kreise die Projektionen der beigeschriebenen Parallelkreise vor, während der die beiden Wendekreise berührende Kreis offenbar die Ekliptik repräsentiert. Ist nämlich ah = 1 und e = 23½°, so entsprechen der Konstruktion offenbar die Formeln

$$ai = \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\,(90^0 - e) \qquad ak = \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\,(90 - d)$$
$$al = \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\,e \qquad af = \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\,(90^0 + e)$$

welche mit den für die stereographische Polarprojektion (103) bestehenden Formeln vollständig übereinstimmen. Um sodann für die Polhöhe φ einen **Almucantarat** der Höhe h zu verzeichnen, wird folgende Vorschrift gegeben: Man ziehe zu dem Durchmesser ab des Equinoktials in a eine Senkrechte und verzeichne über dieser von a aus mit beliebigem Radius einen Halbkreis, welchen man in 360 Halbgrade teile; dann verbinde man die Punkte $\varphi + h$ und $180^0 + \varphi - h$ dieser Hilfsteilung mit a, suche die Mitte h zwischen den so erhaltenen Punkten c und d, und ziehe von h aus mit hc einen Kreis, welcher nun wegen

$$hc = \frac{Pc + Pd}{2} = \frac{Co\,h}{Si\,\varphi + Si\,h} \qquad Ph = \frac{Pc - Pd}{2} = \frac{Co\,\varphi}{Si\,\varphi + Si\,h}$$



den gewünschten Almucantarat darstellt. Für h = 0, 90°, −18°, etc. erhält man speciell der Reihe nach Horizont, Zenit, die Linea crepusculi, etc. Um ferner einen **Vertikal** des Azimutes w zu erhalten, verbindet man den Punkt $180^0 + 2\varphi$ des Hilfskreises mit a, zieht von dem so erhaltenen Punkte e einen durch das Zenit gehenden Kreis und ef ∥ ba, teilt den Kreis vom Zenit aus in 360°, verbindet den Punkt 2 w desselben mit dem Zenit, und zieht durch letzteres von dem so erhaltenen Punkte g aus einen Kreis, welcher nun den gewünschten Vertikal darstellt; denn es ist laut Konstruktion

$$Pe = Tg\,\varphi$$
$$eg = Ze \cdot Ct\,w = $$
$$= Se\,\varphi \cdot Ct\,w$$

wie es die stereographische Projektion verlangt. Für $w = 90^0$ wird $eg = 0$, also stellt der Hilfskreis den ersten Vertikal vor; für $w = 0$ dagegen wird $eg = \infty$, also ist ce das Bild des Meridianes; etc. Bei einzelnen Astrolabien ist das Planisphärium in mehreren für verschiedene Breiten konstruierten Exemplaren beigegeben. — Um das **Rete** zu erhalten, werden auf einer Blechtafel in der frühern Weise teils Systeme von Parallelen und Meridianen, teils die Ekliptik mit ihrer Einteilung in Zeichen und Grade, teils endlich mit Hilfe des Netzes eine Anzahl heller Sterne aufgetragen; schliesslich wird in beliebiger Weise das Blech ausgeschnitten, so dass nur Pol, Ekliptik und einzelne die Lage der Sterne bezeichnende Spitzchen übrig bleiben, und somit, wenn man die so erhaltene

Aranea auf das Planisphärium legt, von letzterem möglichst wenig verdeckt wird. — Das **Dorsum** endlich ist einfach die Rückseite der Mater und zeigt eine Kreisteilung, über welcher eine Alidade (Linea fiducie) zur Höhenmessung spielt, während ein konzentrischer Kreis so in die Monate und Jahrestage abgeteilt ist, dass das Null der Kreisteilung der Frühlingsnachtgleiche (jetzt III 21) entspricht. In dem freien innern Raume ist gewöhnlich noch zum Überflusse ein sog. Purbach'sches Quadratum (333) angebracht. — *c.* Der Gebrauch des Astrolabium planisphærium ist sehr mannigfaltig: So z. B. lässt sich auf dem Dorsum die irgend einem Jahrestage zukommende Länge der Sonne, oder der einer gegebenen Länge entsprechende Jahrestag ablesen, — die Höhe der Sonne oder irgend eines Sternes messen, — etc. Hat man aber, z. B. Nachmittags, die Höhe der Sonne gemessen und für den betreffenden Tag ihre Länge abgelesen, so sucht man letztere am Zodiakus des Rete auf, bringt durch Drehen des Rete den erhaltenen Punkt rechts (Vormittags links) in den der gemessenen Höhe entsprechenden Almucantarat, und stellt den drehbaren Radius auf den gefundenen Punkt ein; die Spitze des Radius giebt sodann am Stundenkreise der Mater die Sonnenzeit der Beobachtung. Bringt man denselben Punkt des Zodiakus in den Horizont oder in die Linea crepusculi, so erhält man entsprechend die Zeit des Sonnen-Unterganges (Aufganges) oder des Endes (Anfanges) der Dämmerung. Dreht man das Rete so, dass die einem bestimmten Sterne entsprechende Spitze in den Horizont oder in den durch Messung der Höhe bestimmten momentanen Almucantarat fällt, so ergiebt sich einerseits das betreffende Azimut des Sternes durch Aufsuchen des durch die Spitze gehenden Vertikales, und anderseits, wenn man das Rete festhält und den Radius auf die Sonnenlänge einstellt, die dem Stande des Sternes entsprechende Sonnenzeit. Bringt man endlich die Spitze des Sternes in die Mittagslinie und den Radius wieder auf die Sonnenlänge, so erhält man die Sonnenzeit der Culmination, während die Æ des Sternes die gleichzeitige Sternzeit giebt, so dass man auf diese Weise beide Zeiten vergleichen kann. Es erlaubt also wirklich dieses Instrumentchen namentlich alle die Zeitbestimmung betreffenden Aufgaben annäherungsweise in einfachster Art zu lösen, und man kann begreifen, dass es sich zur Zeit einer ausserordentlichen Beliebtheit erfreute. — *d.* Im Morgenlande, und namentlich bei den Arabern, welche berühmten Constructeurs von Astrolabien, wie z. B. einem Astronomen des Khalifen Al Mamoun, **Aly Ibn**, den Beinamen „Al Asterlaby" gaben, wurde das Astrolabium schon frühe hoch gehalten, sowie vielfach ausgeführt, und es haben sich verschiedene Exemplare bis auf unsere Zeit erhalten, so dass z. B. **Sédillot** (Mém. von 1841 p. 172 f.) ein auf der Pariser Bibliothek befindliches, um 905 konstruiertes arabisches Astrolabium, und (Ann. Obs. Paris, Mém. IX) ein von dem Perser **Abd-Ul-Aïma** verfertigtes Astrolabium beschreiben konnte. Vgl. ferner „B. **Dorn**, Über vier in Russland befindliche Astrolabien mit morgenländischen Inschriften (Bull. Pét. 1838—44), — **Wöpke**, Über ein in der k. Bibliothek zu Berlin befindliches arabisches Astrolabium (Berl. Abh. 1858), — **Sarrus**, Description d'un astrolabe construit à Maroc en 1208. Strasbourg 1852 in 4., — Alm. da **Schio**, Di due astrolabi in Caratteri cufici occidentali trovati in Valdagno (Veneto). Venezia 1880 in 4., — etc." — Auch im Abendlande fand das Astrolabium bald Eingang, so dass schon **Hermannus** contractus (Altshausen 1013 — Reichenau 1054; ein in Reichenau studierender und später lehrender Graf von Vehringen, dessen elender Körper ein seltenes Genie beherbergte) „De mensura et de utilitatibus astrolabii (in Thesaurus Pezii abg.) schrieb, und auch noch viele abendländische Astrolabien der verschiedensten Dimensionen existieren. So z. B. besitzt die Sammlung der Sternwarte in Zürich (Verz. 236) ein 1602 von Christoph **Magnus** verfertigtes Exemplar von nur 11^{cm} Durchmesser, während ein von mir erworbenes, 1599 durch Antonius **Giamin** in Rom verfertigtes und sehr schön erhaltenes Exemplar volle 25^{cm} misst. Von der betreffenden sehr ausgedehnten Litteratur erwähne ich noch: „Pietro di Abano oder **Apono**, Astrolabium planum (wahrscheinlich identisch mit dem von Prof. Joh. Angelus in Wien, Aug. Vind. 1488 und Venet. 1502 in 4., unter demselben Titel herausgeg. Werke), — Joh. **Stöffler**, Elucidatio fabricæ ususque astrolabii. Oppenheim 1513 in fol. (auch 1534 und später; franz. durch Jean-Pierre de Mesmes, Paris 1560 in 12.; am Schlusse der Ausgabe von 1513 liest man „Impressum Oppenheim p. Jacobum Köbel etc. Anno 1512“, so dass wohl die aus dem Nachlasse von Köbel herausgegebenen zwei Schriften „Astrolabii declaratio. Moguntiæ 1535 in 4., und: Vonn gerechter zubereytung, verstand, gebrauch und nutz des Astrolabiums und Quadrantenn. Francfurt 1536 in 4.“ grossenteils auf der Schrift von Stöffler basieren), — Juan de **Roias** (nicht „Rosas“; Kosmograph und Mechaniker aus Kastilien; Schüler von Gemma Frisius), Commentariorum in Astrolabium quod Planisphærium vocant libri sex. Lutetiæ 1550 in 4. (soll auch in franz. und ital. Übers. erschienen sein; nach Gelcich besitzt die Bibliothek des Escorials ein 10'' Astrolabium von seiner Hand), — Franz **Ritter** (Nürnberg 1560? — Stöckelsberg bei Altorf 1641?; Pfarrer in Stöckelsberg), Astrolabium, d. i. Gründliche Beschreibung und Unterricht, wie solches herrliche und hochnützliche astronomische Instrument aufgerissen werden soll. Darnach wie dasselbe vielfältig zu gebrauchen. Nürnberg, 2 Teile s. a. (1610?) in 4. (neue Aufl. 1613; entschieden eine der besten Schriften über diesen Gegenstand), — Chr. **Clavius**, Astrolabium tribus libris explicatum. Moguntiæ 1611 in fol. (auch in Opera III), — etc.“ — *e.* Vgl. das über Pet. **Apian** (7), **Boscovich** (90), **Lacaille** (104), **Eble** (194), etc. früher beigebrachte.

361. Bestimmung des Azimutes aus einer Sternhöhe. — Unter denselben Bedingungen, unter welchen früher (355) aus einer Sternhöhe eine Zeitbestimmung erhalten wurde, lässt sich auch aus einer solchen das momentane Azimut des Sternes, folglich wenn, wie bei der Methode der korrespondierenden Höhen (165), vor oder nach der Sternbeobachtung auf eine Mire eingestellt und daraus ihr Horizontalabstand vom Sterne bestimmt wird, das Azimut der Mire und damit die Richtung der Mittagslinie finden *a*.

Zu 361: *a.* Das Azimut w des Sternes findet sich nach der unmittelbar aus dem Dreieck Pol-Zenit-Stern hervorgehenden Formel

$$\mathrm{Tg}\,\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Co}\,g \cdot \mathrm{Si}\,(d-g)}{\mathrm{Si}\,(\varphi - g) \cdot \mathrm{Co}\,(z+g)}} \qquad \text{wo} \qquad g = \frac{\varphi + d - z}{2} \qquad \mathbf{1}$$

und da (177)

$$dw = \frac{\mathrm{Ct}\,v}{\mathrm{Si}\,z} \cdot dz - \frac{\mathrm{Ct}\,s}{\mathrm{Co}\,\varphi} \cdot d\varphi - \frac{1}{\mathrm{Si}\,s \cdot \mathrm{Co}\,\varphi} \cdot dp \qquad \mathbf{2}$$

ist, so ersieht man, dass für diese Bestimmung (wie 355) die Nähe des Meridianes zu vermeiden ist, dass ferner keine gar zu hohen Sterne gewählt werden dürfen, und dass bei Anwendung der Sonne nicht zu vergessen ist, deren Deklination zur Beobachtungszeit in die Rechnung einzuführen. — Für den ersten Vertikal ($w = 90^0$) reduziert sich (177) unsere 2, wenn $d\varphi$ und dp vernachlässigt werden, auf $dw = Tg\,\varphi \cdot dz$, also z. B. für Zürich ($\varphi = 47^0\,23'$) auf $dw = 1{,}087 \cdot dz \sim dz$. Da nun für den Diopterlineal eines Messtisches $dz = 2\frac{1}{2}'$ gesetzt werden kann und die Unsicherheit einer Horizontalvisur ungefähr ebensoviel beträgt, so ist somit schon mit dem Messtische eine Meridianbestimmung erhältlich, deren Fehler höchstens auf $2\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 3\frac{1}{2}'$ ansteigt, also jedenfalls viel kleiner ist als derjenige, welchen man bei Anwendung einer gewöhnlichen Boussole risquiert, auch wenn man von der meist noch viel grössern Unsicherheit in der Kenntnis ihrer momentanen Abweichung abstrahieren will.

362. Bestimmung mit Hilfe von Circumpolarsternen. — Misst man zu einer beliebigen Uhrzeit den Horizontalabstand eines Sternes von einer Mire und berechnet für diese Zeit unter Voraussetzung von Poldistanz, Polhöhe und Uhrkorrektion das Azimut dieses Sternes, so ergiebt sich offenbar auch das Azimut der Mire, — und zwar um so genauer, je näher der Stern dem Pole steht [a]. Besonders vorteilhaft wird dieses Verfahren, wenn man einen Circumpolarstern zu der Zeit beobachtet, wo er in einer seiner Elongationen verweilt [b], — ja wenn man denselben in seinen beiden Elongationen anvisiert, oder noch besser zwei solche Sterne wählt, welche bald nach einander zu entgegengesetzter Elongation kommen, so bedarf man sogar nicht einmal der Kenntnis der Polhöhe, sondern kann gegenteils dieselbe mitbestimmen [c].

Zu 362: *a.* Aus dem Dreiecke Pol-Zenit-Stern folgen unmittelbar

$$\mathrm{Si}\,w \cdot \mathrm{Si}\,z = \mathrm{Si}\,s \cdot \mathrm{Si}\,p \qquad \mathrm{Co}\,w \cdot \mathrm{Si}\,z = \mathrm{Co}\,s \cdot \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Si}\,\varphi - \mathrm{Co}\,p \cdot \mathrm{Co}\,\varphi$$

woraus durch Elimination von z sich

$$\mathrm{Tg}\,w = \frac{\mathrm{Tg}\,s \cdot \mathrm{Co}\,\alpha}{\mathrm{Si}\,(\varphi - \alpha)} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Ct}\,\alpha = \mathrm{Tg}\,p \cdot \mathrm{Co}\,s \qquad \mathbf{1}$$

ergiebt, während (177) für $dp = 0$

$$dw = \frac{\mathrm{Co}\,v \cdot \mathrm{Si}\,p}{\mathrm{Si}\,z} \cdot ds - \mathrm{Si}\,w \cdot \mathrm{Ct}\,z \cdot d\varphi \qquad \mathbf{2}$$

wird. Schreibt man daher die Zeit der Visur nach einem Sterne auf und berechnet für dieselbe unter der oben erwähnten Voraussetzung nach 1 den Wert von w, so ist die Aufgabe wirklich gelöst, — ja man ist sogar nach 2 durch Wahl eines polaren Sternes der genauen Kenntnis der vorausgesetzten Grössen entbunden, — und kann überdies die Beobachtung beliebig oft wiederholen. — Zieht man z. B. auf einem zu orientierenden Messtische eine Visierlinie nach dem Polarsterne unter Notierung der Uhrzeit, so erhält man auch nach dieser Methode, sogar in dem Falle, wo man die Uhrkorrektion nur durch Vergleichung mit einer Normaluhr bestimmt und die Polhöhe einer neuern Karte entnimmt, eine weit sicherere Bestimmung, als wenn man nach „guter alter Vätersitte" eine faule Boussole von unbekannter Deklination benutzt. — Restituiert man in 1 für die Hilfsgrösse α ihren Wert, und setzt dagegen

$$\mathrm{Tg}\,A = \frac{\mathrm{Si}\,s \cdot \mathrm{Tg}\,p}{\mathrm{Co}\,\varphi} \qquad \text{und} \qquad m = \mathrm{Co}\,s \cdot \mathrm{Tg}\,p \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi \qquad \mathbf{3}$$

so ergiebt sich bei Einführung des Supplementes w' des Azimutes

$$\mathrm{Tg}\, w' = \frac{\mathrm{Tg}\, A}{1 - m} = \mathrm{Tg}\, A + \frac{m \cdot \mathrm{Tg}\, A}{1 - m} \qquad \mathbf{4}$$

Nun ist aber goniometrisch, wenn $w' = A + x$ gesetzt wird

$$\mathrm{Tg}\, w' = \frac{\mathrm{Tg}\, A + \mathrm{Tg}\, x}{1 - \mathrm{Tg}\, A \cdot \mathrm{Tg}\, x} = \mathrm{Tg}\, A + \frac{1 + \mathrm{Tg}^2 A}{1 - \mathrm{Tg}\, A \cdot \mathrm{Tg}\, x} \cdot \mathrm{Tg}\, x$$

und durch Vergleichung dieses Wertes mit 4 ergiebt sich

$$\mathrm{Tg}\, x = \frac{m \cdot \mathrm{Tg}\, A}{1 - m + \mathrm{Tg}^2 A} = m \cdot \mathrm{Tg}\, A + m^2 \cdot \mathrm{Tg}\, A + \ldots \qquad \mathbf{5}$$

Für den Polarstern werden m und A klein, und man darf daher für ihn sehr nahe

$$w' = A + m \cdot A + m^2 \cdot A \qquad \mathbf{6}$$

setzen, wo sogar $m^2 \cdot A$, wenn nicht sehr genaue Messungen vorliegen, weggelassen werden darf. Es ist dies eine (vgl. Brief Zach an Horner von 1829 IV 16 in Notiz 231) von **Horner** aufgestellte, durch ihre Einfachheit sich sehr rekommandierende Formel, welche **Zach** (sonderbarer Weise ohne Horner zu nennen) in der Jenaischen Litteraturzeitung (1829 Erg. 41) einer durch **Puissant** vorgeschlagenen, bedeutend kompliziertern Näherungsformel gegenüberstellte. — *b.* Steht ein dem Pole naher Stern in einer seiner Elongationen, so hat man für ihn (180)

$$\mathrm{Si}\, w = \mathrm{Si}\, p \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathrm{Co}\, z = \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Se}\, p \qquad \mathrm{Co}\, s = \mathrm{Tg}\, p \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi \qquad \mathbf{7}$$

und kann daher, unter Voraussetzung der Polhöhe, zum voraus die der Elongation zukommende Einstellung und Zeit berechnen, und da (177) für $dp = 0$

$$dw = \frac{\mathrm{Si}\, p \cdot \mathrm{Co}\, v}{\mathrm{Co}\, w \cdot \mathrm{Co}\, \varphi} \cdot dv + \mathrm{Tg}\, w \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi \cdot d\varphi \qquad \mathbf{8}$$

ist, so ergiebt sich überdies, dass (abgesehen von Sternen etwas grösserer Poldistanz) eine kleine Abweichung der Variation von 90^0 oder eine kleine Unsicherheit in der Polhöhe wenig Einfluss auf das Resultat hat, und der Stern etwas in seiner Elongation „verweilt“, also leicht auf denselben eingestellt, sowie sein momentaner Abstand von der Mire, folglich auch das Azimut dieser letztern, bestimmt werden kann. — *c.* Stellt man auf den Stern in seinen beiden Elongationen ein, so entspricht offenbar das Mittel der beiden Ablesungen am Horizontalkreise dem Meridiane, und man kann somit letztern auf diese, bereits auf der Sternwarte von Landgraf **Wilhelm** (vgl. Mitth. 45) und dann wieder von Dom. **Cassini** bei seiner Gradmessung (420) angewandte Weise, ohne jegliche Voraussetzung und Rechnung bestimmen; jedoch ist in Beziehung auf Kassel nicht zu übersehen, dass diese Methode vor Erfindung des Fernrohrs nur benutzt werden konnte, wenn von den beiden Elongationen die eine nach Sonnenuntergang und zugleich die andere vor Sonnenaufgang eintrat. Um diesem beschränkenden Umstande zu entgehen und zugleich die lange Zwischenzeit zu vermeiden, ist es, wie oben gesagt, zweckmässiger, den Horizontalunterschied a der Elongationsstände **zweier** Sterne zu messen, und sodann die sich aus

$$a = w_1 + w_2 \qquad \mathrm{Si}\, w_1 = \mathrm{Si}\, p_1 \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathrm{Si}\, w_2 = \mathrm{Si}\, p_2 \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathbf{9}$$

durch Elimination von w_2 und φ leicht ergebende Formel

$$\mathrm{Tg}\, w_1 = \frac{\mathrm{Si}\, a \cdot \mathrm{Si}\, x}{\mathrm{Si}\,(a + x)} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Tg}\, x = \frac{\mathrm{Si}\, p_1}{\mathrm{Si}\, p_2} \cdot \mathrm{Si}\, a \qquad \mathbf{10}$$

zu benutzen.*

363. Bestimmung aus Durchgängen durch den Vertikal einer Mire. — Wählt man eine dem Meridiane nahe Mire und verlegt die Beobachtungen in deren Vertikal, so kann man mit einem stabilen und gut berichtigten Instrumente bei Benutzung von passenden Sternen und zweckmässiger Anordnung der Bestimmungen ebenfalls ein zuverlässiges Azimut erhalten und geniesst überdies den wesentlichen Vorteil, dasselbe nicht noch mit Hilfe des Horizontalkreises auf die Mire übertragen zu müssen, folglich von dessen Genauigkeit abhängig zu werden [a].

Zu 363: *a.* Aus der Fehlergleichung 362:2, welche sich mit Hilfe von 177 auch auf die Form

$$d w = (\mathrm{Si}\,\varphi + \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,w \cdot \mathrm{Ct}\,z) \cdot d s - \mathrm{Si}\,w \cdot \mathrm{Ct}\,z \cdot d\varphi \qquad \mathbf{1}$$

bringen lässt, geht hervor, dass man, wenn die Mire nicht sehr weit vom Meridiane abliegt und zenitale Sterne vermieden werden, zwar immer noch einen kleinen Fehler in der Polhöhe nicht sehr zu fürchten braucht, dagegen eine Unsicherheit in der Zeitbestimmung doch unter Umständen recht schädlich auf das Resultat einwirken kann. Benutzt man jedoch unter Voraussetzung, es sei entweder

$$\mathrm{Ct}\,z = \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Se}\,w \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Ct}\,z_2 - \mathrm{Ct}\,z_1 = 2\,\mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Se}\,w \qquad \mathbf{2}$$

sei es einen den Vertikal der Mire nördlich vom Zenite in der Distanz z passierenden Stern, sei es, was noch besser, das Mittel aus den Ergebnissen zweier Sterne, von welchen der eine in der Zenitdistanz z_1 südlich, der andere in der Zenitdistanz z_2 nördlich passiert, so reduziert sich 1 in beiden Fällen auf

$$d w = \mathrm{Tg}\,w \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot d\varphi \qquad \mathbf{3}$$

und es wird somit jene Unsicherheit ebenfalls unschädlich. — Wird für das Resultat eine grössere Genauigkeit beansprucht, so kommen dann allerdings auch noch die zufälligen Beobachtungsfehler, die übrig gebliebenen Instrumentalfehler, etc., in Betracht; aber es lassen sich auch diese durch Vervielfachung und symmetrische Anordnung der Beobachtungen so ziemlich bemeistern, wie dies z. B. (vgl. Mitth. 62 von 1884) die im Mai 1884 durch Alfred **Wolfer** von der Zürcher Sternwarte aus durchgeführte Bestimmung des Azimuts der Mire auf Rigi-Kulm zeigt, auf welche ich für den Detail einer solchen Operation verweise.

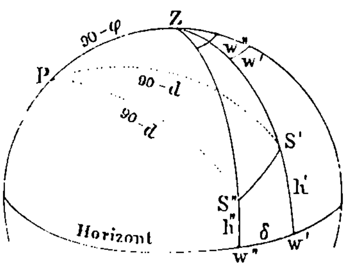
364. Einige andere Methoden zur Bestimmung des Azimutes. — Von verschiedenen andern Methoden, welche im Laufe der Zeiten zur Bestimmung des Azimutes vorgeschlagen wurden, erwähne ich um ihres hohen Alters willen diejenige, wo man zwei Höhen eines Gestirnes und die entsprechende Azimutaldifferenz misst [a], — ferner, wegen einer wichtigen Verwendung, diejenige, wo man die scheinbare Distanz eines Gestirnes von der Spitze eines Signales und die beidseitigen Höhenwinkel ermittelt [b], — und endlich, weil sie jeder Voraussetzung bar ist, diejenige, wo an einem Universalinstrumente drei Visuren nach einem Sterne festgelegt werden [c].

Zu 364: *a.* **Sédillot** hat einem Pariser Manuskripte der sog. Hakemitischen Tafeln (vgl. 515) entnommen, dass sich schon **Ibn Junis** die Aufgabe stellte, aus den mittelst zwei gemessenen Schatten bestimmten Höhen h' und h'' der Sonne und dem gemessenen Winkel der beiden Schattenwürfe (der Azimutaldifferenz δ) unter Voraussetzung der Polhöhe φ das Azimut w'' der Sonne zur Zeit der zweiten Beobachtung abzuleiten, und zur Lösung dieser Aufgabe Regeln gab, welche nach unserer Schreibart wie folgt lauten: Man berechne successive einige Hilfsgrössen nach

$$Q' = \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,h' \qquad Q'' = \mathrm{Co}\,h'' - \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,h' \qquad D^2 = Q'^2 + Q''^2$$
$$\mathrm{Si}\,\alpha = Q'' : D \qquad \mathrm{Co}\,\alpha = Q' : D \qquad \mathrm{Si}\,x = (\mathrm{Si}\,h' - \mathrm{Si}\,h'') \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi : D \qquad \mathbf{1}$$

und setze sodann $$w'' = \alpha + x \qquad \mathbf{2}$$

Ibn Junis scheint nicht mitzuteilen, wie er zu diesen eleganten, damals jedenfalls nur durch einen Meister erhältlichen Regeln kam, — es könnte jedoch auf folgende Weise geschehen sein: Bezeichnet d die für die beiden einander nahen Beobachtungszeiten als gleich zu betrachtenden Deklinationen der Sonne, so hat man aus den beiden Dreiecken PZS' und PZS'' nach damals schon längst bekannten Beziehungen



$$\mathrm{Si}\,d = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,h' - \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,h' \cdot \mathrm{Co}\,w'$$
$$\mathrm{Si}\,d = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,h'' - \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,h'' \cdot \mathrm{Co}\,w''$$

also

$$(\mathrm{Si}\,h' - \mathrm{Si}\,h'') \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi = \mathrm{Co}\,h' \cdot \mathrm{Co}\,w' - \mathrm{Co}\,h'' \cdot \mathrm{Co}\,w''$$

oder, da $w' = w'' - \delta$ ist, nach 1

$$D \cdot \mathrm{Si}\,x = \mathrm{Co}\,h' \cdot \mathrm{Co}\,(w'' - \delta) - \mathrm{Co}\,h'' \cdot \mathrm{Co}\,w'' = Q' \cdot \mathrm{Si}\,w'' - Q'' \cdot \mathrm{Co}\,w''$$

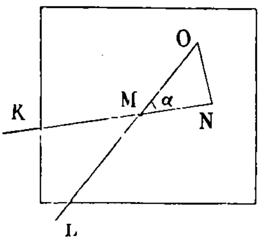
folglich $\mathrm{Si}\,x = \mathrm{Si}\,(w'' - \alpha)$ d. h. $x = w'' - \alpha$

w. z. b. w. — *b.* Aus den drei gemessenen Grössen konnte offenbar die Azimutaldifferenz zwischen Gestirn und Signal, sowie, unter Voraussetzung der Deklination des Gestirnes und der Polhöhe, das Azimut des Gestirnes leicht berechnet, also auch das Azimut des Signales erhalten werden. **Bouguer**, der diese Methode bei der Gradmessung in Peru in der Weise benutzte, dass er die dem Horizonte nahe Sonne mit einem Signale verglich, machte in seiner betreffenden Mitteilung darauf aufmerksam, dass die Azimutaldifferenz von der Refraktion unabhängig sei, und dass in der Nähe des Equators, wo die Sonne bei Auf- und Untergang längere Zeit in demselben Vertikal verweile, eine kleine Unsicherheit in ihrer Höhe auf ihr Azimut fast ohne Einfluss sei; in höhern Breiten dagegen sei es allerdings besser, das Azimut der Sonne aus ihrem Stundenwinkel (resp. der Beobachtungszeit) abzuleiten. — *c.* Da die Lösung dieser Aufgabe, für welche z. B. auf die früher (13 : t) erwähnte Schrift von B. **Studer** verwiesen werden kann, auf der Voraussetzung beruht, dass die drei Sternlagen einem Parallel entsprechen, so involviert sie eine Probe für diese Hypothese, und wurde aus diesem Grunde von **Gauss** jeweilen im Eingange zu seinen Vorlesungen behandelt.

365. Die frühern Methoden zur Bestimmung der Polhöhe. — Die Polhöhe wurde in älterer Zeit meist aus den beiden Solstitialhöhen der Sonne abgeleitet[a], — wohl auch aus einer andern Mittagshöhe derselben unter Berücksichtigung ihrer Deklination [b], — sowie zuweilen aus der Dauer des längsten Tages an dem betreffenden Orte [c]. Sodann kam spätestens bei den Arabern das Verfahren in Anwendung, die Polhöhe gleich dem Mittel der Culminationshöhen eines Circumpolarsternes zu setzen [d], — und an dieses reihte sich bei den Schiffahrern die Übung an, die Höhe des Polarsternes zu messen, und an dieser je nach der gleichzeitigen Lage des kleinen Bären eine Korrektion anzubringen [e]. — Ausserdem wurden noch manche andere Methoden in Vorschlag gebracht, von deren wichtigsten die folgenden Nummern handeln werden [f].

Zu 365: *a.* Die ältern Astronomen bestimmten meistens statt der Polhöhe ihr Komplement, die Equatorhöhe, und zwar vorzugsweise aus der halben Summe der beiden am Gnomone erhaltenen Solstitialhöhen, deren halbe Differenz ihnen (191) die Schiefe der Ekliptik ergab. So richtig jedoch theoretisch dieses Verfahren war, so erzielten sie damit in der Praxis meistens zu grosse Werte, da bei dem gewöhnlichen (164), in eine Spitze auslaufenden Gnomone, die Schattenlänge nahezu dem obern Sonnenrande entsprach und auch die durch die Refraktion bewirkte Verkürzung des Schattens unberücksichtigt blieb. — *b.* Die an und für sich ebenso richtige und bis in das 18. Jahrhundert hinauf vielfach gebrauchte Methode, die Equatorhöhe dadurch zu bestimmen, dass man die mit dem Gnomone gemessene Mittagshöhe der Sonne um deren Deklination verminderte, ergab in der Praxis natürlich dieselben Fehler, und da man überdies die in verschiedenen Zeiten und nach verschiedenen Verfahren erhaltenen Werte kritiklos zusammenstellte, so hatte noch Wilhelm **Schickard** (Herrenberg in Würtemberg 1592 — Tübingen 1635; Diakon zu Nürtingen und später Prof. math. et orient. Tübingen) sich in seiner Schrift „Kurze Anweisung wie künstliche Landtafeln auss rechtem Grund zu machen. Tübingen (posth.) 1669 in 4." bitter zu beklagen, dass die verschiedenen Angaben für einen Ort oft bei 1° differieren „so man mit eim ungespitzten Pfal genäuer treffen sollte". So gab z. B. **Bartsch** in seinem sonst so anerkennenswerten „Planisphærium" von 1624 (vgl. 190) zwar „Tigurum Helvetiæ" unter 47° 22′, aber daneben auch „Zürich Helvetiæ" unter 47° 9′ Breite, — so schwankten damals die Angaben über die Breite von Basel zwischen 47° 10′ (Solothurn) und 47° 54′ (Freiburg i./Br.), — etc. Im 18. Jahrhundert trat eine bedeutende Verbesserung ein; doch fand noch Tob. **Mayer**, zur Zeit als er im Homan'schen Institute thätig war, notwendig, eine „Germaniæ mappa critica" zusammenzustellen, welche 1750 ausgegeben wurde und in der That immer noch bedenkliche Differenzen in den Breiten aufweist, von den noch viel ärgern in den Längen hier nicht einmal zu sprechen. — *c.* Nach Hipparchs Zeugnis bestimmte schon **Eudoxus** „die Neigung des Himmels" aus dem Verhältnis der Segmente des vom Horizonte geteilten Wendekreises, — also wohl indem er mit Hilfe einer Wasseruhr die Dauer des längsten Tages ermittelte. Wie er rechnete, wird nicht angegeben: Wir würden die nach 179 bestehende Formel $\text{Tg}\,\varphi = -\text{Co}\,s \cdot \text{Ct}\,e$ benutzen, wo s den halben Tagbogen der Sonne am längsten Tage und e die Schiefe der Ekliptik bezeichnet. — *d.* Schon **Aboul Hhassan** kannte dieses Verfahren, das sich dann auch im Abendlande spätestens bei **Werner**, namentlich aber bei Landgraf **Wilhelm** neben der Methode der Solstitialhöhen (vgl. Mitth. 45 von 1878) findet, ja sogar von Andreas **Schoner**, der um 1550

„Mathematicus" des Landgrafen war, in seiner Schrift von 1562 (vgl. 195 : 9) als „Modus principis Guilhelmi Landgravij Hassiæ observandi altitudinem poli" bezeichnet wird, wobei derselbe zugleich anführt, dass Wilhelm mit einem fünffüssigen, genau in Grade und Minuten geteilten Quadranten, die grösste und kleinste Höhe des Bennenaz (η Ursæ maj.) gemessen und daraus das Mittel genommen habe. Auch **Tycho** benutzte später (vgl. 453 : f) diese Methode. — *e.* Nach Peschel bestimmten die portugiesischen Seefahrer schon zur Zeit **Heinrich** des Seefahrers (1394—1460) die Polhöhe in solcher Weise, und ebenso **Columbus**, der in seinen Schiffsbüchern immer bemerkte, ob der kleine Bär „auf dem Kopf", oder „auf den Füssen", oder „linker", oder „rechter Hand" stand. — *f.* Beispielsweise erwähne ich hier noch das von **Schickard** in seiner oben erwähnten Schrift beliebte Verfahren: Man stelle über dem Punkte M, dessen Polhöhe bestimmt werden soll, eine Horizontaltafel (Mensel) auf, und notiere auf dieser M durch eine Nadel, — dann beobachte man zwei Sterne K und L bei ihrem Niedergange und stecke entsprechend zwei Nadeln bei N und O, — messe die Seiten des Dreiecks OMN, — und berechne daraus den Winkel α, aus dessen Wert man auf die Polhöhe schliessen könne. Und in der That, da α offenbar die Differenz w — w' der Abendweiten beider Sterne repräsentiert, so hat man nach 179



$$\mathrm{Co\,w} = -\mathrm{Co\,p} \cdot \mathrm{Se}\,\varphi \qquad \mathrm{Co\,w'} = -\mathrm{Co\,p'} \cdot \mathrm{Se}\,\varphi \quad \text{also} \quad \mathrm{Tg\,w} = \frac{\mathrm{Co\,p'} - \mathrm{Co\,p} \cdot \mathrm{Co}\,\alpha}{\mathrm{Co\,p} \cdot \mathrm{Si}\,\alpha} \qquad \mathbf{1}$$

kann also w und sodann φ wirklich berechnen. **Schickard** fügt bei: „Noch besser ist es man schlag nur drei stöck nach den Gesichtslinien in die Erden, so kann man den Dreieck viel grösser haben als kein Tisch vermag; darumb auch desto schärpffer. Und ob man zwar unter allen Sternen die Wahl hat, sein doch die bequemsten dazu, welche nahend bei den beiden Tropicis, als Arcturus und Cor Scorpii, stehen. So schadet auch die Refractio hier nichts, weil man nicht die Höhen hinauff, sondern überzwerch misset".

366. Die Bestimmung aus grössten Höhen. — Die Bestimmung der Polhöhe aus grössten oder also bei der Culmination der Gestirne gemessenen Höhen ist schon früher (167—70) ziemlich einlässlich besprochen worden, so dass hier nur einige praktische Regeln nachzutragen sind[a], zumal bei Anlass der eigentlichen Meridianinstrumente (376—83) nochmals darauf zurückzukommen sein wird[b].

Zu 366: *a.* Vor allem ist es zweckmässig, nicht nur zwei, sondern behufs möglichster Elimination der zufälligen Fehler eine grössere Anzahl von Sternen zu beobachten, und ausserdem durch abwechselnde Beobachtungen in beiden Lagen des Instrumentes (bei Kreis Ost und bei Kreis West) den allfälligen Fehler des Zenitpunktes zu eliminieren oder zu bestimmen, wie dies in folgendem Beispiele näher auseinander gesetzt ist: Herr **Wolfer** erhielt 1885 VII·20 an einem 10" gebenden Theodoliten, dessen Zenitpunkt annähernd bei 0 lag, in Zürich unter der angenommenen Polhöhe $\varphi' = 47^0\ 18'$ die in der beigegebenen Tafel, wo die δ die Deklinationen der benutzten Sterne und die z' die gemessenen Zenitdistanzen bezeichnen, enthaltenen Bestimmungen.

Führt man nun $\Delta\varphi$ als Verbesserung der angenommenen Polhöhe und Δz als Verbesserung des Zenitpunktes im Sinne der bei der Ost-Lage vom Zenit gegen Süd laufenden Teilung ein, so erhält man nach 169, wenn das obere Zeichen sich ebenfalls auf Kreis-Ost bezieht und α die Refraktionskonstante bezeichnet,

Stern	δ	Kreis-lage	z'	Tg z'	B	R	B R
o Herc.	46° 35′ 33″	o	0° 47′ 38″	0,014	311″	301″	10″
α Scorp.	— 26 10 33	w	73 29 30	3,372	57	68	— 11
$\varDelta$ Drac.	69 1 21	o	— 21 38 2	— 0,397	319	323	— 4
η Herc.	39 8 47	w	8 13 30	0,144	257	251	6
k Oph.	9 33 29	o	37 48 50	0,776	259	257	2
η Oph.	— 15 34 47	w	62 55 20	1,955	153	149	4
ζ Drac.	65 51 43	o	— 18 28 15	— 0,334	328	320	8
θ Oph.	— 24 52 56	w	72 12 25	3,115	89	83	6
β Drac.	52 23 32	o	— 5 0 40	— 0,087	292	306	— 14
ι Herc.	46 4 23	w	1 17 40	0,023	243	258	— 15
ψ Drac.	72 12 37	o	— 24 49 7	— 0,462	330	327	3
ν Oph.	— 9 45 18	w	57 6 15	1,564	177	172	5

die Bedingungsgleichung

$$\Delta\varphi \pm \Delta z - \alpha \cdot \mathrm{Tg}\, z' = B \qquad \text{wo} \qquad B = \delta + z' - \varphi' \qquad \mathbf{1}$$

kann nun diese für jede Beobachtung aufschreiben, wobei sich die in die Tafel eingeschriebenen Werte von B ergeben, — erhält daraus für $\Delta\varphi$, Δz und α die Normalgleichungen

$$12 \cdot \Delta\varphi - 9{,}665 \cdot \alpha = 2815 \qquad 12 \cdot \Delta z + 10{,}645 \cdot \alpha = 863$$
$$9{,}665 \cdot \alpha - 10{,}645 \cdot \Delta z - 28{,}400 \cdot \alpha = 874$$

aus diesen

$$\alpha = 56'',65 \qquad \Delta z = 21'' \qquad \Delta\varphi = 4'\ 40'' \qquad \varphi = 47^0\ 22'\ 40''$$

und, die erhaltenen Werte links in die 1 einführend, die in die Tafel eingeschriebenen R, sowie die Differenzen B — R, deren mittlerer Wert $\pm$ 8″,4 zunächst als durchschnittlicher Messungsfehler einer Zenitdistanz aufzufassen ist. — *b.* Wie **Pühler** (170) als einer der ersten zu nennen war, der die Methode der grössten Höhen überhaupt ernstlich anwandte, so ist unzweifelhaft Jean **Chappe** d'Auteroche (Mauriac in Auvergne 1722 — San Joseph in Kalifornien 1769; Oheim der Chappe in 158; Abbé und Akad. Paris) als einer der ersten zu erwähnen, welcher von ihr (natürlich abgesehen von der Rechnungsmethode) in dieser vervollkommneten Weise Gebrauch machte, indem er 1769 in Kalifornien zur Bestimmung der Polhöhe mit einem im Meridiane aufgestellten dreifüssigen Quadranten von Canivet, der mutmasslich auf 5′ geteilt war und für die kleinern Teile eine mikrometrische Vorrichtung besass, Culminationshöhen von Sternen abwechselnd bei Limbus West und Limbus Ost mass; vgl. seine „Voyage en Californie pour l'observation du passage de Vénus. Paris 1772 in 4."

367. Die Bestimmung aus Circum-Meridianhöhen. — Anstatt ausschliesslich die Höhe eines Sternes bei seinem Durchgange durch den Meridian zu messen, kann man diese Operation unter Notierung der Zeit auch wiederholt vor und nach der Culmination vornehmen und dann die erhaltenen Zenitdistanzen nach Massgabe des betreffenden Stundenwinkels auf den Meridian reduzieren [a], wobei verschiedene Manipulationen und Hilfsmittel zur Anwendung kommen können [b], besonders wenn man sich auf den Polarstern beschränkt [c], oder noch besser Beobachtungen von Polarsternen mit solchen von nahe in gleicher Höhe südlich culminierenden Sternen verbindet [d].

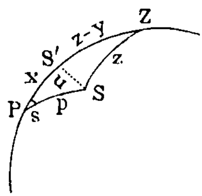
Zu 367: ***a.*** Aus dem Dreiecke Pol-Zenit-Stern folgt

$$\mathrm{Co}\,z = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,d + \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,s = \mathrm{Co}\,(\varphi - d) - 2 \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_2\,s \qquad \mathbf{1}$$

und somit nach 42:5

$$\varphi = d + z - \frac{2}{\mathrm{Si}\,1''} \cdot b \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_2\,s + \frac{2}{\mathrm{Si}\,1''} \cdot b^2 \cdot \mathrm{Si}^4\,{}^1\!/_2\,s \cdot \mathrm{Ct}\,(\varphi - d) \quad \ldots \text{wo } b = \frac{\mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d}{\mathrm{Si}\,(\varphi - d)} \qquad \mathbf{2}$$

d. h. eine Reihe, welche für Beobachtungen in der Nähe des Meridianes ziemlich rasch konvergiert, und nach welcher man die Polhöhe, indem man mit einem supponierten Werte für φ die Hilfsgrösse b berechnet, leicht finden kann, — zumal wenn man eine Tafel besitzt, welche für das Argument s die Logarithmen von $2\,\mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_2\,s : \mathrm{Si}\,1''$ und $2 \cdot \mathrm{Si}^4\,{}^1\!/_2\,s : \mathrm{Si}\,1''$ giebt, wie eine solche in „H. C. **Schumacher,** Sammlung von Hülfstafeln. Neue A. durch G. H. L. Warnstorff. Altona 1845 in 8. (p. 53—70), und in: C. W. **Peters,** Astronomische Tafeln und Formeln. Hamburg 1871 in 8. (p. 72—88)“ enthalten ist. Zeigt sich bei der Rechnung, dass der supponierte Wert von φ ziemlich irrig war, so wird es allerdings notwendig werden, dieselbe noch einmal mit dem gefundenen bessern Werte zu revidieren. — ***b.*** Misst man, wie es wegen den zufälligen Fehlern und der wünschbaren Kontrole ratsam ist, rasch nach einander mehrere Circummeridian-Zenitdistanzen desselben Sternes, so genügt es, da die Werte von b dieselben bleiben, in 2 die Mittel der Zenitdistanzen und der allfällig aus einer Tafel erhobenen Werte einzuführen, — verliert dann aber die sich bei Einzelrechnung ergebende Kontrole, welche praktisch doch wohl mehr Wert hat als dieser kleine Gewinn. Immerhin wurde diese Reduktion von **Delambre,** namentlich bei Anwendung des damals beliebten, die Messung in beiden Lagen und die Repetition erlaubenden Bordakreises, empfohlen und lieferte eine Reihe ganz guter Resultate: So z. B. ersieht man aus „Friedrich **Trechsel** (Burgdorf 1776 — Bern 1849; Prof. math. et phys. Bern; vgl. Biogr. II), Observations astronomiques pour déterminer la latitude de Berne, faites en 1812 par le Colonel Henry, le Commandant Delcros et le Professeur Trechsel (Neue schweiz. Denkschr. XI von 1850)“, dass damals mit einem 18-zölligen Kreise von Lenoir aus 408 sich auf 15 Tage verteilenden Einstellungen auf den Polarstern die Breite der kleinen Berner Sternwarte gleich 46° 57′ 8″,68 gefunden wurde, während ich 1854/5 aus Beobachtungen an dem damals neu aufgestellten Ertel'schen Meridiankreise 8″,76 und Plantamour 1869 mit ebendemselben 8″,66 erhielt. — Wählt man statt einem Stern die Sonne oder ein anderes Gestirn von veränderlicher Deklination, so kann man sich einer entsprechenden vereinfachten Rechnung bedienen, worauf ich jedoch hier nicht näher eintreten, sondern z. B. auf „**Brünnow,** Sphärische Astronomie (4. A. von 1881, p. 275)“ verweisen will. — ***c.*** Für Sterne kleiner Poldistanz, speciell für den Polarstern, kann man auch auf folgende Weise vorgehen: Fällt man von dem



Sterne S eine Senkrechte $SS' = u$ auf den Meridian, so zerfällt die Equatorhöhe $PZ = \psi$ in zwei Teile $PS' = x$ und $ZS' = z - y$, wo y eine kleine Grösse ist, und man hat unmittelbar

$$\psi = z + x - y \quad \mathrm{Tg}\,x = \mathrm{Tg}\,p \cdot \mathrm{Co}\,s \quad \mathrm{Si}\,u = \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Si}\,s \qquad \mathbf{3}$$

$$\mathrm{Co}\,z = \mathrm{Co}\,u \cdot \mathrm{Co}(z - y) \text{ oder } \mathrm{Si}\,y = (\mathrm{Se}\,u - \mathrm{Co}\,y) \cdot \mathrm{Ct}\,z \qquad \mathbf{4}$$

Aus 3'' erhält man aber mit Hilfe der goniometrischen Reihen

$$\begin{aligned} x &= [\mathrm{Tg}\,p \cdot \mathrm{Co}\,s - \tfrac{1}{3}\mathrm{Tg}^3 p \cdot \mathrm{Co}^3 s + \ldots] : \mathrm{Si}\,1'' \\ &= (p + \tfrac{1}{3} p^3 \cdot \mathrm{Si}^2 1'' + \ldots) \cdot \mathrm{Co}\,s - \tfrac{1}{3}(p^3 \cdot \mathrm{Si}^2 1'' + \ldots)\,\mathrm{Co}^3 s + \ldots \\ &= p \cdot \mathrm{Co}\,s + \tfrac{1}{3} p^3 \cdot \mathrm{Co}\,s \cdot \mathrm{Si}^2 s \cdot \mathrm{Si}^2 1'' + \ldots \end{aligned} \qquad \mathbf{5}$$

und entsprechend, da $\mathrm{Se}\,u = 1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{Si}^2 u + \ldots$ ist, aus 4'' mit Hilfe von 3'''

$$y = \tfrac{1}{2} p^2 \cdot \mathrm{Si}^2 s \cdot \mathrm{Ct}\,z \cdot \mathrm{Si}\,1'' + \ldots \qquad \mathbf{6}$$

folglich nach 3'

$$\psi = z + p \cdot \mathrm{Co}\,s - \tfrac{1}{2} p^2 \mathrm{Si}^2 s \cdot \mathrm{Ct}\,z \cdot \mathrm{Si}\,1'' + \tfrac{1}{3} p^3 \cdot \mathrm{Co}\,s \cdot \mathrm{Si}^2 s \cdot \mathrm{Si}^2 1'' + \ldots \qquad \mathbf{7}$$

wo in der Regel schon das Glied mit p^3 vernachlässigt und überdies die Rechnung mit Hilfe von Tafeln, wie solche z. B. in den oben erwähnten Sammlungen enthalten sind, erleichtert werden kann. — Die 7 wurde durch J. J. **v. Littrow** in seiner „Nouvelle méthode de déterminer la latitude par l'observation de l'étoile polaire en tout temps et dans toutes les positions de l'étoile (Corr. astr. IV von 1820)" entwickelt, trägt auch dessen Namen und veranlasste z. B. die Publikation „Amédée **Racine**, Tables pour calculer la latitude d'un lieu par des observations de la polaire, construites sur les formules de M. Littrow. A la Chapelle du Bourgay 1824 in 4." Verschiedene Konkurrenz-Arbeiten, wie namentlich „J. C. **Horner**, Méthode facile et générale pour calculer la latitude d'un lieu par les hauteurs de l'étoile polaire, observées à toute heure; et Th. **Young**, Autre méthode pour réduire au méridien les hauteurs circumméridiennes d'un astre quelconque. Gênes 1822 in 8. (Corr. astr. V von 1821)", sind ebenfalls bemerkenswert, obschon meistens die Littrow'sche Behandlung vorgezogen wird. — *d.* Bezeichnet man mit Δz die Reduktion der dem Stundenwinkel s entsprechenden Zenitdistanz z auf den Meridian, so hat man nach 1 für $s = 0$

$$\mathrm{Co}\,(z - \Delta z) = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,d + \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d$$

folglich durch Subtraktion von 1 unter Benutzung bekannter goniometrischer Formeln

$$\mathrm{Si}\,\frac{\Delta z}{2} = \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Si}^2 \frac{s}{2} \cdot \mathrm{Cs}\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right) \quad \text{oder} \quad \Delta z = \frac{\mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Si}\,1''}{2 \cdot \mathrm{Si}\,z} \cdot s^2 \qquad \mathbf{8}$$

wo jedoch die letztere Annäherungsformel nur bei ganz kleinen Werten von s gebraucht werden darf. Aber auch die strenge Formel 8' erlaubt die Reduktion Δz leicht zu finden, indem man zuerst rechts Δz vernachlässigt, und sodann mit Hilfe der logarithmischen Differenz den so erhaltenen Lsi für den ihm entsprechenden Wert von Δz korrigiert, — ja es ist die darauf beruhende Methode unter der Vorschrift, dass man sie nicht nur auf den Polarstern, sondern auch auf nahe in gleicher Höhe kulminierende südliche Sterne anwende, und jeden Stern mehrfach sowohl bei Okular West als bei Okular Ost beobachte, zu einer der beliebtesten der Neuzeit geworden. So z. B. erhielten Joh. Jakob **Baeyer** (Müggelheim bei Köpenik 1794 — Berlin 1885; Generalmajor) und Moritz **Sadebeck** (Reichenbach in Niederschlesien 1809 — Potsdam

1885; früher Gymn. Breslau, dann Prof. am geod. Inst. Berlin) 1862 an einem 13″ Universalinstrument in Breslau unter anderm:

Sternzeit 1862	Gegenstand	Okul.	Kreisangabe
VII 6, $12^h\ 24^m\ 56^s,11$	α Urs. min. U. C.	West	40° 19′ 24″,0
52 22,11	$1^h\ 8^m\ 56^s,32$; 88° 34′ 21″,32	Ost	319 42 1,2
— 7, 0 19 20,11	α Urs. min. O. C.	West	37 28 9,0
41 11,69	$1^h\ 8^m\ 57^s,84$; 88° 34′ 21″,41	Ost	322 33 20,9
— 24, 4 40 38,49	α Tauri	West	325 7 42,8
50 52,67	$4^h\ 28^m\ 2^s,68$; 16° 13′ 49″,42	Ost	34 53 51,6

Es ergeben sich also, wenn von der Abweichung des Zenitpunktes von Null Umgang genommen wird, da die Kreisablesungen bereits für Refraktion und ($\varphi = 51^0\ 7'$ angenommen) nach 8′ für den Stundenwinkel korrigiert, sowie die Deklinationen aus den Ephemeriden bekannt sind, aus

α Urs. min. U. C.	α Urs. min. O. C.	α Tauri
$z' = 40^0 19' 24'',0$	$z' = 37^0 28' 9'',0$	$z' = 34^0 52' 17'',2$
$z'' = 40\ 17\ 58,8$	$z'' = 37\ 26\ 39,1$	$z'' = 34\ 53\ 51,6$
$\frac{1}{2}(z' + z'') = 40\ 18\ 41,4$	$\frac{1}{2}(z' + z'') = 37\ 27\ 24,0$	$\frac{1}{2}(z' + z'') = 34\ 53\ 4,4$
$180 - d = 91\ 25\ 38,7$	$d = 88\ 34\ 21,0$	$d = 16\ 13\ 49,4$
$\varphi = 51\ 6\ 57,3$	$\varphi = 51\ 6\ 57,4$	$\varphi = 51\ 6\ 53,8$

wobei sich der, im Mittel aus allen drei Beobachtungspaaren folgende Fehler $\frac{1}{2}(z' - z'') = 44'',9$ des Zenitpunktes je aufgehoben hat. Auf solche Weise erhielten im Mittel

Baeyer und Sadebeck	aus 72 Beob. von α Urs. min. . . .	$\varphi = 51^0\ 6'\ 57'',242$
	- 48 - - α Bootis u. α Tauri	55,698

während mit demselben Instrumente etwas später

Galle . .	aus 69 Beob. von α Urs. min. . . .	$\varphi = 51^0\ 6'\ 57'',563$
	- 20 - - α Tauri	55,392

fand, und man muss somit offenbar (381) auf eine sehr merkliche Durchbiegung η des Fernrohrs schliessen, welche zwar die nahe gleiche Zenitdistanz aller drei Sterne auch um nahe gleich viel, aber die Polhöhe wegen $\varphi = d - z_n$ und $\varphi = d + z_s$ für nördliche und südliche Sterne in verschiedenem Sinne fälscht. Setzt man die wirkliche Polhöhe $\varphi = a + \triangle\varphi$ (wo $a = 51^0\,6'\,50''$ angenommen werden mag) und die beobachtete Polhöhe gleich φ', so ist somit

$$\varphi' = a + \triangle\varphi \pm \eta \qquad \mathbf{9}$$

wo sich das obere Zeichen auf nördliche, das untere auf südliche Sterne beziehen soll. Man erhält also, wenn man 9 für alle n nördlichen und s südlichen Beobachtungen aufschreibt, für die wahrscheinlichsten Werte von $\triangle\varphi$ und η (52) die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma\varphi'_n + \Sigma\varphi'_s &= (n+s)\cdot a + (n+s)\cdot\triangle\varphi + (n-s)\cdot\eta \\ \Sigma\varphi'_n - \Sigma\varphi'_s &= (n-s)\cdot a + (n-s)\cdot\triangle\varphi + (n+s)\cdot\eta \end{aligned} \qquad \mathbf{10}$$

oder durch Addition und Subtraktion

$$\frac{1}{n}\sum\varphi'_n = a + \triangle\varphi + \eta \qquad \frac{1}{s}\sum\varphi'_s = a + \triangle\varphi - \eta$$

und endlich durch nochmalige Addition und Subtraktion

$$\triangle\varphi = \frac{1}{2n}\sum\varphi'_n + \frac{1}{2s}\sum\varphi'_s - a \qquad \eta = \frac{1}{2n}\sum\varphi'_n - \frac{1}{2s}\sum\varphi'_s \qquad \mathbf{11}$$

Setzt man das Gewicht jeder Einzelbestimmung von φ' gleich der Einheit, so geht (52 : 9) aus 11 für die Bestimmung des Gewichtes p von $\triangle\varphi$ oder η die gemeinschaftliche Relation

$$\frac{1}{p} = \left(\frac{1}{2n}\right)^2\cdot n + \left(\frac{1}{2s}\right)^2\cdot s \qquad \text{oder} \qquad p = n + s - (n-s)^2 : (n+s) \qquad \mathbf{12}$$

hervor. Nach 11 und 12 erhielten nun **Baeyer** und **Sadebeck**

$$\eta = 0'',772 \qquad \triangle\varphi = 6'',470 \qquad \varphi = 51^0\,6'\,56'',470 \qquad p = 115,20$$

und dagegen **Galle**

$$\eta = 1'',086 \qquad \triangle\varphi = 6'',477 \qquad \varphi = 51^0\,6'\,56,477 \qquad p = 62,02$$

so dass bei Berücksichtigung der Gewichte durch Zusammenfassen beider Reihen die Schlusswerte

$$\eta = 0'',882 \qquad \varphi = 51^0\,6'\,56'',472$$

erhalten werden.

368. Die Aufgabe von Douwes und die Methoden der Nautiker. — Die gewöhnlich, wenn auch nicht mit vollem Rechte, nach Cornelis **Douwes** [a] benannte Aufgabe besteht darin, aus zwei Zenitdistanzen eines Gestirnes und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Polhöhe zu finden [b], — kompliziert sich jedoch dadurch, dass bei Anwendung der Sonne ihrer Deklinationsänderung und bei Bestimmungen auf der See der durch **Boussole** und **Log** [c] gegebenen Ortsveränderung des Beobachters Rechnung getragen werden muss [d]. Für weitern Detail und für andere auf der See gebräuchliche Methoden, soweit letztere nicht schon unter vorhergehenden Nummern Berücksichtigung fanden, muss auf die nautische Fachlitteratur verwiesen werden [e].

Zu 368: *a.* Cornelis **Douwes** (1713? — Amsterdam 1773) war Lehrer am Zeemans-Kollegium zu Amsterdam, und wahrscheinlich Vater des sich bei Ausgabe der „Tafelen behelzende de Sinussen, etc. Amsterdam 1775 in 8." als „Adjunct Mathematicus by't Edel Mag. Collegio ter Admiraliteit te Amsterdam" einführenden Bernardus Joannes **Douwes**. — *b.* Bezeichnen z_1 und z_2 zwei unter derselben Breite φ zu den Uhrzeiten u_1 und u_2 gemessene Zenitdistanzen eines Gestirnes der Coordinaten a und d, so hat man aus Dreieck Pol-Zenit-Stern

$$\text{Co}\,z_1 = \text{Si}\,d\cdot\text{Si}\,\varphi + \text{Co}\,d\cdot\text{Co}\,\varphi\cdot\text{Co}\,s_1 \qquad \text{Co}\,z_2 = \text{Si}\,d\cdot\text{Si}\,\varphi + \text{Co}\,d\cdot\text{Co}\,\varphi\cdot\text{Co}\,s_2 \qquad \mathbf{1}$$

und also durch Subtraktion, wenn

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) = \tfrac{1}{2}\left[a + \tfrac{1}{15}s_2 - \triangle t - (a + \tfrac{1}{15}s_1 - \triangle t)\right] = \tfrac{1}{30}(s_2 - s_1) \qquad \mathbf{2}$$

die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen ist,

$$\text{Co}\,z_1 - \text{Co}\,z_2 = 2\,\text{Co}\,d\cdot\text{Co}\,\varphi\,\text{Si}\,(s_1 + 15\,\lambda)\,\text{Si}\,15\,\lambda$$

oder

$$\text{Si}\,(s_1 + 15\,\lambda) = \frac{\text{Si}\,\tfrac{1}{2}(z_2 + z_1)\cdot\text{Si}\,\tfrac{1}{2}(z_2 - z_1)}{\text{Co}\,d\cdot\text{Co}\,\varphi\cdot\text{Si}\,15\,\lambda} \qquad \mathbf{3}$$

so dass man, unter Voraussetzung eines Näherungswertes für die Polhöhe φ, ohne Schwierigkeit s_1 und $s_2 = s_1 + 30\,\lambda$ berechnen kann. Da ferner nach 1''

$$\text{Co}\,(\varphi - n) = \text{Co}\,z_2 : m \qquad \text{wo} \qquad m\cdot\text{Si}\,n = \text{Si}\,d \qquad m\cdot\text{Co}\,n = \text{Co}\,d\cdot\text{Co}\,s_2 \qquad \mathbf{4}$$

so kann man sodann auch φ berechnen, womit die gestellte Aufgabe vollständig gelöst ist. Jedoch ist nicht zu übersehen, dass, wenn die nach 4 erhaltene Breite von dem für φ angenommenen oder nach Seemanns-Ausdruck **gegissten** Werte bedeutend abweicht, die Rechnung mit diesem bessern Werte noch einmal wiederholt werden muss. Es wird dies namentlich zur See, wo oft längere Zeit keine Bestimmung erhältlich ist, so dass diese gegissten Breiten nur auf der ziemlich unsichern Schiffsrechnung (vgl. Note c) beruhen, ziemlich häufig notwendig werden. — Die durch 1—4 gelöste, zuweilen auch als „Zweihöhenproblem" bezeichnete Aufgabe wurde schon durch **Nonius** in seinem Werke „De crepuscülis. Olyssipone 1542 in 4." behandelt, — dann wieder in „**Hues**, Tractatus de globis et eorum usu. Lugd. 1594 in 8.", — in „Claes Heyndericks **Gietermaker** (Medemblik 1621 — Amsterdam 1670?; Examinator der ost- und westind. Kompagnie), Vergulden Licht der Zeevaert of te Konst der Stuurlieden. Amsterdam 1660 in 4. (und später)", — in „Nic. **Fatio**, Navigation improv'd. London 1728 in fol.", — etc.; aber für die Seeleute wurde sie eigentlich erst mundgerecht, als **Douwes** in seiner „Verhandeling om buiten den Middag op Zee de waare Middags-Breedte te vinden. Haarlem 1754 in 8." eine der obigen ähnliche indirekte Lösung gab, und deren Anwendung überdies durch seine „Zeemans-Tafelen en voorbelden tot het vinden der Breedte buiten den Middag. Amsterdam 1761 in 8. (auch später)", welche alsbald auch in andere nautische Hilfsbücher, wie namentlich in die von **Maskelyne** gleichzeitig mit dem 1766 für 1767 ausgegebenen ersten „Nautical Almanac" publizierten „Tables requisite to be used with the ephemeris. London 1766 in 8. (3. ed. 1802)" übergingen, noch wesentlich zu erleichtern wusste. Diese Tafeln setzen die aus unserer 3' ohne weiteres hervorgehende Formel

$$\mathrm{Lg}\cdot 2\,\mathrm{Si}\,(s_1+15\,\lambda)=\mathrm{Lg}\,(\mathrm{Co}\,z_1-\mathrm{Co}\,z_2)-\mathrm{Lsi}\,15\,\lambda-\mathrm{Lg}\,(\mathrm{Co}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,d) \qquad \mathbf{5}$$

voraus, indem sie für das Argument λ den Wert von Lsi $15\,\lambda$ als „Log $^1/_2$ elapsed time" und den Wert von Lg $2\,\mathrm{Si}\,(s_1+15\,\lambda)$ als „Log. middle time" geben, also wirklich s_1 und sodann s_2 verhältnismässig leicht berechnen lassen. Ist sodann z die der Culmination entsprechende Zenitdistanz, so ist nach 1

$$\mathrm{Co}\,z=\mathrm{Si}\,d\cdot\mathrm{Si}\,\varphi+\mathrm{Co}\,d\cdot\mathrm{Co}\,\varphi=\mathrm{Co}\,z_2+\mathrm{Co}\,d\cdot\mathrm{Co}\,\varphi\cdot 2\,\mathrm{Si}^2\,{}^1/_2\,s_2 \qquad \mathbf{6}$$

so dass sich auch z und somit φ leicht ergeben, zumal man in denselben Tafeln den Wert von Lg $2\,\mathrm{Si}^2\,{}^1/_2\,s_2$ als „Log rising" eingetragen findet. Immerhin würde ich die Rechnung nach 3" und 4 unter Benutzung der gewöhnlichen Logarithmentafeln vorziehen. — *c.* Zu Gunsten der sog. **Schiffsrechnung** (Logge-Rechnung), d. h. der angenäherten Bestimmung der Lage des Schiffes, wurde schon frühe von Zeit zu Zeit die Geschwindigkeit des Schiffes, sei es aus der Zeit bestimmt, welche der Hinterteil des Schiffes bedarf, um einen vorn ins Meer geworfenen leichten Körper zu erreichen, sei es nach Auswerfen des sog. **Log-Bretes**, an der sich abwickelnden und in sog. „Knoten (zu $^1/_{120}$ Seemeile = $^1/_2$'')" abgeteilten **Log-Leine** abgelesen, — ferner die sich an der Boussole zeigende Schiffsrichtung oder der sog. „gesteuerte Kurs" in das „Logbuch" eingetragen; auch war vorgeschrieben, bei jeder Sonnenbeobachtung die Sonne zu „peilen", d. h. die Richtung nach derselben ebenfalls an der Boussole abzulesen. — Für den genauern Detail auf die Fachlitteratur, wie z. B. auf „Eugen **Gelcich**, Die Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Schiffsgeschwindigkeit (Z. f. Instr. 1884)" und die früher (321 : a) erwähnte Schrift von **Breusing** verweisend, füge ich noch die historische Notiz bei, dass, während die ältern Schiffahrer sich mit Schätzung (Gissung) der Schiffsgeschwindigkeit begnügten, schon **Cusanus** in seinem Dialoge „De staticis experimentis" das Auswerfen eines Apfels empfahl, sodann in **Pigafettas** Reisejournal der Magellan'schen Weltumseglung unter Januar 1521 die Stelle „secondo le misure che facevano del viaggio colla **catena a poppa** (Kette am Hinterteile des Schiffes) noi percorrevano da 60 in 70 leghe al giorno" vorkommen soll, und dass auch der Name „Log" spätestens 1577 in „Will. **Bourne**, Rules of navigation" erwähnt wird. — *d.* Bezeichnet Δd die in Minuten ausgedrückte stündliche Zunahme der Deklination der Sonne, δ die dem Schiffsjournal entnommene stündliche und ebenfalls in Minuten (Seemeilen) gegebene Schiffsgeschwindigkeit, und α den durch die Peilung bestimmten Winkel zwischen der Schiffsrichtung und der Richtung nach der Sonne zur Zeit der ersten Beobachtung, so hat man (92) von z_1 die Grösse

$$\Delta z = 2\lambda(\Delta d \cdot \mathrm{Co}\, v + \delta \cdot \mathrm{Co}\, \alpha) \qquad 7$$

abzuziehen, wo λ in Stunden auszudrücken ist und v die nach 177 zu berechnende Variation zur Zeit der ersten Beobachtung bezeichnet. — *e.* Ich erwähne: „**Bouguer**, De la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres. Paris 1729 in 4., — Dan. **Bernoulli**, Problema astronomicum inveniendi altitudinem poli una cum declinatione stellæ ejusdemque culminatione ex tribus altitudinibus stellæ et duobus temporum intervallis brevi calculo solutum (Comm. Petrop. IV von 1735), und: Sur la meilleure manière de trouver l'heure en mer lorsqu'on n'apperçoit pas l'horizon (Mém. Par. 1745, 47), — P. **Nieuwland**, Über Douwes Methode aus zwey ausser dem Meridiane liegenden Sonnenhöhen die Breite eines Ortes zu bestimmen (Berl. Jahrb. Suppl. I von 1793), — Don José **Mendoza** y Rios (Sevilla 1763? — Brighton 1816; span. Marineoffizier, später Mitgl. Roy. Soc.), Recherches sur les solutions des principaux problèmes de l'astronomie nautique. Londres 1797 in 4., — S. **Klügel**, Formeln aus 3 Höhen eines Gestirnes nahe beim Meridian und den Zeiten der Beobachtungen, die Meridianhöhe und die Zeit des Durchganges durch den Meridian zu finden (Berl. Jahrb. 1799), — K. v. **Littrow**, Beiträge zur nautischen Astronomie (Wien. Annal. 1841), und: Andeutungen für Seeleute über den Gebrauch und die Genauigkeit der Methoden, Länge und Missweisung durch Circummeridianhöhen zu bestimmen. Wien 1868 in 8., — **Grunert**, Über die nautische Aufgabe: Aus den gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Rectascensionen und Declinationen bekannt sind, und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen, die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen (Archiv 14 von 1850), — Franz **Schaub** (Gross-Schweinbarth in Nieder-Österreich 1817 — Triest 1871; Dir. Marine-Sternwarte Triest), Leitfaden für den Unterricht in der nautischen Astronomie. Triest 1853 in 8. (3. A. durch E. Gelcich, Wien 1878; auch ital. u. holl.), — Georg Daniel Eduard **Weyer** (Hamburg 1818 geb.; Prof. math. et astr. Kiel), Vorlesungen über nautische Astronomie. Kiel 1871 in 8., und: Die direkten oder strengen Auflösungen für die Bestimmung des Beobachtungsortes aus zwei Höhen der Sonne oder anderer bekannten Gestirne nebst dem Zeitunterschiede der Beobachtungen (Annal. hydr. 1883), — Yvon **Villarceau** et A. de **Magnac**, Nouvelle navigation astronomique. Paris 1877 in 4., — etc." — Anhangsweise erinnere ich noch an den von Kapitän Thomas H. **Sumner** (Boston 1807—1876) zur Orientierung auf der See nutzbar gemachten und nach ihm benannten Kreis, welcher den Ort, für welchen die Sonne zu einer bestimmten Chronometerzeit im Zenite steht, zum Centrum, und die zu dieser Zeit auf dem Schiffe gemessene Zenitdistanz der Sonne zum Radius hat, somit durch den Schiffsort geht, — für das Nähere teils auf dessen Abhandlung

„A new and accurate method of finding a ship's position at sea by projection on Mercator's chart. Boston 1843 in 8. (2. ed. 1845)" verweisend, teils auf die einfache Behandlung in „**Chauvenet**, Manual of astronomy (I 424—29)" und die erwähnten nautischen Specialwerke.

369. Die Horrebow-Talcott'sche Methode. — Verfügt man über ein Fernrohr, das sich um eine vertikale Axe drehen lässt, ferner einen zum Horizontalfaden messbar verschiebbaren Parallelfaden besitzt, und wählt zwei zenitale, sich in Rektascension wenig unterscheidende Sterne aus, deren Deklinationsmittel nahe der Polhöhe entspricht, — stellt nun, vorausgesetzt, der südliche Stern habe die kleinere Rektascension, den Horizontalfaden auf diesen bei seiner Culmination ein, — dreht sodann das Instrument, ohne die Höhenlage des Fernrohrs zu verändern, nach Norden, — wartet nunmehr die Culmination des zweiten Sternes ab, — und stellt während derselben den beweglichen Faden auf ihn ein, so kann man, wie schon Pet. **Horrebow** lehrte und seither A. **Talcott** neuerdings hervorhob, ohne eines geteilten Kreises zu bedürfen, eine brauchbare Polhöhenbestimmung erhalten, indem man das Deklinationsmittel der beiden Sterne um die halbe Bewegung des Fadens vermehrt".

Zu 369: *a.* Bezeichnet φ die Polhöhe, d die Deklination eines Sternes, z seine an einer von Nord über Zenit nach Süd laufenden Teilung abgelesene Zenitdistanz, $\triangle$z den im Sinne der Teilung gezählten Abstand des wahren Zenitpunktes von dem benutzten, b die im gleichen Sinne gezählte Biegung, und endlich r die Refraktion, so hat man für einen südlich culminierenden Stern

$$\varphi - d_1 = z_1 - \triangle z_1 + r_1 - b_1 \tag{1}$$

und für einen nördlich culminierenden Stern, wenn vor seiner Beobachtung das Fernrohr um 180° gedreht wird,

$$d_2 - \varphi = z_2 - \triangle z_2 + r_2 - b_2 \tag{2}$$

folglich aus Kombination dieser beiden Gleichungen

$$\varphi = \frac{d_1 + d_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2} - \frac{\triangle z_1 - \triangle z_2}{2} + \frac{r_1 - r_2}{2} - \frac{b_1 - b_2}{2} \tag{3}$$

wo das Glied $\frac{1}{2}(z_1 - z_2)$ offenbar mit der Hälfte des bei der oben beschriebenen Beobachtungsweise gefundenen Abstandes m der beiden Faden übereinstimmt. Besitzt das Fernrohr an seinem Okularende einen Aufsuchekreis mit einer etwas empfindlichen Libelle, so ergiebt die halbe Differenz l der an ihr vor und nach der Drehung gemachten Ablesungen einen brauchbaren Wert für $\frac{1}{2}(\triangle z_1 - \triangle z_2)$. Ferner darf die Refraktion bei Anwendung zenitaler Sterne, zumal nur der Refraktionsunterschied in Rechnung fällt, der Tangente der Zenitdistanz proportional gesetzt werden, so dass, wenn α die mittlere Refraktionskonstante und z die mittlere Zenitdistanz bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2}(r_1 - r_2) = \tfrac{1}{2}\alpha(\mathrm{Tg}\, z_1 - \mathrm{Tg}\, z_2) = \alpha' \cdot m \qquad \text{wo} \qquad \alpha' = \alpha \cdot \mathrm{Se}^2 z \cdot \mathrm{Si}\, 1''$$

ist, und sich nach **Bessel** die Werte

$z = 0^0$	5^0	10^0	15^0	20^0
$\alpha' = 0'',0168$	$0'',0169$	$0'',0173$	$0'',0180$	$0'',0190$

entsprechen. Die Biegungsdifferenz endlich fällt kaum in Betracht, und es geht somit 3 in die bequeme Formel

$$\varphi = {}^1/_2\,(d_1 + d_2) + m - l + \alpha' \cdot m \qquad 4$$

über, wo überdies die zwei letztern Glieder nur bei ganz genauen Beobachtungen zu berücksichtigen sind. — Unter der soeben erwähnten Vereinfachung spätestens durch Pet. **Horrebow** in Band III seiner „Opera mathematico-physica. Hafniæ 1740—42, 3 Vol. in 4." angedeutet, wurde diese Methode (vgl. Joh. Bernoullis Nouv. litt. Cah. 3, p. 166) durch Tob. **Mayer** an Karsten **Niebuhr** (Lüdinsworth in Hannover 1733 — Meldorf in Süder-Dithmarschen 1815; damals dänischer Ingenieurlieutenant, später Landschreiber zu Meldorf) empfohlen und von diesem 1762—67 auf seiner Reise nach Arabien mit Vorteil gebraucht, — bald darauf (vgl. Jungnitz, Beiträge zur praktischen Astronomie. Breslau 1791—94, 4 Bde. in 8.: I 212—53) auch von Pater Maximilian **Hell** (Schemnitz 1720 — Wien 1792; Jesuit; Dir. Obs. Wien) beim Venusdurchgange von 1769, wie er sagt „aus Noth", zur Bestimmung der Breite von Wardoehus benutzt. Später so ziemlich vergessen, wurde dieselbe Methode (vgl. Report of the U. S. coast survey for 1857), von dem amerikanischen Kapitän Andrew **Talcott** (Connecticut 1797—1883; später Ingenieur) in der obigen Weise etwas verfeinert, neuerdings beliebt, wohl auch nach ihm benannt, — sodann durch Chester Smith **Lyman** (Manchester in Conn. 1814 — New Haven 1890; Autodidakt; Prof. phys. et astr. New Haven) von 1852 hinweg (vgl. Amer. Journ. of science 1860) und andere mittelst Konstruktion von passenden Instrumenten gefördert, — ja es hat A. W. **Napierski** in seinem Programm-Aufsatze „Die Polhöhe von Mitau (Mitau 1874 in 4.)" den faktischen Beweis geleistet, dass man mittelst derselben, bei gehöriger Sorgfalt und wiederholter Anwendung, sogar ganz gute Resultate erhalten kann. In der neuesten Zeit bei geodätischen Aufnahmen vielfach angewandt, hat sich dieses Verfahren auch noch in einer ganz andern Weise bewährt: Da nämlich $d_1 + d_2$ im Laufe des Jahres mit der Summe der Aberrationen beider Sterne in Deklination variiert, so muss nach 3 auch die Grösse $m = {}^1/_2\,(z_1 - z_2)$ einen entsprechenden periodischen Wechsel zeigen, folglich die Möglichkeit bestehen, aus den mikrometrisch mit grosser Genauigkeit bestimmbaren Variationen von m die Aberrationskonstante mit befriedigender Sicherheit zu ermitteln, — und in der That erhielt F. **Küstner**, vgl. seine „Neue Methode zur Bestimmung der Aberrationskonstante. Berlin 1888 in 4.", auf diese Weise für dieselbe den Wert $20'',526 \pm 0'',012$, welcher mit der Bestimmung von **Nyrén** (264) sehr nahe übereinstimmt. — Für ein ziemlich ebenbürtiges, sogar keine Mikrometerschraube bedürfendes Verfahren vgl. „G. **Lewitzky**, Über eine neue Polhöhenbestimmungsmethode. (Publ. I von Charkow 1891.)"

370. Einige andere Methoden der Polhöhenbestimmung. — Ausser den bereits erwähnten Verfahren zur Bestimmung der Polhöhe sind im Laufe der Zeiten noch manche andere vorgeschlagen worden. Da jedoch dieselben grösstenteils von untergeordneter Bedeutung sind, so beschränke ich mich auf einige betreffende Notizen und litterarische Angaben[a], um dadurch den nötigen Raum für eingehende Behandlung der Messungen im Meridian und im ersten Vertikal vorzusparen[b].

Zu 370: *a.* Wie schon Günther wieder in Erinnerung brachte, zeigte z. B. Pet. **Apian** in seiner Kosmographie unter anderm, wie man aus einer gemessenen Sonnenhöhe (h) und der wahren Zeit der Beobachtung (dem Stundenwinkel s) bei bekannter Deklination (d) die Polhöhe (φ) mittelst seinen Drehscheiben finden könne, was sich auch trigonometrisch leicht ausführen lässt, da aus $\mathrm{Si}\,h = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,d + \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,s$ sofort

$$\mathrm{Si}(\varphi + n) = \mathrm{Si}\,h : m \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Si}\,d = m \cdot \mathrm{Co}\,n\,, \quad \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,s = m \cdot \mathrm{Si}\,n \qquad \mathbf{1}$$

folgt, und es sollen sich noch jetzt die Schiffer häufig dieser Methode bedienen, obschon sie theoretisch, wie **Nonius** in seinen „Opera cuncta. Basileæ 1592 in fol. (p. 95)" hervorhob, wegen dem zweideutigen Sinus angreifbar ist. — Die von Antoine **Parent** (Paris 1666 — ebenda 1716; Akad. Paris) vorgeschlagene „Nouvelle méthode de prendre les hauteurs en mer avec une montre ordinaire (Mém. Par. 1703)" bestimmte die Polhöhe durch Beobachtung der Aufgangszeiten (t' und t'') zweier Sterne (a', d'; a'', d''). Da nämlich (179) für den Aufgang

$$\mathrm{Co}\,s' = -\mathrm{Tg}\,d' \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi \qquad \mathrm{Co}\,s'' = -\mathrm{Tg}\,d'' \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi \qquad \mathbf{2}$$

also

$$\frac{\mathrm{Tg}\,d'}{\mathrm{Tg}\,d''} = \frac{\mathrm{Co}\,s'}{\mathrm{Co}\,(s' + \triangle s)} \qquad \text{wo} \qquad \triangle s = s'' - s' = 15\,[t'' - t' - (a'' - a')] \qquad \mathbf{3}$$

folglich

$$\mathrm{Tg}\,s' = \frac{\mathrm{Si}\,(x - d'')}{\mathrm{Si}\,x \cdot \mathrm{Co}\,d'' \cdot \mathrm{Tg}\,\triangle s} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Tg}\,x = \mathrm{Tg}\,d' \cdot \mathrm{Co}\,\triangle s \qquad \mathbf{4}$$

so kann man in der That mit Hilfe des durch jene Beobachtung gegebenen Wertes von $\triangle s$ successive nach 4 und 2 zuerst s' und dann auch φ berechnen; jedoch dürfte allerdings diese Methode mehr als netter Kunstgriff zu bezeichnen sein, als praktischen Wert besitzen. — Der Litteratur sind beizufügen: „W. G. Friedrich **v. Beitler** (Reutlingen 1745 — Mitau 1811; Prof. math. Mitau), Neue Methode die Polhöhe zu bestimmen (Hindenburgs Archiv 1794; als eine der ersten ausgiebigen Anwendungen der Fehlergleichungen bemerkenswert), — C. Th. **Anger**, Über die sicherste Bestimmung der geographischen Breite aus Beobachtungen mit einem Spiegelsextanten oder ähnlichen Instrumente. Halle 1835 in 4., — Karl **Israel**-Holtzwart (Fritzlar in Kurhessen 1839 geb.; Gymnasiallehrer Frankfurt a./M.), Über die theoretisch möglichen Fälle der Polhöhenbestimmung (Grunerts Archiv Bd. 65), — Wilhelm **Tinter** (Jauernig in östr. Schlesien 1839 geb.; Prof. geod. Wien), Bestimmung der Polhöhe in Wien. Wien 1880 in 4., — Walter **Wislicenus** (Halberstadt 1859 geb.; Obs. und Doc. für Astr. Strassburg), Über einige einfache Methoden der Zeit- und Breitenbestimmung (A. N. 2958 von 1890), — etc." — *b.* Für diese Bestimmungen ist auf die Sätze 377—385 zu verweisen.

371. Die Lotablenkung. — Dass an jedem Punkte der Erde die Lotrichtung eine etwas andere sein werde, als sie unter Voraussetzung eines homogenen Rotationsellipsoides sein müsste, und dass namentlich benachbarte grosse Gebirgsmassen eine merkliche Ablenkung veranlassen dürften, konnte nach Entdeckung der allgemeinen Gravitation niemand verborgen bleiben, der sich mit betreffenden Fragen beschäftigte. Dagegen gehört es zu den vielen Verdiensten von **Bouguer**, dass er während seines Aufenthaltes in Peru (421) eine **erste** wirkliche Bestimmung einer solchen Lotablenkung ausführte[a] und dadurch den Anstoss zu weitern Untersuchungen dieser Art gab; denn eine merkliche und mit den Lokalverhältnissen variierende Verschiebung des Zenitpunktes wird sich notwendig auf die aus Zenitdistanzen abgeleitete Polhöhe übertragen und somit namentlich bei den Präcisionsmessungen der neuern Zeit nicht unberücksichtigt bleiben dürfen[b].

Zu 371: *a.* Es war **Bouguer** zwar klar geworden, dass sich die Ablenkung des Lotes durch eine Gebirgsmasse am leichtesten konstatieren und bestimmen liesse, wenn man sich im Meridiane des mutmasslichen Attraktionscentrums und ungefähr in gleichen Distanzen südlich und nördlich von demselben aufstellen, und an beiden Stationen die Höhen derselben Sterne beobachten könnte; denn es müsste sich in diesem Falle (in ähnlicher Weise wie es später, vgl. 222, am Shehallien praktiziert wurde) aus dem halben Überschusse der Differenz entsprechender Höhen über die aus der geodätischen Distanz mit Hilfe der Gradlänge abgeleitete Polhöhendifferenz unmittelbar jene Ablenkung ergeben. Da ihm aber die Verhältnisse am Chimborasso nicht wohl gestatteten, in dieser Weise vorzugehen, so entschloss er sich im Spätjahr 1742, unter Beihilfe von **La Condamine**, zuerst eine Station zu beziehen, welche ein wenig südlich von dem mutmasslichen Schwerpunkte des Berges in einer Meereshöhe von circa 2400^t lag, — etwas unter der Schneegrenze, aber allerdings in jenem Dezember gerade in der Region starken Schneefalles, der das Zelt einzudrücken drohte. Die beiden Akademiker beobachteten dort die Höhen h_1 von 4 südlich und die Höhen H_1 von 6 nördlich vom Zenit culminierenden Sternen; dann verfügten sie sich an eine möglichst (etwa $1\frac{1}{2}$ Stunden) nach Westen und etwas (circa 174^t) tiefer gelegene zweite Station, deren relative Lage gegen die erste genau ermittelt wurde, — beobachteten dort die Höhen derselben Sterne, — korrigierten sie für die kleine Abweichung der zweiten Station von dem Parallel der ersten, — und erhielten so neue Werte h_2 und H_2. Hätten nun die Sterne ohne Einfluss der Anziehung in diesem Parallel die Höhen h und H gehabt, und betrug dieser Einfluss, der sich je in einer Verlegung des Zenites nach Süden, also in einer Vergrösserung der südlichen und einer Verminderung der nördlichen Höhen geltend machte, Δ_1 und Δ_2, so war

$$h_1 = h + \Delta_1 \quad \text{und} \quad h_2 = h + \Delta_2 \quad \text{also} \quad h_1 - h_2 = \Delta_1 - \Delta_2$$
$$H_1 = H - \Delta_1 \qquad\qquad H_2 = H - \Delta_2 \qquad\qquad H_1 - H_2 = \Delta_2 - \Delta_1$$

also im Mittel
$$\Delta_1 - \Delta_2 = \tfrac{1}{2}\,[h_1 - h_2 - (H_1 - H_2)] \qquad 1$$

Bouguer erhielt nun im Mittel aus den 4 südlichen Sternen $h_1 - h_2 = 93'',5\ (\pm 5{,}4)$ und im Mittel aus 4 (zwei mussten wegen unvollständigen korrespondierenden Beobachtungen verworfen werden) nördlichen Sternen $H_1 - H_2 = 78'',7\ (\pm 3{,}5)$, also nach 1 durchschnittlich $\Delta_1 - \Delta_2 = 7'',4\ (\pm 3{,}2)$, und nahm dann schliesslich, indem er nach der Lage der beiden Stationen zum Gebirge $\Delta_2 = {}^1/_{13}\,\Delta_1$ setzte, an, es möchte die Ablenkung des Lotes an der ersten Station etwa 8″ betragen. Vgl. für weitern Detail pag. 364—94 seiner Schrift „La figure de la terre“, sowie seine Abhandlung „Sur la direction qu'affectent les fils à plomb (Mém. Par. 1754)“. — *b.* Für die neuern Untersuchungen verweise ich auf Abschnitt XVI, wo von denselben mehrfach die Rede sein wird, und füge hier vorläufig nur noch einige Proben aus der betreffenden Litteratur bei, — nämlich: „**Zach,** L'attraction des montagnes et ses effets sur les fils à plomb ou sur les niveaux des instrumens d'astronomie. Avignon 1814, 2 Vol. in 8., —

J. **Baeyer**, Über den Einfluss der lokalen Lothablenkungen auf geodätische Operationen (A. N. 87 von 1825), — H. **Denzler**, Die Ablenkung des Senklothes durch die Gebirge (Jahrbuch S. A. Cl. 1866), — Fil. **Keller**, Ricerche sull' attrazione delle montagne. Roma 1872 in 8., — Robert v. **Sterneck** (Prag 1839 geb.; Oberstl. und Dir. Obs. mil. topogr. Inst. Wien), Über die Änderungen der Refractionsconstanten und Störungen der Richtung der Lothlinie im Gebirge. Wien 1879 in 8. (Auch mehrere spätere Abh. in Mitth. des k. k. milit. geogr. Inst.), — F. R. **Helmert**, Lothabweichungen: Formeln und Tafeln. Berlin 1886 in 4, und: Bericht über Lothabweichungen (Verh. in Nizza 1887), — etc. — Auf den schon von C. A. **Peters** (A. N. 507 von 1845) und andern in Betracht gezogenen und dann namentlich auch von A. **Gaillot** (Bull. astr. 1884) berechneten, im Maximum auf 0",0174 ansteigenden Einfluss der Mondanziehung glaube ich hier nicht näher eintreten zu sollen, da mir solche Untersuchungen mehr theoretischen Wert als praktische Bedeutung zu haben scheinen.

372. Die ältern Methoden zur Bestimmung der Sterncoordinaten. — Während die alten Chinesen die gegenseitige Lage der Gestirne zunächst aus Beobachtungen ihrer Culminationen bestimmt zu haben scheinen [a], so hielten sich dagegen die Chaldäer und die ältern Griechen dafür vorzugsweise an die Auf- und Untergänge [b], und erst weit später, möglicherweise durch **Timocharis** und **Aristyll**, vielleicht aber auch erst durch **Hipparch**, kamen absolute Bestimmungen durch Coordinaten und die bereits (198 u. f.) erwähnten Methoden zu deren Bestimmung in Gebrauch [c]. Diese letztern Verfahren, bei welchen die alsbald (386) zu besprechende **Armillarsphäre** eine Hauptrolle spielte, wurden dann anfänglich im Abendlande ebenfalls beibehalten, wenn auch mit dem Bestreben, die praktische Ausführung derselben etwas zu verbessern [d].

Zu 372: *a.* Die Chinesen hatten sich namentlich, vgl. „J. B. **Biot**, Etudes sur l'astronomie indienne et sur l'astronomie chinoise. Paris 1862 in 8.", schon frühe 28 am Umkreise des Himmels verteilte Sterne ausgewählt, deren Culminationszeiten sie, mutmasslich mit Hilfe von Wasseruhren, immer und immer wieder mit einander verglichen. Sie dienten ihnen als Fixpunkte, an welche sie sodann die übrigen Gestirne, namentlich auch die Wandelsterne, anschlossen, und so z. B. die Umlaufszeiten der letztern ableiteten. — *b.* So suchte z. B. **Eudoxus** die Sterne im Wendekreise des Krebses dadurch zu erhalten, dass er, vgl. „**Ideler**, Über Eudoxus (Berl. Abh. 1828 und 1830)", an dem Tage, wo ihm der kürzeste Schatten am Gnomone den Eintritt des Sommersolstitiums anzeigte, sich die Punkte des Horizontes anmerkte, in welchen die Sonne aufund unterging und dann Nachts beobachtete, welche Sterne an diesen Stellen den Horizont schnitten. Anderseits war seit **Autolykus** bekannt, dass derjenige Zwölftel der Ekliptik, in dessen Mitte die Sonne steht, jeweilen unsichtbar bleibt, und man hatte daher bloss von Monat zu Monat auf die Sterne zu achten, welche eine Stunde nach Untergang der Sonne in der Gegend standen, wo sie durch den Horizont gegangen war, um die Ekliptik im Groben in ihre zwölf Zeichen zu teilen, und so Anhaltspunkte für die Längen der Sterne zu erhalten, — nur wurden letztere, gegenüber der spätern Übung die Kardinalpunkte in den Anfang der Zeichen zu legen, um ein halbes Zeichen zu gross, und so musste später **Hipparch** die durch seine Vorgänger bestimmten Längen um 15° vermindern, um sie den durch ihn selbst erhaltenen vergleichbar zu machen. — *c.* Aus dem Almagest geht bloss hervor, dass die Erstgenannten einzelne Sterne mit den Equinoktialpunkten verglichen, und von einer grössern Reihe von Sternen die Deklinationen bis auf Bruchteile von Graden bestimmten, — ob sie dafür bereits Armillen und überhaupt die von **Hipparch**, laut seinem Kommentar zu Aratus, benutzten Methoden anwandten, ist nicht sicher, wenn auch nicht unwahrscheinlich, nur würden sie in diesem Falle statt der ihnen noch nicht möglichen Rechnung sich durch Konstruktion auf dem Globus geholfen haben. — *d.* Der Hauptübelstand bei dieser Methode war, dass der raschen Veränderung der Rektascension des als Vermittler zwischen Sonne und Stern dienenden Mondes kaum genügend Rechnung getragen werden konnte, und so zog man diesem später Venus oder Jupiter vor, welche bei besonders günstigen Konstellationen mit scharfen Augen zuweilen neben der Sonne gesehen werden konnten: Eine Tagesbeobachtung der Venus wurde (453) spätestens 1489 III 7 in Nürnberg, eine ebensolche Jupiters (vgl. Mitth. 44 von 1877) 1585 I 24 in Kassel gemacht. — Von dem durch **Ptolemäus** konstruierten Instrumente zur direkten Bestimmung der Längen und Breiten der Sterne wird später (386) gesprochen werden.

373. Die Methoden von Tycho und Landgraf Wilhelm. — Da Landgraf **Wilhelm**, und bald darauf auch **Tycho**, mit Recht fanden, dass die Bestimmung der Sterncoordinaten mittelst der Armillarsphäre etwas strengeren Anforderungen nicht genüge, so gingen sie dafür in etwas anderer Weise vor, und zwar berechnete **Tycho** die Deklinationen der Gestirne unter Voraussetzung der Polhöhe aus den mit dem Azimutalquadranten (349) bestimmten Höhen und Azimuten derselben, ihre Rektascensionsunterschiede aber aus diesen Deklinationen und den mit einem Quadranten (346) gemessenen scheinbaren Distanzen [a], — während **Wilhelm** die Deklinationen vorzugsweise mittelst der Polhöhe aus den Culminationshöhen und die Rektascensionsunterschiede aus den Culminationszeiten ableitete, nur zur Kontrole ähnliche Verfahren wie Tycho benutzend [b]. Eine **erste** Rektascension wurde von diesen beiden Astronomen wie früher aus der Deklination der Sonne berechnet [c], — zum Übertrage auf die Sterne von **Tycho** ebenfalls wie früher zunächst der Mond, von **Wilhelm** zum Teil auch die Uhr benutzt, — und es entstanden so schliesslich zwei nahe gleichwertige Sternverzeichnisse, welche sich in schönster Weise kontrolierten [d].

Zu 373: *a.* **Tycho** leitete, unter möglichster Berücksichtigung der Refraktion (453), nach seiner wegen Mangel von Schlussformeln und Logarithmen sehr mühsamen aber korrekten Methode, vorerst aus siebenjährigen, mit Hilfe von **Longomontan** erhaltenen Beobachtungen, die Positionen von α Arietis und 20 andern Fundamentalsternen mit möglichster Schärfe ab, und schloss dann an diese die übrigen Fixsterne, sowie auch die Wandelsterne an. Er erhielt so ausser dem noch unten (d) zu beschreibenden Sternkataloge das kostbare Material, aus welchem die genauere Kenntnis der Mondbahn und der Bewegung ihrer Knoten hervorging und auf welches sich später **Kepler** bei den Untersuchungen (266) stützte, die ihm für alle Zeiten den vornehmsten Platz unter den Reformatoren der Sternkunde gesichert haben. — *b.* Die Deklinationen leitete **Wilhelm** meistens aus Meridianhöhen, zuweilen jedoch auch aus Höhen in bestimmten Azimuten ab, dabei ebenfalls die Refraktion berücksichtigend. Um Rektascensionen zu erhalten, wurde 1) diejenige der Sonne unter Voraussetzung von $e = 23^0\ 31'\ 30''$ aus ihrer Deklination berechnet, — sodann 2) entweder die Culmination eines andern Gestirnes abgewartet und an der Uhr der Rektascensionsunterschied unmittelbar abgelesen, oder es wurden, um sich nicht für längere Zeit auf die Uhr verlassen zu müssen, Abends vor Sonnenuntergang in bestimmten Azimuten und unter Notierung der Zeit die Höhen von Sonne und Venus (Jupiter) gemessen, daraus Deklination und Stundenwinkel von Venus (Jupiter), sowie unter Berücksichtigung der Zeitunterschiede der gleichzeitige Stundenwinkel der Sonne bestimmt, und so ihr Rektascensionsunterschied, also auch die Rektascension von Venus (Jupiter) erhalten, — hierauf 3) nach Sonnenuntergang, mit Hilfe des von **Bürgi** eigens zu diesem Zwecke konstruierten stählernen Kreissectors von vier Fuss Radius, die Winkeldistanz von Venus (Jupiter) von dem als Ausgangspunkt gewählten Sterne αTauri gemessen, daraus die Rektascensionsdifferenz berechnet, und somit auch die Rektascension des Fundamentalsternes erhalten, — endlich 4) an letztern auf entsprechende Weise auch andere Sterne angebunden. Für weitern Detail auf Mitth. 45 verweisend, füge ich einerseits noch bei, dass **Wilhelm** 1586 IV 14 (vgl. Epist. 23) an Tycho schrieb, dass er seine Hauptsterne nicht nur „per distantiam inter se et latitudinum meridianam“ observieren, sondern auch deren Culmination an dem „Minuten und Secunden Uhrlein“ notieren lasse, welches „gar gewisse stunden“ gebe, und „a meridie in meridiem offtmals nicht eine minuten“ variiere, — und hebe anderseits hervor, dass es überhaupt keinem Zweifel unterliegt, es sei für diese hessischen Beobachtungen die **Zeit als eigentliches Beobachtungselement** benutzt, also die **Uhr zum astronomischen Instrumente** erhoben worden, während letztere früher höchstens dazu gedient hatte, die Epoche einer Beobachtung angenähert festzulegen. Dass dies mit Erfolg geschehen konnte, war wesentlich das Verdienst von **Bürgi**, der nach den Begriffen der damaligen Zeit vorzügliche Uhren zu konstruieren wusste, mag er nun (123) das Pendel in dieselben eingeführt haben oder nicht. — *c.* Da **Wilhelm** nach damaliger Übung für die Sonnenparallaxe den Hipparchschen Wert von 3' acceptierte und seine Sonnenhöhen diesem entsprechend korrigieren liess, so erhielt er natürlich zu grosse Deklinationen und damit auch zu grosse Werte für die Rektascensionen und Längen der Sterne, und in der That erzeigen sich seine sämtlichen absoluten Längen gegenüber den Tychonischen um circa 6' zu gross, während die Differenzen trotz der verschiedenen Methode ganz befriedigend übereinstimmen. — *d.* Was die Ergebnisse der hessischen Beobachtungen anbetrifft, so hatte **Wilhelm** selbst 1567 einen Katalog von 58 Sternen vollendet, während derjenige, welchen **Rothmann** 1586 unter Zuzug der von ihm und **Bürgi** erhaltenen Beobachtungen zusammenstellte, bereits 121 Sterne umfasste, der begonnene (mir seinerzeit nebst jenen vorliegende) Hauptkatalog aber, welcher für 1032 Sterne angelegt wurde, noch viele Lücken zeigt und nur für 346 Sterne vollständige Positionen giebt. Bedeutend vollständiger muss ein anderes Manuskript gewesen sein, von welchem 1760 die französischen Offiziere während der Besetzung von Kassel auf Wunsch von **Lacaille** für die Pariser Akademie eine Kopie anfertigten; denn es wird (Hist.

de l'Acad. 1761) ausdrücklich gesagt, dass dasselbe nicht nur die Beschreibung der Instrumente und der Methode, sondern auch die Beobachtungen und die Positionen von mehr als 900 Sternen enthalte. Leider unterblieb infolge des frühen Todes von Lacaille die von diesem beabsichtigte Drucklegung der Kopie, und da die früher von **Snellius** besorgten „Coeli et Siderum in eo errantium Observationes Hassiacæ. Lugduni Batav. 1618 in 4." sonderbarerweise diese Hauptarbeit der Kasseler Beobachter gar nicht beschlagen, so kannte man letztere vor meiner betreffenden Note in Mitth. 45 nur insoweit, als sie durch Albert **Curtius** (München 1600? — ebenda 1671; Jesuit und Rektor der Kollegien in Eichstädt, Luzern, etc.) unter dem durch Buchstabenversetzung in „Lucius Barettus" umgewandelten Namen in einem Anhange zu seiner „Historia coelestis, ex libris commentariis manuscriptis observationum vicennalium viri generosi Tichonis Brahe Dani. Augusta Vind. 1666 in fol. (mit versch. Titelblättern auch Viennæ 1668, Ratisbonæ 1672, Dilingæ 1675, etc., ausgegeben)" veröffentlicht hat. Diese letztere Schrift ist, entsprechend dem Titel, obschon sie auch noch einige ältere Reihen umfasst, zunächst den Beobachtungen von **Tycho** gewidmet, welche sie ziemlich vollständig giebt, jedoch nicht ohne vielfache Ungenauigkeiten, so dass man gut thut, bei Benutzung jeweilen auch die von Tycho selbst in seinen „Progymnasmata" für 1600 gegebenen zwei Kataloge zu vergleichen, von welchen der erstere die Längen und Breiten von 773 Sternen, der zweite die Rektascensionen und Deklinationen einer Auswahl von 100 Sternen giebt. — Ich füge noch bei, dass **Bessel** dafür hielt, es seien die Kataloge von **Wilhelm** und **Tycho** so ziemlich gleichwertig, und es dürften wohl die bestehenden Unterschiede durch Neuberechnung grösstenteils verschwinden.

374. Die neuern Methoden. — Zur Zeit von Landgraf **Wilhelm** war es noch etwas gewagt, die Uhrzeit als bestimmendes Element einzuführen, und so glaubten manche an der Brauchbarkeit seiner Methode zweifeln, somit entweder derjenigen von **Tycho** trotz ihrer Weitschweifigkeit den Vorzug geben oder nach andern Verfahren suchen zu sollen; seit aber die Uhren zuverlässiger geworden und zugleich für Meridianbeobachtungen (376—382) immer leistungsfähigere Instrumente entstanden sind, hat sich das Blatt gewendet, so dass die Methode von **Wilhelm** gegenwärtig für Fundamentalbestimmungen fast ausschliesslich im Gebrauche ist. Immerhin verdient namentlich die gegen Ende des 17. Jahrhunderts durch **Picard** und **Flamsteed** proponierte „Methode der korrespondierenden Deklinationen" noch besonderer Erwähnung [a].

Zu 374: *a.* Die schon von **Picard** ausgedachte, dann namentlich aber durch **Flamsteed** bei Anlage seines Sternkataloges praktizierte neue Methode beruht darauf, dass die Deklination der Sonne wegen der für sie (197) bestehenden Formel $\operatorname{Tg} d = \operatorname{Tg} e \cdot \operatorname{Si} a$ bei $a = 90^0 - \beta$ und $a = 90^0 + \beta$ gleiche Werte annimmt, und somit auch umgekehrt gleichen Deklinationen der Sonne vor und nach dem Solstitium Rektascensionen dieses Gestirnes entsprechen, welche sich gleich viel von 90^0 entfernen. Bezeichnet man daher die, solchen korrespondierenden Deklinationen entsprechenden Rektascensionen der Sonne mit S' und S'', die Rektascension eines Sternes aber mit x, so hat man einerseits $\frac{1}{2}(S' + S'') = 90^0$, und kann anderseits durch Beobachtung der Culminationszeiten $S' - x = a'$ und $S'' - x = a''$ bestimmen, woraus sich

$$x = 90^0 - \tfrac{1}{2}(a' + a'') \qquad S' = 90^0 + \tfrac{1}{2}(a' - a'') \qquad S'' = 90^0 - \tfrac{1}{2}(a' - a'') \qquad \mathbf{1}$$

findet, so dass sich die Rektascensionen von Sonne und Stern ergeben, ohne die Schiefe der Ekliptik in Mitleidenschaft ziehen zu müssen; dagegen muss man allerdings, um präcise Resultate zu erhalten, der Präcession Rechnung tragen, und hat in der Regel die zweite Bestimmung aus mehrtägigen Beobachtungen durch Interpolation künstlich zu erstellen.

375. Bestimmung der Schiefe der Ekliptik und ihrer sekulären Variation. — Über die Bestimmung der Schiefe der Ekliptik bleibt nach dem früher (191 und 198) Gesagten nur wenig beizufügen [a]; dagegen mag das über ihre sekuläre Variation Mitgeteilte hier teils durch weitere Daten, teils durch eine betreffende Rechnung noch etwas näher illustriert werden [b].

Zu 375: ***a.*** Bezeichnet $x = 90^0 - a$ die Entfernung der Sonne vom Solstitium, so geht die Formel 198:2 in

$$\mathrm{Tg}\,\varepsilon = \alpha \cdot \mathrm{Tg}\,d \qquad \text{wo} \qquad \alpha = \mathrm{Se}\,x \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Tg}^2\,\tfrac{1}{2}x = (\alpha - 1):(\alpha + 1) \qquad \mathbf{1}$$

über, und man erhält daher nach 40:21, 22

$$\varepsilon = d + \frac{1}{\mathrm{Si}\,1''}\left[\mathrm{Tg}^2\frac{x}{2}\cdot \mathrm{Si}\,2\,d + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tg}^4\frac{x}{2}\cdot \mathrm{Si}\,4\,d + \ldots\right] \qquad \mathbf{2}$$

so dass man aus jeder in der Nähe der Solstitien gemessenen Deklination der Sonne, wenn deren Rektascension auch nur angenähert bekannt ist, einen guten Wert für die Schiefe der Ekliptik ableiten kann. — ***b.*** In dem von **Houzeau** in seinem „Vademecum (14: w)" gegebenen Verzeichnisse finden sich unter anderm folgende 16 Bestimmungen für die Schiefe der Ekliptik:

Nro.	Jahr n	Beobachter	ε	t = n — 1500	$\triangle\varepsilon = \varepsilon - 23^0\,30'$	$\triangle\varepsilon'$
1	— 1100	Tcheou-Kong	23° 54′ 2″	— 2600	1442″	1429″
2	— 229	Eratosthenes	45 7	— 1729	907	925
3	173	China	41 33	— 1327	693	705
4	461	Tsou-Kong	38 52	— 1039	532	550
5	891	Albategnius	23 35 41	— 609	341	328
6	1000	Ibn Junis	34 26	— 500	266	273
7	1230	Aboul Hhassan	33 45	— 270	225	160
8	1460	Regiomontan	30 49	— 40	49	46
9	1587	Tycho	23 29 46	87	— 14	— 15
10	1655	D. Cassini	29 15	155	— 45	— 46
11	1689	Flamsteed	28 56	189	— 64	— 63
12	1709	Römer	28 47	209	— 73	— 72
13	1750	Bradley	23 28 15	250	— 105	— 92
14	1798	Piazzi	27 55	298	— 125	— 114
15	1835	Airy	27 39	335	— 141	— 131
16	1870	Bakhuijzen	27 22	370	— 158	— 148

Das Jahr 1500 als Epoche wählend, setzte ich nun die ihm entsprechende Schiefe gleich $23^0\ 30' + a$, berechnete die $t = n - 1500$ und $\Delta\varepsilon = \varepsilon - 23^0\ 30'$, schrieb nun für alle 16 Paare von Werten die Gleichung

$$\Delta\varepsilon = a + b \cdot t + c \cdot t^2 \qquad \mathbf{3}$$

auf, und erhielt sodann nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$a = 26'',755 \qquad b = -0'',48060 \qquad c = 0,0000\,22528$$

sowie mit diesen Werten nach 3 rückwärts die in die Tafel eingetragenen $\Delta\varepsilon'$, deren mittlere Differenz von den $\Delta\varepsilon$ nur auf $\pm 19'',2$, ja bei Ausschluss der etwas unsichern Nro. 7 sogar nur auf $\pm 10'',6$ ansteigt, womit man in Betracht der zum Teil etwas rohen Werte von ε sehr zufrieden sein, ja die Schlussformel

$$\varepsilon = 23^0\ 30'\ 26'',755 - 0'',48060 \cdot t + 0'',0000\,22528 \cdot t^2 \qquad \mathbf{4}$$

als ziemlich wertvoll bezeichnen kann. Für die Epochen 1750 und 1800 oder für $t = 250 + t' = 300 + t''$ ergiebt sie

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 23^0\ 28'\ 28'',00 - 0'',46934 \cdot t' + 0'',0000\,22528 \cdot t'^2 \\ \varepsilon'' &= 23\ \ 28\ \ 14\ ,58 - 0\ ,46708 \cdot t'' + 0\ ,0000\,22528 \cdot t''^2 \end{aligned} \qquad \mathbf{5}$$

und wenn nun auch die in 609 für diese Epochen nach **Bessel** und **Struve-Peters** gegebenen neuen Formeln für Bestimmungen in der Nähe derselben weit vorzüglicher als die meinige sein mögen, so stellt diese dagegen den ganzen Charakter der Variabilität von ε genauer dar, indem sie darauf hinweist, dass die gegenwärtige Abnahme später wieder in Zunahme übergehen wird, ja das zu erwartende Minimum annähernd zu bestimmen erlaubt. Da nämlich aus 4

$$d\varepsilon : dt = -0,48060 + 0,0000\,45056 \cdot t, \quad d^2\varepsilon : dt^2 = 0,0000\,45056 \qquad \mathbf{6}$$

folgt, so hätte ein solches Minimum für $t = 10666$ oder etwa im 122. Jahrhundert n. Chr. einzutreffen und würde noch $22^0\ 48'$ betragen, was dem (191) von **Lagrange** (allerdings schon für das Jahr 6000) erhaltenen Minimalwerte $22^0\ 54'$ unerwartet nahe kömmt.

376. Mauerquadrant, Mauerkreis und Mittagsrohr. —

Dass Beobachtungen der Gestirne zur Zeit ihrer Culmination für viele Zwecke besonders vorteilhaft, und somit Quadranten oder Vollkreise, welche an einer in die Mittagsfläche fallenden Mauer festliegen, sehr nützlich sein dürften, wurde schon durch **Ptolemäus** erkannt [a], — namentlich aber konstruierten **Abul Wefa, Nassir-Eddin,** etc., vielfach Instrumente dieser Art [b], und auch in die Sternwarten der **Wilhelm** und **Tycho** fanden dieselben alsbald Eingang [c]. Als sodann **Picard** die Diopter mit Fernröhren vertauschte, ergaben sich in der That auf diese Weise ganz brauchbare Culminationshöhen, während die Culminationszeiten wegen der kurzen Drehaxe des Visiermittels nicht mit entsprechender Genauigkeit erhältlich waren, und dies veranlasste nun **Römer**, den **Mauerkreisen** ein speciell zu Zeitbestimmungen taugliches Instrument, das sog. **Mittagsrohr** (Passageninstrument), zu coordinieren, bei welchem sich das Fernrohr um eine lange und beidseitig gestützte Horizontalaxe drehte [d]. Diese beiden Instrumente wurden nunmehr unter Verwendung zweier Beobachter bei anderthalb Jahrhunderte mit bestem Erfolge neben einander benutzt, zumal die fortwährenden Fortschritte der Präcisionsmechanik dieselben immer vollkommener auszuführen erlaubten [c].

Zu 376: *a.* Im Almagest (éd. Halma I 48) wird nämlich ein, zunächst zur Bestimmung des Abstandes der Wendekreise dienender, in 90 Grade und deren Sechstel geteilter und in die Ebene des Meridianes gestellter Quadrant beschrieben, an welchem der Schattenwurf eines im Centrum angebrachten horizontalen Cylinderchens beobachtet wurde. — *b.* Nach Sédillot (Mémoire von 1841 in 5, pag. 195) beschrieb **Abul Wefa** die Konstruktion seines Meridianinstrumentes wie folgt: „Man befestigt in der Ebene des Meridianes einen ganzen Kreis, der in 360 gleiche Teile und jeder derselben in möglichst viele Unterabteilungen geteilt ist, und bringt in zwei diametral entgegengesetzten Punkten zwei bewegliche Absehen an, sei es auf einer am Centrum des Kreises befestigten Alidade, sei es auf einem zweiten Kreise, der in den ersten eingelassen ist und sich um dessen Centrum dreht; bewegt man sodann die beiden Absehen am Limbus des Kreises, bis der Sonnenstrahl gleichzeitig durch die Öffnungen beider geht, so giebt die Anzahl der Grade oder Teile, welche zwischen dem Index des obern Absehens und dem horizontalen Durchmesser des Kreises enthalten ist, die Meridianhöhe der Sonne". — Ebenso liess nach Jourdain (Mémoire von 1810 in 5) **Nassir-Eddin** einen kupfernen Quadranten von fünf hakemitischen Ellen (etwa $3^1/_2$ m) Radius bauen, der in Grade und einzelne Minuten geteilt war, eine um einen stählernen Zapfen drehbare Alidade mit Diopten besass, auf eine Unterlage aus Sadjeh (eine Art Ebenholz) geschraubt und mit dieser an einer im Meridiane errichteten Mauer so befestigt war, dass „die Linie durch den Mittelpunkt und das südliche Ende des Quadranten" das Zenit traf. — *c.* Da **Bürgi** (vgl. Observ. hass. p. 109—13) von 1588—96 die Sonnen-Culminationen nach Zeit und Höhe beobachtete, so ist es wohl sicher, dass er sich ebenfalls ein Meridianinstrument konstruiert hatte, jedoch weiss man nichts Näheres darüber; dagegen besitzt man von **Tycho** (vgl. dessen „Astronomiæ instauratæ mechanica. Noribergæ 1602 in fol.") die Beschreibung eines „Quadrans muralis sive tichonicus", der mittelst Transversalen Sechstelsminuten abzulesen erlaubte, und es darf kaum als Zufall angesehen werden, dass dieser Quadrant dieselben Dimensionen wie derjenige von Meragah besass, wenn auch der Besitzer infolge der ihm angebornen Bescheidenheit vergass, **Nassir-Eddin** zu nennen. Auch der Zeitgenosse Thaddäus Hagek oder **Hageccius** (Prag 1525 — ebenda 1600; Prof. math. Prag und k. Leibarzt) soll die Aufstellung von Meridianinstrumenten empfohlen haben, ohne dass jedoch näherer Detail bekannt zu sein scheint. — *d.* Die fünf Fuss lange Axe, welche **Römer** 1689 seinem Mittagsrohr gab, equilibrierte er durch ein Gewicht, welches an einem Seile hing, das um eine an der Zimmerdecke befestigte Rolle geschlungen war; an dem einen Ende trug diese Axe das Fernrohr, am andern einen Arm mit Index, der auf einem eingeteilten Bogen gleitete, welcher an dem einen Pfeiler befestigt war (vgl. Bas. astr. § 368 und Tab. III). — *e.* Für die Konstruktion grosser Mauerquadranten und Mauerkreise waren namentlich die **Bird, Ramsden** und **Troughton** berühmt; so z. B. konstruierte erstgenannter 1775 einen $7^1/_2$-füssigen Mauerquadranten für die Sternwarte der Kriegsschule in Paris, der so vorgerichtet war, dass er auf der „face occidentale du mur" zur Beobachtung der Sterne zwischen Zenit und Pol, auf der „face orientale" dagegen zur Beobachtung der Sterne zwischen Zenit und Equator dienen konnte: „Une machine très-commode pour transporter le quart de cercle de l'occident à l'orient fait qu'on le vérifie aisément, et qu'il équivaut à deux quarts de cercle muraux". — Bei einem Passageninstrumente, das **Bird** 1750 für Greenwich konstruierte, stand der 8-füssige Tubus an der Mitte der Axe und der Einstellungsbogen war zu einem Halbkreise geworden; **Ramsden** ersetzte die Beleuchtung mittelst Vorsteckspiegel durch die jetzt noch gebräuchliche Beleuchtung durch die Axe, erzielte die Equilibrierung dieser letztern durch Hebel, deren Stützpunkte sich auf den Pfeilern befanden, — und gab einen Apparat bei, der auf drei Füssen unter dieselbe gestellt werden konnte, um das Instrument aus den Lagern heben und umwenden zu können; **Troughton** brachte zum Einstellen Vollkreise an, die sich mit der Axe drehten, während der Index am Pfeiler sass; **Reichenbach** erfand die Einstellungs-Libelle, indem **Gauss** (Gött. g. A. 1819) bei Anlass des von ihm für Göttingen erhaltenen Passageninstrumentes sagt: „Das Stellen des Fernrohrs für jede vorgeschriebene Deklination geschieht mittelst eines kleinen am Fernrohr selbst nahe beim Okularende befestigten, unmittelbar in Viertelsgrade und durch den Vernier in Minuten geteilten Kreises, auf dem sich eine Alhidade mit einer kleinen Libelle befindet; der Index an der Alhidade gibt sofort die Deklination an"; etc.

377. Der Meridiankreis. — Den naheliegenden Gedanken, Mauerkreis und Passageninstrument zu Einem Instrumente, einem sog. **Meridiankreise**, zu vereinigen, und so Einen Beobachter zu einer vollständigen und sichern Durchgangsbeobachtung zu befähigen, hatte **Römer** schon vor Ablauf des 17. Jahrhunderts nicht nur gehabt, sondern bald darauf auch zur Ausführung gebracht [a]; jedoch gelang es erst im Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts **Reichenbach** und **Repsold**, die konstruktiven Schwierigkeiten soweit zu überwinden, dass der Meridiankreis zum Hauptinstrumente der Sternwarten werden konnte [b]. Seither sind dann allerdings noch manche Verbesserungen in Beziehung auf die Equilibrierung, die Sicherheit des Umlegens in den Lagern, die Beleuchtung des Fadennetzes und der Ablesestellen, etc. angebracht worden, auf welche wir zum Teil noch unter den folgenden Nummern zurückzukommen haben werden [c].

Zu 377: *a.* Nachdem **Römer** etwa von 1692 hinweg mit einem ersten so kombinierten Instrumente, wie ein von ihm 1700 XII 15 an Leibnitz geschriebener Brief (vgl. Misc. Berol. III 276—78) zeigt, bereits gute Erfolge erzielt, aber auch manche Erfahrungen gesammelt hatte, stellte er 1704 seine berühmte **Rota meridiana** auf, welche (vgl. Bas. astron. § 366—400) eine bei 6 Fuss lange eiserne, hohle, doppelkegelförmige Horizontalaxe hatte, die an ihren Enden massive konische Zapfen besass, welche in kreisförmige Öffnungen messingener Scheiben passten; dabei sass die eine dieser Scheiben auf dem einen Pfeiler fest, während die auf dem andern Pfeiler befindliche durch Schrauben in jeder Richtung verstellbar war, so dass mittelst dieser Schrauben und einem an die Rota angelegten, mit einem Pferdehaar hergestellten Bleilote, die Justierung des Instrumentes ausgeführt werden konnte. Die am einen Ende der Axe sitzende, durch Speichen mit ihr verbundene Rota, d. h. der Vertikalkreis, hatte $5^1/_4$ Fuss Durchmesser, war von 10 zu 10 Minuten geteilt, und die Ablesung geschah mittelst zweier, am benachbarten Pfeiler befestigter diametraler Mikroskope, in deren Okularglasfocus 11 Seidenfaden so gezogen waren, dass direkt 1' abgelesen und bis auf 5'' geschätzt werden konnte. Das 5 Fuss lange, auf der Axe liegende Fernrohr war mit dieser und der Rückseite des Kreises mittelst Blei zusammengelötet; das nicht verstellbare Fadenkreuz bestand aus 3 horizontalen und 5 vertikalen Seidenfaden, von welchen je der mittlere vom Kreuzungspunkte aus gleich abstehende Knoten hatte, welche als eine Art Mikrometer dienten; die Beleuchtung der Faden endlich geschah mittelst einer Laterne, welche auf die Mitte des Tubus aufgesetzt war, und deren Licht von einem vor das Objektivende gesteckten Metallspiegel reflektiert wurde. — *b.* Nachdem die Römer'sche Rota bei dem Brande von 1728 zu Grunde gegangen war, liess **Horrebow** wieder ein ähnliches Instrument bauen, welches sodann bis 1778 diente, wo **Bugge** dasselbe durch ein Passageninstrument nach englischem Muster ersetzte, und erst zu Anfang des laufenden Jahrhunderts wurde von **Repsold** für seine Privatsternwarte in Hamburg wieder ein eigentlicher Meridiankreis von 5' Durchmesser erbaut, mit welchem **Schumacher** schon 1804 beobachtete. Diesem ersten liess sodann **Repsold** etwa 1809 einen neuen $3^1/_2$-füssigen Meridiankreis folgen, bei welchem die Zapfen der Axe aus Glockenmetall, ihre Lager aus Bergkrystall bestanden, und der 1818 nach etwelchem Umbau von **Gauss** für Göttingen angekauft wurde, sich jedoch nur als Mittagsrohr vollständig bewährte. — Wenig später begann, auf Anregung von **Bessel**, auch **Reichenbach** sich mit dem Baue solcher Instrumente zu beschäftigen, und wusste denselben in allen Teilen so zu vervollkommnen, dass der von ihm 1819 für Königsberg gelieferte dreifüssige Meridiankreis alle Erwartungen übertraf, ja veranlasste, dass sich nach und nach fast alle grössern Sternwarten des Kontinentes mit solchen „Reichenbach'schen Meridiankreisen" auszurüsten suchten. — Dass sowohl **Repsold** als **Reichenbach** bei ihren Konstruktionen nicht nur von den Fortschritten profitierten, welche die Präcisionsmechanik den **Ramsden**, **Cary**, etc. verdankte, sondern namentlich auch von den Ratschlägen, welche sie von den ausübenden Astronomen erhielten, darf ebensowenig vergessen werden, als dass letztere ohne die ihnen durch die Mechaniker gelieferten Mittel die sie auszeichnenden Leistungen kaum zu Stande gebracht hätten. — *c.* Dass weder die **Reichenbach** und **Repsold**, noch vollends die neuere Zeit, bei diesen ersten Erfolgen stehen blieben, ist selbstverständlich; so wurde z. B. die wünschbare Symmetrie durch Anbringen eines zweiten, zugleich zum Klemmen oder mittelst grober Teilung zum Einstellen dienenden Kreises bewirkt, — die das Umlegen erschwerende ältere Balancierung (376) durch eine mittelst Rollen von unten wirkende ersetzt, — für den „Beobachtungsstuhl" und den in einen Wagen umgeänderten „Umlegeapparat (376)" zwischen den Pfeilern eine kleine Eisenbahn gelegt, — die mikroskopische Ablesung allgemein eingeführt, — zur Beleuchtung von Faden und Ablesestellen das Glühlicht angewandt, — etc., wie dies zum Teil noch im folgenden näher zu besprechen sein wird.

378. Das Fadennetz und seine Beleuchtung. — Das Fadennetz des Meridiankreises weicht von dem gewöhnlichen Fadenkreuze insofern ab, dass der Horizontalfaden meistens durch zwei nahe Parallelfaden ersetzt ist, zwischen welche der Stern eingestellt wird, — dass sich ferner zu beiden Seiten des Vertikalfadens noch

Systeme equidistanter Faden oder Fadenbüschel vorfinden, um eine Durchgangsbeobachtung gewissermassen vervielfachen zu können, — und dass in der Regel auch, ähnlich wie beim Ablesemikroskope (340), messbar bewegliche Horizontal- und Vertikalfaden vorhanden sind, mit welchen die Lage irgend eines Punktes im Gesichtsfelde gegen das feste Netz bestimmt werden kann [a]. — Um das Fadennetz bei Nacht sichtbar zu machen, wird entweder von hinten oder von vorne etwas Licht auf dasselbe geworfen, wobei in erstern Falle die Faden als dunkle Linien auf hellem Grunde, im zweiten als helle Linien auf dunkelm Grunde erscheinen [b]. — Wenn ein Stern der Deklination d bei seinem Durchgange durch einen in der Distanz $15 \cdot x$ vom Mittelfaden stehenden Seitenfaden beobachtet und zugleich in den Horizontalfaden eingestellt wird, folglich dem Momente der Beobachtung ein gewisser Stundenwinkel $s = 15 \cdot t$ entspricht, so ist die Uhrzeit der Beobachtung um t zu **vermindern**, die Kreisablesung aber, falls die Teilung vom Pol nach dem Zenit läuft, um eine gewisse Grösse Δz zu **vermehren**, und zwar hat man

$$\mathrm{Si}\,15\,t : \mathrm{Si}\,15\,x = 1 : \mathrm{Co}\,d \qquad \text{oder} \qquad t = x \cdot \mathrm{Se}\,d \qquad \mathbf{1}$$

$$\mathrm{Tg}\,(d + \Delta z) : \mathrm{Tg}\,d = 1 : \mathrm{Co}\,15\,t \qquad \Delta z = {}^1/_4\, s^2 \cdot \mathrm{Si}\,2\,d \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad \mathbf{2}$$

so dass die Reduktion auf den Meridian leicht ausgeführt werden kann [c].

Zu 378: *a.* Da schon **Römer** (vgl. 377 : a) fünf Vertikalfaden benutzte, so ist es unrichtig, Tob. **Mayer** oder sogar Nevil **Maskelyne** (London 1732 — Greenwich 1811; Astronomer royal) als den Ersten zu bezeichnen, der dies gethan habe; dagegen mag der Letztgenannte die Übung eingeführt haben, bei Durchgangsbeobachtungen die Zehntelsekunde abzuschätzen, und überdies erfand er 1772 den sog. „Okularschlitten", um das Okular zur Vermeidung des Einflusses der Fadenparallaxe (331) jeweilen über den Faden stellen zu können, an welchem der Durchgang bevorsteht. Später wurde die Anzahl der Vertikalfaden auf 7, ja bei Benutzung von Registrierapparaten (159) sogar auf $1 + 4 \times 3 = 13$ oder $1 + 4 \times 5 = 21$ erhöht. Den, namentlich für Beobachtung von schwachen Sternen vorteilhaften Gebrauch, den Horizontalfaden durch zwei Parallelfaden zu ersetzen, habe ich zuerst in einem Briefe von Eug. **Bouvard** an Gautier von 1835 VI 8 (vgl. Notiz 387) erwähnt gefunden. — *b.* Dem in 331 über die Fadenbeleuchtung beigebrachten ist noch beizufügen, dass ein zur Zeit von amerikanischen Astronomen gemachter Versuch, die Spinnefaden durch feine Platindrähte zu ersetzen und diese durch einen galvanischen Strom glühend zu machen, sich nicht bewährte, und ebenso die in den Noten „K. v. **Littrow,** Über lichte Fäden im dunkeln Felde bei Meridian-Instrumenten (Wien. Sitz. 20 von 1856), und: Augustin **Reslhuber** (Garsten bei Steyer 1808 — Kremsmünster 1875; erst Dir. Obs., dann Abt von Kremsmünster), Über Prof. Stampfer's Lichtpunkt-Mikrometer (l. c.)" besprochenen originellen Vorschläge meines Wissens nicht in weitern Gebrauch übergingen. Ferner ist zu erinnern, dass **Bruhns** und **Engelmann** (vgl. A. N. 1505 von 1864) fanden, dass man unter Anwendung eines roten Blendglases bei einer die Faden noch deutlich zeigenden Feldbeleuchtung fast ebensoviele Sterne wie im dunkeln Felde sehe. Endlich ist für gewisse, sich bei seitlicher Feldbeleuchtung ergebende Anomalien auf 382 zu verweisen. — *c.* Die zur Reduktion der Beobachtungen an Seitenfaden notwendige Kenntnis der Fadendistanzen f kann, wie schon **Gauss** in seiner Note „Neue Methode die gegenseitigen Abstände der Fäden in Meridian-Fernröhren zu bestimmen (A. N. 43 von 1823)" auseinandersetzte, unter Benutzung des von **Lambert** (166) ausgesprochenen Principes, durch direkte Messung mit einem dem Objektive gegenübergestellten Theodoliten erhalten werden; aber immerhin ist, wenn, um die beiden Fernrohraxen zur Coincidenz zu bringen, denselben die Neigung h gegeben werden muss, die gefundene Differenz F der Horizontalablesungen wegen

$$\text{Co}\, f = \text{Si}^2 h + \text{Co}^2 h \cdot \text{Co}\, F \quad \text{oder} \quad \text{Si}\, {}^1\!/_2\, f = \text{Si}\, {}^1\!/_2\, F \cdot \text{Co}\, h \quad \text{oder} \quad f \fallingdotseq F \cdot \text{Co}\, h \qquad \mathbf{3}$$

noch einer kleinen Reduktion zu unterwerfen. Meistens wird übrigens die Fadendistanz f = 15 x auf astronomischem Wege bestimmt, indem man die Zeit t beobachtet, welche (vgl. übrigens 382) ein polarer Stern der Deklination d braucht, um sie zurückzulegen, und alsdann ihren Wert nach der aus beistehender Figur unmittelbar hervorgehenden 1 berechnet. So z. B. erhielt ich 1854 X 1 an den 7 annähernd equidistanten Faden des kurz zuvor aufgestellten Ertel'schen Meridiankreises in Bern bei Beobachtung von α Urs. min. (d = 88° 35'):

Faden	Uhrzeit	Kreisabl. a = 318° 45'	t	x	x'	
	h m s	"	s	s	s	
I	0 27 0	— 34,2	2222	56,615	56,612	
II	39 36	4,0	1466	37,445	37,474	112,715 (s)
III	52 2	33,8	720	18,417	18,629	
IV	1 4 2	45,1				
V	16 15	40,6	— 733	— 18,749	— 18,802	
VI	28 50	21,8	— 1488	— 38,004	— 37,986	113,842
VII	41 29	— 12,0	— 2247	— 57,246	— 57,054	

und an demselben Tage für α Pisc. austr. (d' = — 30° 24'):

Faden	Uhrzeit	x' · Se d'	Korrig. Zeit	Zu α Urs. min. Δz	a + Δz
	h m s	s	s	"	° ' "
I	22 45 39,8	65,6	45,4	68,9	318 45 34,7
II	46 1,7	43,4	45,1	30,0	34,0
III	23,3	21,6	44,9	7,2	41,0
IV	45,0		45,0		45,1
V	47 7,0	— 21,8	45,2	7,5	48,1
VI	29,0	— 44,0	45,0	30,9	52,7
VII	51,2	— 66,1	45,1	70,5	58,5
Mitt.	22 46 45,29	— 0,19	45,10		318 45 44,9

Aus den Vergleichungen der für α Urs. min. an den Seitenfaden und dem Mittelfaden erhaltenen Zeiten wurden nun die oben eingetragenen t gefunden, aus diesen nach 2 die x berechnet, und letztern überdies die aus 10 solchen Durchgängen erhaltenen Mittelwerte x' beigeschrieben, welchen die sog. **Fadenkorrektion** im Equator

$$y = \frac{1}{7}\,(112{,}715 - 113{,}842) = -0^s{,}161$$

entspricht. Wird sodann ein anderer Stern der Deklination d' an allen n Faden beobachtet und bezeichnet ΣT die Summe aller Uhrzeiten, Σf_0 die Summe der östlichen, Σf_w aber die Summe der westlichen Fadendistanzen, so ist die wahrscheinlichste Durchgangszeit durch den Mittelfaden offenbar

$$T = \frac{1}{n} \cdot \Sigma T + \frac{1}{n}\,(\Sigma f_0 - \Sigma f_w)\,\mathrm{Se}\,d' = \text{Fadenmittel} + y \cdot \mathrm{Se}\,d' \qquad 4$$

so dass z. B. für obige Beobachtung von α Pisc. austr. $T = 22^h\,46^m\,45^s{,}29 - 0^s{,}19 = 22^h\,46^m\,45^s{,}10$ wird. Praktisch ist es jedoch vorteilhafter, wie es oben für α Pisc. austr. ebenfalls geschehen ist, die sämtlichen $x' \cdot \mathrm{Se}\,d'$ zu berechnen, damit die einzelnen Antrittszeiten auf den Mittelfaden zu reduzieren, und erst dann das Mittel zu nehmen, weil man sich alsdann durch Vergleichung dieses Mittels mit den einzelnen Bestimmungen über den Wert derselben belehren, ja aus den Differenzen v nach

$$\sqrt{\Sigma v^2 : (n-1)} = \pm\, 0^s{,}16 \qquad \text{und} \qquad \sqrt{\Sigma v^2 : n\,(n-1)} = \pm\, 0^s{,}06 \qquad 5$$

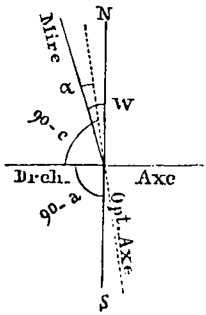
den mittlern Fehler des einzelnen Antrittes und die Unsicherheit des Mittels erhalten kann, — überdies auch von dem Ausfallen einzelner Faden unbehelligt bleibt — Macht man beim Durchgange an Seitenfaden auch Höheneinstellungen, wie es nach oben bei α Urs. min. der Fall war, so sind die entsprechenden Ablesungen ebenfalls zu korrigieren, da sie anstatt $PS = p$ nur $PS' = p'$ entsprechen, und

$$\mathrm{Tg}\,p' = \mathrm{Tg}\,p \cdot \mathrm{Co}\,s \qquad \text{oder nach } 40:22 \qquad p - p' = \tfrac{1}{4}\,s^2 \cdot \mathrm{Si}\,2p \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 6$$

ist, somit sich unsere 2 ergiebt. Die nach dieser Formel erhaltenen Werte von $\triangle z$ und die korrigierten Ablesungen $a + \triangle z$ sind oben ebenfalls eingetragen, und letztere lassen darauf schliessen, dass der sog. Horizontalfaden eine kleine Neigung α besass, folglich jede Ablesung auch noch um $s \cdot \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Tg}\,\alpha$ korrigiert werden sollte. Wenn man sich jedoch die schon von Jacq. **Cassini** in seiner Schrift „De la grandeur et de la figure de la terre. Paris 1720 in 4. (Mém. Par. 1718)" gegebene Regel merkt, auf den Stern erst nahe an der Culmination oder dann jeweilen an symmetrischen Faden einzustellen, so wird diese Korrektion überflüssig. — Zum Schlusse mag noch auf das ebenfalls von **Cassini** (l. c.) hervorgehobene Paradoxon aufmerksam gemacht werden, dass ein zwischen Zenit und Equator culminierender Stern bei der Culmination tiefer zu stehen scheint als beim Durchgange durch die ersten Faden, indem in diesem Falle $\triangle z = p - p'$ positiv wird, also der Parallel des Sternes S den Meridian unterhalb S' schneidet.

379. Die Kollimatoren und der Nadirhorizont. — Die optische Axe des Fernrohrs wird in der Regel zu dessen Drehaxe nicht ganz genau senkrecht stehen, sondern z. B. mit dem Westende derselben einen Winkel $90^0 - c$ bilden oder einen sog. **Kollimationsfehler** c besitzen, und ebenso wird bei vertikaler Lage der optischen Axe der Index meistens nicht völlig mit dem Nullpunkte des Kreises coincidieren, sondern sich ein sog. **Indexfehler** zeigen. Um den ersten dieser beiden Fehler zu bestimmen und allfällig durch Verschieben der Fadenplatte auf ein Minimum zu reduzieren, kann man sich der Nachtmire (166) oder eines polaren Sternes bedienen [a], — wohl auch des von **Bohnenberger** eingeführten, im Nadir aufzustellenden Quecksilberhorizontes, der zugleich für Ermittlung des zweiten Fehlers ein weit besseres Mittel darbietet, als man solches früher in Lot oder Libelle besass [b].

Zu 379: *a.* Das mutmasslich zuerst durch **Picard** eingeführte Verfahren, die Kollimation durch Umlegen zu bestimmen, ist schon in 350 besprochen



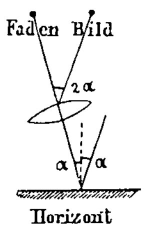
worden, so dass hier nur übrig bleibt, noch speciell zu zeigen, wie bei Meridianinstrumenten die Nachtmire als **Kollimator** Verwendung finden kann: Liegt letztere z. B. um W von Nord gegen West, während das Westende der Drehaxe vom Südpunkte um $90^0 - a$ absteht, und findet man mikrometrisch den Abstand des Fadenkreuzes von der Mire vor dem Umlegen gleich α_1, nach dem Umlegen aber gleich α_2, so hat man offenbar die Beziehungen

$$c = W - a - \alpha_1 \qquad \text{und} \qquad c = a + \alpha_2 - W$$

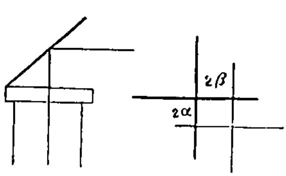
also

$$c = \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad \mathbf{1}$$

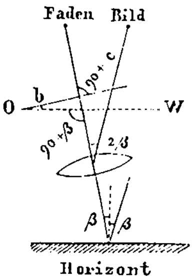
so dass die Aufgabe in der That in einfachster Weise gelöst ist. Die analoge Lösung mit Hilfe eines polaren Sternes, bei welcher man der Unsicherheit über die Unbeweglichkeit der Mire oder Hilfslinse enthoben ist, wird unter der folgenden Nummer zur Anwendung kommen. — *b.* Der von **Bohnenberger** in seiner Abhandlung „Neue Methode den Indexfehler eines Höhenkreises zu bestimmen, und die Horizontalaxe eines Mittagsfernrohrs zu berichtigen ohne Loth oder Libelle (A. N. 89 von 1826)“ empfohlene und



sich sodann rasch einbürgernde **Nadirhorizont** besteht aus einem im Nadir des Instrumentes, isoliert vom Fussboden, aufgestellten Gefässe mit Quecksilber, und beruht auf folgendem Principe: Hat der einem im Brennpunkte des Objektives stehenden und beleuchteten Punkte (Faden) entsprechende Hauptstrahl eine Neigung α gegen die Vertikale, so entsteht durch die aus dem Objektive parallel austretenden, also nach Reflexion durch das Quecksilber auch parallel zu ihm zurückkehrenden Strahlen, neben ihm ein Bild desselben in der Distanz 2α. Entsprechend wird man, wenn man das Fadenkreuz des annähernd nach dem Nadir gerichteten Fernrohrs, z. B. durch ein

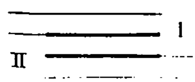


vor dem Okulare aufgestecktes und durch eine Lampe Licht erhaltendes Glimmerblättchen, hinlänglich beleuchtet, auch ein Bild des Fadenkreuzes sehen, und mit den beweglichen Faden die Distanzen 2α und 2β messen können. Dabei wird α die der augenblicklichen Stellung des Fernrohrs entsprechende Abweichung vom Nadir, also in Verbindung mit der gleichzeitigen Ablesung am Vertikalkreise auch diesen selbst und damit den Indexfehler geben, — β dagegen, wenn b und c Neigung der Drehaxe und Kollimation der optischen Axe bezeichnen, die Relation



$$b + 90^{\circ} + c = 90^{\circ} + \beta \quad \text{oder} \quad \beta = b + c \qquad \mathbf{2}$$

eingehen, aus welcher man, wenn b bereits mit dem Niveau bestimmt ist, die Kollimation c, oder, wenn letztere nach der frühern Methode schon gefunden wurde, die Neigung b finden, oder endlich für beide eine vortreffliche Kontrole erhalten kann. — Wird der Horizontalfaden durch einen Doppelfaden dargestellt, so ist es am besten, je das Bild des Einen Fadens mit dem Andern zusammenzubringen, und aus den diesen beiden Stellungen entsprechenden Ablesungen das Mittel zu nehmen, welches nun ohne weitere Korrektion dem Nadir entspricht. Ist kein Doppelfaden da, so stelle man den beweglichen Faden in die Nähe des Mittelfadens, — drehe das Fernrohr, bis letzterer in der Mitte zwischen dem beweglichen Faden und dessen Bild steht, — und lese ab. — Für die ältern Methoden, den Zenitpunkt zu bestimmen oder dessen Bestimmung zu umgehen, vgl. 346 u. f., sowie den 1809 von **Bessel** im Berl. Jahrb. für 1812 gemachten Vorschlag, den Abstand eines Sternes von seinem Bilde in einem künstlichen Horizonte zu messen, — für andern betreffenden Detail die folgende Nummer und die ihr angehängten Litteraturnachweise.

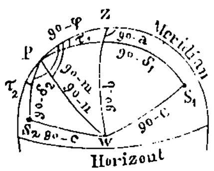


380. Der Einfluss der Aufstellungsfehler. — In früherer Zeit glaubte man, dass es hinlänglich sei, ein Instrument bei seiner Installation möglichst fehlerfrei aufzustellen [a], speciell bei einem Passageninstrumente oder Meridiankreise für ein und allemal die Drehaxe des Fernrohrs horizontal zu stellen und in die Richtung Ost-West zu bringen, sowie eine allfällige Kollimation der optischen Axe zu beseitigen, und erst um die Mitte des vorigen Jahrhunderts erkannte man, dass die kleinen, auch bei sorgfältigster Aufstellung übrigbleibenden Fehler von erheblichem Einflusse und überdies variabel sind [b]. Die von Tob. **Mayer** zur Bestimmung dieses Einflusses aufgestellte und nach ihm benannte Beziehung

$$T = t + \Delta t + {}^{1}\!/_{15}\,[a \cdot \mathrm{Si}\,(\varphi \mp \delta) + b \cdot \mathrm{Co}\,(\varphi \mp \delta) \mp c] \cdot \mathrm{Se}\,\delta \qquad \mathbf{1}$$

in welcher T und δ Rektascension und Deklination des Sternes, t die Uhrzeit des Durchganges durch den Mittelfaden, Δt die Uhrkorrektion, φ die Polhöhe, a, b, c endlich Azimutal-, Niveau- und Kollimations-Fehler bezeichnen, und die untern Zeichen bei untern Culminationen (für welche T in T $\pm$ 12^{h} übergeht) anzuwenden sind, gehört zu den wichtigsten Formeln der praktischen Astronomie [c]. Für verschiedene Vorschläge Beobachtung oder Berechnung etwas anders anzuordnen, als es unsere Formel unmittelbar erfordert, sowie für Studien über systematische Veränderungen in den Instrumental-Korrektionen wird auf die unten folgenden Bemerkungen und die Speciallitteratur verwiesen [d].

Zu 380: *a.* Wilhelm **Meyer** (Braunschweig 1853 geb.; früher Obs. Genf, jetzt Dir. Urania Berlin) sagte etwas drastisch, aber wahr: „Die Thätigkeit des gewissenhaften praktischen Astronomen ist ein endloser Kampf mit einer Schaar von Beobachtungs-, Instrumental- und Rechnungsfehlern, die wie das Ungeziefer seine besten Thaten verunreinigen". — *b.* Während der wenigstens nach damaligen Begriffen gut situierte, mit den nötigen Instrumenten und Gehilfen reichlich versehene und sich einer langen Thätigkeit erfreuende Jam. **Bradley** noch mehr zu der alten Schule gehörte, und zwar ein grosses, bald zu wenig (vgl. Delambre VI 426 f.) gewürdigtes, bald wohl auch etwas überschätztes und jedenfalls die nötigen Reduktionselemente nur dürftig in sich schliessendes Beobachtungsmaterial sammelte, aber dessen Bearbeitung gänzlich der Folgezeit überliess, gab sich der unter den ungünstigsten Verhältnissen arbeitende und seine Kräfte rasch aufzehrende Tob. **Mayer** alle erdenkliche Mühe, möglichst sichere Bestimmungen zu erhalten, und die von ihm 1756 der Göttinger Akademie vorgetragene Abhandlung „Observationes astronomicæ quadrante murali habitæ in observatorio gottingensi (Opera inedita. Vol. I Gottingæ 1775 in 4.)", in welcher die sofort näher zu besprechende Formel zum erstenmal kompariert, stellt ihn nach meiner Meinung als praktischen Astronomen mindestens in die Höhe seines englischen Zeitgenossen. —



c. Haben a, b, c die frühere Bedeutung und bezeichnen m und n die den beiden erstern entsprechenden Abweichungen in Beziehung auf den Pol, sowie τ den Stundenwinkel unter welchem bei diesen Verhältnissen ein Stern S der Deklination δ zu culminieren scheint, so ergeben sich aus den Dreiecken PSW und PZW die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\, c &= \mathrm{Si}\, n \cdot \mathrm{Si}\, \delta + \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, (\tau \pm m) \\ \mathrm{Si}\, n &= \mathrm{Si}\, b \cdot \mathrm{Si}\, \varphi - \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, a \\ \mathrm{Si}\, b &= \mathrm{Si}\, n \cdot \mathrm{Si}\, \varphi + \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, m \end{aligned} \qquad \mathbf{2}$$

während offenbar

$$T = t + \triangle t \mp {}^1/_{15}\, \tau \qquad \mathbf{3}$$

ist, wo sich je das untere Zeichen auf untere Culminationen bezieht. Da aber bei jedem irgend sorgfältig aufgestellten Instrumente a, b, c, also auch m, n, τ kleine Grössen sind, so lassen sich die 2 mit genügender Genauigkeit durch

$$\begin{aligned} c &= n \cdot \mathrm{Si}\, \delta + (\tau \pm m) \cdot \mathrm{Co}\, \delta & n &= b \cdot \mathrm{Si}\, \varphi - a \cdot \mathrm{Co}\, \varphi \\ b &= n \cdot \mathrm{Si}\, \varphi + m \cdot \mathrm{Co}\, \varphi \quad \text{oder} & m &= b \cdot \mathrm{Co}\, \varphi + a \cdot \mathrm{Si}\, \varphi \end{aligned} \qquad \mathbf{4}$$

ersetzen, und hiefür geht 3 in die mit 1 übereinstimmende Formel

$$\begin{aligned} T &= t + \triangle t + {}^1/_{15}\, (m \pm n \cdot \mathrm{Tg}\, \delta \mp c \cdot \mathrm{Se}\, \delta) \\ &= t + \triangle t + {}^1/_{15}\, [a \cdot \mathrm{Si}\, (\varphi \mp \delta) + b \cdot \mathrm{Co}\, (\varphi \pm \delta) \mp c] \cdot \mathrm{Se}\, \delta \end{aligned} \qquad \mathbf{5}$$

über, deren erste, von **Bessel** häufig benutzte und daher auch wohl seinen Namen tragende Form in dem Falle, wo für eine längere Beobachtungsreihe dieselben Konstanten gelten, einigen Vorteil bietet, während die zweite Form die ursprünglich von Tob. **Mayer** gegebene und noch jetzt meistens gebrauchte ist. Manche Astronomen ziehen vor, c in entgegengesetztem Sinne zu zählen, um allen drei Korrektionsgliedern gleiches Zeichen zu verschaffen, — wieder andere ersetzen das Doppelzeichen durch die Regel, dass man für untere Culminationen die Deklination durch ihr Supplement zu ersetzen habe, — etc. — Hat man nach dem vorhergehenden (379) b und c bestimmt, so kann man nach den entsprechenden Gliedern von 5 die Uhrzeit t für dieselben korrigieren und so dafür einen verbesserten Wert t' erhalten, so dass sich alsdann für zwei beobachtete Sterne die Beziehungen

$$T_1 = t_1' + \tfrac{1}{15} a \cdot \mathrm{Si}(\varphi - \delta_1) \mathrm{Se}\,\delta_1 + \triangle t \qquad T_2 = t_2' + \tfrac{1}{15} a\, \mathrm{Si}(\varphi - \delta_2) \mathrm{Se}\,\delta_2 + \triangle t \qquad \mathbf{6}$$

ergeben, aus welchen durch Elimination von $\triangle t$

$$a = 15 \cdot \frac{T_1 - T_2 - (t_1' - t_2')}{\mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}(\delta_2 - \delta_1)} \mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,\delta_2 \qquad \mathbf{7}$$

folgt, somit a und alsdann nach 6 auch $\triangle t$ gefunden werden kann, aber zugleich hervorgeht, dass es zur sichern Bestimmung von a notwendig ist, einen polaren mit einem equatorealen Stern zu verbinden. Diese Methode für Bestimmung von a nach **Delambre** zu benennen, ist ein Unfug, da ihm höchstens das Verdienst zukömmt, das Mayer'sche Verfahren in die Praxis der französischen Astronomen eingeführt zu haben. — Noch ist nachzutragen, dass es zur leichtern Handhabung der vorstehenden Rechnungen ratsam ist, sich für die betreffende Breite eine Tafel der Mayer'schen Koefficienten zu berechnen, wie eine solche unter X^c für $\varphi = 47^0\ 22'\ 40''$ gegeben ist. Ferner bleibt darauf aufmerksam zu machen, dass für genauere Operationen die den Tafeln entnommene Rektascension je noch um das Betreffnis der täglichen Aberration zu vermehren ist, welches (611) für die Culmination gleich $\pm\ 0'',3113 \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Se}\,\delta$ (für Zürich gleich $\pm\ 0'',2108 \cdot \mathrm{Se}\,\delta = \pm\ 0^s,014 \cdot \mathrm{Se}\,\delta$) gesetzt werden kann, wo das obere und untere Zeichen der obern und untern Culmination entspricht; es geschieht dies am einfachsten, indem man die Kollimation um die Aberrationskonstante (also für Zürich um $0'',211 = 0^s,014$) vermehrt. Endlich ist für die Reduktion der Durchgangsbeobachtungen von Wandelsternen auf 435 zu verweisen. — *d.* Die gewöhnliche Anordnung der Beobachtungen für eine Zeitbestimmung besteht darin, dass man mindestens zwei Paare equatorealer Sterne auswählt, von welchen das eine vor, das andere nach einem polaren Sterne culminiert, — dann den Durchgang des ersten Paares an sämtlichen und denjenigen des Polsternes an den ersten Faden notiert, — hierauf das Instrument rasch umlegt und nun den Polstern an den übrigen (eigentlich an denselben), sowie das andere Paar wieder an allen Faden beobachtet, — und überdies Sorge trägt, in hiedurch nicht in Anspruch genommenen Momenten, sowohl vor als nach dem Umlegen, Mire und Horizont, sowie zur Kontrole die Axenlibelle abzulesen; hat man sodann in der (378, 379 und oben) angegebenen Weise die Fadenreduktionen und Konstantenbestimmungen ausgeführt, so werden nach 1 oder 5 die aus den einzelnen equatorealen Sternen folgenden Uhrkorrektionen ermittelt, dieselben mit Hilfe des Uhrganges auf einen mittlern Moment reduziert und endlich daraus das Mittel genommen. — Als Beispiel einer der vorgeschlagenen Modifikationen führe ich diejenige an, welche schon 1863 **Chauvenet** (vgl. dessen Manual II 174/5) andeutete, sodann A. **Nobile,** veranlasst durch Zweifel über die Gleichheit der persönlichen Gleichung (382) für equatoreale und polare Sterne, in seiner Note „Sur la possibilité d'éviter les étoiles circompolaires dans les déterminations du temps local (A. N. 2285 von 1879)" weiter ausführte, und die sich bei vergleichenden Bestimmungen, welche A. **Wolfer** 1880 in Zürich ausführte, ganz gut bewährte. Sie beruht darauf, dass, wenn man Sternenpaare wählt, welche der Bedingung

$$\mathrm{Si}(\varphi - \delta_1) \mathrm{Se}\,\delta_1 = -\mathrm{Si}(\varphi - \delta_2) \mathrm{Se}\,\delta_2 \quad \text{oder} \quad \mathrm{Tg}\,\delta_1 + \mathrm{Tg}\,\delta_2 = 2\,\mathrm{Tg}\,\varphi \qquad \mathbf{8}$$

genügen, das Mittel nach 5 von dem Azimutalfehler frei wird, — und in Fällen, wo diese Bedingung nur annähernd erfüllt ist, schon ein roher, z. B. durch Einstellung auf die Mire erhaltener, Wert vollständig genügt, um die kleine Differenz des Azimutaleinflusses zu beseitigen. — Für andere Methoden und weitern Detail verweise ich auf die schon früher angeführte Speciallitteratur, zu deren Ergänzung ich noch „**Delambre**, Table pour trouver la déviation d'une lunette méridienne et la correction des passages observés (Conn. d. t. 1792; entspricht unserer Tab. X[c]), — Henry **Englefield** (1752? — London 1822; Baronet; Schüler von N. Pigott?), Method of adjusting a transit instrument in a plan of the meridian (Journ. Nicholson 1807), — **Bohnenberger**, Über die Berichtigung der Mittagsfernröhre (Z. f. A. IV von 1817), und: Über den Gebrauch des Polarsternes als Meridianzeichen (A. N. 135 von 1828), — J. J. **v. Littrow**, On the correction of the transit instrument (Mem. Astr. Soc. I—II von 1822—26), — Henry **Kater** (Bristol 1777 — London 1835; Kapitän und Mitarbeiter von Colonel Lambton in Indien), Description of a floating collimator (Phil. Trans. 1825), — **Liagre**, Mémoire sur les corrections de la lunette méridienne (Mém. Brux. 1845), und: Méthode particulière pour déterminer la collimation d'une lunette méridienne à l'aide des observations astronomiques (Brux. mém. cour. 1850), — Charles A. **Young** (Hanover in N.H. 1834 geb.; Dir. Obs. Princeton in N.J.), On a new method of determining the level-error of the axis of a meridian instrument (Proc. amer. Ass. 1870), — C. **Braun**, Über eine neue Reductionsmethode für Sätze von Transit-Beobachtungen (A. N. 2595 von 1884; bemerkenswertes graphisches Verfahren), — etc." beifüge. — Die fortwährende Neubestimmung der Konstanten ist um so notwendiger, als für dieselben nicht nur die Stabilität des Instrumentes in Frage kömmt, sondern auch **systematische** Veränderungen vorzukommen scheinen, welche an tägliche, jährliche und noch grössere Perioden gebunden, zum Teil vielleicht sekulärer Natur sind, — zuweilen auch plötzliche Störungen. Inwieweit diese Variationen mit lokalen, tellurischen oder gar (vgl. 523) kosmischen Verhältnissen zusammenhängen, ist wohl nur durch lange Beobachtungsreihen festzustellen, jedoch kann vorläufig dafür auf die Abhandlungen und Notizen der St. Jacques de **Silvabelle** (Berl. Jahrb. 1785), Th. R. **Robinson** (Phil. Mag. 1846), Ad. **Hirsch** (Bull. Neuch. 1870, 1879 und 1883), W. **Förster** (Astr. Viert. 1883), H. **Faye** und Antoine-Thompson **d'Abbadie** (Dublin 1810 geb.; Akad. Paris; vgl. Compt. rend. 1883), Th. **Albrecht** (A. N. 2769 von 1887), etc. verwiesen werden.

381. Die sog. Durchbiegung. — Bei jedem nur in der Mitte unterstützten Fernrohr werden sich beide Rohrhälften etwas biegen und dadurch eine Verlegung der optischen Axe bewirken, welche aber natürlich nur insoweit einen schädlichen Einfluss ausüben kann, als eine Biegungsdifferenz der beiden Rohrhälften vorhanden ist; diese letztere wird aber wesentlich durch eine Verschiedenheit der Längen a und b der beiden Rohrhälften und der an ihnen wirkenden Gewichte A und B des Okular- und Objektivkopfes bedingt werden [a]. Nachdem durch **Bessel** und **Brioschi** der schädliche Einfluss der Biegung auf die Höhenmessungen konstatiert worden war [b] und **Reichenbach** vergeblich versucht hatte, dieselbe auf konstruktivem Wege vollständig zu beseitigen [c], hatte **Repsold** den glücklichen Gedanken, die beiden Köpfe vertauschbar zu machen und dadurch den Astronomen ein bequemes Mittel zur Bestimmung und fast vollständigen Elimination jenes Einflusses an die Hand zu geben [d]. Für weitern Detail wird auf die Speciallitteratur verwiesen [e].

Zu 381: *a.* Da das Gleichgewicht zwischen den beiden Rohrhälften an

$$a \cdot A = b \cdot B \qquad \text{oder} \qquad a : b = B : A \qquad \mathbf{1}$$

gebunden ist, und die Biegung nach den Gesetzen der Mechanik bei horizontalem Rohr dem Gewichte und der dritten Potenz der Länge des Armes proportional gesetzt werden darf, so hat man einerseits, wenn α ein Erfahrungsfaktor ist, bei der gewöhnlichen Zusammensetzung die Biegungsdifferenz

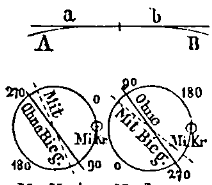
$$\beta_1 = \alpha\,(A \cdot a^3 - B \cdot b^3) = \alpha b^3\,[A \cdot (B : A)^3 - B] \qquad \mathbf{2}$$

und nach Umtausch der beiden Köpfe

$$\beta_2 = \alpha\,(B \cdot a^3 - A \cdot b^3) = \alpha b^3\,[B \cdot (B : A)^3 - A] \qquad \mathbf{3}$$

folglich

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha \cdot b^3 \cdot (A + B)\,[(B : A)^3 - 1] \qquad \mathbf{4}$$



Vor Umt. Nach Umt.

Anderseits hat man, wenn e und $180^0 + e$ die für ein Objekt der Zenitdistanz z vor und nach Umtausch ohne Biegung nötigen Einstellungen, α_1 und α_2 aber die durch die Biegung verdorbenen Ablesungen sind, da die Biegungen desselben Rohres in verschiedenen Zenitdistanzen wenigstens annähernd deren Sinus proportional gesetzt werden dürfen,

$$\alpha_1 = e + \beta_1 \cdot \mathrm{Si}\,z \qquad \alpha_2 = 180^0 + e - \beta_2 \cdot \mathrm{Si}\,z \qquad \mathbf{5}$$

(wo die β für nördliche Objekte das Zeichen wechseln), und hieraus

$$\beta_1 + \beta_2 = (180^0 + \alpha_1 - \alpha_2) \cdot \mathrm{Cs}\,z \qquad \mathbf{6}$$

Man kann daher nach 6, 4, 2, 3 successive $\beta_1 + \beta_2$, αb^3, β_1 und β_2 berechnen, und sodann nach 5 aus einer Ablesung α die eigentliche Einstellung e finden. Da übrigens aus 2 und 3

$$\beta_1 : \beta_2 = (A \cdot B^3 - B \cdot A^3) : (B^4 - A^4) = AB : (A^2 + B^2) \qquad \mathbf{7}$$

folgt, so kann man auch leicht für jedes Instrument für ein und allemal durch Abwägung der beiden Köpfe dieses Verhältnis bestimmen und sodann die beiden β direkt aus 6 berechnen. So erhielt ich bei dem Ertel'schen Meridiankreise der Zürcher Sternwarte $A = 2242^{gr}$, $B = 2281^{gr}$, $\beta_1 : \beta_2 = 1 : 2$, folglich, da sich aus den Ablesungen $\beta_1 + \beta_2 = 1'',26$ ergeben hatte, $\beta_1 = 0'',42$ und $\beta_2 = 0'',84$. — *b.* **Bessel** handelte von der Biegung in der 1822 erschienenen Abteilung VII der „Königsberger-Beobachtungen", und Carlo **Brioschi** (1782? — Neapel 1833; Prof. astr. Neapel) in dem 1824 erschienenen ersten Bande der „Comentari della specola di Napoli". — *c.* **Reichenbach**, bei dem es fast zur Manie geworden war, überall Korrektionsschrauben und Gegengewichte anzubringen, wollte der Biegung durch ein eigenes Hebelwerk steuern, hatte aber damit wenig Erfolg, und so schrieb z. B. **Horner** schon 1826 X 10 an Gautier: „Cette méthode de charger le tout de contrepoids, que nous devons à Reichenbach, m'a déplû toujours; il vaudrait mieux de composer les tubes de cones doubles", — ja **Hansen** sprach sich sogar (A. N. 389 von 1839) dahin aus, dass jene Balancierung mehr kompliziere als nütze. — *d.* **Repsold** schrieb schon 1825 XII 27 an Horner, dass er diese Einrichtung an dem von ihm für die Hamburger Sternwarte konstruierten Meridiankreise anbringe. — Begreiflich darf bei dieser Art der Biegungsbestimmung nicht vergessen werden, vor und nach jedem Umtausch den Nadirpunkt zu bestimmen, da die optische Axe durch denselben immer eine mehr oder weniger beträchtliche Verlegung erleidet. — *e.* Vgl. z. B. „Ludwig **Schwarz** (Danzig 1821 geb.; Dir. Obs. Dorpat), Das vom Sinus der doppelten Zenitdistanz abhängige Glied der Biegung des Dorpater Meridiankreises. Dorpat 1871 in 4., und: Eine Studie auf dem Gebiete der practischen Astronomie. Dorpat 1889 in 4., — William **Harkness**, On the flexure of meridian instruments and the means available for elimination its effects from star places. Washington 1886 in 4. (auch App. III Wash. observ. 1882), — etc. — Anhangsweise ist zu erinnern, dass grosse Kreise auch infolge ihres Gewichtes Deformationen erleiden können, und so z. B. John **Pond** (London 1767 — Blackheath 1836; von 1811—35 Astronomer royal) in seiner Abhandlung „On the declinations of some of the principal fixed stars (Ph. Tr. 1806)" aus vergleichenden Beobachtungen an einem Troughton'schen Universalinstrumente, das 6 equidistante Mikroskope besass, solche Deformationen an einem Greenwicher Quadranten nachweisen konnte.

382. Die Personalfehler. — Während ein geübter Beobachter bei guter Luft den Fadenantritt eines equatorealen Sternes bis auf $0^s,1$ genau zu notieren glaubt, so differieren die Angaben verschiedener Beobachter oft viel stärker, ja gehen in einzelnen Fällen um mehr als 1^s auseinander. Man betrachtete früher solche Vorkommnisse als unstatthafte Anomalien [a], hat dagegen in neuerer Zeit konstatiert, dass jedem Menschen ein zunächst aus Hörfehler und Sehfehler, aber auch aus gewissen Angewöhnungen beim beobachten, etc., resultierender sog. **Personalfehler** zukömmt [b], — dass dieser für jeden einzelnen ziemlich konstant, für verschiedene aber ebenfalls verschieden ist, — und dass jene Anomalien gerade diesen Verschiedenheiten entsprechen, d. h. sog. **Personalgleichungen** begründen. Glücklicherweise wurden aber auch verschiedene Wege gefunden, um diese Fehler und Gleichungen ermitteln [c], somit in Rechnung bringen, folglich gewisse Fundamentalbestimmungen von ihrem schädlichen Einflusse befreien zu können, und wir werden noch wiederholt hierauf zurückzukommen, sowie auch eine ganze Reihe anderer persönlicher Fehler zu erwähnen haben [d].

Zu 382: *a.* So glaubte noch am Ende des vorigen Jahrhunderts **Maskelyne** einen sonst tüchtigen Gehilfen Namens David **Kinnebrook** entlassen zu sollen, als er eine konstante Beobachtungsdifferenz zwischen diesem und sich selbst entdeckte. — *b.* Schon im ersten Viertel des gegenwärtigen Jahrhunderts befassten sich die **Bessel**, **Quetelet**, **Bohnenberger**, etc. wiederholt mit den beim Notieren von Fadenantritten vorkommenden Fehlern, ja **Gauss** schrieb bereits (vgl. „Briefe, herausg. von Valentiner. Karlsruhe 1877 in 4.") 1820 I 20 an Nicolai: „Es ist ein Irrthum wenn man (wie Bohnenberger) glaubt, dass die wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Antritte den Secanten der Declination proportional sind. Sie wachsen viel langsamer und die wahre Formel ist $\sqrt{f^2 + g^2 \cdot Se^2 d}$, wo f vom Fehler des Hörens, g vom Fehler des Sehens abhängt. Für meine Beobachtungen an Repsold's Uhr und an Reichenbach's Mittagsfernrohr setze ich $f = 0^s,086$ und $g = 0^s,039$". Letztere Bestimmungen wurden ohne Zweifel erhalten, indem für eine grössere Anzahl von Sternen (entsprechend wie in 378: c) der sich aus Vergleichung der reduzierten Faden-antritte mit ihrem Mittel ergebende mittlere oder wahrscheinliche Fehler jedes einzelnen jener Wurzel gleichgesetzt, dann die den sämtlichen Gleichungen bestentsprechenden Werte von f und g gesucht wurden, und auf gleiche Weise erhielt später W. **Struve** (vgl. „Anwendung des Durchgangsinstruments für die geographischen Ortsbestimmungen. St. Petersburg 1833 in 8.") für n-malige Vergrösserung die Formel

$$w_n = \sqrt{0^s{,}072^2 + (180 : n)^2 \cdot 0^s{,}016^2 \cdot Se^2\, d} \qquad 1$$

nach welcher sich für

$d = 0 : w_{30} = 0^s{,}120 \quad w_{180} = 0^s{,}074 \qquad d = 88\frac{1}{2}^0 : w_{30} = 3^s{,}439 \quad w_{180} = 0^s{,}578$

folglich für den auf eine Fadendistanz übergehenden Fehler $df = w \cdot \sqrt{2} \cdot Co\, d$ die Werte

$0^s{,}170 \qquad 0^s{,}104 \qquad 0^s{,}135 \qquad 0^s{,}023$

ergeben, so dass bei stärkern Vergrösserungen die polaren Sterne für Bestimmung der Fadendistanz besonders vorteilhaft sind. — Als von der Mitte unsers Jahrhunderts hinweg der **Chronograph** (159) zur Verfügung stand, der einerseits die Vermehrung der Faden und dadurch eine vollständigere Elimination der zufälligen Beobachtungsfehler ermöglichte, und anderseits den Hörfehler an einen Tasterfehler vertauschte, — ferner das **Chronoskop** (159), welches die Mittel an die Hand gab, die kleinsten Zeitunterschiede mit Sicherheit zu messen, — so änderten sich die Verhältnisse bedeutend: Denn wenn sich auch ergab, dass sehr geübte Beobachter einen einzelnen Fadenantritt mit Auge und Ohr fast ebenso sicher als mit dem Chronographen bestimmten, so erhielt doch z. B. (A. N. 1284—86 von 1860) Karl Ferdinand **Pape** (Verden 1834 — Altona 1862; Obs. Altona) aus vergleichenden Beobachtungen das Resultat, dass bei guten Instrumenten, d. h. bei solchen, wo die Instrumentalfehler gegen die Beobachtungsfehler vernachlässigt werden dürfen, der wahrscheinliche Fehler einer Durchgangsbeobachtung bei Anwendung des Chronographen von $0^s{,}055$ auf $0^s{,}021$ reduziert werde, so dass Eine chronographische Beobachtung etwa $(0{,}055 : 0{,}021)^2 = 7$ Beobachtungen mit Auge und Ohr ersetze. — Anhangsweise erwähne ich noch, dass die 1, wenn auch die oben aus ihr abgeleiteten Resultate allgemeine Giltigkeit haben, natürlich nicht für alle Beobachter und alle Verhältnisse passt. So z. B. fand ich aus 432 Sterndurchgängen, welche ich im Sommer 1867, behufs der Längenvergleichung mit Rigi und Neuenburg, bei Vergrösserung 180 an je mindestens 10 Faden chronographisch beobachtete, die von ihr wesentlich variierende Formel

$$w_n = \sqrt{0^s{,}043^2 + (180 : n)^2 \cdot 0{,}037^2 \cdot Se^2\, d + 0^s{,}065^2 \cdot Co^2\, z} \qquad 2$$

in welcher das neue Glied mit gewissen konstruktiven Verhältnissen zusammenhängt, welche im Zürcher Meridiansaale im Sommer das Durchlüften erschweren, so dass ich ihm den Namen „Semper-Glied" gegeben habe. — *c.* Das gewöhnliche Verfahren, um die Personaldifferenz $a - b = p$ zweier Beobachter zu bestimmen, besteht darin, dass a einen Stern α an den ersten, einen Stern β aber an den letzten, dagegen b beide Sterne an allen übrigen Faden beobachtet, so dass man, wenn die Angaben jedes Beobachters für sich reduziert werden,

$$\alpha_a = \alpha_b + p \qquad \beta_a = \beta_b + p \qquad \text{also} \qquad p = \tfrac{1}{2}\,(\alpha_a + \beta_a - \alpha_b - \beta_b) \qquad 3$$

hat. Da jedoch das Okular bei dieser Operation nur selten für beide Beobachter vollständig ajüstiert sein wird, so ist es bei seitlicher Fadenbeleuchtung unumgänglich notwendig, dieselbe nach Umsetzen der Beleuchtung nochmals zu wiederholen, damit sich im allgemeinen Mittel ein (vgl. Eff. di Milano per 1819 und Brief an Gautier von 1856 III 17 in Notiz 396) schon durch Francesco **Carlini** (Mailand 1783 — ebenda 1862; Dir. Obs. Mailand) bemerkter und sodann, ohne etwas hievon zu wissen, infolge einer bei der Längenvergleichung Neuenburg-Zürich aufgetretenen Anomalie, erst durch mich und nachher auch durch **Hirsch** (vgl. Mitth. 25/6 von 1869/70) einlässlich studierter und zuweilen sehr beträchtlicher Fehler eliminiere. — Eine andere Methode besteht darin, dass man künstlich eine Erscheinung, bei deren Eintreten sich ein Strom (wie bei der Elongation eines elektrischen Pendels; vgl. Mitth. 39 von 1876) schliesst oder (wie beim Durchgange des von Hirsch an seiner Nachtmire angebrachten Hilfspendels durch die Ruhelage; vgl. die in 159 : d citierte Schrift) öffnet, herbeiführt und auch durch Niederdrücken eines Tasters beobachtet, — die sich am Chronograph oder Chronoskop ergebende Zeitdifferenz als Personalfehler betrachtet, — und sodann die Gleichung zweier Beobachter diesen Personalfehlern entnimmt. — Für andere Methoden und weitern Detail hebe ich aus der zahlreichen Speciallitteratur noch „R. **Radau**, Über die persönlichen Gleichungen bei Beobachtung derselben Erscheinungen durch verschiedene Beobachter (Carls Repert. I von 1865), — Ch. **Wolf**, Recherches sur l'équation personelle dans les observations de passages, sa détermination absolue, ses lois et son origine (Ann. Obs. Paris: Mém. VIII von 1866), — F. **Kaiser**, Über einen neuen Apparat zur absoluten Bestimmung von persönlichen Fehlern bei astronomischen Beobachtungen (Amst. Versl. 1868), — **Christie** and **Turner**, The personal equation machine of the roy. Observatory Greenwich (Monthly Not. 1887), — W. F. **Wislicenus**, Untersuchungen über die absoluten persönlichen Fehler bei Durchgangsbeobachtungen. Leipzig 1888 in 4., — G. **Rayet**, Recherches sur les erreurs accidentelles de passage par la méthode de l'œil et de l'oreille (Ann. Bordeaux III von 1889), — **Bakhuijzen**, Beschreibung eines Apparates zur Bestimmung des persönlichen Fehlers bei Durchgangsbeobachtungen. Haag (1889) in 4., — etc.“, hervor. Ferner für die Versuche, die Gleichung durch Elimination der Beobachter zu beseitigen: „C. **Braun**, Das Passagenmikrometer. Leipzig 1865 in 8., und: Bericht über die zu Kalocsa ausgeführten Arbeiten. Münster 1886 in 4., — J. **Repsold**, Durchgangsinstrument mit Uhrbewegung (A. N. 2828 von 1888), und: Neuer Vorschlag zur Vermeidung des persönlichen Zeitfehlers bei Durchgangsbeobachtungen (A. N. 2940 von 1889), — etc.“ — *d.* Vorläufig mag nur erwähnt werden, dass schon C. **v. Littrow** in der „Bestimmung der Meridiandifferenz Leipzig-Dablitz. Wien 1868 in 4.“ hervorhob, wie auch beim Ablesen von Scalen und Registrierstreifen, beim Notieren von Coincidenzen, etc., kurz fast überall Personaldifferenzen auftreten. — Zum Schlusse erinnere ich noch an die, verwandte Gebiete beschlagenden Abhandlungen „Charles-Louis **André** (Chauny in Aisne 1842 geb.; Dir. Obs. Lyon), Etude de la diffraction dans les instruments d'optique et son influence dans les observations astronomiques. Paris 1876 in 4., — Hermann **Struve** (Pulkowa 1854 geb.; Sohn von Otto; Obs. Pulkowa), Über den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. Petersburg 1882 in 4., — Hugo **Seeliger**, Über den Einfluss dioptrischer Fehler des Auges auf das Resultat optischer Messungen. München 1886 in 4., — etc.“

383. Die Veränderlichkeit der Polhöhe. — Die schon (366) auseinandergesetzte Methode, die Polhöhe aus grössten Höhen abzuleiten, wird offenbar bei Benutzung des Meridiankreises und der im vorhergehenden (379 u. f.) besprochenen Verfahren und Untersuchungen noch viel zuverlässigere Resultate ergeben, und so sind denn auch wirklich auf diesem Wege gar manche schöne Reihen solcher Bestimmungen erhalten worden [a]. Jedoch zeigen sich auch da bei Vergleichung von Serien, die an demselben Orte teils durch verschiedene Beobachter, teils zu verschiedenen Zeiten erhalten wurden, Differenzen, welche die aus der Übereinstimmung der Werte innerhalb der einzelnen Serie geschlossene Unsicherheit wesentlich übersteigen; ob aber dieselben durch Personaldifferenzen in Höheneinstellungen [b], durch ein mangelhaftes Einführen der Temperaturen in die Refraktionsformeln [c], etc., überhaupt durch Beobachtungs- und Rechnungsfehler, vollständig erklärt werden können, oder ob eine mit wirklichen Veränderungen in der Lage der Lotlinie oder Erdaxe zusammenhängende merkliche, sei es periodische, sei es sekuläre **Veränderlichkeit der Polhöhe** anzunehmen ist, lässt sich gegenwärtig noch kaum mit voller Sicherheit entscheiden, doch ist das Zutreffen des letztern Umstandes in der allerneusten Zeit sehr wahrscheinlich geworden [d].

Zu 383: *a.* So z. B. ergab sich im Mittel aus zahlreichen Beobachtungen die Polhöhe in

Greenwich		Pulkowa		
1836—49: $\varphi = 51^0\ 28'$	38″,15	1842—43: $\varphi = 59^0\ 56'$	18″,727	$\pm$ 0″,013
1851—65	38,13	1863—70	18,654	14
1866—83	38,15	1871—73	18,501	14

wobei bemerkt werden mag, dass die von **Christie** (Nature 1884) mitgeteilten Greenwicher Bestimmungen von den verschiedensten Beobachtern, aber immer aus Circumpolarsternen, — die drei Pulkowaer Serien der Reihe nach von **Peters, Gyldén** und **Nyrén** erhalten wurden. — *b.* Als Jean-Baptiste-Aimable **Gaillot** (St-Jean-sur-Tourbe in Marne 1834 geb.; Obs. Paris) 1077 in den Jahren 1856—61 am Mauerkreise von Gambey erhaltene Bestimmungen, welche im Mittel für Paris $\varphi = 48^0\ 50'\ 11'',80$ ergaben, nach den Beobachtern ordnete, fand er merkliche Personaldifferenzen, und zwar im Min. für **Chacornac** 11″,44, im Max. für **Löwy** 12″,27. Früher hatte **Laugier** aus 650 an demselben Instrumente ausgeführten Beobachtungen sogar nur 11″,19 gefunden, während damals **Mauvais** aus 1350 Beobachtungen am Mauerkreise von Fortin 11″,85 erhielt. — Während ich aus 1141 Messungen, welche ich (Mitth. 44 von 1877) 1874—77 am Kern'schen Meridiankreise der Zürcher Sternwarte ausführte, den Schlusswert $\varphi = 47^0\ 22'\ 39'',991 \pm 0'',004$ ableitete, ergaben 2071 Bestimmungen, welche A. **Wolfer** (Mitth. 47 von 1878) 1875—77 zur Kontrole am Ertel'schen Meridiankreise machte, bei ganz gleicher Behandlung 39″,795 $\pm$ 0″,003, und auch die von uns nach verschiedenen Methoden angestellten Studien ergaben (Mitth. 51 und 53 von 1880/1) grosse Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines merklichen Personalfehlers in Höheneinstellungen. — *c.* Als **Gaillot** die erwähnten Polhöhenbestimmungen nach den 6 Jahrgängen ordnete, erhielt er die Sekundenfolge 11,89 11,53 11,89 11,73 12,16 11,64 der sich nichts systematisches entnehmen lässt; als er dagegen den „Excès de la moyenne mensuelle sur la moyenne générale“ berechnete, erhielt er für die 12 Monate die charakteristische Folge

-0,23 -0,06 -0,03 0,10 0,16 0,25 0,25 0,16 0,13 -0,07 -0,11 -0,27

welche er sehr nahe durch die Formel

$$d\varphi = 0'',20 \cdot \mathrm{Si}\,[360 \cdot (t - 95) : 365,25]$$

darstellen konnte, in welcher t die Anzahl der seit Anfang Jahres verflossenen Tage bezeichnet. Wie er selbst betonte, scheint dieser Gang mit der Lufttemperatur zusammenzuhängen, — wohl am ehesten mit ihrer Einführung in die Refraktionstafel, da bei den Zürcher Serien, für welche eine solche durch Einbeziehung von Refraktionssternen unnötig wurde, sich (vgl. Mitth. 48 von 1879) keine Spur eines solchen Temperaturganges zeigte. Immerhin ist das Faktum, dass sich auch bei den in der neuesten Zeit in Berlin, Potsdam und Prag unternommenen Messungen ein ganz entsprechender jährlicher Gang wie bei den Pariser Bestimmungen zeigte, höchst merkwürdig, und bietet für die Ansicht, es möchte derselbe irgendwie mit den im folgenden zu besprechenden Verhältnissen zusammenhängen, ein nicht zu unterschätzendes Belege. Vgl. dafür namentlich die 1890 von Th. **Albrecht** publizierten „provisorischen Resultate“ jener Reihen, und die 369:a erwähnte Schrift von **Küstner,** welche dieselben grossenteils veranlasste. — *d.* Wenn ältere Astronomen, wie z. B. Pierre **Petit** (Montluçon bei Bourges 1598 — Lagny-sur-Marne 1667; Geograph Ludwig XIII.) in seiner „Dissertatio de latitudine Lutetiæ. Parisiis 1660 in 4. (Anhang zur Astronomia physica von Duhamel)“, eine Veränderlichkeit der Polhöhe behaupten wollten, so konnte man sie durch Hinweis auf die Unsicherheit der frühern Bestimmungen abfertigen; aber wenn ein **Bessel** 1844 VI 1 an Humboldt schreibt: **„Ich habe Verdacht gegen die Unveränderlichkeit der Polhöhe.** Meine sehr schön untereinander stimmenden Beobachtungen mit dem neuen Kreise verkleinern die Polhöhe fortwährend, vom Frühling 1842 bis jetzt zwar nur um 0'',3, aber selbst diese Kleinigkeit scheint mir nicht ein Beobachtungsfehler zu sein; denn nach meiner jetzigen Beobachtungsart wird alles eliminirt was constanten Einfluss auf die Mittel der einzelnen Sätze haben könnte. **Ich denke dabei an innere Veränderungen des Erdkörpers, welche Einfluss auf die Richtung der Schwere erlangen“,** und wenn man aus den Abhandlungen „George Howard **Darwin** (Down in Kent 1845 geb.; Sohn von Charles Robert Darwin; Prof. astr. Cambridge), On the influence of geological changes on the Earths axis of rotation (Ph. Tr. 1877), und: **Schiaparelli,** De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques. St-Pétersbourg 1889 in 8.“ erfährt, dass in der That grössere Verschiebungen, wie sie namentlich zur Zeit, wo die Erde noch eine gewisse Plasticität besass, vorkommen konnten, die Lage der Pole sehr bedeutend beeinflussen dürften, ja aus analogen Gründen mit der Lotablenkung (371) auch der zweite Schenkel des betreffenden Winkels variieren könnte, so lässt sich denn doch die Sache nicht mehr so einfach abthun. Dagegen fehlen allerdings gegenwärtig noch zureichende faktische Nachweise, da sich die oben mitgeteilten ältern Reihen von Greenwich und Pulkowa in dieser Richtung total widersprechen und die erwähnten neuen Reihen erst bei längerer Fortsetzung hinlänglich sichere Schlüsse zu ziehen erlauben werden.

384. Das Passageninstrument im ersten Vertikal. — Wie der Meridian wegen w = 0 = s für gewisse Untersuchungen grosse Vereinfachungen und Vorteile darbietet, so hat für andere Bestimmungen der erste Vertikal teils wegen $w = 90^\circ$ (resp. 270°), teils weil ihn ein unter kleiner südlicher Zenitdistanz culminierender Stern kurze Zeit vorher und nachher, also zweimal rasch aufeinander, passiert, seine specifischen Vorteile, um derentwillen es Übung geworden ist, auf grössern Sternwarten ein besonderes, nach seiner Konstruktion wesentlich dem Mittagsrohr entsprechendes Passageninstrument im ersten Vertikal aufzustellen, d. h. dem Meridiansaale einen zweiten Saal mit Spalte von West nach Ost zu coordinieren [a].

Zu 384: *a.* Schon Olaus **Römer** erkannte nicht nur die Vorzüge des ersten Vertikales für gewisse Bestimmungen, sondern man ersieht aus Tab. VIII der überhaupt höchst wichtigen „Basis astronomiæ", — einer Tafel, welche die Inscription „Laur. Thom. Skive del.; J. Friedlein sculp. 1704" zeigt, also 12 Jahre vor Römers Tod und 31 Jahre vor dem Erscheinen des Werkes gestochen wurde, — dass dieser grosse Astronom die beiden Passageninstrumente im Meridian und Vertikal neben einander besass, ja gewissermassen durch Aufstellung auf drei Pfeilern, von welchen einer gemeinschaftlich war, miteinander verband. Später wurde dagegen allerdings der gute Gedanke von Römer wieder vergessen, ja so ziemlich erst durch **Bessel** neuerdings ins Leben gerufen und weiter ausgebildet, wie die folgende Nummer noch des nähern zeigen wird.

385. Die Bestimmungen im ersten Vertikal. — Da für den ersten Vertikal nach 177 : 4‴

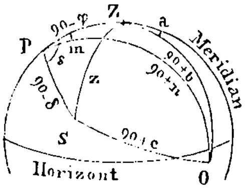
$$\mathrm{Ct}\,\varphi = \mathrm{Tg}\,p \cdot \mathrm{Co}\,s \qquad \mathbf{1}$$

wird, so lässt sich aus der Uhrzeit des Durchganges eines bekannten Sternes durch den ersten Vertikal, aber allerdings nur unter Voraussetzung bekannter Uhrkorrektion, die Polhöhe leicht bestimmen, ja man kann sogar diese Voraussetzung unnötig machen: Wählt man nämlich, entsprechend der oben (384) gemachten Andeutung, einen Stern, dessen Poldistanz nur wenig grösser als das Komplement der Polhöhe ist, so geht er offenbar bald nacheinander zweimal durch den ersten Vertikal, und man kann somit bei kleinem Gange der Uhr von diesem absehen, somit in 1 den Stundenwinkel s durch die halbe Differenz der Uhrzeiten beider Durchgänge ersetzen [a]. Für genauere Bestimmungen sind jedoch natürlich, ähnlich wie beim Meridiankreise, die kleinen Aufstellungsfehler in Rechnung zu bringen [b], — ferner ist es ratsam, auch Beobachtungen an Seitenfaden beizuziehen [c].

Zu 385: *a.* Eliminiert man aus den zwei ersten 177 : 6 die Grösse dz, so erhält man nach leichter Reduktion

$$d\varphi = -\mathrm{Tg}\,z \cdot \left[\frac{dw}{\mathrm{Si}\,w} - \frac{\mathrm{Co}\,v \cdot ds}{\mathrm{Si}\,s}\right] \qquad \mathbf{2}$$

woraus man ersieht, dass in der That der erste Vertikal unter Anwendung eines zenitalen Sternes zur Bestimmung der Polhöhe am vorteilhaftesten ist.



— *b.* Bezeichnet O den Punkt, nach welchem, bei Drehung des Instrumentes aus dem Meridiane nach dem ersten Vertikal im Sinne der täglichen Bewegung, das frühere Ostende der Drehaxe hinweist, und S einen in der optischen Axe liegenden Stern, so erhält man (bei möglichst mit 380 übereinstimmender Bezeichnung) aus den Dreiecken P S O und P Z O

$$\mathrm{Si}\, c = \mathrm{Si}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, n - \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Co}\,(s - m) \qquad \mathbf{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Co}\, m &= -\mathrm{Si}\, b \cdot \mathrm{Co}\, \varphi + \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, a \\ \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Si}\, m &= \mathrm{Si}\, a \cdot \mathrm{Co}\, b \\ \mathrm{Si}\, n &= \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, b + \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Co}\, a \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{4}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\, c = (\mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, b + \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Co}\, a)\, \mathrm{Si}\, \delta - \mathrm{Si}\, s \cdot \mathrm{Si}\, a \cdot \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Co}\, \delta\, + \\ + (\mathrm{Si}\, b \cdot \mathrm{Co}\, \varphi - \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, a) \cdot \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, s \end{aligned} \qquad \mathbf{5}$$

Für den ersten Vertikal hätte man aber nach 177

$$\mathrm{Si}\, \delta = \mathrm{Co}\, z \cdot \mathrm{Si}\, \varphi \qquad \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, s = \mathrm{Si}\, z \qquad \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, s = \mathrm{Co}\, z \cdot \mathrm{Co}\, \varphi \qquad \mathbf{6}$$

und setzt man daher für eine Aufstellung in der Nähe des ersten Vertikales

$$\mathrm{Si}\, \delta = \mathrm{Co}\, z' \cdot \mathrm{Si}\, \varphi' \qquad \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, s = \mathrm{Si}\, z' \qquad \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, s = \mathrm{Co}\, z' \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \qquad \mathbf{7}$$

d. h. bestimmt zwei Hilfsgrössen φ' und z' durch

$$\mathrm{Tg}\, \varphi' = \mathrm{Tg}\, \delta \cdot \mathrm{Se}\, s \qquad \mathrm{Tg}\, z' = \mathrm{Tg}\, s \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \qquad \mathbf{8}$$

so werden sich z' und φ' nur wenig von z und φ unterscheiden, während 5 für die 7 in

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\, c = \mathrm{Si}\, b \cdot \mathrm{Co}\, z' \cdot \mathrm{Co}\,(\varphi - \varphi') - \mathrm{Si}\, a \cdot \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Si}\, z'\, - \\ - \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Co}\, a \cdot \mathrm{Co}\, z' \cdot \mathrm{Si}\,(\varphi - \varphi') \end{aligned} \qquad \mathbf{9}$$

übergeht, woraus, da a, b, c und $(\varphi - \varphi')$ als kleine Grössen zu betrachten sind, die einfache Beziehung

$$\varphi = \varphi' - a \cdot \mathrm{Tg}\, z' + b - c \cdot \mathrm{Se}\, z' \qquad \mathbf{10}$$

folgt, welche offenbar die Polhöhe unter Berücksichtigung der Aufstellungsfehler zu bestimmen lehrt. — *c.* Beobachtet man an einem Seitenfaden der Distanz f, d. h. gewissermassen mit dem Kollimationsfehler $(c + f)$, so hat man entsprechend 3

$$\mathrm{Si}\,(c + f) = \mathrm{Si}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, n - \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Co}\,(s' - m) \qquad \mathbf{11}$$

oder, wenn hievon 3 abgezogen wird,

$$2\, \mathrm{Si}\, {}^1\!/_2 f \cdot \mathrm{Co}\,(c + {}^1\!/_2 f) = 2\, \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Si}\, {}^1\!/_2 (s - s') \cdot \mathrm{Si}\, [{}^1\!/_2 (s + s') - m]$$

somit, da sowohl f als die a, b, c wie kleine Grössen behandelt werden dürfen, mit Hilfe der 4

$$2\, \mathrm{Si}\, \frac{s - s'}{2} = \frac{f\, \mathrm{Si}\, 1''}{\mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, n\, [\mathrm{Si}\, {}^1\!/_2 (s + s')\, \mathrm{Co}\, m - \mathrm{Co}\, {}^1\!/_2 (s + s')\, \mathrm{Si}\, m]} = \frac{f'\, \mathrm{Si}\, 1''}{\mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, \varphi\, \mathrm{Si}\, {}^1\!/_2 (s + s')}$$

wo $$f' = f : [1 - b\, \mathrm{Ct}\, \varphi\, \mathrm{Si}\, 1'' - a\, \mathrm{Cs}\, \varphi\, \mathrm{Ct}\, {}^1\!/_2 (s + s')\, \mathrm{Si}\, 1''] \qquad \mathbf{12}$$

so dass also $$\mathrm{Co}\, s' - \mathrm{Co}\, s = f' \cdot \mathrm{Si}\, 1'' \cdot \mathrm{Se}\, \delta \cdot \mathrm{Cs}\, \varphi \qquad \mathbf{13}$$

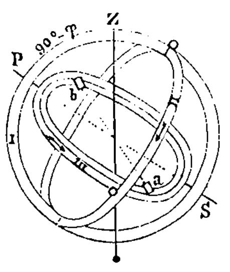
oder auch nach 42 : 4, 5, wenn beidseitig, um s' und s in Zeit auszudrücken, mit $15\, \mathrm{Si}\, 1''$ dividiert wird,

$$s - s' = \frac{f}{\mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, \varphi\, \mathrm{Si}\, s} + \frac{15 \cdot \mathrm{Si}\, 1''}{2\, \mathrm{Tg}\, s} \cdot \left(\frac{f}{\mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, s} \right)^2 + \ldots \qquad \mathbf{14}$$

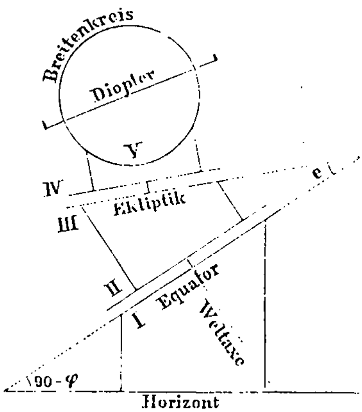
wo f, wie es für kleine Werte von a und b geschehen darf, für f' gesetzt und zudem ebenfalls in Zeitsekunden ausgedrückt ist. — Für weitern Detail über die Bestimmungen im ersten Vertikal vgl. „**Bessel**, Über die Bestimmung der Polhöhenunterschiede durch das Passageninstrument (A. N. 49 von 1824; auch 131—32 von 1828), — **Hansen**, Über die Bestimmung der Polhöhe durch ein in der Richtung von Osten nach Westen aufgestelltes Passageninstrument nach der Bessel'schen Methode (A. N. 126 von 1827; auch 141—43 von 1828), — **Encke**, Bemerkungen über das Durchgangsinstrument von Ost nach West (Berl. Jahrb. 1843), — O. **Struve**, Tabulæ auxiliares ad transitus per planum primum verticale reducendas inservientes. Petropoli 1868 in 4., — M. **Löw**, Zur Theorie des Passageninstrumentes im ersten Vertikal (A. N. 2371 von 1881), — G. **Comstock**, On a new method of observing with the prime vertical transit (A. N. 2565 von 1883), — N. **Herz**, Theorie eines mit einem Verticalkreise versehenen Passage-Instrumentes im ersten Verticale. Wien 1891 in 4., — etc."

386. Armillarsphäre, Astrolabium und Torquetum. — Schon die Alten hatten sich unter dem Namen **Armillarsphäre** ein Instrument für unmittelbare Messung der Equatorcoordinaten hergerichtet, welches aus einer Zusammenstellung von drei Kreisen bestand, von denen I und II (als Meridian und Equator) unter rechtem Winkel fest verbunden waren, während sich der ein Diopterpaar tragende Kreis III (als Deklinationskreis) um den zu II senkrechten Durchmesser von I (d. h. um die Weltaxe) drehte [a]. — Als sodann **Hipparch** mit der Präcession (200) die Veränderlichkeit der Deklination und die Constanz der Breite entdeckte, erschien es wünschbar, die Armillarsphäre so abzuändern, dass auch die Lage gegen die nunmehr als Hauptgrundebene gewählte Ekliptik unmittelbar bestimmt werden könne, und es entstand so das sog. **Astrolabium** [b], welches nun mit der Armillarsphäre zu den Arabern und nach dem Abendlande überging, sowie Ausgangspunkt für verschiedene neue Konstruktionen wurde, unter denen beispielsweise das von **Regiomontan** erfundene **Torquetum** erwähnt werden mag [c].

Zu 386: *a.* Die vielleicht schon bei den ältern Alexandrinern, jedenfalls zur Zeit von **Eratosthenes** in Gebrauch gekommene, mutmasslich von Anfang an analog unsern Globen aufgestellte Armillarsphäre, wurde so orientiert, dass I in die Ebene des Meridianes fiel und die Axe PS mit der Lotrichtung den Winkel $90^{0}-\varphi$ bildete; sobald daher (vgl. 57) die Kreise II und III Teilungen besassen, deren Nullpunkte respektive in I und II fielen, so brauchte man nur das Diopterpaar ab, welches in der Regel auf einem in III drehbaren Kreise sass, nach einem Sterne zu richten, um unmittelbar an II und III Stundenwinkel und Deklination ablesen zu können. —



b. Bei dem im Almagest beschriebenen **Astrolabium** lag PS noch in der Weltaxe, aber I war um dieselbe beweglich und trug noch eine zweite Axe, die mit der ersten einen Winkel von $23\frac{1}{2}^{0}$ bildete; II stand zu dieser zweiten Axe, um welche sich III drehte, senkrecht, und es stellte daher, sobald I mit dem Kolur der Solstitien zusammenfiel, II die Ekliptik und III einen Breitenkreis vor; endlich waren zwei Kreise III von etwas verschiedenem Durchmesser vorhanden und jeder derselben mit einem Diopterkreis versehen, um gleichzeitig auf ein bekanntes Gestirn behufs Orientierung des Instrumentes und auf ein unbekanntes behufs Messung einstellen zu können. — *c.* Das von **Regiomontan** konstruierte und in den durch Schoner aus dessen Nachlass herausgegebenen „Scripta Regiomontani. Norimbergæ 1543 in 4.“ beschriebene **Torquetum** bestand aus einem gegen eine horizontale Tafel um die Equatorhöhe geneigten, zur Weltaxe senkrechten, geteilten Kreise I, über welchem sich konzentrisch ein Kreis II mit Index drehte; über letzterm stand ein zweiter geteilter Kreis III, der gegen ihn um die Schiefe der Ekliptik geneigt war und wieder einen innern Kreis IV mit Index hatte, der seinerseits einen zu ihm senkrechten geteilten Kreis V trug, um dessen Centrum sich ein Diopterlineal drehte. Orientierung und Gebrauch waren wesentlich dieselben wie beim Astrolabium. —



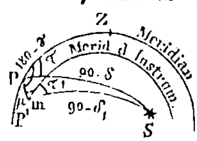
Für ein etwas später durch Pet. **Apian** unter dem Namen **Meteoroskop** konstruiertes ähnliches Instrument kann auf dessen „Astronomicum Cæsareum“ verwiesen werden, — endlich für ein noch vorhandenes, wahrscheinlich ebenfalls der Apian'schen Periode angehörendes Instrument dieser Kategorie, das „sehr niedlich“ sein soll, auf „**Günther,** Die mathematische Sammlung des germanischen Museums zu Nürnberg (Leopoldina 1878)“. — Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass in Meragah die Diopter zur Abhaltung des diffusen Lichtes durch eine Röhre verbunden wurden.

387. Das Equatoreal. — Die Geschichte des schon früher (173) kurz charakterisierten Equatoreals ist naturgemäss mit der damals skizzierten des parallaktisch montierten Fernrohrs so verquickt, dass man dieselben kaum auseinander halten kann und hier nur noch Ergänzendes zu dem bereits Gegebenen beizufügen ist [a]; dagegen bleibt unter der folgenden Nummer die Theorie des Equatoreals zu entwickeln, auf welche unter jener frühern Nummer noch nicht wohl eingetreten werden konnte.

Zu 387: *a.* Der Ausspruch von **Lalande** (Astr. 3 éd. II 627), es sei ein um 1735 von **Vayringe** (Longuyon bei Luxemburg 1685 — Lunéville 1746; erst Schlosser, dann Uhrmacher, zuletzt Prof. phys. Lunéville) konstruiertes Equatoreal das älteste gewesen, welches **er gesehen** habe, darf kaum, wie es z. B. durch **Morin** in seinem „Catalogue du conservatoire des arts et métiers à Paris“ geschah, so aufgefasst werden, es sei (im Widerspruche mit 173) jenes Equatoreal überhaupt als ältestes zu betrachten, — und ebenso unrichtig wäre es, mit Thom. **Dick**, vgl. dessen Schrift „The practical astronomer. London 1845 in 8.“, annehmen zu wollen, es haben die ältern parallaktisch montierten Fernröhren keine graduierten Kreise besessen, ja es sei ihnen erst 1741 durch den Uhrmacher Henry **Hindley** in London eine Equatorealplatte und ein Deklinationshalbkreis beigefügt worden; denn wenn es auch früher (wie jetzt noch) viele solche Instrumente ohne Kreise gegeben haben mag, so kam ja schon bei demjenigen von **Grünberger** (173) eine kleine geteilte Equatorealplatte vor, und **Römer** hatte sogar einen eigentlichen Teilkreis und einen Deklinationsbogen. — James **Short** lehrte in seiner „Description and uses of an equatorial telescope (Ph. Tr. 1749)“ ein tragbares, auch unter jeder Breite brauchbares Instrument zu erstellen und dasselbe durch Beigabe von vier geteilten Kreisen für Azimut, Höhe, Stundenwinkel und Deklination zu einem eigentlichen Universalinstrumente zu machen, indem, wenn die Equatorealplatte der Horizontalplatte parallel gestellt werde, man dadurch ein „Equal altitude Instrument, a Transit Instrument, a **Theodolite** (vgl. 349), a Quadrant, an Azimuth Instrument and a Level“ erhalte. Sein Versuch wurde nachher durch die G. Fr. **Brander** (vgl. Verz. 259), Joh. Heinrich **Hurter** (Schaffhausen 1734 — Düsseldorf 1799; erst Glaser, dann Emailmaler, später Besitzer einer mech.-opt. Werkstätte in London; vgl. Gesch. d. Verm. 144/5), etc., mit steigendem Erfolge wiederholt, — ja überhaupt im vorigen Jahrhundert sein Verfahren, für die parallaktische Aufstellung das dem Bau des Theodoliten (ja schon des Torquetums) zu Grunde liegende Princip zu verwenden, fast ausschliesslich benutzt, und höchstens für grössere Equatoreale, wo diese Aufstellung gar zu wenig Stabilität verschaffte, eine etwas andere Disposition angewandt, wie dies z. B. (vgl. Ph. Tr. 1793) durch **Ramsden** geschah, als er für G. Shuckburgh ein Equatoreal mit $5\frac{1}{2}$-füssigem Fernrohr und zwei 4-füssigen Vollkreisen zu bauen hatte. — Eine wesentliche Verbesserung erhielt die Aufstellung zu Anfang unsers Jahrhunderts im Münchner Institute, indem **Reichenbach** die Deklinationsaxe, welche an ihrem einen Ende den Refraktor und am andern den Deklinationskreis samt ergänzendem Gegengewicht trägt, in eine konische Büchse verlegte, die an das obere Ende der sich in zwei Ringen drehenden Stundenaxe angeschraubt war, — eine Anordnung, welche, unter Berücksichtigung einiger nachträglich durch **Fraunhofer** beliebten Verbesserungen, nach und nach allgemein eingeführt wurde und z. B. in „W. **Struve**, Beschreibung des grossen Refractors von Fraunhofer. Dorpat 1825 in fol.“ im Detail verfolgt werden kann. Im Principe ist dieselbe bis auf die neueste Zeit beibehalten worden, und die seitherigen Verdienste der **Repsold**, Friedrich Wilhelm **Eichens** (Berlin 1818 — Paris 1884; Mech. Paris), etc., bestehen wesentlich nur darin, die Equilibrierung noch besser ausgeführt, den Uhrgang wirksamer reguliert und dem Beobachter die Möglichkeit gegeben zu haben, das Instrument zu beherrschen, ohne seinen Stand am Okulare zu verlassen. Eigentliche, zu absoluten Messungen bestimmte Equatoreale werden allerdings jetzt nur noch selten gebaut, aber um so mehr grosse Refraktoren und Heliometer, für deren Montierung die entsprechenden Grundsätze ebenfalls zur Geltung kommen. — Vgl. noch „Antoine **Thury** (Nyon 1822 geb.; Prof. bot. Genf), Description de l'Equatorial Plantamour de l'Observatoire de Genève. Genève 1884 in 4.“

388. Die Aufstellungsfehler und ihr Einfluss. — Wenn ein Equatoreal vorläufig ajüstiert, d. h. sein Stundenkreis in den Equator gebracht ist, ferner die Drehaxe des Fernrohrs parallel zum Stundenkreise und senkrecht zur optischen Axe steht, auch die Indexfehler der beiden Kreise bestimmt sind [a], so bleiben doch immer noch kleine Abweichungen von der richtigen Lage und den wirklichen Werten übrig, welche analog wie beim Meridiankreise ermittelt und in Rechnung gebracht werden müssen, falls das Instrument zu genauern oder sogar zu absoluten Bestimmungen verwendet werden soll [b].

Zu 388: *a.* Um ein Equatoreal vorläufig zu ajüstieren, kann man in folgender Weise vorgehen: Man hängt an die Axe des Deklinationskreises eine Libelle, — stellt sie durch Drehen am Stundenkreise ein, — kehrt sie um und verbessert an ihr den halben Ausschlag. — Dann dreht man den Stundenkreis um 12^h, d. h. verwechselt die Lager und verbessert den halben Ausschlag an ihnen. Hat das Fernrohr ein Fadenkreuz, so centriert man dasselbe, stellt es sodann auf ein Objekt ein, legt das Fernrohr in den Lagern um, oder schlägt es nach Drehen um 12^h durch und korrigiert die halbe Abweichung an den betreffenden Korrektionsschrauben. Da die Fernrohraxe infolge der zwei ersten Operationen horizontal und dem Stundenkreise parallel ist, so muss sie, wenn letzterer im Equator liegt, der einzigen horizontalen Richtung des Equators, d. h. der Linie Ost-West, parallel sein, folglich die nach der dritten Operation zur Drehaxe senkrechte optische Axe des Fernrohrs im Meridiane spielen oder das Fadenkreuz das Meridianzeichen treffen. Es wird nun der Meridianpunkt des Stundenkreises abgelesen, beziehungsweise auf Null gebracht. Endlich stellt man das Fadenkreuz auf einen im Meridiane befindlichen Punkt bei normaler Lage des Fernrohrs, und dann nach Drehen des Fernrohrs um 180° und Durchschlagen nochmals ein; die halbe Summe der Ablesungen am Deklinationskreise giebt sodann den Polpunkt des Instrumentes, und es soll daher die mit seiner Hilfe für einen dem Zenite nahen, also durch die Refraktion unbeeinflussten, culminierenden Stern sich ergebende Poldistanz die Deklination desselben zu 90° ergänzen, — geschieht es nicht, so ist die Neigung der Hauptaxe des Instrumentes entsprechend zu verändern. — *b.* Bestimmen μ, $180^0 - \gamma$ und m die Lage des angeblichen Poles (P′) und Meridianes eines



vorläufig korrigierten Equatoreales gegen den wirklichen Pol (P) und Meridian, so erhält man zwischen den auf die beiden Systeme bezüglichen Werten von Stundenwinkel (τ_1 oder τ) und Deklination (δ_1 oder δ) eines Sternes S aus Dreieck P′SP die Beziehungen

$$\mathrm{Si}\,\delta = \mathrm{Si}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,\mu + \mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,\mu \cdot \mathrm{Co}(\tau_1 + \mathrm{m}) \qquad \mathrm{Si}\,\delta_1 = \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,\mu - \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,\mu \cdot \mathrm{Co}(\tau + \gamma)$$

$$\mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,(\tau + \gamma) = \mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,\mu \cdot \mathrm{Co}\,(\tau_1 + \mathrm{m}) - \mathrm{Si}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,\mu$$

$$\mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,(\tau_1 + \mathrm{m}) = \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,\mu \cdot \mathrm{Co}\,(\tau + \gamma) + \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,\mu \qquad \mathbf{1}$$

$$\mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,(\tau + \gamma) = \mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,(\tau_1 + \mathrm{m})$$

von denen die 1., 3. und 5., oder die 2., 4. und 5. die einen aus den andern zu berechnen lehren, wenn die μ, γ und m einmal bekannt sind. — Da jedoch μ als klein betrachtet und somit auch $\delta_1 \fallingdotseq \delta$, sowie $\tau_1 + \mathrm{m} \fallingdotseq \tau + \gamma$ gesetzt werden darf, so können den 1 bequemere Näherungsformeln substituiert werden: Subtrahiert man nämlich unter dieser Voraussetzung die ersten zwei 1 von einander, so erhält man

$$\mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,(\tau_1 + \mathrm{m}) \cdot \mu\,\mathrm{Si}\,1'' \fallingdotseq \mathrm{Si}\,\delta - \mathrm{Si}\,\delta_1 \fallingdotseq (\delta - \delta_1) \cdot \mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,1''$$

folglich

$$\delta \fallingdotseq \delta_1 + \mu \cdot \mathrm{Co}\,(\tau_1 + \mathrm{m}) \qquad \mathbf{2}$$

und mit Hilfe dieser Beziehung ergiebt sich, wenn man in der letzten 1 beidseitig $\mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,(\tau_1 + m)$ abzieht, ohne Schwierigkeit

$$\tau = \tau_1 + m - \gamma + \mu \cdot \mathrm{Tg}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,(\tau_1 + m) \qquad \mathbf{3}$$

so dass 2 und 3 jene Aufgaben wirklich in bequemster Weise zu lösen erlauben. — Um die für beide Formelnsysteme nötigen Werte von μ, γ und m, sowie den Indexfehler $\triangle$ des Deklinationskreises zu bestimmen, sucht man mit Hilfe des Niveaus den $\tau_1 = 0$ entsprechenden Punkt des Stundenkreises auf, — stellt sodann das Instrument successive auf $\tau_1 = 0$, 90, 180 und 270° ein, — wartet in jeder dieser Stellungen den Durchgang eines Sternes von bekannter (nach 177 : 7—9 auf die scheinbare Lage reduzierter) Position ab, — und notiert teils die Sternzeit, teils die sich am Deklinationskreise ergebende Ablesung $a = \delta_1 - \triangle$. Man hat sodann nach 2

$$\delta' = a' + \triangle + \mu \cdot \mathrm{Co}\,m \qquad \delta''' = a''' + \triangle - \mu \cdot \mathrm{Co}\,m$$
$$\delta'' = a'' + \triangle - \mu \cdot \mathrm{Si}\,m \qquad \delta'''' = a'''' + \triangle + \mu \cdot \mathrm{Si}\,m$$

also $$\triangle = {}^1/_4\,(\Sigma\,\delta - \Sigma\,a) \qquad \mathbf{4}$$

und $$\mu \cdot \mathrm{Co}\,m = {}^1/_2\,[\delta' - \delta''' - (a' - a''')] \qquad \mu \cdot \mathrm{Si}\,m = {}^1/_2\,[\delta'''' - \delta'' - (a'''' - a'')] \qquad \mathbf{5}$$

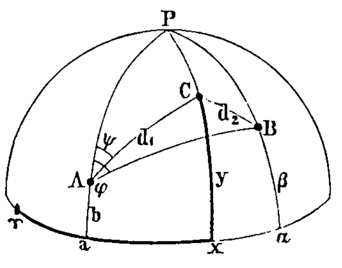
so dass sich $\triangle$, μ, m sofort ergeben, und sodann auch γ gefunden werden kann, indem man diese Werte, sowie den aus der Sternzeit der Beobachtung im Vergleich mit der Rektascension des benutzten Sternes erhaltenen Stundenwinkel τ in die 3 einführt. — Der beschränkte Raum erlaubt mir nicht, neben dieser wohl einfachsten Behandlungsweise noch andere, z. B. die Anwendung einer Libelle nicht benötigende Verfahren auseinander zu setzen, sowie überhaupt auf weitern Detail einzutreten, und ich muss dafür auf die Specialarbeiten „J. J. **Littrow**, On the rectification of the equatoreal instrument (Mem. astr. Soc. II von 1826), — **Hansen**, Die Theorie des Equatoreal's (Sächs. Abh. IV von 1856, — auch: Leipzig 1855 in 8.), — etc.“, sowie auf einige der früher erwähnten grössern Werke über sphärische Astronomie, verweisen.

XV. Die relativen Messungen.

Schaffen und Streben ist Gottes Gebot, — Arbeit ist Leben, Nichtsthun der Tod. (Venedey.)

389. Regiomontans Bestimmungen durch Alignements. — Die Lage eines Gestirnes kann nicht nur wie im vorhergehenden Abschnitte **absolut**, d. h. durch direkte Messung seiner Coordinaten, sondern sie kann auch **relativ**, d. h. dadurch erhalten werden, dass man den Lagen-Unterschied gegen bereits bekannte Sterne ermittelt. Schon **Regiomontan** löste diese letztere Aufgabe in der Weise, dass er die Abstände des nach seiner Lage unbekannten Gestirnes von zwei bekannten Sternen mass[a], — dabei wo möglich die beiden Sterne so wählend, dass sie mit dem zu bestimmenden Gestirne in demselben grössten Kreise zu liegen oder mit ihm zu **alignieren** schienen[b].

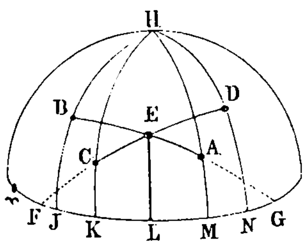
Zu 389: ***a.*** Sind a, b und α, β die bekannten Coordinaten zweier Sterne A und B, — d_1 und d_2 aber die gemessenen Distanzen eines Gestirnes C von denselben, so kann man aus den Dreiecken APB, ACB und APC offenbar successive AB, φ, $\varphi - \psi$, $90^0 - y$ und $x - a$ berechnen, also in der That schliesslich die gesuchten Coordinaten x und y von C finden, wie dies schon **Regiomontan** in seiner, nachmals durch Schoner in den „Scripta Regiomontani. Norimbergæ 1544 in 4." publizierten Abhandlung „De cometæ problemata XVI" lehrte. — ***b.*** Sucht man, z. B. mit Hilfe eines gespannten Fadens, zwei Sterne A und B auf, welche mit C in einer Geraden zu liegen scheinen, so wird die Rechnung sehr vereinfacht und in $AB = d_1 + d_2$ eine Probe für Messung und Rechnung erhalten, dagegen die Auswahl der Sterne wesentlich beschränkt, so dass **Regiomontan** z. B. zur Bestimmung des Kometen von 1472 (vgl. 280) für gut fand, von dieser Vereinfachung Umgang zu nehmen. — Noch bleibt beizufügen, dass **Regiomontan** und **Walther** bei Anwendung dieser Methode die Distanzen mit dem **Baculus astronomicus** (vgl. 433) bestimmten, während Landgraf **Wilhelm** und **Tycho**, welche bei ihren Ortsbestimmungen (373) diese Methode ebenfalls



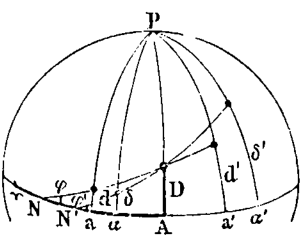
vielfach anwandten, und ebenso **Bürgi** bei der wichtigen Marsbeobachtung, welche er (89) in der Frühe des 23. Dezember 1590 machte, den Baculus mit dem grössere Genauigkeit bietenden Quadranten vertauschten.

390. Die Methode von Mästlin. — Neben der Methode von Regiomontan ist die bei Anlass des Wundersternes von 1572 (vgl. 287) durch Michael **Mästlin** eingeführte, jede Anwendung von Instrumenten ausschliessende und somit **reine** Alignements-Methode zu erwähnen, bei welcher der Ort eines Gestirnes aus den Coordinaten zweier Sternpaare berechnet wird, deren jedes mit ihm in einer Geraden zu stehen scheint [a]. Es besitzt diese Methode noch für unsere Zeit, allerdings namentlich für nachträgliche Ausnutzung älterer Angaben, eine gewisse Bedeutung, und es sind darum die betreffenden Rechnungsvorschriften auch von neuern Mathematikern wiederholt revidiert worden [b].

Zu 390: *a.* Beim Auftreten des Wundersternes von 1572 war **Mästlin** noch ein junger Theologe ohne Anstellung und Instrumente, und da er dennoch die



Lage der Nova E zu bestimmen wünschte, so suchte er mit einem gespannten Faden zwei Sternpaare A, B und C, D auf, welche mit ihr je in einer Geraden zu liegen schienen, und bestimmte sodann aus deren Coordinaten diejenigen von E durch Rechnung, indem er sich nach und nach durch die Dreiecke BHA, JBG, CHD, CFK, FEG und EFL durcharbeitete, was allerdings nicht weniger als 43 Eingänge in die Tafeln erforderte. — Seine betreffende, von 1573 III 4 datierte Flugschrift „Demonstratio astronomica loci stellæ novæ" scheint sich jedoch nur dadurch erhalten zu haben, dass sie von **Tycho** in seine „Progymnasmata (p. 544—48)", von Adr. **Metius** in seine „Universæ astronomiæ institutio. Franeckeræ 1605 in 8." aufgenommen wurde, und aus letzterer Schrift „in einfaltig Teutsch vertirt" in das 1619 von „Mathæus **Beger**, Mathematophilus Reitlingensis" publizierte Schriftchen „Problema astronomicum. Die Situs der Sternen, Planetarum und Cometarum zu observiren ohne Instrumente, allein mit einem geraden Lineal oder Faden (s. l.). 8 S. in 4." überging. — Es bleibt beizufügen, dass dieses scheinbar so primitive Verfahren, welches z. B. noch von Jak. **Bernoulli** „auss Mangel dazu gehöriger Instrumente" auf den Kometen von 1680 angewandt wurde, ganz brauchbare Resultate ergab, — ja, wie sich schon **Tycho** überzeugte, sogar bessere als die meisten der von Vorgängern und Zeitgenossen gemachten Messungen von Höhe und Azimut, von blossen Aufzeichnungen à vue gar nicht zu sprechen. — *b.* So z. B. hat **Olbers** in seiner Note „Den Ort eines Gestirnes aus beobachteten Alignements zu finden (Berl. Jahrb. 1822)" folgenden Weg eingeschlagen: Bezeichnen a, a' und α, α' die Rektascensionen, d, d' und δ, δ' aber die Deklinationen der ihrer Lage nach als bekannt voraus-



gesetzten zwei Sternpaare, A und D aber Rektascension und Deklination des eingeschnittenen Kometen, so ergeben sich aus der vorstehenden Figur die Beziehungen

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Tg}\, d = \mathrm{Tg}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\,(a - N) & \mathrm{Tg}\, d' = \mathrm{Tg}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\,(a' - N) \\ \mathrm{Tg}\, \delta = \mathrm{Tg}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - N') & \mathrm{Tg}\, \delta' = \mathrm{Tg}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha' - N') \end{array} \qquad \mathbf{1}$$

also durch Elimination von φ oder φ'

$$\mathrm{Tg}\,(a - N) = \frac{\mathrm{Si}\,(a' - a) \cdot \mathrm{Tg}\, d}{\mathrm{Tg}\, d' - \mathrm{Co}\,(a' - a)\, \mathrm{Tg}\, d} \qquad \mathrm{Tg}\,(\alpha - N') = \frac{\mathrm{Si}\,(\alpha' - \alpha) \cdot \mathrm{Tg}\, \delta}{\mathrm{Tg}\, \delta' - \mathrm{Co}\,(\alpha' - \alpha) \cdot \mathrm{Tg}\, \delta} \qquad \mathbf{2}$$

Setzt man nun $\quad a - N = w \qquad \alpha - N' = w' \qquad$ **3**

so erhält man mit Hilfe von 1 die bequemen Formeln

$$\begin{array}{l} \mathrm{Tg}\left(w + \dfrac{a' - a}{2}\right) = \dfrac{\mathrm{Si}\,(d' + d)}{\mathrm{Si}\,(d' - d)} \cdot \mathrm{Tg}\, \dfrac{a' - a}{2} \\ \mathrm{Tg}\left(w' + \dfrac{\alpha' - \alpha}{2}\right) = \dfrac{\mathrm{Si}\,(\delta' + \delta)}{\mathrm{Si}\,(\delta' - \delta)} \cdot \mathrm{Tg}\, \dfrac{\alpha' - \alpha}{2} \end{array} \qquad \mathbf{4}$$

nach welchen sich w und w' und sodann nach 3 und 1 auch die N, N', φ, φ' finden lassen. Sodann hat man den 1 entsprechend

$$\mathrm{Tg}\, D = \mathrm{Tg}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\,(A - N) \qquad \mathrm{Tg}\, D = \mathrm{Tg}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(A - N') \qquad \mathbf{5}$$

somit durch Elimination von D

$$\mathrm{Tg}\,(A - N) = \frac{\mathrm{Si}\,(N' - N) \cdot \mathrm{Ct}\, \varphi}{\mathrm{Co}\,(N' - N) \cdot \mathrm{Ct}\, \varphi - \mathrm{Ct}\, \varphi'} \qquad \mathbf{6}$$

oder, wenn

$$A - N = \frac{N' - N}{2} + x \qquad \mathbf{7}$$

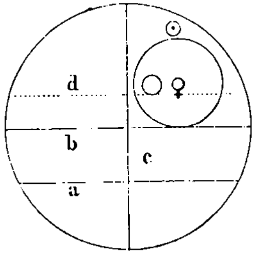
gesetzt wird

$$\mathrm{Tg}\, x = \frac{\mathrm{Si}\,(\varphi' + \varphi)}{\mathrm{Si}\,(\varphi' - \varphi)} \cdot \mathrm{Tg}\, \frac{N' - N}{2} \qquad \mathbf{8}$$

kann somit nach 8, 7, 5 successive auch die x, A und D finden, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist, und zwar, wie **Olbers** mit Befriedigung hervorhebt, mittelst bloss 20-maligem Eingehen in die Tafeln. — Für etwas andere Behandlung desselben Problemes vgl. „**Pingré**, Cométographie. Paris 1783—84, 2 Vol. in 4. (II 221—26), — **Delambre**, Astronomie théorique et pratique. Paris 1814, 3 Vol. in 4. (I 466—71), — **Bessel**, Berechnung des Ortes eines Gestirnes aus beobachteten Aliguements von 4 Sternen (Berl. Jahrb. 1821 und Abh. I 316), — S. **Günther**, Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie (Z. für M. Ph. 26 von 1881), und: Das Alignementsproblem der sphärischen Trigonometrie (Beiträge zur Geschichte der neuern Mathematik. Ansbach 1881 in 8.), — Edmund **Weiss** (Freiwaldau in österr. Schlesien 1837 geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Wien); Über die Bestimmung des Ortes eines Gestirnes durch den Durchschnitt zweier grössten Kugelkreise (Z. für M. Ph. 26 von 1881), — etc."

391. Die Schraubenmikrometer von Gascoigne und Auzout. — Schon bei der ersten Anwendung des Fernrohrs auf astronomische Beobachtungen ergab sich das Bedürfnis, die Distanzen der gleichzeitig im Gesichtsfelde liegenden Punkte oder die Durchmesser der scheibenförmig erscheinenden Wandelsterne zu bestimmen", und dies veranlasste **Gascoigne**, sowie etwas später auch **Auzout**, im Gesichtsfelde des Fernrohrs ein sog. **Schraubenmikrometer** anzubringen, d. h. eine Vorrichtung, bei welcher parallele Lamellen oder Faden mittelst Schrauben, also messbar, gegen einander verschoben, somit zur Coincidenz miteinander und mit den zu vergleichenden Punkten oder Rändern gebracht werden konnten [b]. Ihr Beispiel fand bald vielfache Nachahmung, und es entstand nach und nach eine ganze Reihe von solchen, im Principe mit den frühern übereinstimmenden, aber auch einzelne Modifikationen zeigenden Apparaten, mit welchen gar manche die Astronomie fördernde Daten erhalten wurden [c].

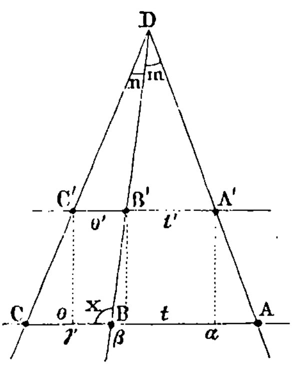
Zu 391: *a.* Obschon **Galilei** nur über holländische Fernröhren verfügte, suchte er doch schon einzelne solche Bestimmungen zu erhalten, indem er die in Frage kommenden Distanzen durch Abschätzen mit dem Durchmesser des Gesichtsfeldes verglich, wohl auch die zwischen Ein- und Austritt fallenden Schwingungen eines Pendels zählte, etc. — *b.* Dem (331) bei Anlass der Fadennetze Gesagten bleibt nur beizufügen, dass **Gascoigne** nach den bereits citierten Quellen spätestens von 1640 hinweg die Durchmesser von Sonne und Mond, die Distanzen der Pleyadensterne, etc. dadurch mass, dass er sie zwischen zwei mit Schrauben gegen einander verschiebbare Lamellen oder Faden fasste, — dass jedoch sein Verfahren damals nicht sofort allgemein bekannt wurde und so z. B. **Auzout** kaum etwas von demselben wusste, als er 1666 zu gleichem Zwecke ein verwandtes Mittel auffand und sodann in seinem „Traité du Micromètre ou manière exacte pour prendre le diamètre des planètes et la distance entre les petites étoiles. Paris 1667 in 4.“ beschrieb. Das Wesentliche des neuen Mikrometers bestand darin, dass bei ihm feste und zu ihnen parallel verschiebbare Faden kombiniert waren, und der Abstand der letztern von den erstern dadurch bestimmt wurde, dass man die Schraubenumgänge zählte, welche nötig waren, um die Coincidenz beider wieder herbeizuführen; aber die Schrauben waren damals leider noch so unvollkommen, dass **Picard** alsbald vorzog, dieselben nur zum Stellen der Faden zu benutzen, und die Distanzen dagegen dadurch zu bestimmen, dass er nach jeder Einstellung die Fadenplatte abnahm, dieselbe über eine Teilung legte und an dieser die Distanz mikroskopisch ablas. — *c.* Zwischen Gascoigne und Auzout fällt **Divini**, welcher in der seiner Tafel (234) beigegebenen Legende ausdrücklich sagt, dass er 1649 zur Aufnahme des Mondes ein astronomisches Fernrohr mit Fadennetz (telescopio instructo versus oculum, non vitro concavo, sed lente vitrea subtilissimis filis ad instar craticulæ dispositis operta) benutzt habe; also zwar Anspruch darauf hat, unter den ersten Mikrometrikern genannt zu werden, jedoch der Zeit nach gegen Gascoigne und der Bedeutung nach auch gegen Auzout zurücksteht. — Das von Gottfried **Kirch** (Guben 1639 — Berlin 1710; erst Schüler von Weigel, dann Gehilfe von Hevel, Kalendersteller in Guben, zuletzt erster Astronom der Berliner Akademie) 1696 in seinem Kalender beschriebene und früher in Deutschland häufig gebrauchte Mikrometer entsprach dem von Gascoigne, nur fehlten die Faden, und es wurden die nach ihrem Abstande zu messenden Punkte direkt zwischen die Schraubenspitzen gebracht. — Die Schraubenmikrometer, welche Ph. de **Lahire** 1702 in seinen „Tabulæ astronomicæ (p. 66)“ und J. L. **Rost** in seinem „Aufrichtigen Astronomus (p. 300—13)“ beschrieben, stimmen wesentlich mit dem von Auzout und namentlich auch miteinander überein. Letzteres rührt davon her, dass Rosts Bruder Joh. Karl 1725 bei dem über Nürnberg nach Petersburg reisenden Delisle ein solches Lahire'sches Mikrometer sah und dann eigenhändig nachbildete, — immerhin mit der Modifikation, dass er noch einen festen Horizontal-



faden und zwei feste Faden unter 45° beifügte. — Das parallaktisch montierte Fernrohr, mit welchem **Chappe** d'Auteroche 1769 in Kalifornien den Venusdurchgang beobachtete, besass ein Schraubenmikrometer mit drei festen Faden a, b, c und einem beweglichen Faden d. Um den Schraubenwert zu bestimmen, liess Chappe den einen Sonnenrand längs a laufen und brachte d mit dem andern zum Kontakt; um die Lage der Venus gegen die Sonne zu erhalten, wurde entsprechend der Figur disponiert und zugleich beobachtete man die Durchgänge der vier Ränder durch c.

392. Das Rautennetz von Bradley. — Beobachtet man die Durchgangszeiten zweier Sterne durch drei Faden oder Lamellen, welche bekannte Winkel miteinander bilden, so kann man aus diesen Zeiten die Rektascensions- und Deklinationsdifferenzen der beiden Sterne berechnen [a]. Besonders einfach gestaltet sich die Sache, wenn man, wie es **Bradley** bei Konstruktion seines **Rautennetzes** gehalten hat, die Anordnung so trifft, dass der Mittelfaden den Winkel der beiden andern Faden halbiert, und es wurde somit sein Vorschlag, der die um die Mitte des vorigen Jahrhunderts noch sehr unvollkommene Schraube entbehrlich machte, mit Recht sehr beifällig aufgenommen [b]. Auch noch später wurden mehrmals verwandte mikrometrische Vorrichtungen zur Anwendung empfohlen [c].

Zu 392: *a.* Sind nämlich m und n die gegebenen Winkel, — t, θ, t', θ' aber die aus Beobachtung der beiden Sterne geschlossenen, bereits entsprechend 378 mit 15 · Co D (wo D für den unbekannten Stern abgeschätzt wird) multiplizierten Werte von A B, B C, A' B' und B' C', endlich x der Winkel, welche der mittlere Faden mit den durch die Sterne beschriebenen Parallelkreisen bildet, so erhält man aus der Figur unmittelbar



$$\frac{\theta}{t} = \frac{BC}{BD} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{\mathrm{Si}\,n \cdot \mathrm{Si}\,(x - m)}{\mathrm{Si}\,m \cdot \mathrm{Si}\,(x + n)} \tag{1}$$

$$\frac{\theta}{t + \theta} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{\mathrm{Si}\,n \cdot \mathrm{Si}\,(x - m)}{\mathrm{Si}\,(m + n) \cdot \mathrm{Si}\,(x - m + m)} \tag{2}$$

und aus letzterm Ausdrucke folgt

$$\mathrm{Ct}\,(x - m) = \frac{t \cdot \mathrm{Si}\,n - \theta \cdot \mathrm{Si}\,m \cdot \mathrm{Co}\,(m + n)}{\theta \cdot \mathrm{Si}\,m \cdot \mathrm{Si}\,(m + n)} \tag{3}$$

wonach x berechnet werden kann. — Bezeichnet d den Deklinationsunterschied der beiden Sterne, so hat man wegen $t - t' = A\alpha + B\beta$ und $\theta - \theta' = C\gamma - B\beta$

$$d = (t - t') \cdot \frac{\mathrm{Si}\,(x - m) \cdot \mathrm{Si}\,x}{\mathrm{Si}\,m} = (\theta - \theta') \cdot \frac{\mathrm{Si}\,(x + n) \cdot \mathrm{Si}\,x}{\mathrm{Si}\,n} \tag{4}$$

Bezeichnen ferner A, B, C, A', B', C' die Durchgangszeiten durch die betreffenden Punkte, so ist die Rektascensionsdifferenz der beiden Gestirne

$$a = A - A' + \frac{A\alpha}{15 \cdot Co\,D} = B - B' - \frac{B\beta}{15 \cdot Co\,D} = C - C' - \frac{C\gamma}{15 \cdot Co\,D} \tag{5}$$

wo mit Hilfe von 1 und 4

$$\begin{aligned} A\alpha &= d \cdot Ct\,(x - m) = (t - t') \cdot \frac{Si\,x \cdot Co\,(x - m)}{Si\,m} \\ B\beta &= d \cdot Ct\,x \qquad\quad = \frac{\theta}{t} \cdot (t - t') \cdot \frac{Co\,x \cdot Si\,(x + n)}{Si\,n} \\ C\gamma &= d \cdot Ct\,(x + n) = \frac{\theta}{t} \cdot (t - t') \cdot \frac{Si\,x \cdot Co\,(x + n)}{Si\,n} \end{aligned} \tag{6}$$

ist, somit die Aufgabe als gelöst erscheint. — *b.* Für den speciellen Fall, wo $m = n$ ist, folgt aus 3

$$Ct\,(x - m) = \frac{t - \theta \cdot Co\,2m}{\theta \cdot Si\,2m} \qquad \text{oder} \qquad Tg\,x = \frac{t + \theta}{t - \theta} \cdot Tg\,m \tag{7}$$

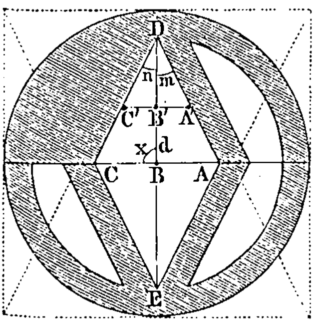
somit auch

$$\begin{aligned} Si\,2x &= \frac{(t^2 - \theta^2) \cdot Si\,2m}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} \qquad & Si^2 x &= \frac{(t + \theta)^2 \cdot Si^2 m}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} \\ Co\,2x &= \frac{(t^2 + \theta^2) \cdot Co\,2m - 2t\theta}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} \qquad & Co^2 x &= \frac{(t - \theta)^2 \cdot Co^2 m}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} \end{aligned} \tag{8}$$

und mit Hilfe hievon aus 4 und 6

$$d = \frac{\theta\,(t - t')\,(t + \theta)\,Si\,2m}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} \tag{9}$$

$$A\alpha = d \cdot \frac{t - \theta \cdot Co\,2m}{\theta \cdot Si\,2m} \qquad B\beta = d \cdot \frac{t - \theta}{t + \theta} \cdot Ct\,m \qquad C\gamma = d \cdot \frac{t - \theta \cdot Co\,2m}{\theta \cdot Si\,2m} \tag{10}$$



Dieser specielle Fall entspricht aber dem von **Bradley** eingeführten **Rautennetz** (réticule romboide), welches **Lacaille** am Kap fast ausschliesslich benutzte, ja das noch später vielfach im Gebrauch war. Es wurde nämlich zu dessen Konstruktion entsprechend der beistehenden Figur auf einer Kupfertafel das Netz verzeichnet und dann die Tafel so ausgeschnitten, dass nur der Ring, der Rhombus und ein Segment stehen blieb; gewöhnlich wurden noch zwei Diagonalfaden AC und DE beigegeben und das Netz so gestellt, dass AC einem Parallel entsprach. Laut dieser Konstruktion war $Tg\,m = 1/2$, $Si\,2m = 4/5$ und $Co\,2m = 3/5$, also nach 7, 9 und 10

$$Tg\,x = \frac{t + \theta}{2\,(t - \theta)} \qquad d = \frac{4\theta\,(t - t')\,(t + \theta)}{5\,(t^2 + \theta^2) - 6t\theta} \tag{11}$$

$$A\alpha = d \cdot \frac{5t - 3\theta}{4\theta} \qquad B\beta = 2d \cdot \frac{t - \theta}{t + \theta} \qquad C\gamma = d \cdot \frac{5t - 3\theta}{4\theta} \tag{12}$$

Fällt DE mit einem Deklinationskreise zusammen, so wird $t = \theta$ und $t' = \theta'$, und somit nach 11 und 12, wenn AC der Weg des einen Sternes ist,

$$\begin{aligned} &x = 90^0 \qquad A\alpha = t - t' \qquad B\beta = 0 \qquad C\gamma = t - t' \\ &d = 2\,(t - t') = AC - A'C' = 15\,(C - C' - A + A')\,Co\,D \end{aligned} \tag{13}$$

und nach 5 $\qquad a = 1/2\,(A - A') + 1/2\,(C - C') = B - B' \qquad$ **14**

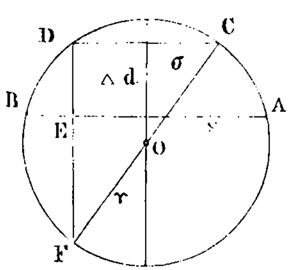
so dass der Mittelfaden, dessen Anwendung Beleuchtung erfordern würde, entbehrlich ist; das dunkle Segment lässt ohne Beleuchtung unterscheiden, ob der zu bestimmende Stern über oder unter der Mitte durchgeht, da er nur in ersterm Falle dauernd verschwindet. — *c.* Vgl. „J. C. **Burckhardt**, Über den Gebrauch eines vollkommenen Vierecks statt des Bradley'schen Rhomboidalnetzes. (Mon. Corr. I von 1800), — B. **Valz**, Description d'un nouveau réticule (Corr. astr. III 353 von 1819)", — sowie die auf letztere bezüglichen Bemerkungen von **Horner** (Brief an Gautier von 1831 IV 22 in Notiz 352).

393. Einige andere Mikrometer früherer Zeit. — Neben den bereits beschriebenen Mikrometern und den im folgenden als Hilfsmittel der Gegenwart einlässlich zu behandelnden Kreis-, Doppelbild- und Positions-Mikrometern, wurden zeitweise noch mehrere andere mikrometrische Vorrichtungen benutzt, von welchen z. B. die keilförmigen Lamellen von **Huygens** [a], die Gitterwerke der **Malvasia** und **Mayer** [b] und die Glasmikrometer von **Brander** [c] erwähnt werden mögen [d].

Zu 393: *a.* Am Schlusse seines „Systema Saturnium. Hagæ Com. 1659 in 4." erwähnt **Huygens**, dass er zur Messung der scheinbaren Durchmesser der Planeten oder anderer kleiner Winkel folgendes Verfahren angewandt habe: Er befestigte in der Bildebene seines Fernrohrs eine kupferne Platine mit kreisrunder Öffnung, deren scheinbaren Durchmesser er aus der Zeit ermittelte, welche ein equatorealer Stern brauchte, um ihn zu durchlaufen, dabei 4^s auf $1'$ rechnend; dann schob er durch am Rohr angebrachte Öffnungen eine schmale und lange (mutmasslich mit einer Scale versehene) keilförmige Lamelle so weit in die Bildebene ein, dass sie das zu messende Interval deckte, — mass die Breite an der Deckungsstelle mit einem Zirkel, — verglich sie mit dem Durchmesser seines Diaphragmas, in welchem einzelne fälschlich ein Kreismikrometer erkennen wollten, — und erhielt schliesslich aus einem Dreisatz den gewünschten scheinbaren Durchmesser oder Winkelabstand. — *b.* Dem in 331 über **Malvasias** Quadratgitter gesagten ist beizufügen, dass er dasselbe zur Bestimmung der Distanz zweier Faden so drehte, dass ein equatorealer Stern einem zu ihnen senkrechten Faden folgte; ferner ist zu bemerken, dass, wohl unabhängig von ihm und von einander, auch durch den Würzburger Canonicus Joh. **Zahn** (vgl. dessen „Oculus artificialis teledioptricus. Herbipoli 1685 in fol.") und den unvergesslichen Tob. **Mayer** (vgl. die „Kosmographischen Nachrichten und Sammlungen. Nürnberg 1750 in 4.") entsprechend auf Glas entworfene Gitter zur Aufnahme von Mondlandschaften, Sternhaufen u. dgl. empfohlen und wenigstens von letzterm wirklich ausgeführt und gebraucht wurden. Während jedoch **Zahn** sein Gitter mit dem Diamant einritzen wollte, so fürchtete **Mayer**, es möchte bei dieser Operation „das Glas seitwärts ausspritzen", — überzog nun das Glas mit Tusche, — und entfernte dann dieselbe, „nachdem sie trocken geworden", mit einem feinen (wie zum Schreiben geschnittenen, jedoch spaltlosen) Federkiel bis auf zwei zu einander senkrechte Systeme von Parallelen. Auch die Fadensysteme, welche er für seine Quadranten, etc., nötig hatte, erstellte sich **Mayer** (vgl. Kästners astron. Abh. II 257) auf diese Weise. — *c.* Später gelang es **Brander**, mit dem Diamant reine Linien von kaum $^1/_{200}''' = 11''$ Breite zu ritzen und so ganz vorzügliche Glasmikrometer zu erstellen, auf welche sodann **Lambert** durch seine „Anmerkungen über die Brander'schen Mikrometer von Glas. Augsburg 1769 in 8." die Aufmerksamkeit lenkte. Ich besitze selbst ein von **Brander** für mikroskopische Messungen bestimmtes Netz von 8''' P. Seite, bei dem das äusserste Quadrat in Quadratlinien, — ein inneres von 6''' Seite in Viertelsquadratlinien, — das innerste von 4''' Seite sogar in Hundertstelsquadratlinien geteilt ist, — und dennoch alle Linien durch die Loupe tadellos erscheinen. — *d.* Alle übrigen Hilfsmittel für mikrometrische Messungen, welche von Dom. **Cassinis** etwa 1696 proponierten „Réticule de 45°" bis zu dem von **Stampfer** 1841 ausgedachten „Lichtpunkt-Mikrometer" und noch seither vorgeschlagen wurden, auch hier aufzuzählen, würde mich viel zu weit führen.

394. Das Kreismikrometer. — Die glückliche Idee von **Boscovich**, dass man den im Fernrohr durch das letzte Diaphragma gebildeten Kreis als Mikrometer gebrauchen könne, indem sich bei bekanntem Radius aus der keine Beleuchtung erfordernden Beobachtung der Ein- und Austrittszeiten zweier Gestirne der Positionsunterschied dieser letztern berechnen lasse [a], wurde alsbald nach allen Richtungen weiter ausgebildet [b], und nachdem **Olbers** und **Bessel** die praktische Brauchbarkeit dieses **Kreismikrometers** erwiesen und seine Theorie allseitig festgestellt hatten [c], gelang es **Fraunhofer**, dasselbe in so vorzüglicher Weise darzustellen, dass es den übrigen Präcisionsinstrumenten ebenbürtig wurde [d].

Zu 394: *a.* Durch den Kometen von 1739 veranlasst, zeigte **Boscovich** in seiner „De novo telescopii usu ad objecta coelestia determinanda Dissertatio. Roma 1739 in 4. (auch Nova acta erudit. 1740, pag. 158—67)", dass gerade für Vergleichung eines solchen, eine Feldbeleuchtung kaum erlaubenden Objektes, mit einem benachbarten Sterne die Beobachtung ihrer Ein- und Austrittszeiten in das Gesichtsfeld des Fernrohrs ein passendes Hilfsmittel abgebe, d. h. die Rektascensions- und Deklinations-Differenz zu berechnen erlaube. Es war ihm nämlich nicht nur klar geworden, dass, wenn t_1 und t_2 die für den Stern (a, d), τ_1 und τ_2 aber die für den Kometen erhaltenen Zeiten bezeichnen, die Rektascensionsdifferenz



$$\Delta a = \tfrac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2) \qquad \mathbf{1}$$

sei, sondern dass laut beistehender Figur, wenn 2 s und 2 σ die von den beiden Gestirnen durchlaufenen Sehnen sind, Δd aber deren dem Deklinationsunterschiede gleiche Distanz und r den Radius des Kreises bezeichnet, die Beziehungen

$$2s = 15\,(t_2 - t_1) \cdot \mathrm{Co\,d} \qquad 2\sigma = 15\,(\tau_2 - \tau_1) \cdot \mathrm{Co\,d}$$

$$BE = s - \sigma \quad EA = s + \sigma \quad BE \cdot EA = DE \cdot EF \text{ oder } s^2 - \sigma^2 = \Delta d \cdot (DF - \Delta d)$$

$$4r^2 = 4\sigma^2 + DF^2 = 4\sigma^2 + \left(\frac{s^2 - \sigma^2}{\Delta d} + \Delta d\right)^2 = \frac{(s^2 - \sigma^2)^2}{\Delta d^2} + 2(s^2 + \sigma^2) + \Delta d^2 \qquad \mathbf{2}$$

bestehen, also bei bekanntem Radius des Diaphragmas (vgl. 395 und 398) sich auch die Deklinationsdifferenz berechnen lasse. — *b.* Nachdem nämlich der leere Kreis durch **Lacaille** (vgl. Mém. Par. 1742), **Koch** (vgl. Berl. Jahrb. 1793), etc., neuerdings als brauchbar erwiesen worden war, ersetzten ihn nahe gleichzeitig Joh. Gottfried **Köhler** (Gauernitz bei Dresden 1745 — Dresden 1801; Insp. d. math. Sal. in Dresden) und J. G. **Repsold** (vgl. Geogr. Eph. III 319 von 1799 und Brief Horner an Gautier von 1821 V 28 in Notiz 352) durch einen in der Bildebene aufgehängten schmalen Ring von Messing, so dass man die zu beobachtenden Gestirne schon vor ihrem Antritte sehen und überdies die Beobachtungen verdoppeln konnte. — *c.* In Beziehung auf die unter den folgenden Nummern speciell zu behandelnde Theorie des Kreismikrometers mag vorläufig erwähnt werden, dass sie schon durch **Boscovich** wesentlich über die grundlegenden 1 und 2 hinausgeführt, sodann durch die **Kästner** (vgl. dessen Astr. Abh.), **Fixlmillner** (vgl. die Acta astron. Cremif.), etc., weiter entwickelt, namentlich aber durch **Olbers** und **Bessel** (vgl. deren Briefwechsel) vielfach besprochen, und von letzterm in seiner Abhandlung „Über das Kreismikrometer (Mon. Corr. 24 von 1811)" zu einem vorläufigen Abschlusse gebracht wurde. — *d.* Eine sehr bedeutende Verbesserung erhielten die **Kreis-** oder **Ringmikrometer** in konstruktiver Hinsicht, als **Fraunhofer** (vgl. Corr. astr. V von 1821) die Messingringe durch in Plangläser eingesetzte Stahlringe, wohl auch (vgl. A. N. 43 von 1823) durch auf Glastafeln eingeäzte konzentrische Kreise ersetzte, wobei jedoch nicht vergessen werden darf, dass letzteres Verfahren schon 1807 durch **Horner** (vgl. dessen Brief an Gautier von 1822 III 22 in Notiz 352) zur Anwendung gebracht worden war.

395. Die Bestimmung des Radius, der Rektascensions- und Deklinations-Unterschiede. — Um mit einem Kreismikrometer operieren zu können, muss man (vgl. 394) vor allem aus den Winkel kennen, unter welchem sein Radius von der Mitte des Objektives aus erscheint, d. h. seinen sog. scheinbaren Radius, der zur Not bei bekannter Focaldistanz aus dem wirklichen Radius abgeleitet [a], besser mit einem Winkelinstrument direkt gemessen [b], wohl am besten aber aus den Ein- und Austrittszeiten zweier bekannter Sterne berechnet wird [c]. — Ist einmal diese Fundamentalbestimmung durchgeführt, so hält es nicht schwer, die bei der letzterwähnten Methode benutzten geometrischen Beziehungen so zu arrangieren, dass nach ihnen unter vorläufiger Abschätzung der Deklinationsdifferenz zwischen dem bekannten und dem unbekannten Sterne diese letztere mit beliebiger Annäherung berechnet werden kann [d], — und die Rektascensionsdifferenz ergiebt sich (394) offenbar, indem man für jeden der beiden Sterne das Mittel aus den beobachteten Zeiten nimmt und diese Mittel vergleicht [e].

Zu 395: *a.* Bezeichnet R den wirklichen Radius des Kreismikrometers und P die Focaldistanz, so kann man den scheinbaren Radius r nach

$$\operatorname{Tg} r = R : P \qquad \mathbf{1}$$

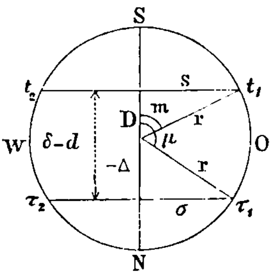
berechnen; da aber hieraus

$$dr = \frac{P}{(P^2 + R^2) \cdot Si\, 1''} \cdot dR - \frac{R}{(P^2 + R^2) \cdot Si\, 1''} \cdot dP \qquad \mathbf{2}$$

folgt, woraus sich z. B. für $R = 12^{mm}$, $P = 1200^{mm}$, $dR = 0{,}1^{mm}$ und $dP = 1{,}0^{mm}$ successive

$$dr = 171'',8 \cdot dR - 1'',7 \cdot dP = \sqrt{17{,}2^2 + 1{,}7^2} = \pm 17'',3$$

ergiebt, so ersieht man, dass diese Bestimmungsweise ganz ungenügend ist — zugleich aber auch, wie notwendig es ist, das Mikrometer immer genau in gleicher Distanz vom Objektiv zu erhalten. — *b.* Für die von **Gauss** beliebte direkte Messung von r vgl. 378. — *c.* Während **Boscovich** den Radius seines Diaphragmas (vgl. 398) mit Hilfe der Sonne bestimmte, und **Kästner** (l. c.) denselben aus der Durchgangszeit eines Sternes von bekannter Deklination, welchen er möglichst genau einem Durchmesser folgen liess, ableitete, so wandte dagegen schon **Fixlmillner** (l. c.) die jetzt noch meistgebrauchte Methode an, dafür zwei Sterne von bekannter Deklination zu verwenden. Es würde hiezu offenbar zur Not schon die von **Boscovich** aufgestellte 394 : 2 hinreichen, jedoch bietet folgende, überdies auch der Refraktion Rechnung tragende Entwicklung, welche wesentlich mit der von **Bessel** (l. c.) gegebenen übereinstimmt, noch bequemere Mittel: Besitzt ein unter der Polhöhe φ parallaktisch aufgestelltes Fernrohr den (angenähert am Stundenkreise ablesbaren) Stundenwinkel S, und bezeichnet t die halbe Differenz der Zeiten t_1 und t_2, zu welchen ein Stern (a, d) ein- und austritt, k aber die Refraktionskonstante, so ist (unter Beihilfe von 177 : 7, 9) nach den früher (394) entwickelten Grundsätzen die Hälfte der von dem Sterne im Abstande D vom Centrum durchlaufenen Sehne



$$s = 15\,t \cdot \mathrm{Co}\,d' \quad \text{wo} \quad d' = d + k \cdot \mathrm{Ct}\,(n + d) \qquad \mathbf{3}$$

und

$$\mathrm{Tg}\,n = \mathrm{Ct}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,S \qquad \mathbf{4}$$

ist. Entsprechend hat man für einen zweiten Stern

$$\sigma = 15\,\tau \cdot \mathrm{Co}\,\delta' \quad \text{wo} \quad \delta' = \delta + k \cdot \mathrm{Ct}\,(n + \delta) \qquad \mathbf{5}$$

ist, und somit den Abstand der beiden Sehnen

$$D - \Delta = \delta' - d' = \delta + k \cdot \mathrm{Ct}\,(n + \delta) - [d + k \cdot \mathrm{Ct}\,(n + d)] =$$
$$= \delta - d - k \cdot \mathrm{Si}\,(\delta - d) \cdot \mathrm{Cs}\,(n + \delta) \cdot \mathrm{Cs}\,(n + d) \qquad \mathbf{6}$$

Anderseits ergiebt sich aus der Figur, dass

$$D - \Delta = r\,(\mathrm{Co}\,m - \mathrm{Co}\,\mu) = 2\,r \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu + m) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu - m)$$
$$\sigma \pm s = r\,(\mathrm{Si}\,\mu \pm \mathrm{Si}\,m) = 2\,r \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu \pm m) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,(\mu \mp m)$$

also

$$\mathrm{Tg}\,\frac{\mu + m}{2} = \frac{D - \Delta}{\sigma - s} \qquad \mathrm{Tg}\,\frac{\mu - m}{2} = \frac{D - \Delta}{\sigma + s} \qquad r = \frac{D - \Delta}{2\,\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu + m) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu - m)} \qquad \mathbf{7}$$

Man kann daher nach 3—7 successive n, s, σ, D — Δ, μ, m und r berechnen, und da **Bessel** durch seine „Beobachtungen verschiedener Sterne der Pleyaden (Astr. Unters. I 209—38)" die Möglichkeit verschafft hat, sich leicht ein passendes Sternenpaar auszusuchen, so unterliegt es somit keiner Schwierigkeit, den Radius durch wiederholte Beobachtungen auf das genaueste zu ermitteln. Dies bei verschiedenen Stellungen des Mikrometers auszuführen und dadurch zu prüfen, ob letzteres wirklich einen Kreis repräsentiere, dürfte seit **Fraunhofer** kaum mehr nötig sein. — *d.* Da nach oben, abgesehen von dem kleinen (in 397 speciell zu besprechenden) Einflusse der Refraktion

$$\mathrm{Si}\,m = 15\,t \cdot \mathrm{Co}\,d : r \qquad \mathrm{Si}\,\mu = 15\,\tau \cdot \mathrm{Co}\,\delta : r \qquad \mathbf{8}$$
$$\delta = d + 2\,r \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu + m) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu - m)$$

so kann man m direkt berechnen, — μ und δ aber durch Näherung, indem man vorerst im Ausdrucke für μ die Unbekannte δ durch d oder noch besser durch einen bei der Beobachtung abgeschätzten Wert ersetzt, — sodann mit dem erhaltenen Näherungswerte auch ein provisorisches δ berechnet, — mit diesem, unter Beihilfe der angemerkten logarithmischen Differenzen, die Rechnung wiederholt, — etc. — *e.* Die Rektascensionsbestimmung bedarf wohl kaum einer weitern Erläuterung; dagegen mag noch beigefügt werden, dass man bei einem **Ringmikrometer**, anstatt jeden der beiden Kreise einzeln zu behandeln, zweckmässiger in folgender Weise vorgeht: Sind r' und r'' die beiden Radien, und setzt man

$$\tfrac{1}{2}(r' + r'') = r \qquad \tfrac{1}{2}(r' - r'') = \varrho \qquad \text{oder} \qquad r' = r + \varrho \qquad r'' = r - \varrho \tag{9}$$

so geht $r' \cdot \mathrm{Co}\, m' = D = r'' \cdot \mathrm{Co}\, m''$ in $(r + \varrho) \cdot \mathrm{Co}\, m' = (r - \varrho) \cdot \mathrm{Co}\, m''$ über, woraus

$$\varrho = r \cdot \frac{\mathrm{Co}\, m'' - \mathrm{Co}\, m'}{\mathrm{Co}\, m'' + \mathrm{Co}\, m'} = r \cdot \mathrm{Tg}\, \frac{m' + m''}{2} \cdot \mathrm{Tg}\, \frac{m' - m''}{2} \tag{10}$$

folgt. Ist ferner t_1, t_2, t_3, t_4 die Folge der beobachteten Zeiten, und bezeichnen s' und s'' die halben Sehnen, so hat man

$$r' \cdot \mathrm{Si}\, m' = s' = {}^{15}/_{2} \cdot (t_4 - t_1) \cdot \mathrm{Co}\, d \qquad r'' \cdot \mathrm{Si}\, m'' = s'' = {}^{15}/_{2}\, (t_3 - t_2) \cdot \mathrm{Co}\, d \tag{11}$$

und erhält daher mit Hilfe von 10 einerseits

$$\frac{s' \pm s''}{2} = \frac{(r + \varrho) \cdot \mathrm{Si}\, m' \pm (r - \varrho)\, \mathrm{Si}\, m''}{2} = r \cdot \mathrm{Si}\, \frac{m' \pm m''}{2} \cdot \mathrm{Se}\, \frac{m' \mp m''}{2} \tag{12}$$

während anderseits

$$D = \frac{r' \cdot \mathrm{Co}\, m' + r'' \cdot \mathrm{Co}\, m''}{2} = r \cdot \mathrm{Co}\, m' \cdot \mathrm{Co}\, m'' \cdot \mathrm{Se}\, \frac{m' + m''}{2} \cdot \mathrm{Se}\, \frac{m' - m''}{2} \tag{13}$$

folgt. Setzt man aber

$$\tfrac{1}{2}(s' + s'') = r \cdot \mathrm{Si}\, A \qquad \tfrac{1}{2}(s' - s'') = r \cdot \mathrm{Si}\, B \tag{14}$$

so ergiebt sich nach 12

$$\mathrm{Si}\, A = \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2}(m' + m'') \cdot \mathrm{Se}\, \tfrac{1}{2}(m' - m'') \qquad \mathrm{Si}\, B = \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2}(m' - m'') \cdot \mathrm{Se}\, \tfrac{1}{2}(m' + m'')$$

und hieraus nach bekannten goniometrischen Formeln

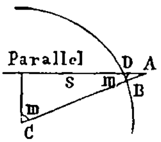
$$\mathrm{Co}\, A = \mathrm{Se}\, \tfrac{1}{2}(m' - m'') \cdot \sqrt{\mathrm{Co}\, m' \cdot \mathrm{Co}\, m''} \qquad \mathrm{Co}\, B = \mathrm{Se}\, \tfrac{1}{2}(m' + m'') \cdot \sqrt{\mathrm{Co}\, m' \cdot \mathrm{Co}\, m''}$$

wofür 13 in

$$D = r \cdot \mathrm{Co}\, A \cdot \mathrm{Co}\, B \tag{15}$$

übergeht, somit D nach 11, 14 und 15 leicht berechnet werden kann. Bestimmt man so für jeden zweier Sterne seine Distanz vom Mittelpunkte des Mikrometers, so ergiebt sich aus Kombination dieser Distanzen sofort die Deklinationsdifferenz, — nur wird diese entsprechend dem Frühern noch einmal zu revidieren sein, wenn für den einen Stern in 11 vorerst für d nur ein approximativer Wert eingeführt werden konnte. Die Rektascensionsdifferenz endlich wird in diesem Falle offenbar erhalten werden, indem man für jeden Stern das Mittel aus sämtlichen vier Beobachtungszeiten nimmt und diese Mittel von einander subtrahiert.

396. Der Einfluss von Beobachtungsfehlern. — Die bei Anlass der Beobachtungen am Meridiankreise besprochenen Personalfehler machen sich auch beim Kreismikrometer geltend, indem sie die Zeitangaben für Ein- und Austritt fälschen[a] und dadurch Fehler in Bestimmung der Sehnen veranlassen, die sich auch bei Berechnung der Radien, somit bei Ermittlung von Positionsdifferenzen in gedoppeltem Masse, geltend machen[b]. Nachdem man schon früher allmälig auf diese Verhältnisse aufmerksam geworden war[c], erwarb sich namentlich **Argelander** das Verdienst, dieselben näher zu untersuchen und darauf gestützt eine Reihe von Vorschriften für die Beobachtungen am Kreismikrometer aufzustellen[d].



Zu 396: *a.* Glaubt man infolge einer Art Sehfehler den Eintritt eines Sternes schon in der Distanz $AB = f$ vom Kreise zu sehen, so wird dadurch die Sehne um $AD \fallingdotseq f : Si\,m$ verlängert, also, wenn f in Zeitsekunden ausgedrückt ist, die Zeitangabe des Eintrittes um $f : (Si\,m \cdot Co\,d)$ gefälscht, oder, da sich mit dem Sehfehler f auch noch (382) ein vom Sterne unabhängiger Hörfehler g verbinden wird, um

$$d\,t_1 = \sqrt{\frac{f^2}{Si^2 m \cdot Co^2 d} + g^2} = \frac{f'}{Si\,m \cdot Co\,d} \qquad \text{wo} \qquad f'^2 = f^2 + g^2 \cdot Si^2 m \cdot Co^2 d \qquad \mathbf{1}$$

Entsprechend hat man für einen zweiten Stern

$$d\,\tau_1 = \sqrt{\frac{f^2}{Si^2 \mu \cdot Co^2 \delta} + g^2} = \frac{f''}{Si\,\mu \cdot Co\,\delta} \qquad \text{wo} \qquad f''^2 = f^2 + g^2 \cdot Si^2 \mu \cdot Co^2 \delta \qquad \mathbf{2}$$

folglich, da für die Austritte $d\,t_2 = d\,t_1$ und $d\,\tau_2 = d\,\tau_1$ ist,

$$d\,\frac{t_2 \pm t_1}{2} = \frac{f'}{\sqrt{2} \cdot Si\,m \cdot Co\,d} \qquad \text{und} \qquad d\,\frac{\tau_2 \pm \tau_1}{2} = \frac{f''}{\sqrt{2} \cdot Si\,\mu \cdot Co\,\delta} \qquad \mathbf{3}$$

— *b.* Ersetzt man D — Δ durch D und differenziert die nun aus 395 folgenden Beziehungen $\quad D = r\,(Co\,m - Co\,\mu) \qquad s = r \cdot Si\,m \qquad \sigma = r \cdot Si\,\mu$ **4**

nach allen in ihnen enthaltenen Grössen, so erhält man

$$d\,D = (Co\,m - Co\,\mu) \cdot d\,r - r\,(Si\,m \cdot d\,m - Si\,\mu \cdot d\,\mu)$$
$$d\,s = r \cdot Co\,m \cdot d\,m + Si\,m \cdot d\,r \qquad d\,\sigma = r\,Co\,\mu \cdot d\,\mu + Si\,\mu \cdot d\,r$$

und hieraus, indem man $d\,m$ und $d\,\mu$ eliminiert, sodann $d\,s = 15\,d\,t \cdot Co\,d$ und $d\,\sigma = 15\,d\,\tau \cdot Co\,\delta$ einführt, ferner 3 benutzt, successive

$$\begin{aligned} d\,D &= Tg\,\mu \cdot d\,\sigma - Tg\,m \cdot d\,s - D \cdot Se\,\mu \cdot Se\,m \cdot d\,r : r \\ &= \frac{15\,f''}{Co\,\mu \cdot \sqrt{2}} - \frac{15\,f'}{Co\,m \cdot \sqrt{2}} - \frac{D}{r} \cdot \frac{d\,r}{Co\,\mu \cdot Co\,m} \\ &= 15 \cdot \sqrt{\frac{f'^2}{2\,Co^2 m} + \frac{f''^2}{2\,Co^2 \mu} + \left(\frac{D \cdot d\,r}{15 \cdot r \cdot Co\,m \cdot Co\,\mu}\right)^2} \end{aligned} \qquad \mathbf{5}$$

oder

$$\begin{aligned} d\,r &= r\,[Si\,\mu \cdot Co\,m \cdot d\,\sigma - Co\,\mu \cdot Si\,m \cdot d\,s - Co\,\mu \cdot Co\,m \cdot d\,D] : D \\ &= \frac{r}{D}\left[\frac{15\,f''}{\sqrt{2}} \cdot Co\,m - \frac{15\,f'}{\sqrt{2}}\,Co\,\mu - d\,D \cdot Co\,m \cdot Co\,\mu\right] \\ &= \frac{15\,r}{D} \cdot \sqrt{\frac{f'^2}{2} \cdot Co^2 \mu + \frac{f''^2}{2} \cdot Co^2 m + \left(\frac{d\,D \cdot Co\,m \cdot Co\,\mu}{15}\right)^2} \end{aligned} \qquad \mathbf{6}$$

während, wenn A die Rektascensionsdifferenz bezeichnet,

$$d\,A = d\,\tau - d\,t = \sqrt{\frac{f'^2}{2\,Si^2 m \cdot Co^2 d} + \frac{f''^2}{2\,Si^2 \mu \cdot Co^2 \delta}} \qquad \mathbf{7}$$

folgt, woraus sich leicht Beobachtungsregeln ableiten lassen. So z. B. ergiebt sich, dass, wenn man zur Bestimmung des Radius zwei Sterne wählt, deren Abstandskomponente D demselben nahe kömmt, und den einen nahe am Mittelpunkte ($m \fallingdotseq 90^0$), also den andern nahe am Rande ($\mu \fallingdotseq 0$) durchgehen lässt, $d\,r' \fallingdotseq 10 \cdot \sqrt{f^2 + g^2 \cdot Co^2 d}$, d. h. der Wert von einer kleinen Unsicherheit in D nicht beeinflusst wird. — *c.* Schon 1742 machte Lacaille (l. c.) darauf aufmerksam, dass man Deklinationsdifferenzen mit dem Kreismikrometer um so genauer bestimme, je weiter die beiden Gestirne vom Mittelpunkte abstehen, ohne jedoch noch näher auf die Natur der in Betracht kommenden Fehlerquellen hinzuweisen, was erst in der neuern Zeit durch die **Bessel** (vgl. seinen „Nachtrag zur Theorie des Kreismikrometers" in Mon. Corr. 26 von 1812), **Gauss** und **Struve** (vgl. 382), etc., geschehen zu sein scheint. — *d.* Ganz besonders einlässlich beschäftigte sich **Argelander** mit diesen Verhältnissen und besprach dieselben (wie ich aus den Aufzeichnungen von Fr. Henzi, vgl. 592, weiss) in seinen Vorlesungen im Detail. So z. B. teilte er mit, dass er aus einer längern Beobachtungsreihe bei den mittlern Werten $m = 12^0\,40' = \mu$ und $d = 23^0\,30' = \delta$ durchschnittlich die Fehler $f' \cdot \mathrm{Se}\, d \cdot \mathrm{Cs}\, m = 0^s,469$ in AR und $15\, f' \cdot \mathrm{Se}\, m = 1'',458$ in D, also im Mittel $f' = 0^s,0946$, — bei den mittlern Werten $m = 54^0\,27' = \mu$ und $d = 14^0\,0' = \delta$ dagegen $f' = 0^s,1443$, — folglich nach 1'' die Werte $f = 0^s,0895$ und $g = 0^s,1391$ gefunden habe. Anlehnend an diese Resultate machte er sodann folgende Entwicklung: Sind d und δ gleich, m und μ aber gleich oder supplementär, so ergeben sich nach 1, 2, 7 und 5, wenn der Fehler in Deklination ebenfalls in Zeit ausgedrückt und eine gute Bestimmung des Radius vorausgesetzt wird,

$$f'^2 = f^2 + g^2 \cdot \mathrm{Si}^2 m \cdot \mathrm{Co}^2 d = f''^2 \qquad dA = f' \cdot \mathrm{Cs}\, m \cdot \mathrm{Se}\, d \qquad dD = f' \cdot \mathrm{Se}\, m \qquad \mathbf{8}$$

woraus der Fehler in der Position $dP = \sqrt{dA^2 + dD^2}$ folgt, und somit, wenn die Tausendstel-Sekunde als Einheit gewählt wird, die obigen Werten von f und g entsprechende Tafel:

m	f'			dA			dD			dP		
	d = 0°	30°	60°	d = 0°	30°	60°	d = 0°	30°	60°	d = 0°	30°	60°
90°	165	150	113	165	173	226	∞	∞	∞	∞	∞	∞
75	161	147	112	167	176	232	624	583	433	646	609	491
60	150	137	108	173	183	249	300	274	216	347	329	330
45	133	123	102	188	200	288	188	174	144	266	265	322
30	113	108	96	227	249	384	131	125	111	262	279	400
15	97	95	91	373	424	703	100	98	94	386	435	709
0	90	90	90	∞	∞	∞	90	90	90	∞	∞	∞

aus der z. B. hervorgeht, dass dP für mittlere Werte von m einen Minimalwert annimmt. Um diese Verhältnisse noch genauer zu ermitteln, kann man die aus 8 folgende Formel

$$dP^2 = dA^2 + dD^2 = \frac{f^2 + g^2 \cdot \mathrm{Si}^2 m \cdot \mathrm{Co}^2 d}{\mathrm{Si}^2 m \cdot \mathrm{Co}^2 m \cdot \mathrm{Co}^2 d} \cdot (1 - \mathrm{Si}^2 m \cdot \mathrm{Si}^2 d) \qquad \mathbf{9}$$

nach m differentieren, woraus

$$\frac{d\,(dP^2)}{dm} = 2\, \frac{h^2 \cdot \mathrm{Si}^4 m + 2 f^2 \cdot \mathrm{Si}^2 m - f^2}{\mathrm{Si}^3 m \cdot \mathrm{Co}^3 m \cdot \mathrm{Co}^2 d} \qquad \text{wo} \qquad h^2 = g^2\, \mathrm{Co}^4 d - f^2 \cdot \mathrm{Si}^2 d \qquad \mathbf{10}$$

folgt. Es wird also dP ein Minimum, wenn

$$h^2 . \mathrm{Si}^4 m + 2 f^2 \cdot \mathrm{Si}^2 m - f^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Si}^2 m = f\left[\sqrt{h^2 + f^2} - f\right] : h^2 \qquad \mathbf{11}$$

ist, und hieraus ergiebt sich z. B., dass für die Argelander'schen Konstanten dP ein Minimum wird, wenn für Sterne der Deklination $d = 0, 30, 60^0$ je $m = 36^0\,21'$, $39^0\,43'$ und $51^0\,24'$ gewählt wird, wofür 9 die Minimalwerte $dP = 0^s,254$, 0,258 und 0,318 ergiebt, — u. s. w. — Aus 8 folgt ferner, dass dA für $m = 90^0$ und dD für $m = 0$ oder 180^0 Minimalwerte erhalten. Frägt man nun, wie viele Beobachtungen p' in AR bei m zu machen sind, um ein gleich sicheres Resultat wie aus p Beobachtungen bei 90^0 zu erhalten, so ist dies, da sich diese Zahlen (52) wie die Quadrate der Fehler verhalten müssen, nach 8 der Fall, wenn

$$p' : p = dA_m^2 : dA_{90}^2 = (f^2 + g^2 \cdot Si^2 m \cdot Co^2 d)\, Cs^2 m : (f^2 + g^2 \cdot Co^2 d) \qquad \mathbf{12}$$

Frägt man dagegen, wie viele Beobachtungen q' in D bei m nötig sind, damit sie q Beobachtungen in 0 oder 180 ersetzen, so erhält man entsprechend

$$q' : q = dD_m^2 : dD^2_{0,180} = (f^2 + g^2\, Si^2 m \cdot Co^2 d) \cdot Se^2 m : f^2 \qquad \mathbf{13}$$

und frägt man endlich, wie sich p und q verhalten müssen, damit die Bestimmungen in Æ und D gleichwertig werden, so ergiebt sich

$$p : q = dA^2_{90} : dD^2_{0,180} = (f^2 + g^2\, Co^2 d) \cdot Se^2 d : f^2 \qquad \mathbf{14}$$

Aus Kombination dieser drei Proportionen erhält man aber ohne Schwierigkeit

$$p' = p + \frac{f^2 \cdot Ct^2 m}{f^2 + g^2\, Co^2 d} \cdot p = p + q \cdot Ct^2 m \cdot Se^2 d$$

$$q' = q + \frac{f^2 + g^2\, Co^2 d}{f^2 \cdot Ct^2 m} \cdot q = q + p \cdot Tg^2 m \cdot Co^2 d$$

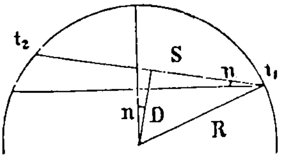
und somit die sich entsprechenden Beziehungen

$$Tg\, m = Se\, d \qquad \text{und} \qquad p' = p + q = q' \qquad \mathbf{15}$$

welche die Richtigkeit des von **Argelander** aufgestellten, ebenso merkwürdigen als praktisch wichtigen Satzes erweisen, dass man aus p + q Beobachtungen auf Einer Sehne oder auf den beiden Sehnen, für welche Tg m = Se d ist, beide Positionskomponenten ebensogut bestimmt, als wenn man speciell die Eine aus p Beobachtungen am Centrum und die Andere aus q Beobachtungen am Rande ableitet, — wobei man überdies des Vorteiles geniesst, die Vergleichsterne nicht wechseln zu müssen. Für d = 0, 30, 60° ergeben sich nach 15 die Werte m = 45° 0', 49° 7', 63° 27'. — Noch bleibt beizufügen, dass der oben als eine Konstante, aus kleinen Sternen bestimmte Sehfehler f für sehr helle Sterne infolge der Irradiation, und ebenso für Planeten, Kometen, etc., wesentlich andere Werte annimmt: So z. B. erhielt **Argelander** 1843 aus Beobachtungen des Kometen Faye $f = 0^s{,}396$, d. h. einen mehr als vierfachen Wert.

397. Der Einfluss von Refraktion, Eigenbewegung und starker Deklination. — Für etwas genauere Bestimmungen mit dem Kreismikrometer muss vor allem aus, wenn es sich, wie in den meisten Fällen, um die Position eines Wandelsternes handelt, nachträglich noch dessen Eigenbewegung Rechnung getragen werden [a]; ferner hat man, namentlich bei etwas tiefem Stande der beiden Gestirne, den für sie merklich verschiedenen Einfluss der Refraktion zu berücksichtigen [b], und endlich ist für dem Pole nahe Sterne zu beachten, dass die von ihnen beschriebenen Wege nicht mehr als Sehnen betrachtet werden dürfen [c].

Zu 397: *a.* Nimmt die Rektascension eines Gestirnes (a, d) in jeder Zeitsekunde um △a Zeitsekunden, die Deklination um △d Bogensekunden zu, so wird dadurch einerseits, wenn $t_2 - t_1 = 2t$ ist, der Austritt um $2t \cdot \triangle a$, also der Durchgang durch die Mitte der Sehne um $dt = t \cdot \triangle a$ verspätet, und anderseits beschreibt das Gestirn eine um n



gegen den Parallel geneigte Sehne, so dass nahe

$$\mathrm{Tg}\,n = \frac{t \cdot \triangle d}{15\,t \cdot \mathrm{Co}\,d} = \frac{\triangle d}{15 \cdot \mathrm{Co}\,d} \qquad \mathbf{1}$$

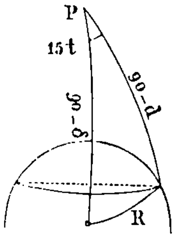
ist. Da nun $D^2 = R^2 - S^2$ wo $S = 15\,t \cdot \mathrm{Co}\,d$ ist, so erhält man

$$D \cdot dD = -S \cdot dS \quad \text{und} \quad dS = \frac{S \cdot dt}{t} = S \cdot \triangle a \quad \text{also} \quad dD = -\frac{S^2}{D} \cdot \triangle a \qquad \mathbf{2}$$

Ist ferner $\triangle t$ die Zeit, in welcher der Weg von der Sehnenmitte bis zum Deklinationskreis des Mittelpunktes zurückgelegt wird, so hat man

$$15 \cdot \triangle t \cdot \mathrm{Co}\,d = D \cdot \mathrm{Tg}\,n \quad \text{also} \quad \triangle t = \frac{D \cdot \mathrm{Tg}\,n}{15 \cdot \mathrm{Co}\,d} = \frac{D \cdot \triangle d}{(15 \cdot \mathrm{Co}\,d)^2} \qquad \mathbf{3}$$

Man wird somit die früher ohne Rücksicht auf die Eigenbewegung berechneten Werte für Rektascension und Deklination nachträglich noch um die durch 3 und 2 bestimmten Korrektionen $\triangle t$ und dD zu vermehren haben. — *b.* Durch die Refraktion wird die von einem Sterne bei mittlerer Zenitdistanz z beschriebene Sehne nahe gleichmässig um eine Grösse gehoben, welche (177 : 7) von $r = \alpha \cdot \mathrm{Tg}\,z$ abhängt, — zugleich aber, da z nach und nach aus $z - dz$ in $z + dz$ übergeht, wo (177 : 6) $dz = 15 \cdot t \cdot \mathrm{Si}\,v \cdot \mathrm{Co}\,d$ ist, also die Refraktion eine aus Tab. VI zu erhebende Veränderung dr erleidet, etwas gedreht, und zwar (177 : 7, 8) wie wenn der Stern die Eigenbewegungen $\triangle a = dr \cdot \mathrm{Si}\,v \cdot \mathrm{Se}\,d : (2t \cdot 15)$ und $\triangle d = dr \cdot \mathrm{Co}\,v : 2t$ hätte. Während nun die mit der ersten Verschiebung zusammenhängenden Korrektionen für die beiden zu vergleichenden Sterne nahe gleich gross sind und sich daher in der Differenz beinahe aufheben, so hängen dagegen die durch die Drehung veranlassten, welche mit den eben angegebenen Werten von $\triangle a$ und $\triangle d$ nach den obigen 2 und 3 berechnet werden können, von den für beide Sterne meist verschiedenen D ab, und sind daher in der Regel nicht zu vernachlässigen. Da ich jedoch später (460) noch in allgemeinerer Weise auf solche Refraktionswirkungen zurückzukommen haben werde, so begnüge ich mich hier mit vorstehenden, für ungefähre Berechnung ausreichenden Andeutungen und den historischen Angaben, dass schon **Boscovich** und seine ersten Nachfolger den Einfluss der Refraktion ins Auge fassten, — sodann **Lalande** (Mém. Par. 1766 und Astr. 3. éd. II 682 f.), **Kästner** (Nov. Comm. Gott. III), **Lexell** (Mém. Pét. 1774), **Cagnoli** (Trig. 440 f.), **Schubert** (Mém. Pét. 1812), etc., denselben näher zu bestimmen suchten, — namentlich aber Ludwig **Schleiermacher** (Darmstadt 1785 — ebenda 1844; Gymnasialprof. und Oberbaurat Darmstadt) und **Bessel** fast gleichzeitig (Mon. Corr. 17 von 1808) diese Untersuchungen sehr gründlich durchführten. Letzterer kam noch später (A. N. 69 von 1824) darauf zurück und es sind die von ihm aufgestellten Formeln, von welchen diejenigen von S. C. **Chandler** (A. N. 2628 von 1884) nur Modifikationen sind, noch jetzt die meist gebrauchten. Der von **Gauss** (vgl. Astr. Viert. X 215) in seinen Vorlesungen vorgezeichnete, dann wieder von C. A. **Peters** (A. N. 177 von 1830), und noch neuerdings in der Abhandlung „C. **Schrader,** Über die Wirkung der astr. Strahlenbrechung auf Beobachtungen mit dem Kreismikrometer. Göttingen 1874 in 8." eingeschlagene Weg, bei welchem gewissermassen der Einfluss vom Stern auf das Mikrometer übergetragen wird, erscheint mir weniger naturgemäss. — *c.* Darf für dem Pole nahe Sterne der Weg nicht mehr mit der Sehne identifiziert werden, so bleibt zwar die Rektascensionsbestimmung davon unberührt, aber die ohne Rücksicht darauf berechnete Deklination bedarf einer



kleinen Korrektion: Bezeichnet nämlich t wie oben die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen, so hat man

$$\mathrm{Co}\,R = \mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Si}\,\delta + \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,15\,t$$

oder $\mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_2\,R = \mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_2\,(d-\delta) + \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^{15}\!/_2\,t$

und somit

$$(d-\delta)^2 \doteq R^2 - \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot (15\,t)^2$$
$$= R^2 - \mathrm{Co}^2\,d \cdot (15\,t)^2 - (\mathrm{Co}\,\delta - \mathrm{Co}\,d) \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot (15\,t)^2$$

folglich, wenn $D = \sqrt{R^2 - \mathrm{Co}^2\,d \cdot (15 \cdot t)^2}$ **4**

den ohne Rücksicht auf die Krümmung berechneten Abstand des Centrums von der Sehne bezeichnet,

$$(d-\delta)^2 \doteq D^2 - (d-\delta)\,\mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot (15\,t)^2 \cdot \mathrm{Si}\,1''$$

oder mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$d - \delta \doteq D - (d-\delta)\,\mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Co}\,d\,.\,(15\,t)^2 \cdot \mathrm{Si}\,1'' : 2\,D$$

und somit, wenn man diese Gleichung nach $(d-\delta)$ löst, dabei nur die zwei ersten Glieder des Quotienten beibehaltend,

$$d - \delta \doteq D - {}^1\!/_2\,\mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Co}\,d\,(15\,t)^2 \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad \mathbf{5}$$

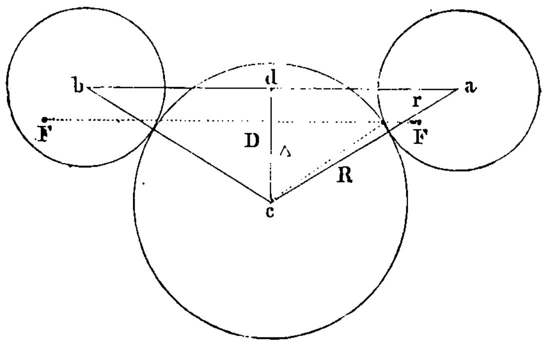
Schreibt man aber diese Gleichung für beide Sterne auf und nimmt die Differenz, so erhält man

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 &= D_1 - D_2 - {}^1\!/_2\,\mathrm{Si}\,1''\left(\mathrm{Tg}\,d_1\,\mathrm{Co}^2\,d_1\,(15\,t_1)^2 - \mathrm{Tg}\,d_2\,\mathrm{Co}^2\,d_2\,(15\,t_2)^2\right) \\ &\doteq D_1 - D_2 - {}^1\!/_2\,\mathrm{Si}\,1''\,\mathrm{Tg}\,{}^1\!/_2\,(d_1 + d_2)\left[R^2 - D_1{}^2 - (R_2 - D_2)^2\right] \\ &= (D_1 - D_2) \cdot \left[1 + {}^1\!/_2\,(D_1 + D_2)\,\mathrm{Tg}\,{}^1\!/_2\,(d_1 + d_2)\,\mathrm{Si}\,1''\right] \end{aligned} \qquad \mathbf{6}$$

woraus sich die nötige Korrektion ergiebt.

398. Die Bestimmung von Sonnenfleckenpositionen. — Der Radius eines Kreismikrometers kann auch aus den Zeiten abgeleitet werden, zu welchen die Sonne mit demselben in äusserer oder innerer Berührung steht, und obschon der auf diese Weise erhaltene Wert eine etwas geringere Genauigkeit besitzen mag, so ist er doch entschieden vorzuziehen, wenn es sich speciell um Beobachtungen an der Sonne handelt, zumal dabei zugleich die Distanz der von dem Sonnenmittelpunkte beschriebenen Sehne vom Mittelpunkte des Mikrometers und die Durchgangszeit des erstern durch den Deklinationskreis des zweiten erhalten wird [a]. Beobachtet man sodann z. B. die Ein- und Austrittszeiten von Flecken, so ergeben sich aus denselben durch leichte Rechnung [b] auch die Distanzen der durch sie beschriebenen Sehnen vom Centrum, sowie ihre Durchgangszeiten durch jenen Deklinationskreis, also durch Vergleichung mit den für den Mittelpunkt erhaltenen Werten ihre Positionen auf der Sonne [c].

Zu 398: *a.* Da sich die Deklination d der Sonne während ihrem Durchgange kaum merklich ändert, so kann man annehmen, dass ihr Mittelpunkt eine Gerade a b des Abstandes D vom Mittelpunkte c des Mikrometers beschreibe. Erhält man aber t als Zwischenzeit der beiden äussern Berührungen



oder der entsprechenden Lagen a und b des Sonnencentrums, so hat man nach dem Frühern $ab = 2 \cdot ad = m \cdot t \cdot Co\, d$ zu setzen, wo $m = 15$ oder $= 15 \times 0{,}9972$ ist, je nachdem t in wahrer Sonnenzeit oder in Sternzeit bestimmt wird. Man hat somit, wenn r den scheinbaren Sonnenradius bezeichnet,

$$D^2 = (R + r)^2 - {}^1/_4\, m^2 \cdot t^2 \cdot Co^2\, d \qquad \textbf{1}$$

und entsprechend, wenn t' die Zwischenzeit der innern Berührungen ist,

$$D^2 = (R - r)^2 - {}^1/_4\, m^2 \cdot t'^2 \cdot Co^2\, d \qquad \textbf{2}$$

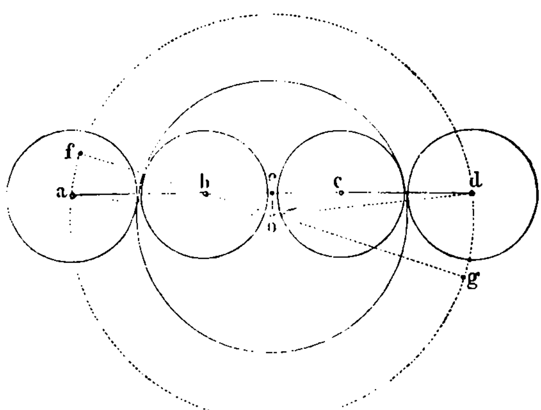
woraus

$$R = \frac{m^2 \cdot Co^2\, d \cdot (t + t')\,(t - t')}{16\, r} \qquad \textbf{3}$$

folgt. — *b.* Bezeichnet $\triangle$ die Entfernung der Bahn eines Fleckens F vom Mittelpunkte und τ die Zwischenzeit zwischen Ein- und Austritt desselben, so hat man entsprechend 1

$$\triangle^2 = R^2 - {}^1/_4\, m^2 \cdot \tau^2 \cdot Co^2\, d \qquad \textbf{4}$$

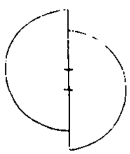
und kann somit $\triangle$, folglich auch die Deklinationsdifferenz $D - \triangle$ berechnen, während sich die Rektascensionsdifferenz einfach ergiebt, indem man von dem Mittel der für die Sonnenränder in wahrer Sonnenzeit erhaltenen Ein- und Austrittszeiten dasjenige der für den Flecken erhaltenen subtrahiert. — *c.* Schon **Boscovich** lehrte den Radius aus Sonnenbeobachtungen in folgender Weise zu bestimmen:



Sind $ad = \alpha$ und $bc = \beta$ aus den 4 Berührungszeiten bekannt, so sind es auch $ab = {}^1/_2\,(\alpha - \beta)$ und $bd = {}^1/_2\,(\alpha + \beta)$. Anderseits hat man $fo = R + r$ und $bo = R - r$, also $fb = fo - bo = 2r$ und $bg = fo + bo = 2R$, während geometrisch $fb \times bg = ab \times bd$ oder also $4rR = {}^1/_4(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$, woraus sich für R eine vollständig mit der oben nach **Bessel** (Mon. Corr. 24 von 1811) abgeleiteten 4 übereinstimmende Formel ergiebt. — Vgl. ferner „**Spörer**, Beobachtungen von Sonnenflecken (A. N. 1315 und 20 von 1861; auch Anclam 1862)".

399. Die ersten Heliometer. — Nachdem schon **Römer** gezeigt hatte, dass man mit einem Fernrohr, das zwei Objektive besitze, „welche einander genähert und von einander entfernt werden können“, im Stande wäre, die Durchmesser der Wandelsterne zu messen“, kamen etwas mehr als ein halbes Jahrhundert später, mutmasslich unabhängig von ihm und von einander, Servington **Savery** und Pierre **Bouguer** auf denselben Gedanken [b], und bald darauf erkannte John **Dollond**, dass man die gleiche Aufgabe noch viel einfacher lösen könne, indem man dem Objektive eines Fernrohrs ein zweites, drehbares und zerschnittenes Objektiv vorsetze, dessen beide Hälften messbar gegen einander verschiebbar seien, ja auf solche Weise ein vorzügliches Mittel erhalten werde, um überhaupt die gegenseitige Lage zweier Punkte zu bestimmen [c].

Zu 399: *a.* J. B. **Duhamel** erzählt nämlich auf pag. 148 seiner „Regiæ scientiarum academiæ historia. Parisiis 1701 in 4.“ unter anderm: „Die 12 decembri 1675 D. **Römer** legit tractatum de ratione dimetiendi diametros Lunæ et aliorum siderum ope Telescopii duobus vitris objectivis instructi quæ ad moveri et removeri possunt“. — *b.* Im Jahre 1743 schlug Servington **Savery** von Exeter der Roy. Society vor, kleine Distanzen dadurch zu messen, dass man, mit Hilfe zweier neben einander stehender und gegenseitig verschiebbarer Objektive, Doppelbilder erzeuge, und dann das Bild des einen Richtpunktes mit dem Doppelbilde des andern zusammenbringe. Seine Abhandlung, welche **Bradley** zur Begutachtung übergeben wurde, blieb jedoch bei diesem liegen und wurde erst 1753 unter dem Titel „A new way of measuring the diameter of the Sun“ in den Phil. Trans. abgedruckt, als Jam. **Short** erfuhr, es habe **Bouguer** nicht nur 1748 der Pariser Akademie dieselbe Idee in seiner Abhandlung „De la mesure des diamètres des planètes (Mém. Par. 1748, erschienen 1752)“ vorgetragen, sondern auch bereits mit Erfolg angewandt. — *c.* In demselben Jahre 1753, wo das neue **Heliometer** in England bekannt wurde, legte **Short** der Roy. Society im Namen von John **Dollond** eine „Description of a contrivance for measuring small angles (Ph. Tr. 1753)“ vor, welche zeigte, dass derselbe Zweck durch Bisection des Objektives noch viel einfacher erreicht werden könne, wobei die zur Herbeiführung jener Coincidenz notwendige Grösse der Verschiebung ein Mass für die Distanz, die Richtung der Verschiebung aber den Positionswinkel ergebe. Übrigens scheint auch **Bouguer** (vgl. den in Compt. rend. 1873 II 3 abgedruckten, von 1751 I 19 datierenden Brief von Delisle an Bose) auf die neue Fährte gekommen zu sein, jedoch dieselbe nicht weiter verfolgt zu haben, da der so gut unterrichtete **Lalande** nichts davon sagt, sondern (Astr. 3. éd. II 639 f.) bei einlässlicher Beschreibung des Heliometers die französische und englische Konstruktion ganz auseinander hält. Noch mag beigefügt werden, dass die von **Dollond** ausgeführten Heliometer in einem zerschnittenen, mit den nötigen Bewegungen versehenen Sammelglase bestanden, welches dem gewöhnlichen Objektive des Fernrohrs vorgesteckt wurde, während für die Okularröhre ein Einsatzstück beigegeben war, — und endlich der Kuriosität wegen, dass **Lambert** (vgl. Beiträge III 221) versuchte, sich durch Zerschneiden eines Brillenglases ein kleines und billiges Heliometer zu erstellen.



400. Die neuern Heliometer. — Durch unmittelbare Bisection der Objektivlinse eines grössern Fernrohrs ein wirksames **Heliometer** als selbständiges Instrument zu erstellen, scheint von Dollond noch nicht versucht worden zu sein, während dagegen bereits **Fraunhofer** zu Anfang des laufenden Jahrhunderts die sich entgegenstellenden konstruktiven Schwierigkeiten fast gänzlich überwand [a]. In der neuern Zeit haben sodann namentlich die jüngern **Repsold** Instrumente dieser Art geliefert, welche für die feinsten Messungen genügen [b], jedoch würde es hier zu weit führen, auf den eigentlichen Detail einzutreten und es muss dafür, sowie für die Theorie dieses komplizierten, kostbaren und daher trotz seiner Vorzüge wenig verbreiteten Instrumentes, auf die Speciallitteratur verwiesen werden [c]. Ebenso muss ich mich darauf beschränken, die hübsche Idee von **Houzeau**, das Heliometer durch eine gewisse Abänderung für Beobachtung des Venusdurchganges von 1882 dienstbar zu machen, nur kurz zu erwähnen [d].

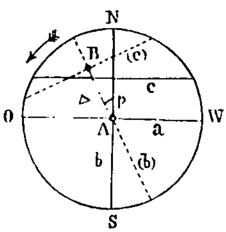
Zu 400: *a.* Das erste von München gelieferte Heliometer war dasjenige, welches **Gauss** im Sommer 1814 erhielt und auf 43" Brennweite 34''' Öffnung besass; er schrieb über dasselbe 1814 IX 13 sowohl an Schumacher (vgl. Briefwechsel) als an Horner (vgl. Notiz 269) in sehr anerkennender Weise und fügte in letzterm Briefe bei: „Dies schöne Instrument zeichnet sich auch dadurch aus, dass es zur Repetition eingerichtet ist, was durch unabhängige Beweglichkeit beider Objektivhälften bewirkt wird". Vergleiche für dasselbe und das etwas später an **Olbers** gelieferte Exemplar auch die zu jener Zeit von dem Münchner Institute in Lithographie ausgegebene Abbildung (Verz. 8). — Im Jahre 1824 nahm sodann **Fraunhofer** für Königsberg ein grösseres Heliometer von 70''' Öffnung auf 8' Brennweite in Arbeit; jedoch konnte dasselbe erst nach seinem 1826 erfolgten Tode vollendet und 1829 an **Bessel** abgeliefert werden, welcher nun im folgenden Jahre (A. N. 189 von 1830) eine „Vorläufige Nachricht" und sodann 1841 seine grundlegende Abhandlung „Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte (Astr. Unters. I 55—152; einzelne Partien schon A. N. 415 von 1840)" gab. — *b.* Durch die den **Repsold** gelungene Vervollkommnung des Heliometers hat dieses Instrument, welches überdies keiner Feldbeleuchtung bedarf, nach dem Zeugnisse aller damit Vertrauten dem Positionsmikrometer (402) entschieden Vorrang abgewonnen, und so soll z. B. das neuerlich von dieser Firma für das Yale-College in New-York gelieferte Heliometer eine nach allen Richtungen geradezu wundervolle Leistung sein. — *c.* Ausser der erwähnten Schrift von Bessel sind namentlich die beiden Werke „**Hansen**, Ausführliche Methode mit dem Fraunhofer'schen Heliometer Beobachtungen anzustellen. Gotha 1827 in 8., — und: Hugo **Seeliger**, Theorie des Heliometers. Leipzig 1877 in 8." zu vergleichen. Ferner verweise ich auf die Abhandlungen: „R. **Straubel**, Über die Berechnung der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen durch Randintegrale mit besonderer Berücksichtigung der Theorie der Beugung im Heliometer. Jena 1888 in 8., — und: H. **Battermann**, Untersuchungen über die Gestalt der Bilder und die Theorie der Messungen ausserhalb der optischen Axe von astronomischen Instrumenten; mit specieller Berücksichtigung des Heliometers mit ebener Führung (A. N. 2878 bis 2880 von 1889)". — *d.* Für den Venusdurchgang von 1882 liess nämlich **Houzeau** (vgl. Ann. Brux. V von 1884) durch H. **Grubb** in Dublin zwei Linsen von $4^m,24$ und $0^m,14$ Focaldistanz zerschneiden und nach den Zeichnungen von **Niesten** zu zwei Heliometern so zusammenstellen, dass jedes derselben von jeder der Linsen die eine Hälfte erhielt, somit ein grosses und ein kleines Bild erzeugte; dabei waren die beiden Hälften so gestellt, dass ihre Bilder mit demselben Okulare deutlich gesehen wurden, und die Verhältnisse so gewählt, dass das kleine Bild der Sonne ein wenig grösser als das grosse der Venus ausfiel, somit letzteres durch Verschieben der kleinen Linse centrisch auf ersteres gelegt und somit in gewohnter Weise Distanz und Position abgelesen werden konnte.

401. Einige andere Doppelbildmikrometer. — Ausser dem Heliometer sind im Laufe der Zeiten noch mehrere andere Doppelbildmikrometer vorgeschlagen worden, von welchen beispielsweise dasjenige angeführt werden mag, welches **Rochon** mit Hilfe doppeltbrechender Krystalle erstellte [a], — ferner dasjenige, welches **Amici** erhielt, indem er zwischen Objektiv und Okular eine zerschnittene Hilfslinse einschob [b], — und vor allem aus dasjenige, welches **Airy** nach langjährigen Versuchen dadurch zu stande brachte, dass er die Bisection auf eine der Okularlinsen übertrug [c].

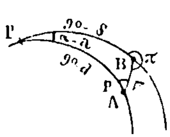
Zu 401: *a.* Vgl. das „Mémoire sur un micromètre objectif", welches Alexis-Marie de **Rochon** (Brest 1741 — Paris 1817; Dir. Obs. Brest, später Akad. Par.; „Vie" durch Delambre, Paris 1819 in 4.) 1777 der Pariser Akademie vorlegte und sodann in sein „Recueil de mémoires sur la mécanique et sur la physique. Brest 1783 in 8." aufnahm. Es wurde noch später teils durch ihn selbst, teils durch **Arago**, wiederholt besprochen und etwas abgeändert, scheint jedoch nie zu grösserer praktischer Bedeutung gelangt zu sein. — *b.* Vgl. **Amici**, Lettres sur un nouveau micromètre intermédiaire (Corresp. astr. IX von 1823)". Sein Vorschlag wurde später von **Steinheil** neuerdings aufgenommen. — *c.* Den Grundgedanken **Airys**, die Bisection auf das Okular überzutragen, hatte schon **Ramsden** (vgl. Ph. Tr. 1779), aber die Ausführung gelang ihm noch nicht in befriedigender Weise, und ebenso ging es später **Watkins**, **Jones**, etc., ja auch **Airy** hatte noch nach 1840, wo er sein Mikrometer in den Greenwicher Beobachtungen beschrieb, dasselbe mehrfach abzuändern, bis er ganz befriedigende Resultate erhielt: Schliesslich blieb er bei einem terrestrischen Okular mit vier Linsen stehen, von welchen, vom Auge ab gerechnet, die dritte durchschnitten war; das zu betrachtende Bild fällt ausserhalb der Linsen, und der Apparat lässt sich somit, wie jedes andere positive Okular, vor den Fäden des Fadenmikrometers anbringen. Für weitern Detail und die betreffenden theoretischen Untersuchungen verweise ich auf „**Airy**, On a new construction of the divided eye glass micrometer (Mem. Astr. Soc. 15 von 1846), — und: **Kaiser**, Untersuchung des Airy'schen Doppelbildmikrometers (Ann. Leyden III von 1872)". — Anhangsweise erinnere ich noch an „**Jeaurat**, Sur les lunettes displantidiennes ou de double image (Mém. Par. 1779)", wo ein Mikrometer beschrieben wird, bei welchem „une image droite et une image renversée" erzeugt und benutzt werden.

402. Die Positionsmikrometer. — Mit dem Heliometer vermag gegenwärtig nur noch das sog. **Positionsmikrometer** zu konkurieren, welches von dem früher beschriebenen Schraubenmikrometer, abgesehen von besserer Ausführung, wesentlich darin abweicht, dass seine Fadenebene messbar gedreht werden kann, ohne dass dabei der Kreuzungspunkt der festen Faden seine Lage verändert, wodurch ebenfalls möglich wird, vollständige und scharfe Positionen zu erhalten [a].

Zu 402: *a.* Schon bei dem durch W. **Herschel** in seiner „Description of a micrometer taking the angles of position (Ph. Tr. 1781)" beschriebenen Schraubenmikrometer war die für das **Positionsmikrometer** charakteristische Eigenschaft wenigstens im Principe vorhanden, wenn auch gewöhnlich angenommen wird, dasselbe datiere erst von 1824, wo es **Fraunhofer** gelang, ihm durch vorzügliche Ausführung eine so grosse Vollkommenheit zu verschaffen, dass es zu den feinsten Messungen tauglich erschien. Es besitzt ausser zwei



festen, zu einander senkrechten Faden (a, b) mindestens noch Einen, zu einem der erstern (z. B. zu a) parallelen und mit einer feinen Mikrometerschraube verschiebbaren Faden (c). — Soll es zur Bestimmung von Rektascensions- und Deklinations-Differenzen verwendet werden, so dreht man das ganze Mikrometer so, dass ein Stern dem Faden a folgt, und lässt sodann beide Sterne durch b gehen, zugleich c auf den zweiten Stern einstellend: Die Differenz der Durchgangszeiten giebt sodann unmittelbar die Rektascensionsdifferenz, — die Drehung der Mikrometerschraube aber, welche nötig ist, um c zur Coincidenz mit a zurückzuführen, die Deklinationsdifferenz. — Will man dagegen die Lage eines Sternes B gegen einen Stern A und dessen Deklinationskreis festlegen, d. h. also den einen Stern auf den andern, anstatt durch rechtwinklige Coordinaten, durch Polarcoordinaten beziehen, so wird, nachdem wieder a durch Drehen des Mikrometers so gestellt ist, dass ihm A folgt, die nunmehrige Lage am Positionskreise, dessen Teilung gewöhnlich von Nord über Ost läuft, abgelesen, — sodann A in das Fadenkreuz gebracht und darin, bei parallaktischer Montierung mit Hilfe des Uhrwerks, festgehalten, — nunmehr das Mikrometer gedreht, bis b durch B geht und auch c nach B gebracht: Die Ablesungen an der Trommel der Mikrometerschraube und am Positionskreise geben sodann unmittelbar die Distanz $AB = \Delta$ und den Positionswinkel p. — Zur Vermittlung beider Bestimmungsweisen dienen die nach den sog. Gauss'schen Formeln (90) unmittelbar aus beistehender Figur folgenden Beziehungen



$$\begin{aligned}
\mathrm{Si}\ {}^1\!/_2(\pi - p)\cdot \mathrm{Co}\ {}^1\!/_2\Delta &= \mathrm{Co}\ {}^1\!/_2(\delta - d)\cdot \mathrm{Co}\ {}^1\!/_2(a - \alpha)\\
\mathrm{Si}\ {}^1\!/_2(\pi + p)\cdot \mathrm{Si}\ {}^1\!/_2\Delta &= \mathrm{Si}\ {}^1\!/_2(\delta - d)\cdot \mathrm{Co}\ {}^1\!/_2(a - \alpha)\\
\mathrm{Co}\ {}^1\!/_2(\pi - p)\cdot \mathrm{Co}\ {}^1\!/_2\Delta &= \mathrm{Si}\ {}^1\!/_2(\delta + d)\cdot \mathrm{Si}\ {}^1\!/_2(a - \alpha)\\
\mathrm{Co}\ {}^1\!/_2(\pi + p)\cdot \mathrm{Si}\ {}^1\!/_2\Delta &= \mathrm{Co}\ {}^1\!/_2(\delta + d)\cdot \mathrm{Si}\ {}^1\!/_2(a - \alpha)
\end{aligned} \tag{1}$$

welchen meistens, da Δ, $a - \alpha$ und $\delta - d$ als klein zu betrachten sind, und dann zugleich $\pi = 180^0 + p$ oder ${}^1\!/_2(\pi + p) = 90^0 + p$, sowie ${}^1\!/_2(\delta + d) = d$ gesetzt werden dürfen, die aus ihnen folgenden bequemen Näherungsformeln

$$\alpha - a = \Delta \cdot \mathrm{Si}\ p \cdot \mathrm{Se}\ d \qquad \delta - d = \Delta \cdot \mathrm{Co}\ p \tag{2}$$

substituiert werden dürfen. — Für einen Vorschlag, Kreis- und Positions-Mikrometer zu verbinden, vgl. „H. **Kobold**, Das Positions-Ringmikrometer (Copernicus 1881)“.

403. Die Theorie der Mikrometerschrauben. — Der Grad der Genauigkeit, welcher bei Messungen mit Heliometer und Positionsmikrometer erhältlich ist, hängt wesentlich von der Vollkommenheit der eingesetzten Mikrometerschrauben ab, da die Messungen auf der Voraussetzung beruhen, dass das durch die Schraube bewirkte lineare Vorrücken der an dem Schraubenkopfe abgelesenen Bewegung proportional sei. Wenn nun auch angenommen werden darf, dass laut den beim Schneiden einer Schraube üblichen Manipulationen die verschiedenen Schraubengänge identisch werden, so ist dagegen in der Regel jeder einzelne derselben mit gewissen systematischen Fehlern behaftet und die sog. **Theorie der Schrauben** besteht zunächst in Lösung der Aufgabe, diese systematischen Fehler darzustellen und entweder zu eliminieren oder in Rechnung zu bringen *a*.

Zu 403: *a*. Jeder Ablesung u am Schraubenkopfe ist eine kleine Korrektion beizufügen, welche man nach dem Vorgange von **Bessel** gleich

$$a_1 \cdot \mathrm{Co}\, u + b_1 \cdot \mathrm{Si}\, u + a_2 \cdot \mathrm{Co}\, 2u + b_2 \cdot \mathrm{Si}\, 2u + \ldots\ldots$$

setzen kann, wo die a_1, b_1, a_2, b_2, ... für verschiedene Gänge derselben Schraube als nahe gleichwertig angesehen werden dürfen. Hat man somit beim Messen einer Distanz f am Schraubenkopfe die Ablesungen u und u' erhalten, so hat man einerseits

$$\begin{aligned} f &= u' - u + a_1(\mathrm{Co}\, u' - \mathrm{Co}\, u) + a_2(\mathrm{Co}\, 2u' - \mathrm{Co}\, 2u) + \ldots \\ &\quad + b_1(\mathrm{Si}\, u' - \mathrm{Si}\, u) + b_2(\mathrm{Si}\, 2u' - \mathrm{Si}\, 2u) + \ldots \\ &= u' - u - 2a_1\, \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2}(u'+u) \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2}(u'-u) - 2a_2\, \mathrm{Si}\,(u'+u) \cdot \mathrm{Si}\,(u'-u) - \ldots \\ &\quad + 2b_1\, \mathrm{Co}\, \tfrac{1}{2}(u'+u) \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2}(u'-u) + 2b_2\, \mathrm{Co}\,(u'+u) \cdot \mathrm{Si}\,(u'-u) + \ldots \end{aligned} \qquad 1$$

während anderseits für die Grösse f ein nahe richtiger Wert erhalten werden muss, wenn man sie von verschiedenen Anfangsstellungen der Schraube aus misst (z. B. das 0.00, 0.10, 0.20, ... 0.90 eines hundertteiligen Schraubenkopfes auf den Anfangspunkt von f einstellend) und aus sämtlichen Werten das Mittel zieht. Das so gefundene f wird nun mit jedem einzelnen Werte von $u' - u$ so nahe übereinstimmen, dass man füglich in den Korrektionsgliedern u' durch $u + f$ ersetzen darf, wofür 1 in

$$\begin{aligned} u' - u - f &= 2a_1 \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2} f \cdot \mathrm{Si}\,(u + \tfrac{1}{2} f) + 2a_2 \cdot \mathrm{Si}\, f \cdot \mathrm{Si}\,(2u + f) + \ldots \\ &\quad - 2b_1 \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2} f \cdot \mathrm{Co}\,(u + \tfrac{1}{2} f) - 2b_2 \cdot \mathrm{Si}\, f \cdot \mathrm{Co}\,(2u + f) - \ldots \end{aligned} \qquad 2$$

übergeht. Schreibt man aber letztere Gleichung für alle zur Bestimmung von f benutzten Werte von u auf, so ergeben sich nach der gewohnten Weise die zur Ermittlung der a und b dienenden Normalgleichungen, und zwar reduzieren sich dieselben mit Hilfe goniometrischer Beziehungen sehr wesentlich, so z. B. bei Benutzung der oben erwähnten 10 Anfangsstellungen auf

$$\begin{aligned} &\Sigma(u'-u-f) \cdot \mathrm{Si}\,(u+\tfrac{1}{2}f) = 10a_1 \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2} f \qquad \Sigma(u'-u-f)\, \mathrm{Si}\,(2u+f) = 10a_2 \cdot \mathrm{Si}\, f \\ &\Sigma(u'-u-f) \cdot \mathrm{Co}\,(u+\tfrac{1}{2}f) = -10b_1 \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2} f \qquad \Sigma(u'-u-f)\, \mathrm{Co}\,(2u+f) = -10b_2 \cdot \mathrm{Si}\, f \end{aligned} \qquad 3$$

etc., so dass die Berechnung eine ganz leichte wird. — Setzt man in 2 successive für u rechts die Werte -2α, $-\alpha$, 0, α, 2α ein, und addiert die erhaltenen 5 Gleichungen, so erhält man bei Beschränkung auf die vier ersten Glieder

$$\Sigma(u' - u) - 5f = 2A \cdot \mathrm{Si}\, {}^1\!/_2 f \cdot (a_1 \,\mathrm{Si}\, {}^1\!/_2 f - b_1 \cdot \mathrm{Co}\, {}^1\!/_2 f) + 2B \cdot \mathrm{Si}\, f \cdot (a_2 \cdot \mathrm{Si}\, f - b_2 \cdot \mathrm{Co}\, f) \qquad \mathbf{4}$$

wo $A = 1 + 2\,\mathrm{Co}\,\alpha + 2\,\mathrm{Co}\,2\alpha \qquad B = 1 + 2\,\mathrm{Co}\,2\alpha + 2 \cdot \mathrm{Co}\,4\alpha$

Bezeichnet aber s die Seite des regelmässigen Zehnecks des Radius r, so ist einerseits $s = 2r \cdot \mathrm{Co}\,72^0$ und anderseits (57 : 4) $s = {}^1\!/_2 r(\sqrt{5} - 1)$, und somit $\mathrm{Co}\,72^0 = {}^1\!/_4(\sqrt{5} - 1) = \mathrm{Co}\,288^0$, folglich $\mathrm{Co}\,144^0 = 2\,\mathrm{Co}^2\,72^0 - 1 = -{}^1\!/_4(\sqrt{5} + 1)$, also

$$1 + 2\,\mathrm{Co}\,72^0 + 2 \cdot \mathrm{Co}\,144^0 = 0 = 1 + 2 \cdot \mathrm{Co}\,144^0 + 2 \cdot \mathrm{Co}\,288^0 \qquad \mathbf{5}$$

Es verschwinden also für $\alpha = 0{,}20 = 72^0$ sowohl A als B, so dass in diesem Falle nach 4

$$f = {}^1\!/_5 \cdot \Sigma(u' - u) \qquad \mathbf{6}$$

d. h. wenn man eine Distanz mittelst einer Mikrometerschraube fünfmal misst, dabei successive die Anfangsstellungen -0.40, -0.20, 0, 0.20, 0.40 benutzend, so ist das Mittel aus den fünf erhaltenen Resultaten von den durch die vier ersten Glieder von 2 dargestellten systematischen Fehlern der Schraube frei.

404. Die praktische Untersuchung. — Um die praktische Verwertung der soeben auf Grundlage einer betreffenden Musterarbeit von **Bessel** [a] entwickelten Theorie der Schraube zu verdeutlichen, erscheint es am besten, einen konkreten Fall ins Auge zu fassen, und so lasse ich unten ein Beispiel folgen, welches ich eben derselben entnehme [b]. Für weitern Detail verweise ich teils auf jene Arbeit, teils auf einige seither erschienene andere Untersuchungen [c].

Zu 404: *a.* Für die Arbeit von **Bessel** vgl. 400 : a. — *b.* Um die Schraube seines Heliometers zu untersuchen, mass **Bessel** z. B. eine etwa der Hälfte eines Schraubenganges entsprechende Distanz 100 mal in der Weise, dass er ihrem Anfangspunkte successive die Trommelstellungen 55.0, 55.1, 55.2, ... 64.9 entsprechen liess, und erhielt so unter anderm die korrespondierenden Werte

u =	55.0	56.0	57.0	58.0	59.0	60.0	61.0	62.0	63.0	64.0
u' − u =	0.4985	4995	5030	5005	4985	4985	4980	5020	5015	5045

so dass der Anfangsstellung 0.0 in dieser Partie der Schraube das in die folgende Tafel eingetragene mittlere Mass 0,50045 entsprach:

u	u' − u	△ u	d u	(u' − u)'	△ u'
0,0 = 0°	0,50045	249	239	0,49785	− 11
1 36	49690	− 106	238	772	− 24
2 72	49440	− 356	− 132	832	36
3 108	49240	− 556	− 516	792	− 4
4 144	49260	− 536	− 462	762	− 34
5 180	49555	− 241	− 21	815	19
6 216	49905	109	320	823	27
7 252	50140	344	260	748	− 48
8 288	50340	544	36	788	− 8
9 324	50350	554	40	848	52
Mittel	f = 0,49796	± 398		0,49796	± 31

Die Tafel enthält auch die Ergebnisse für die übrigen Anfangsstellungen, den Mittelwert $f = 0{,}49796$ ($179^0\ 16',04$) und dessen Vergleichungen Δu mit den Einzelwerten, welche einen ausgesprochenen systematischen Gang erzeigen, sowie endlich deren Mittelwert $\Delta u = \pm\ 0{,}00398$. — Mit Hilfe dieser Werte ergeben sich sodann nach 403 : 3 für die Berechnung der a und b die Normalgleichungen

$$10{,}000 \cdot a_1 = 0{,}01304 \qquad -10{,}000 \cdot b_1 = 0{,}02483 \qquad \mathbf{1}$$
$$0{,}128 \cdot a_2 = 0{,}00014 \qquad 0{,}128 \cdot b_2 = 0{,}00033$$

so dass nach 403 : 2 zu jeder Ablesung u an dieser Schraube die Korrektion

$$du = 0{,}00\,1304 \cdot \mathrm{Co}\, u + 0{,}00\,1094 \cdot \mathrm{Co}\, 2u - 0{,}00\,2483 \cdot \mathrm{Si}\, u + 0{,}00\,2576 \cdot \mathrm{Si}\, 2u \qquad \mathbf{2}$$

beizufügen ist. Die nach dieser Formel für die 10 Stellungen berechneten Werte von du sind ebenfalls in die Tafel eingetragen. — Aus dieser Tafel folgt nun z. B., dass wenn 0,3 auf den Anfang der zu messenden Strecke eingestellt wird, folglich deren Ende in die Nähe von 0,8 zu liegen kömmt, an dem erhaltenen Werte 0,49240 die Korrektionen — 516 und 36 anzubringen sind, wofür derselbe in 0,49240 + 36 — (— 516) = 0,49792 übergeht, wie dies in Kolumne $(u' - u)'$ der Tafel eingetragen ist. Der Mittelwert der $(u' - u)'$ stimmt ganz mit dem frühern f überein; dagegen erzeigen seine Vergleichungen $\Delta u'$ mit den Einzelwerten nicht nur viel kleinere Beträge, sondern es ist auch der systematische Gang verschwunden, so dass 2 als ziemlich guter Ausdruck der untersuchten Schraubenstelle angesehen werden darf. — Anhangsweise mag erwähnt werden, dass auch das 403 : 6 entsprechende Mittel der bei den Stellungen 0.6, 0.8, 0, 0.2, 0.4 erhaltenen Einzelwerte von $u' - u$ mit f bis auf zwei Einheiten der letzten Stelle übereinstimmt. — *c.* Der Litteratur füge ich noch bei: „G. **Müller**, Untersuchungen über Mikrometerschrauben. (Berlin 1876) in fol., — **Winnecke**, Über ein neues Hilfsmittel die periodischen Fehler von Mikrometerschrauben zu bestimmen (A. N. 2179 von 1878), — C. **Reichel** und A. **Westphal**: Über Erzeugung und Untersuchung von Mikrometerschrauben (Z. f. Instr. 1881), — Victor **Knorre** (Nicolajev 1840 geb., Obs. Berlin; Sohn von Karl Friedrich Kn., Dorpat 1801 — Berlin 1883, Dir. Obs. Nicolajev, und Enkel von Ernst Friedrich Kn., Neuhaldensleben 1759 — Dorpat 1810, Prof. math. und Obs. Dorpat), Untersuchungen über Schraubenmikrometer (A. N. 2996—97 von 1890), — etc.“

XVI. Die Geodäsie.

Der grosse Mann eilt seiner Zeit voraus, — Der Kluge geht mit ihr auf allen Wegen, — Der Schlaukopf beutet sie gehörig aus, — Der Dummkopf stellt sich ihr entgegen.

(Bauernfeind.)

---

405. Die geographische Ortsbestimmung. — Während früher unter **Geodäsie** zunächst die sog. „Feldmesskunst" verstanden wurde [a], fasst man jetzt unter diesem Namen meistens die Lehren und Verfahren zusammen, welche sich auf Bestimmung der Grösse und Gestalt der Erde beziehen, und bei dieser Auffassung bildet die Ermittlung der geographischen Länge und Breite oder die sog. **geographische Ortsbestimmung** offenbar eine Fundamentalaufgabe der Geodäsie, so dass wir uns vor allem aus mit dieser zu befassen haben. Da nun aber (217) **einerseits** die geographische Breite mit der Polhöhe übereinstimmt und die Längendifferenz zweier Orte der Differenz der Ortszeiten in einem und demselben Momente proportional ist, — und **anderseits** die Methoden zur Bestimmung der Polhöhe und der richtigen Ortszeit bereits in einem frühern Abschnitte (XIV) einlässlich abgehandelt wurden, so bleiben zur vollständigen Lösung obigen Problemes nur noch die Mittel zu besprechen, welche zur Auffindung jener Differenz der Ortszeiten oder für eine sog. **Uhrvergleichung** vorhanden sind, und dies soll unter den nächstfolgenden Nummern absolviert werden [b].

Zu 405: *a.* Unter jener frühern Annahme, dass „Γεωδαισία = Land- oder Ackertheilung" ein Hauptstück der Feldmesskunst sei, sprach **Coppernicus** in seiner Schrift „De revolutionibus (Cap. 13)" aus, dass ein grosser Teil der „Geodäsie" auf der ebenen Trigonometrie beruhe. Auch zeigt uns z. B. der Buchtitel „Geodaisia, das ist, von gewisser und bewährter Feldmessung. Durch Joh. Conratin von **Ulm** (später: Ulmer), Prediger zu Schaffhausen am Rhein. Strassburg 1580 in 8.", was man noch am Ende des 16. Jahrhunderts unter Geodäsie verstand. — *b.* Zur Ergänzung der frühern Litteraturangaben erwähne ich: „**Bohnenberger,** Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vermittelst des Spiegelsextanten. Göttingen 1795 in 8. (2. A. durch Jahn 1852), — F. T. **Schubert,** Anleitung zur astronomischen Bestimmung von Länge und

Breite. St. Petersburg 1803 in 4. (3. A. 1818), — E. **Laugier**, Usage du cercle méridien portatif pour la détermination des positions géographiques. Paris 1852 in 4., — W. **Valentiner**, Beiträge zur kürzesten und zweckmässigsten Behandlung geographischer Ortsbestimmungen. Leipzig 1869 in 4., — Th. **Albrecht**, Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Leipzig 1874 in 8. (2. A. 1879), — J. **Hilfiker**, Die astronomischen Längenbestimmungen. Aarau 1881 in 8., — etc.“

406. Die Uhrvergleichung durch gleichzeitige Erscheinungen. — Das nächstliegende Verfahren für Uhrvergleichungen, die nicht unmittelbar ausgeführt werden können, besteht wohl (vgl. 217) darin, an beiden Orten eine in demselben physischen Momente vor sich gehende Erscheinung zu beobachten, indem sodann die Differenz der Beobachtungszeiten unmittelbar das Gesuchte ergiebt, — und in der That wurde schon durch **Hipparch** empfohlen, die Längendifferenzen aus Beobachtungen von Mondsfinsternissen abzuleiten [a]. Später wurde auf dem Lande zu gleichem Zwecke ausserdem vielfach die zu jeder Zeit und in beliebiger Anzahl ausführbare Beobachtung von Feuersignalen oder Blickfeuern benutzt [b], — während auf dem Meere, wo überdies die eine Beobachtung durch Vorausberechnung ersetzt werden musste, neben den viel zu seltenen Mondfinsternissen vorzugsweise die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten zur Verwendung kamen [c].

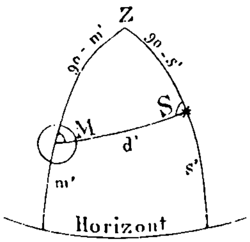
Zu 406: *a.* So einfach im Principe die von **Hipparch** empfohlene Methode war, so fand sie anfänglich, wegen der Unsicherheit in der Zeitbestimmung und der Schwierigkeit, sich korrespondierende Beobachtungen zu verschaffen, nur wenig Anwendung, und so giebt **Ptolemäus** in seiner Geographie (lib. 1, cap. 4) keine einzige neuere Bestimmung dieser Art an, sondern begnügt sich, eine frühere Aufzeichnung nachträglich nutzbar zu machen, indem er anführt, dass man 331 v. Chr. in Arbela (Erbil in Ost-Assyrien) um die fünfte, in Karthago (in der Nähe des jetzigen Tunis) aber um die zweite Stunde der Nacht eine Mondfinsternis beobachtet habe. Später wurde sie dagegen häufig und entsprechend den Fortschritten der praktischen Astronomie mit immer besserm Erfolge benutzt, wie letzteres durch einige Beispiele belegt werden mag: Als im 16. Jahrhundert die spanische Regierung den Geographen Franc. **Dominguez** nach Mexiko sandte, um dort die Mondfinsternisse 1577 IX 26 und 1578 IX 15 zu beobachten, während **Alcantara** und **Juanello** mit den korrespondierenden Beobachtungen in Toledo beauftragt waren, ergab die erste Finsternis zwischen Toledo und Puebla einen Längenunterschied von $6^h\,36^m = 99^0$, die zweite einen solchen von $6^h\,34^m = 98^1/_2{}^0$, und es wurde daraus geschlossen, dass das noch etwas westlichere Mexiko um 100^0 von Toledo abstehe, was zwar nahe um $5^0 = 20^m$ zu viel war, aber doch eine erste erträgliche überseeische Länge repräsentierte; als sodann **Richer** ein Jahrhundert später in Cayenne (vgl. seine „Observations en l'isle de Cayenne. Paris 1679 in 4.“) die Finsternis von 1672 IX 7 beobachtete, dabei die glückliche Neuerung einführend, nicht nur Anfang und Ende, sondern auch die Ein- und Austritte von einzelnen Bergen, etc., zu notieren, erhielt er die Länge etwa bis auf $7' = 28^s$

genau, so dass ein sehr grosser Fortschritt erreicht war, — und als endlich wieder ein Jahrhundert später **Zach** in Gotha und Pierre-François-André **Méchain** (Laon in Aisne 1744 — Castellon de la Plana bei Valencia 1804; erst Baumeister, später Astronom der Marine und Akademiker) in Paris die totale Mondfinsternis von 1790 X 22 beobachteten, ergaben ihnen schon die zwei Hauptphasen allein einen nur um 2′ = 8ˢ unrichtigen Längenunterschied. Immerhin ist nicht daran zu denken, auf diesem Wege je eine grosse Genauigkeit zu erhalten, da der unscharfe Rand des Schattenkegels kein präcises Notieren erlaubt. — Anhangsweise mag an den in 234 besprochenen Vorschlag von **Langren** erinnert werden. — *b.* So bestimmte **Picard** 1671 (vgl. seine „Voyage d'Uraniborg. Paris 1680 in fol.") unter Assistenz von **Römer** die Längendifferenz zwischen Hveen und Kopenhagen mit Hilfe von grossen Feuern, die plötzlich bedeckt wurden, — so schlugen William **Whiston** (Norton 1667 — London 1752; Geistlicher und Prof. math. Cambridge; vgl. „Memoirs. London 1749—50, 2 Vol. in 8.) und Humphry **Dilton** (Salisbury 1675 — London 1715; Geistlicher und Vorsteher einer math. Schule in London) in ihrer Schrift „A new method for discovering the longitude both at sea and land. London 1714 in 8." vor, zu bestimmten Stunden an den Küsten, auf Inseln, etc., Mörser loszuschiessen und den Schall zu Zeitvergleichungen zu benutzen, während **La Condamine** in seiner Abhandlung „Manière de déterminer astronomiquement la différence en longitude de deux lieux peu éloignés (Mém. Par. 1735)" mit Recht empfahl, lieber die damit verbundene plötzliche Lichterscheinung zu verwenden, — so bestimmten, in Ausführung einer von Jos. **Delisle** gemachten Anregung, **Cassini** de Thury und **Lacaille** 1740 die Längendifferenz zwischen zwei Punkten in Languedoc und in der Provence mittelst Blickfeuern auf einem Zwischenpunkte, wobei 10 ℔ Pulver begreiflicher Weise eine auf mehr als 12 g. M. gut sichtbare Flamme gaben, da nach **Zach** (Mon. Corr. X) hiefür ½ ℔ schon reichlich genügt hätte, — etc. Dass bei letzterer Methode auf grössere Distanzen mehrere Zwischenpunkte (auf n Beobachtungspunkte n — 1 Punkte mit Blickfeuern) notwendig werden, ist selbstverständlich, und so wurde es auch bei den grossen Operationen dieser Art gehalten, welche in den Zwanzigerjahren durch die **Littrow**, **Soldner**, **Carlini**, **Plana**, etc. in Süddeutschland und Oberitalien ausgeführt wurden: Über die erstere, bei der nach Lamont von 1820—25 sogar die Verbindung von Wien über München mit Paris und Greenwich hergestellt worden sein soll, und bei der sich Littrows Sohn Karl (nach Wiener-Kalender 1882) schon 1824 beteiligte, weiss ich zwar leider für den Detail bloss auf A. N. 18 von 1822 und Corresp. astr. VII 257—73 zu verweisen, wo **Littrow** die 1822 zwischen Ofen-Wien-Bogenhausen ausgeführten Arbeiten behandelt, — während dagegen über die zweite die Schriften „Fr. **Carlini**, Relazione delle operazioni intraprese al fine di determinare le differenze di longitudine fra diversi luoghi d'Italia col mezzo de segnali a polvere dati sul monte Cimone. Milano 1822 in 8., und: Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen, exécutées en Piémont et en Savoie 1821—23. Milan 1825—27, 2 Vol. in 4., Atl. in fol.", allen wünschbaren Aufschluss geben, und überdies für einige eigentümliche Anomalien die Briefe konsultiert werden können, welche (Notiz 369) **Plana** 1824 II 28, VI 21, etc. an Gautier schrieb. — Anhangsweise ist zu erwähnen, dass schon **Halley** (Ph. Tr. 1719) und G. **Lynn** (Ph. Tr. 1727) auf die Möglichkeit hinwiesen, das Aufblitzen einer Sternschnuppe für eine Uhrvergleichung zu benutzen; es hat sich jedoch diese Methode, für welche später **Benzenberg** in seiner Schrift „Über die Bestimmung der geographischen Lage durch Sternschnuppen. Hamburg 1802 in 8." neuerdings auftrat, praktisch nicht besonders bewährt. — *c.* Zur momentanen Längenbestimmung auf Reisen versahen sich schon die alten Seefahrer mit Tafeln (Kalender, Ephemeriden), in welchen für einen bestimmten Ort die Mondsfinsternisse auf Jahre hinaus nach der Zeit ihres Eintreffens angegeben waren: So besassen Christoph **Columbus** und Amerigo **Vespucci** die für Nürnberg auf 1474—1506 gestellten Ephemeriden von **Regiomontan**, so soll auf dem Geschwader **Magellans** ein auf „Abraham F. R. Schemuel **Zacut**, Tabulæ motuum coelestium. Venetiis 1496 in 4." gegründeter Kalender benutzt worden sein, so mögen sich wieder andere an die von **Apian** in seinem „Cosmographicus liber. Landishuti 1524 in 4." für 1523 bis 1570 gegebene Tafel der Finsternisse gehalten haben, etc.; aber alle diese Hilfsmittel waren noch so unzuverlässlich, dass sie Fehler von abenteuerlicher Grösse veranlassten, und so erhielt z. B. **Columbus** aus der Mondfinsternis von 1504 II 29, durch deren Voraussage er bekanntlich auf Jamaika den Eingebornen so ungemein imponierte, für seinen Lagerplatz $108^3/_4{}^0$ westliche Länge von Cadix, während er nur etwa 70^0 hätte finden sollen. Überdies waren die Mondfinsternisse viel zu selten, um dem Bedürfnis der Seeleute genügen zu können, und so suchte man fortwährend nach andern Mitteln, wobei ausser den unter den folgenden Nummern zu behandelnden namentlich auch die Boussole herbeigezogen wurde, wie ich dies schon früher (154) andeutete und jetzt noch durch Anführung der Schrift „Guillaume de **Nautonier**, Mécométrie de l'eymant, ou manière de mesurer les longitudes par le moyen de l'eymant. Paris 1603 in fol." belegen will. Da jedoch alle diese Mittel, so gut einzelne derselben principiell waren, sich damals praktisch noch nicht bewährten, so wurde es begreiflich lebhaft begrüsst, als **Galilei** nach Entdeckung der Jupitersmonde darauf hinwies, dass die Beobachtung ihrer rasch wechselnden Stellung und ihrer häufigen Verfinsterungen die gesuchte Lösung des Problemes der Meereslänge ergeben dürfte. Nachdem sodann N. Cl. Fabrice de **Peiresc** (Beaugensie in Provence 1580 — Aix 1637; Parlamentsrat in Aix) aus den vorhandenen Beobachtungen die Umlaufszeiten jener Monde ermittelt hatte, erfand derselbe eine „mechanische Theorie", nach welcher er fortwährend ihre gegenseitige Stellung auffinden konnte, und glaubte nun, dass durch Beobachtung derselben Konfigurationen an verschiedenen Orten eine brauchbare Längenvergleichung erhältlich sein dürfte; leider entsprachen jedoch die Versuche, für welche man unter anderm einen Beobachter bis Aleppo sandte, seinen Erwartungen gar nicht, und als er überdies hörte, dass sich **Galilei** selbst mit der Ausnutzung seiner Entdeckung beschäftige, überliess er diesem das weitere. Dieser letztere setzte sich in der That bald darauf durch Vermittlung seines Freundes Elie **Diodati** (Genf 1576 — Paris 1661; Advokat am Parlament zu Paris) mit den Holländern in Verbindung, welche ihm sodann Martin **Hortensius** (Delft 1605 — Amsterdam 1639; Prof. math. Amsterdam) und Willem **Blaeu** zusandten, um bei Beobachtung der Satelliten und bei Erstellung betreffender Tafeln behilflich zu sein; aber die Erblindung liess den Greisen das angestrebte Ziel nicht erreichen, und auch Vincenzo **Reinieri** oder Renieri (Genua 1590? — Florenz 1648; Schüler Galileis und später Prof. math. Pisa), dem er die Fortsetzung der Beobachtungen überbunden hatte, konnte das beim Erscheinen des ersten Bandes seiner „Tabulæ motuum coelestium universales. Florentiæ 1639—47, 2 Vol. in 4." gegebene Versprechen, Satelliten-Tafeln zu liefern, nicht einlösen. Da auch die früher von **Marius** in seinem „Mundus jovialis-

Noribergæ 1614 in 4." und die nachher von **Hodierna** als „Mediceorum Ephemerides. Panormi 1656 in 4." gegebenen Tafeln ungenügend waren, so konnte damals von praktischer Verwertung des neuen Mittels noch keine Rede sein, und diese wurde erst möglich, nachdem **Cassini** und dessen Nachfolger eine neue Grundlage geschaffen hatten, mit der wir uns aber erst später (464—66) befassen können. — Auch die auf Beobachtung von Bedeckungen durch den Erdmond (Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen) gegründeten Verfahren werden uns erst später (477 und 480) beschäftigen; dagegen mögen hier noch folgende auf das Problem der Meereslänge bezügliche Schriften älterer Zeit aufgeführt werden: „P. **Bouguer**, Nouveau traité de navigation. Paris 1753 in 4. (spät. A. durch Lacaille und Lalande 1760—93), — John **Robertson**, The elements of navigation. London 1754, 2 Vol. in 8. (Histor. Einleitung durch Jam. Wilson; 6. ed. durch W. Wales), — Don Jorge **Juan**, Compendio de navegacion. Cadiz 1757 in 4., — **Maskelyne**, The british mariners guide. London 1763 in 4., — E. **Pézénas**, Astronomie des marins. Avignon 1766 in 8., und: Histoire critique de la découverte des longitudes. Avignon 1775 in 8.", — und endlich: „**Levêque**, Le guide du navigateur, ou Traité de la pratique des observations et des calculs nécessaires au navigateur. Nantes 1779 in 8.", ein Werk, das **Lalande** als das zur Zeit vollständigste dieser Art bezeichnete.

407. Längenbestimmung aus Monddistanzen. — Bei dem Monde bewirken grosse Parallaxe und rasche Bewegung, dass seine Lage mit Ort und Zeit der Beobachtung schnell wechselt, und es muss somit möglich sein, aus betreffenden Messungen an verschiedenen Orten die Längendifferenz dieser letztern abzuleiten [a]. Namentlich sahen **Pigafetta** und **Werner** schon zu Anfang des 16. Jahrhunderts ziemlich gleichzeitig ein, dass sich Bestimmungen der Abstände des Mondes von benachbarten Fixsternen ganz besonders hiefür eignen dürften [b], und wenn diese Methode erst weit später zur Bestimmung der sog. **Meereslänge** in allgemeinern Gebrauch kam, so rührte dies zunächst davon her, dass die zur Vorausberechnung der Abstände für einen Vergleichungsort notwendigen Mondtafeln anfangs noch gar zu unverlässlich, sowie die zur Ausnutzung der Beobachtung dienenden Vorschriften und Hilfstafeln noch viel zu roh und unbequem waren [c].

Zu 407: *a.* Der erste auf der raschen Ortsveränderung des Mondes beruhende Versuch einer überseeischen Längenbestimmung scheint derjenige gewesen zu sein, welchen Amerigo **Vespucci** (Florenz 1451 — Sevilla 1512 Steuermann in spanischen und portugiesischen Diensten), an der Küste von Venezuela machte: Er beobachtete nämlich 1499 VIII 22, dass der Mond daselbst um $7^1/_2{}^h$ Abends etwa 1^0, um Mitternacht aber $5^1/_2{}^0$ östlich von Mars stand; er hatte sich also per Stunde um 1^0 entfernt, musste somit um $6^1/_2{}^h$ Ortszeit in Konjunktion gewesen sein, während **Regiomontan** in seinen für Nürnberg berechneten Ephemeriden dieselbe Konjunktion auf Mitternacht setzte, — folglich musste **Vespucci** schliessen, es liege seine Station um etwa $12 - 6^1/_2 = 5^1/_2{}^h$ westlich von Nürnberg, was allerdings mindestens um $^1/_2{}^h$ zu viel war. — Ich füge bei, dass **Vespucci** eigentlich den Vornamen „Albericus" besessen haben soll, der erst später in „Amerigo“ umgewandelt worden sei, nachdem man dem neuen Kontinente entsprechend dem Vorschlage des Freiburger Geographen Martin **Waldseemüller** (Hylacomylus) den (nach Jul. Marcou einer Hügelkette in Nicaragua zugehörenden) Namen **Americ** beigelegt habe; dass als Benennung „Columbia“ passender gewesen wäre, ist selbstverständlicher als **Vespucci** für diese Wahl verantwortlich machen zu wollen und wegen ihr dessen Verdienste herabzusetzen. — *b.* Die Bestimmung der Länge aus Monddistanzen beruht auf folgender Überlegung: Bezeichnet d' die gemessene und um den scheinbaren Halbmesser des Mondes vermehrte Distanz eines Sternes vom Mondrande, d aber die gleichzeitige geocentrische Distanz desselben Sternes vom Mondcentrum, und sind m' und s' die gemessenen scheinbaren, durch Refraktion und Parallaxe verdorbenen Höhen von Mond und Stern, so hat man, da von einem entsprechenden Einflusse auf das Azimut Umgang genommen werden darf, nach 92 : 1



$$d' - d = -\Delta m' \cdot \mathrm{Co}\, M - \Delta s' \cdot \mathrm{Co}\, S \qquad \mathbf{1}$$

wo, wenn α die Refraktionskonstante und π die Mondparallaxe bezeichnet, nach 168 und 231

$$\Delta m' = \alpha \cdot \mathrm{Ct}\, m' - \pi \cdot \mathrm{Co}\, m' \qquad \Delta s' = \alpha \cdot \mathrm{Ct}\, s' \qquad \mathbf{2}$$

ist, während nach 87 : 2

$$\mathrm{Co}\, M = \frac{\mathrm{Si}\, s' - \mathrm{Si}\, m' \cdot \mathrm{Co}\, d'}{\mathrm{Co}\, m' \cdot \mathrm{Si}\, d'} \qquad \mathrm{Co}\, S = \frac{\mathrm{Si}\, m' - \mathrm{Si}\, s' \cdot \mathrm{Co}\, d'}{\mathrm{Co}\, s' \cdot \mathrm{Si}\, d'} \qquad \mathbf{3}$$

folgt. Substituiert man nun aus 2 und 3 in 1, so ergiebt sich

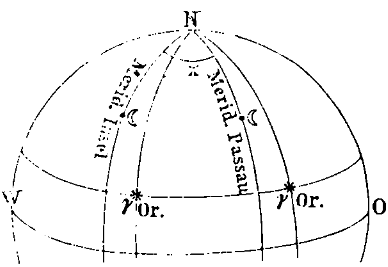
$$d = d' - \frac{\pi}{\mathrm{Si}\, d'} \cdot \left(\mathrm{Si}\, s' - \mathrm{Si}\, m' \cdot \mathrm{Co}\, d'\right) + \frac{\alpha}{\mathrm{Si}\, d'} \cdot \left(\frac{\mathrm{Si}\, s'}{\mathrm{Si}\, m'} + \frac{\mathrm{Si}\, m'}{\mathrm{Si}\, s'} - 2\, \mathrm{Co}\, d'\right) \qquad \mathbf{4}$$

so dass man mit Leichtigkeit die der Zeit der Messung entsprechende geocentrische Distanz und sodann durch Interpolation die Zeit finden kann, zu welcher an einem andern Orte von bekannter Lage, für welchen die geocentrischen Örter für eine Folge von Zeiten vorausberechnet wurden, dieselbe Distanz hatte: Die Vergleichung dieser auf Grundlage der Tafeln berechneten Zeit mit der Beobachtungszeit giebt aber offenbar die gesuchte Längendifferenz. — Es gereicht nun Antonio **Pigafetta** (Vicenza 1491 — Novisa 1534; Gefährte von Magellan) und Joh. **Werner** (vgl. dessen „Cl. Ptolemæi geographia, liber primus. Norimbergæ 1514 in fol.“ und die in 406 erwähnte Cosmographie Apians) zu grosser Ehre, dass sie ungefähr gleichzeitig und wohl unabhängig von einander die der vorstehenden, mutmasslich zuerst durch Israel **Lyons** (Cambridge 1739 — London 1775; Rechner beim Board of Longitude) in ähnlicher Weise durchgeführten Entwicklung zu Grunde liegenden Principien aufstellten; aber grossen praktischen Wert erlangte diese Methode erst weit später, da zu jener Zeit (auch ganz abgesehen von der, bei dem damaligen Zustande der Trigonometrie und der ungenügenden Kenntnis der Refraktionsverhältnisse, vorhandenen Unmöglichkeit brauchbare Rechnungsvorschriften aufzustellen) die Mondtafeln für die unentbehrlichen Vorausbestimmungen noch gar zu unvollkommene Grundlagen boten, und so z. B. (vgl. Peschel 365) noch der berühmte spanische Seemann Pedro de **Sarmiento,** welcher 1579/80 den Seeweg aus der Südsee ins atlantische Meer auffand, als er aus mit dem Kreuzstabe gemessenen Mondabständen die Länge der Insel

Ascension zu ermitteln versuchte, für dieselbe 3° westlichen Abstand von Cadiz erhielt, während er mindestens 8° hätte finden sollen. — *c.* Etwas später wurde die Methode der Monddistanzen namentlich auch durch **Morin** in seiner „Longitudinum terrestrium et coelestium scientia. Parisiis 1634 in 4." kultiviert und empfohlen, was jedoch (vgl. Delambre V 238—74) nur zu langwierigen Kontroversen und, da immer noch zuverlässige Mondtafeln fehlten, zu keinen praktischen Fortschritten führte; fast mehr machte sich, wenn auch nur indirekt, ein Franzose **Saint-Pierre** um dieselbe verdient, als er sie 1674 Karl II. von England empfahl: Die Folge war nämlich, dass der König eine Kommission zur Prüfung des Vorschlags niedersetzte, zu welcher auf Wunsch von Moore auch **Flamsteed** beigezogen wurde, und sodann auf die Erklärung dieses letztern, dass die vorgeschlagene Methode sich praktisch nicht bewähren könne, bis die Sternkataloge und Mondtafeln auf bessere Beobachtungen basiert seien, sofort den Befehl gab, hiefür auf einem Hügel des königlichen Parkes zu Greenwich eine Sternwarte zu erbauen, welche wirklich schon im folgenden Jahre **Flamsteed** übergeben, aber allerdings anfänglich, da schon der Bau die damals enorm erscheinende Summe von 520 ₤ = 13000 Fr. verschlungen hatte, nur kärglich ausgerüstet wurde (vgl. 347). Später besserten sich diese Verhältnisse fortwährend, so dass durch die Arbeiten in Greenwich nach und nach eine sichere Grundlage für die Mondtafeln geschaffen wurde und die Methode der Monddistanzen im folgenden Jahrhundert mit Erfolg an dem Wettkampfe Teil nehmen konnte, welcher durch die von den seefahrenden Nationen wiederholt auf sichere Bestimmung der Meereslänge ausgesetzten hohen Preise animiert wurde. Wir werden auf diesen Kampf, in welchem auch die Erfindung des Spiegelsextanten (352) eine nicht unerhebliche Rolle spielte, noch wiederholt (namentlich in 409 und dann wieder in Abschnitt XIX) zurückzukommen haben und erwähnen hier nur noch **einerseits**, dass die Methode der Monddistanzen einen ersten wirklichen oder praktischen Erfolg hatte, als sie durch Karsten **Niebuhr**, welchen Tob. **Mayer** nicht nur instruiert, sondern mit einem eigenhändig geteilten Oktanten, einer Abschrift seiner noch ungedruckten Mondtafeln und einer Sekundenuhr von Mudge versehen hatte, auf seiner Reise nach Arabien (1762—67; vgl. 369) zur Anwendung kam, — **anderseits**, dass sie bald darauf einen grossen Impuls erhielt, als **Maskelyne**, nachdem er dieselbe schon in seinem „British mariner's guide. London 1763 in 4." den Nautikern empfohlen hatte, ihnen mit Hilfe von **Lyons** und Richard **Dunthorne** (Ramsay in Huntingdonshire 1711 — Cambridge 1775; Geistlicher, dann Inhaber eines Schenkamts in Cambridge) teils in dem für 1767 und folgende Jahre ausgegebenen Nautical Almanac, teils in den „Tables for correcting the apparent distance of the moon and a star from the effects of refraction and parallax. Cambridge 1772 in fol., und den: Tables requisite to be used with the Nautical Ephemeris for finding the latitude and longitude at sea. London 1781 in 8. (3. ed. 1802)" wesentlich erleichternde Hilfsmittel an die Hand gab, — **und endlich**, dass Pierre-Antoine **Véron** (Anthieux-sur-Buchy in der Normandie 1736 — Insel Timor 1770 als Astronom der Expedition von Bougainville), der Erfinder des dem Heliometer verwandten **Megameter** (von μέγας = gross im Gegensatze zu μικρός = klein) zum Messen der Monddistanzen, und der von ihm instruierte See-Offizier N. de **Charnières** (1710? — 1775?; vgl. dessen „Mémoire sur l'observation des longitudes en mer. Paris 1767 in 8." und seine, eine Beschreibung des Megameters enthaltenden „Expériences sur les longitudes faites à la mer en 1767 et 1768. Paris 1768 in 8.") nicht nur selbst mit Erfolg die neue Methode zu praktizieren, sondern überhaupt bei der französischen Marine in Aufnahme zu bringen wussten. — Für die Geschichte und weitere Entwicklung dieses zur See bis auf die Gegenwart als sicherste Kontrole der Uhren betrachteten Verfahrens muss auf die reiche Speciallitteratur verwiesen werden, aus der ich zum Schlusse den bereits erwähnten Schriften und Abhandlungen noch folgende beifüge: „**Lacaille**, Sur l'observation des longitudes en mer par la lune (Mém. Par. 1759), — **Lexell**, Observationes circa methodum inveniendi longitudinem loci ex observata distantia lunæ a stella fixa (Comm. Petrop. 1777), — **Euler**, De inventione longitudinis ex observata lunæ distantia a quadam stella (Comm. Petrop. 1780), — Th. **Elliot**, Improvement of the method of correcting the distance of the moon (Tr. Edinb. 1 von 1784), — Jean-François **Richer** (Surême bei Paris 1743 — Paris 1800?; Mech. Paris), Compas de réduction (von Par. Akad. mit Preis bedacht, von Lalande in „Abrégé de navigation", von Lagrange in Conn. d. t. für 1796 besprochen), — **Mendoza**, Mémoria sobre algunos metodos nuevos de calcular la longitud por las distancias lunares. Madrid 1795 in fol. (engl. London 1801), ferner: Recherches sur les solutions des principaux problèmes d'astronomie nautique. London 1797 in 4., und: Tables for nautical astronomy. London 1801 in 4. (auch später), — Nathaniel **Bowditch** (Salem 1773 — Boston 1838; erst Seefahrer, dann Versicherungsbeamter), The new american practical navigator. Boston 1800 in 8. (zahlreiche neue Ausgaben), und: Method of correcting the apparent distances of the moon (Mem. amer. Acad. 1818), — Dan. **Huber**, Über die Reduction der scheinbaren Monddistanzen (Mon. Corr. 12 von 1805; neue Bearbeitung einer 1791 verfassten, aber nicht eingereichten Preisschrift), — Charles **Guépratte** (Nancy 1777 — Brest 1855?; Marine-Offizier und Dir. Obs. Brest), Problèmes d'astronomie nautique et de navigation. Brest 1816 in 8. (3 éd. 1839, 2 Vol.), — Karl Ludwig Christian **Rümker** (Stargard 1788 — Lissabon 1862; Dir. Obs. Paramatta und Hamburg), Handbuch der Schiffahrtskunde. Hamburg 1820 in 8. (und später), und: Längenbestimmung durch den Mond. Hamburg 1849 in 8., — **Horner**, Mémoire sur la réduction des distances lunaires, contenant une méthode courte et facile avec des tables nouvelles. Gênes 1822 in 8. (auch Corr. astr. 6), und namentlich: Méthode facile et exacte pour réduire les distances lunaires avec des tables nouvelles. Gênes 1822 in 8. (auch Corr. astr. 7; hatte grossen Erfolg und wurde ins Engl., Span., Russ., etc., sogar aus dem Engl. wieder ins Franz. übersetzt; vgl. auch Briefe Horner an Gautier von 1822 VII 7 und später in Notiz 352), — **Bessel**, Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Monddistanzen (A. N. 218 von 1832), — **Grunert**, Über die Reduktion der Monddistanzen (Archiv 24 von 1855), — William **Spottiswoode** (London 1825 — ebenda 1883; Präsid. Roy. Soc.), On a method for determining longitude by means of observations on the moon's greatest altitude (Astr. Soc. Mem. 29 von 1861), — Wilhelm **Ligowski** (Borken in Westphalen 1821 geb.; erst Oberfeuerwerker, dann Prof. math. Berlin und Kiel), Herleitung einiger Formeln zur Berechnung der wahren Distanz zwischen Sonne und Mond (Grunerts Arch. 40 von 1863; auch 43 und 51 von 1865 und 1870), — Ludwig **Schwarz**, Über die Reduction der scheinbaren und wahren Monddistanzen auf einander. Dorpat 1865 in 4. (auch histor.), — etc."

408. Längenbestimmung aus Mondculminationen. — Schon mehrere ältere Astronomen, wie **Finäus**, **Pühler**, etc., dachten daran, dass für Längenbestimmungen auf dem Lande auch die Beobachtungen von Mondculminationen nutzbar gemacht werden könnten[a]; aber dennoch dürfte William **Baffin** als der Erste zu bezeichnen sein, welcher die rasche Bewegung des Mondes in Rektascension in praktischer Weise zu verwerten wusste[b], — ja dessen noch etwas rohes Verfahren wurde erst im Laufe des 18. Jahrhunderts nach und nach durch die **Jonchère, Chabert, Toaldo, Pigott,** etc. vervollkommnet[c], — um sodann im Anfange des laufenden Jahrhunderts durch **Nicolai** seine definitive Gestaltung zu erhalten[d].

Zu 408: *a.* Das von Orontius **Finäus** in seiner Abhandlung „De invenienda longitudinis locorum differentia, aliter quam per lunares eclipses. Lutetiæ 1544 in fol." vorgeschlagene, jedoch nur an fingierten Beispielen durchgeführte Verfahren war nicht nur noch ebenso roh als dasjenige von **Vespucci** (407), sondern sogar zum Teil unrichtig, so dass man ihn hier kaum zu erwähnen hätte, wäre es nicht (vgl. Peschel 367) wahrscheinlich, dass er später seine Methode etwas verbesserte und zu Gunsten derselben in dem Werke „De mundi sphæra, sive Cosmographia. Parisiis 1555 in 4. (lib. 5, cap. 3)" vorschlug, die Mondculminationen für den Pariser Meridian vorauszuberechnen. — Bedeutend verfeinert tritt unsere Methode in der beiläufig schon mehrmals erwähnten Schrift „Christoff **Puehler** (Syclas in Ungarn 1500? — Passau 1570?; Schüler von Tannstetter), Ein kurtze und grundliche anlaytung zu dem rechten verstand Geometriæ. Dilingen 1563 in 4. (mit Dedikation von 1561 II 9 an Abt Bartholomeo zu Allerspach, in der Puehler sagt, dass er vor 4 Jahren, also 1557, „mit grosser und beschwerlicher Kranckheit heimgesucht" worden sei)" auf: **Puehler** beobachtete nämlich 1557 X 10 (also wohl angeblich, da er in jenem Jahr schwer krank darnieder lag) auf einer unter 14° Breite gelegenen (nicht genannten) Insel, dass bei Culmination des Mondes der Deklinationskreis des Sternes γ Orionis nur 6° 50′ östlich vom Meridiane stand, während nach den Ephemeriden dieser Abstand bei Culmination des Mondes in Passau bereits 9° 47′ betragen haben musste; es war also der Mond von der Insel bis Passau um 2° 55′ zurückgeblieben.



Unter Annahme, dass sich die Sonne zwischen zwei Culminationen um 57′ gegen die Sterne verspäte, der Mond aber in einem Sonnentage um 15° 22′, bestimmte er sodann die Längendifferenz x aus der Proportion $15^\circ 22' : 360^\circ 57' = 2^\circ 55' : x$, d. h. setzte $x = 68^\circ 31'$, wie es etwa für eine Insel im Meerbusen von Bengalen passen würde. — Ganz in ähnlicher Weise ging Johannes **Krabbe** (Münden 1560? — Wolfenbüttel 1630?; fürstl. braunschw. wolfenb. Geometer) in Cap. 45 seiner Schrift „Neues Astrolabium samt dessen Nutzen und Gebrauch. Wolfenbüttel 1608 in 4. (auch 1609 und 1625)" vor, zur Erläuterung ebenfalls eine 1584 XI 7 auf einer fernen Insel gemachte Beobachtung fingierend. — Anhangsweise mag beigefügt werden, dass in der Schrift „**Marci** de Kronland, De longitudine s. differentia inter duos meridianos una cum motu vero lunæ inveniendo ad tempus datæ observationis. Pragæ 1650 in 8.", neben der Bestimmung der Länge durch Finsternisse, namentlich auch proponiert wird, an einem Orte zu einer bestimmten Zeit das Azimut des Mondes zu messen, — daraus unter Voraussetzung der Polhöhe, der Neigung der Mondbahn, der Länge des Mondknotens und der Lage des zur Zeit der Beobachtung culminierenden Punktes der Ekliptik, durch Benutzung von fünf rechtwinkligen Kugeldreiecken die Länge des Mondes zur Beobachtungszeit zu berechnen, — und schliesslich aus einer Ephemeride die Zeit zu suchen, zu welcher der Mond diese Länge an dem Orte besass, auf welchen sich die Ephemeride bezieht: Aus der Differenz der beiden Zeiten wird sodann auf den Unterschied der beiden Meridiane geschlossen. Die an einem fingierten Beispiele durchgeführte Lösung kann als scharfsinnig bezeichnet werden, hatte aber offenbar (auch abgesehen von der Vernachlässigung der Parallaxe) keinen praktischen Wert, da die Voraussetzungen kaum zulässig und die Rechnungen zu mühsam waren. — Für die von **Bouguer** empfohlene Längenbestimmung aus Mondhöhen vgl. dessen „Nouveau traité de navigation. Paris 1753 in 4. (Nouv. éd. par Lacaille 1769)“, — für eine von **Radau** proponierte Methode, aus Azimutaldifferenzen und Zenitdistanzen von Mond und einem Sterne eine Längenvergleichung zu erhalten, A. N. 1294 von 1861. — *b.* Bemerkenswert ist, dass **Rothmann** (vgl. Mon. Corr. XII von 1805) etwa 1567 Tycho aufforderte, fleissige Mondbeobachtungen zur Bestimmung der Längendifferenz zwischen Kassel und Uranienburg zu machen; da aber keine Resultate bekannt sind, so ist dennoch William **Baffin** (1584—1622; engl. Seefahrer, dessen Name die Bay an der Westküste von Grönland trägt) als der erste zu betrachten, der die neue Methode mit Erfolg in die Praxis einführte, da uns **Peschel** (gestützt auf „Rundall, Voyages towards the North-West“) nicht nur Andeutungen über betreffende Versuche desselben A. 1612, sondern über eine im Sommer 1615, wo sein Schiff lange in der Hudsonsstrasse zwischen Eis festlag, wirklich ausgeführte Bestimmung folgenden Detail zu geben weiss: „Nachdem **Baffin** am 21. Juni eine Mittagslinie gezogen und die Breite des Ortes zu 63° 40′ bestimmt hatte, gelang es ihm am nächsten Tage, durch eine Sonnenhöhe die Zeit des Monddurchganges, der in London (nach den Ephemeriden) $4^h\ 54^m\ 30^s$ stattgefunden hatte, auf $5^h\ 4^m\ 52^s$ (oder um 622^s später) zu bestimmen. Der Mond hatte an jenem Tage eine östliche Bewegung von 12° 38′ (oder $3025\frac{1}{3}$″), so dass er 74° 5′ (oder $622 : 3025\frac{1}{3} = 0{,}206^d = 4{,}94^h$) westlichen Abstand von London erhielt, ein Ergebnis, welches sich nach Sir E. W. Parry der Wahrheit (allerdings bei dem damaligen Zustande der Instrumente und Tafeln als ein Geschenk des Zufalls) bis auf 1° nähert“. — *c.* Nachdem die Methode von Baffin durch die Schriften „Dorothei **Alimari**, Mathematici Veneti, Longitudinis aut terra aut mari investigandæ methodus. Londini 1715 in 8., — Charles **Leadbetter**, A compleat system of Astronomy. London 1728, 2 Vol. in 8., — etc.“ etwas allgemeiner bekannt und genauer präcisiert worden war, und etwas später der Ingenieur Etienne Lécuyer de la **Jonchère** (Montpensier 1690 — England 1740) und der (sonderbarer Weise von Lalande ignorierte) Seemann Joseph-Bernard Marquis de **Chabert** (Toulon 1723 — Paris 1805) bei verschiedenen Gelegenheiten (vgl. namentlich die von dem Erstern dem englischen Parlamente gewidmete Schrift „Découverte des longitudes estimées généralement impossibles à trouver, suivies de Tables dressées sur le premier méridien, pour en procurer à toutes personnes l'usage facile tant par terre que par mer, tous les jours et en tous lieux. 1734 ou 1735, s. l. in 8.“ und das von dem Zweiten 1766 in die Par. Mém. eingerückte „Mémoire sur l'état actuel de l'entreprise pour la rectification des cartes marines de la Méditerranée“)

empfohlen hatten, möglichst häufig nicht nur die Culminationen des Mondes, sondern ausserdem diejenigen benachbarter und besonders in Deklination wenig verschiedener Sterne zu beobachten, erwarben sich die Jos. **Toaldo** (vgl. dessen „De methodo longitudinum ex observato transito Lunæ per meridianum ad cel. D. Nevil Maskelyne Epistola. Patavii 1784 in 4.") und Edw. **Pigott** (vgl. dessen von 1786 datierenden Brief an Maskelyne, der nebst einem Nachtrage unter dem Titel „The latitude and longitude of York determined from a variety of astronomical observations; together with a recommendation of the method of determining the longitude of places by observations of the Moon's transit over the meridian" in die Phil. Trans. jenes Jahres aufgenommen wurde) nahe gleichzeitig um unsere Methode ein grosses Verdienst, indem sie nicht nur nachwiesen, wie man durch den eben erwähnten Zuzug von Sternen im Parallel des Mondes von den Instrumentalfehlern unabhängig werde, sondern namentlich auch **Maskelyne** zu veranlassen wussten, von da ab im Naut. Alm. zu Gunsten korrespondierender Beobachtungen für jede Culmination des Mondes den auf dieselbe bezüglichen Daten auch eine Auswahl von passenden Vergleichsternen beigeben zu lassen. Durch Angabe der nach dieser Methode bereits erhaltenen Bestimmungen belegte ferner sowohl **Toaldo** (mit 11 Best. in den Jahren 1783 bis 1784) als **Pigott** (mit 21 Bestimmungen in den Jahren 1781—85) die Brauchbarkeit derselben, und letzterer stellte überdies eine Anzahl bemerkenswerter Regeln auf, welche er bei Beobachtung und Berechnung befolgt wissen wollte, von denen hier zur Vergleichung mit den sofort zu entwickelnden Formeln der Gegenwart noch die Analogie: „The increase of the moon's Æ in 12 hours, found by computation, is to 12 hours as the increase of the moon's Æ between two places, found by observation, is to the difference of meridians" wörtlich beigefügt werden mag. — *d.* Bezeichnen T_1 und T_2 die Durchgangszeiten des sichtbaren Mondrandes an zwei unter den Längen l_1 und l_2 aufgestellten Passageninstrumenten, s ihre gemeinschaftliche Korrektion für den Radius, s_1 und s_2 ihre Verbesserungen wegen den Instrumentalfehlern (vgl. 435), — korrespondieren ferner diesen Zeiten in Beziehung auf den Ausgangsmeridian die Zeiten $T + t_1$ und $T + t_2$, in derem aus $T + t_1 = \tau - {}^1/_2\,(t_2 - t_1)$ und $T + t_2 = \tau + {}^1/_2\,(t_2 - t_1)$ folgendem Mittel $\tau = T + {}^1/_2\,(t_2 + t_1)$ der Mond die Rektascension α besitzt, — und ist endlich α^* die Rektascension eines im Parallel des Mondes stehenden, also mit ihm von den Instrumentalfehlern nahe gleich influierten, dieselben Instrumente zu den Uhrzeiten $T_1^* = T_1 - \Delta\alpha_1$ und $T_2^* = T_2 - \Delta\alpha_2$ passierenden Sternes, so hat man, falls ΔT_1 und ΔT_2 die Uhrkorrektionen auf Sternzeit sind,

$$T_1 + \Delta T_1 \pm s - s_1 = \alpha - {}^1/_2\,(t_2 - t_1)\cdot\frac{d\alpha}{dt} + {}^1/_8\,(t_2 - t_1)^2\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2} - $$
$$- {}^1/_{48}\,(t_2 - t_1)^3\cdot\frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots\ldots$$

$$T_2 + \Delta T_2 \pm s - s_2 = \alpha + {}^1/_2\,(t_2 - t_1)\cdot\frac{d\alpha}{dt} + {}^1/_8\,(t_2 - t_1)^2\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \qquad \mathbf{1}$$
$$+ {}^1/_{48}\,(t_2 - t_1)^3\cdot\frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots\ldots$$

$$T_1^* + \Delta T_1 - s_1 = \alpha^* \qquad\qquad T_2^* + \Delta T_2 - s_2 = \alpha^*$$

und somit einerseits, wenn man bei den dritten Differentialquotienten stehen bleibt,

$$T_2 - T_1 + \Delta T_2 - \Delta T_1 = (s_2 - s_1) + (t_2 - t_1)\frac{d\alpha}{dt} + {}^1/_{24}\cdot(t_2 - t_1)^3\cdot\frac{d^3\alpha}{dt^3} \qquad \mathbf{2}$$

während anderseits

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 + \triangle T_2 - \triangle T_1 &= (T_2^* + \triangle \alpha_2) - (T_1^* + \triangle \alpha_1) + \triangle T_2 - \triangle T_1 \\ &= s_2 - s_1 + \triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus ergiebt sich aber

$$\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1 = (t_2 - t_1) \cdot \frac{d\alpha}{dt} + {}^1/_{24} \cdot (t_2 - t_1)^3 \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3}$$

oder, wenn man $t_2 - t_1$ im zweiten Gliede rechts durch den Näherungswert $(\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1) : {}^{d\alpha}/_{dt}$ ersetzt und sodann $t_2 - t_1$ ausrechnet,

$$t_2 - t_1 = \frac{\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1}{{}^{d\alpha}/_{dt}} - \frac{1}{24 \cdot {}^{d\alpha}/_{dt}} \cdot \left(\frac{\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1}{{}^{d\alpha}/_{dt}}\right)^3 \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3} \tag{4}$$

Nun waren aber die Ortszeiten der beiden Beobachtungen

$$T + t_1 + l_1 = T_1 + \triangle T_1 \qquad\qquad T + t_2 + l_2 = T_2 + \triangle T_2$$

also hat man unter Benutzung von 3 und 4

$$\begin{aligned} l_2 - l_1 &= T_2 - T_1 + \triangle T_2 - \triangle T_1 - (t_2 - t_1) = \\ &= \frac{\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1}{{}^{d\alpha}/_{dt}} \left(\frac{d\alpha}{dt} - 1\right) + s_2 - s_1 - \frac{1}{24 \cdot {}^{d\alpha}/_{dt}} \cdot \left(\frac{\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1}{{}^{d\alpha}/_{dt}}\right)^3 \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3} \end{aligned} \tag{5}$$

oder, wenn man die in den neuern Ephemeriden für jeden Tag gegebene Rektascensionsbewegung des Mondes in einer **Mondstunde**

$${}^{d\alpha}/_{dt} : (1 - {}^{d\alpha}/_{dt}) = \lambda \tag{6}$$

setzt, und das letzte, nur bei mehr als zwei Stunden Längendifferenz einen bemerkbaren Betrag annehmende Glied vernachlässigt,

$$l_2 - l_1 = (\triangle \alpha_1 - \triangle \alpha_2) : \lambda + s_2 - s_1 \tag{7}$$

eine Regel, welche sich von der oben nach **Pigott** gegebenen und dann noch lange festgehaltenen oder wenigstens (vgl. G. Love in Mon. Corr. 8 von 1803, A. Mackay in „The theory and practice of finding the longitude. 3. ed. London 1810, 2 Vol. in 8.“, etc.) nicht richtig abgeänderten, sich **wesentlich** dadurch unterscheidet, dass λ an die Stelle von ${}^{d\alpha}/_{dt}$ getreten ist. — Es fallen somit bei dieser Methode, für welche, wie schon angedeutet, Friedrich Bernhard Gottfried **Nicolai** (Braunschweig 1793 — Mannheim 1846; Dir. Obs. Mannheim) durch seine Abhandlungen „Über die Methode Längen durch Rektascensionsdifferenzen gewählter Vergleichssterne vom Monde zu bestimmen (A. N. 1 von 1821), und: Berechnung der Meridiandifferenz zweier Orte aus korrespondierenden Mondsculminationen (A. N. 26 von 1823)“ eine neue Aera eröffnete, Uhrkorrektion, Mondradius, Fehler der Mondtafeln, etc. fast ganz ausser Betracht, ja es ist einzig **und nur einfach** die nach 380 leicht zu bestimmende Grösse $s_2 - s_1$ als Korrektionsglied übrig geblieben. Immerhin darf nicht verhehlt werden, dass die Sicherheit der Bestimmung durch den, wenn auch wohl durch **Quetelet** (vgl. seinen Brief an Gautier von 1837 II 16 in Notiz 387) bedeutend überschätzten Einfluss der Diffraktion erheblich leidet: Da nämlich durch letztere das Bild des Mondes um so mehr ausgedehnt wird, je kleiner die Öffnung des Fernrohrs ist, so werden die Antritte des ersten Mondrandes mit einem kleinern Instrumente früher, diejenigen des zweiten später beobachtet werden als mit einem grössern, und so ergab sich, vgl. „**Struve**, Vergleichung der mit einem kleinen tragbaren Durchgangsinstrument von Ertel (26^{mm} Öffnung) und den mit dem dreifüssigen Meridiankreise (110^{mm} Öffnung) beobachteten Geraden Aufsteigungen des Mondes und der Mondsterne (A. N. 237 von 1833)“ den beiden Beobachtern W. **Feodorow** und E. W. **Preuss** ein durchschnittlicher Unterschied von $\pm\, 0^s{,}336$, — fast übereinstimmend mit den $\pm\, 0^s{,}316$, welche

Jul. **Maurer** in seiner Diplomarbeit von 1879 für diesen Fall auf Grund der Weber'schen Diffraktionstheorie gefunden hatte. — Für weitern Detail verweise ich noch auf: „**Lindenau**, Über die Zuverlässigkeit der Längenbestimmungen durch Mondculminationen (Mon. Corr. 12 von 1805), — **Zach**, Notice historique sur la méthode de déterminer la longitude par le passage de la lune (Corr. astr. 6 von 1822), — Francis **Baily** (Newbury in Berkshire 1774 — London 1844; Geldmäkler und Präs. Astr. Soc.), On the method of determining the difference of meridian by the culmination of the moon (Mem. Astr. Soc. 2 von 1824), — Thomas **Olivecrona** (Messvick in Wermland 1818 — Stockholm 1842; Obs. Stockholm), De longitudine terrestri e stellis una fere cum luna culminantibus determinanda dissertatio. Upsaliæ 1841 in 4., — **Airy**, On the weights to be given to the separate results for terrestrial longitudes, determined by the observation of transits of the moon and fixed stars (Mem. Astr. Soc. 19 von 1850), — **Chauvenet**, Longitude by transits of the moon and a star over the same vertical circle (Astron. Journ. 104 von 1857), — Yvon **Villarceau** (Vendôme 1813 — Paris 1883; Obs. und Akad. Paris), Note sur la détermination des longitudes terrestres au moyen des culminations lunaires (Conn. d. t. 1876), — etc." — Vgl. auch die in 435:c nachgetragene Entwicklung.

409. Längenbestimmung mit Chronometern. — Als Rainer **Gemma** Frisius in seiner Schrift „De principiis astronomiæ et cosmographiæ. Antuerpiæ 1530 in 4." vorschlug, die (122) kurz zuvor erfundenen tragbaren Uhren zur direkten Uhrvergleichung zu benutzen, waren diese Hilfsapparate noch viel zu unzuverlässig, um mit ihnen auch nur auf dem Lande erträgliche Längen zu bestimmen, geschweige um behufs Ermittlung der Meereslänge die Zeit des Ausgangsortes gewissermassen mit sich zu führen [a], — ja noch lange blieben alle Anstrengungen, auch nur einigermassen brauchbare Zeithalter oder **Chronometer** zu beschaffen, ohne den gewünschten Erfolg [b], — und es gelang erst im 18. Jahrhundert, in dieser Richtung so erhebliche Fortschritte zu machen, dass die Anwendung der Principien von Gemma mit den übrigen Methoden konkurrieren konnte [c]. Seither sind dann allerdings auf dem Lande und auf der See manche von schönem Erfolge begleitete Chronometer-Expeditionen ausgeführt worden [d], ja bei Bestimmung der Meereslänge spielen die Chronometer gegenwärtig weitaus die erste Rolle, wenn auch auf längern Reisen immer noch nicht ausser Acht gelassen werden darf, die so erhaltenen Resultate nach andern Methoden zu kontrolieren.

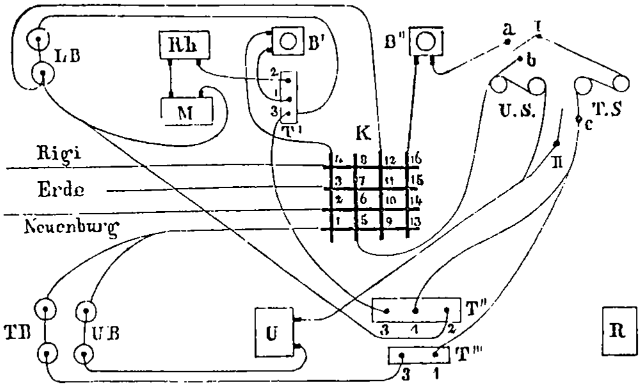
Zu 409: *a.* Noch etwas vor Gemma sollen der schon öfter genannte Kosmographe **Alonso** de Santa Cruz und Ferdinand **Columbus** (ein Sohn von Christoph) an dieses in der That nächstliegende Verfahren gedacht haben; aber da ihre Chronometer „Sand- und Wasseruhren, Räderwerke durch Gewichte bewegt, ja selbst in Öl getränkte Dochte" waren, so konnte von praktischem Erfolge erst nicht die Rede sein. — *b.* Als Peter **Crüger** 1615 (vgl. Hansch) in einem an **Kepler** gerichteten Briefe die Idee aussprach, dass man behufs

Längenbestimmung die Angaben zweier Sonnenuhren mittelst einer Räderuhr vergleichen könnte, antwortete ihm dieser mit vollem Recht, es sei zweifelhaft, ob die Räderuhr nicht mehr fehlen könnte als die Schätzung der Distanz, — wolle man sich aber auf letztere verlassen, so könne man ja den Mittagsunterschied leicht aus ihr und den beiden Polhöhen berechnen. — Etwas günstigere Verhältnisse traten dann allerdings ein, als es **Huygens** gelang, ein besseres regulierendes Princip in die Uhren einzuführen, indem dieser ausgezeichnete Mann sofort daran dachte, seine Pendeluhr dadurch auch seetüchtig zu machen, dass er (vgl. Berthoud, Histoire I 383) als Motor eine Stahlfeder anwandte, und sowohl die Aufhängung des Pendels, als diejenige der ganzen Uhr zweckentsprechend abzuändern suchte. Der Erfolg schien anfänglich, wie zwei von ihm 1663 XI 11 und 18 aus Paris an Sir Rob. Moray (vgl. Letters of scient. Men I 104 u. f.) gerichteten Briefen hervorgeht, ziemlich befriedigend: Die Uhr blieb auf dem Meere auch bei den stärksten Stürmen im Gange, und einzelne grössere Abweichungen schienen sich auf ungenaue Befolgung der für Behandlung der Uhr gegebenen Instruktionen oder mangelhafte Ausführung der vorgeschriebenen Kontrolbeobachtungen zurückführen zu lassen. Auch noch als 1664 ein Freund von Huygens, der Major **Holmes**, zwei solche Uhren auf eine Seereise mitnahm, wurden (vgl. Brief von Huygens von 1665 II 5 im Journ. d. Sav. von 1665) ganz ordentliche Resultate erhalten, so dass **Huygens** die grösste Freude hatte und immer auf weitere Verbesserung dachte; aber schliesslich erreichte er das Ziel dennoch nicht in genügender Weise. — *c.* Nachdem das englische Parlament 1714 eine Kommission zur Prüfung der Längenfrage ernannt und deren Berichterstatter, welcher kein minderer als **Newton** war, empfohlen hatte, durch eine Preisausschreibung die Gelehrten und Künstler zu neuen Anstrengungen zu ermutigen, erschien noch im gleichen Jahre unter dem Titel „An act for providing a public reward, for such person or persons as shall discover the longitud at sea" die berühmte Bill, welche für eine bis auf $^1/_2{}^0$ sichere Methode der Längenbestimmung zwischen England und Amerika eine Belohnung von 20000 ℔ Sterling versprach, und kleinere Preise von 15000 oder 10000 ℔, wenn die Sicherheit auch nur auf $^2/_3{}^0$ oder 1^0 gehe, — ferner zur Prüfung der eingehenden Arbeiten einen eigenen „Board of longitude" einsetzte. Durch diese hohen Preise und den mit der Lösung verbundenen Ruhm wurden nun wirklich die grössten Anstrengungen hervorgerufen, und zwar nach doppelter Richtung, indem die praktischen Mechaniker Längenuhren von genügender Genauigkeit zu erstellen, die Mathematiker und Astronomen die Mondtheorie und die Mondtafeln hinlänglich zu verbessern suchten. Wir werden die Erfolge in letzterer Richtung in Abschnitt XIX zu besprechen haben und beschränken uns hier darauf, einige auf die Längenuhren bezügliche historische Notizen beizufügen: Zunächst ist zu erwähnen, dass es **Harrison**, nachdem er (171) schon etwa 1725 sein Rost-Pendel konstruiert hatte, auch gelang, die von **Huygens** (123) als Surrogat des Pendels in die Federuhren eingeführte Spirale (Unruhe) gegen die Wärme zu kompensieren, und so spätestens 1735 eine tragbare Uhr zu erstellen, welche unter Anwendung der auch von seinem Vorgänger benutzten Cardan'schen Aufhängung (153) sich auf mehreren Seereisen ganz ordentlich bewährte, — ja durch fortwährende Verbesserungen nach und nach Werke zu liefern, durch die alle Forderungen der Parlamentsakte mehr als erfüllt wurden, so dass ihm schliesslich (wenn auch erst nach langen und widerwärtigen Verhandlungen, in welchen Maskelyne nicht die schönste Rolle gespielt zu haben scheint, — und nur ratenweise) die volle Prämie von 20000 π zufiel. Ferner will ich erwähnen, dass die Fein-Uhrmacherei, welche der sich schon von 1703 hinweg ebenfalls mit Längenuhren beschäftigende Henry **Sully** (England 1679 — Paris 1728) nach Frankreich brachte, auch in diesem Lande alsbald grosse Fortschritte machte, zumal ebenfalls Pensionen und Preise für bedeutendere Leistungen in Aussicht standen. Es würde mich dagegen viel zu weit führen, die betreffenden Arbeiten der Ferd. **Berthoud,** Pierre **Leroy** (Paris 1717 — Vitry bei Paris 1785; Sohn und Geschäftsnachfolger von Julien: Tours 1686 — Paris 1759), etc., ihren Wettstreit mit den englischen Uhrmachern, und die neuern Fortschritte dieser Branche ebenfalls eingehend zu behandeln, und ich beschränke mich darauf, zum Schlusse noch anzuführen, dass es seither auch gelang, den früher ausschliesslich gebräuchlichen Dosen- oder Box-Chronometern ganz wirksame Taschen- oder Pocket-Chronometer beizufügen. — *d.* Als erste grössere Chronometer-Expeditionen erwähne ich diejenigen, durch welche unter der Leitung von **Schumacher** 1821 Altona und Kopenhagen, unter derjenigen von Johann Ludwig **Tiarks** (Waddewarden in Ostfriesland 1789 — Jever 1837; erst Biblioth. Brit. Mus., dann Geodät in engl. Diensten) 1823/4 Greenwich und Altona, und unter derjenigen von Theodor II von **Schubert** (Petersburg 1789 — Stuttgart 1865; Sohn von Th. in 12:o und General in russ. Diensten) 1833 Kronstadt, Stockholm und Altona verbunden wurden, — als grösste und wichtigste dieser Art aber die von W. **Struve** geleitete und in dem Werke „Expédition chronométrique entre Poulkowa, Altona et Greenwich. St-Pétersbourg 1844—46 in 4." einlässlich beschriebene Operation.

410. Längenbestimmung mit Hilfe telegraphischer Verbindungen. — Sobald zwei Punkte telegraphisch verbunden und mit zweckmässig eingeschalteten Chronographen versehen sind, so kann man die dem Meridianunterschiede entsprechende Differenz der Ortszeiten finden, sobald man auf jedem der beiden Punkte abwechselnd Zeichen giebt, welche auf beiden Chronographen neben die gleichzeitigen Uhrstände notiert werden, — oder man kann die Verspätung eines Sternes von dem einen Meridiane zum andern bestimmen, indem man den Stern an beiden Punkten successive beobachtet und alle Fadendurchgänge auf beiden Chronographen notieren lässt [a]. Diese neue Art der Uhrvergleichung hat sich seit 1844, wo sie durch den Amerikaner Karl **Wilkes** zum ersten Male in Anwendung gebracht wurde, in der Praxis so ausgezeichnet bewährt, dass sie gegenwärtig für Längenbestimmungen auf dem Lande fast ausschliesslich gebraucht wird [b].

Zu 410: *a.* Als Beispiel wähle ich die von mir 1867 VI 29 bis VIII 13 mit **Plantamour** (Astron. Station auf Rigi-Kulm) und **Hirsch** (Sternwarte Neuenburg) zu Gunsten der kurz zuvor ins Leben getretenen geodätischen Association (434) gleichzeitig nach beiden Methoden ausgeführte Längenvergleichung, und verdeutliche zunächst (unter Hinweisung auf 158) die von mir auf der als Vermittlungsstation gewählten Sternwarte Zürich dafür getroffene Disposition durch nachfolgende Figur, in welcher TB und UB die je aus 10 Minotto-Elementen bestehenden Lokalbatterien für Taster und Uhr bezeichnen, —

LB die erst aus 120 kleinen Daniell'schen, später aus 80 Daniell'schen und 40 Minotto-Elementen bestehende Linienbatterie, — U die alle zwei Sekunden



den Uhrstrom herstellende Hilfsuhr, — R den zur Kontrole benutzten Regulator, — US und TS Uhrschreiber und Tasterschreiber des Chronographen, — T', T'' und T''' Sprech-, Linien- und Lokal-Taster, — B' und B'' Boussolen, — M den Morse oder Schwarzschreiber, — Rh den Rheostaten, — und endlich K den zur jeweiligen Herstellung der nötigen Verbindungen dienenden Kettenwechsel: Bei letzterem stellte beständig bei 5 ein Stift die Verbindung zwischen den sich dort kreuzenden Lamellen her, während der Gleitwechsel I auf a oder b gebracht wurde, je nachdem Rigi (R) und Neuenburg (N) in Verbindung mit Zürich (Z) gebracht oder für lokale Beobachtungen ausgeschaltet werden sollten; in ersterm Falle erforderte der Austausch

zwischen	R-Z-N	R-Z	N-Z
dass für Gebrauch des			
Morse	4 · 10	4 · 11	2 · 11
Chronographen	16 · 10	16 · 11	14 · 11

Stifte erhielten, — im zweiten Falle musste, wenn speciell der Standunterschied der beiden Chronographenfedern, oder die sog. **Federnparallaxe**, bestimmt werden sollte, auch noch der Gleitwechsel II auf c gestellt werden; um endlich N. und R. unter Ausschluss von Z. miteinander zu verbinden, genügte es, bei 2 und 4 Stifte zu stecken. Ich füge bei, dass in Neuenburg und auf dem Rigi, da diese nur als Endstationen zu funktionieren hatten, natürlich etwas einfachere Dispositionen getroffen werden konnten. — Als Beispiel für die Längenbestimmung selbst wähle ich die 1867 VII 3 in Zürich und Neuenburg je an 21 Faden beobachteten, an den beidseitigen Chronographen notierten, folglich auch als Zeichen benutzbaren Durchgänge von μ' Sagittarii, und stelle (auf die in 380 behandelte Ermittlung von Instrumentalfehler, Uhrkorrektion etc. hier nicht eintretend) die sich aus ihnen nach den beiden Methoden ergebenden Bestimmungen für die Längendifferenz L und die für den Strom zum Durchlaufen von Linien und Apparaten nötige Zeit T in folgender Weise schematisch zusammen, unter p die nach 382 bestimmte Personaldifferenz zwischen Hirsch und mir verstehend:

I. Aus den Ablesungen am Zürcher Chronographen ergab sich

Durchgangszeit .	N:	18^h	2^m	$10^s,300 + p$		Z:	17^h	55^m	$44^s,469$
Instr. Korr. . . .				$-\ 0,484$					$+\ 2,892$
Culminationszeit .	N:	18	2	$9,816 + p$		Z:	17	55	47,361
	Z:	17	55	47,361					
Differenz			6	$22,455 + p$					
Versp. d. Zürch. Chron.				0,055	in $6^m,4$				
L + T =			6^m	$22^s,510 + p$					

II. dagegen aus den Ablesungen am Neuenburger Chronographen

Durchgangszeit .	N:	18^h	5^m	$49^s,577 + p$		Z:	17^h	59^m	$23^s,719$
Instr. Korr. . . .				$-\ 0,484$					$+\ 2,892$
Culminationszeit .	N:	18	5	$49,093 + p$		Z:	17	59	26,611
	Z:	17	59	26,611					
Differenz			6	$22,482 + p$					
Versp. d. Neuenb. Chron.				0,002	in $6^m,4$				
L − T =			6^m	$22,484 + p$					
und somit aus I u. II 2 T =				$0^s,026$		L =	6^m		$22^s,497 + p$

III. ferner aus den Durchgängen in Zürich als Zeichen betrachtet

wie oben . . . . Z′:	17^h	55^m	$44^s,469$		Federnparallaxe	
„ „ . . . . . Z″:	17	59	23,719		Z .	$+\ 0^s,052$
Z′ − Z″:	−	3	39,250		N .	$-\ 0,034$
Korr. für Federnp. . .	+		0,086		Diff.	$+\ 0,086$
Korr. auf 18^h	−		0,037			
Z − N − T =	−	3^m	$39^s,201$			

IV. und endlich aus den Durchgängen in Neuenburg

wie oben . . . N′:	18^h	2^m	$10^s,300 + p$		Uhrkorrektion		
„ „ . . . N″:	18	5	$49,577 + p$		Z .	$+\ 10^m$	$4^s,162$
N′ − N″:	−	3	39,277		N .	+	$2,520 - p$
Korr. für Federnp. . .	+		0,086		Diff.	$+\ 10^m$	$1,642 + p$
Korr. auf 18^h	+		0,018				
Z − N + T =	−	3^m	$39^s,173$				
und somit aus III u. IV 2 T =			0,028	Z − N =	−	3^m	$39^s,187$
oder da die Differenz der Uhrkorrektionen						$+\ 10$	$1,642 + p$
durch Addition				L =			$6^m\ 22^s,455 + p$

so dass die beiden Methoden wesentlich zu demselben Resultate führen. Für weitern Detail auf die Publikation „E. **Plantamour**, R. **Wolf** et A. **Hirsch**, Détermination télégraphique de la différence de longitude entre la station astronomique du Righi-Kulm et les observatoires de Zurich et de Neuchatel. Genève 1871 in 4." verweisend, füge ich noch bei, dass im ganzen an 18 Abenden zahlreiche Sterne und Zeichen gewechselt wurden, dass sich aus erstern im Mittel L = $6^m\ 22^s,344$, aus letztern im Mittel L = $6^m\ 22^s,324$ ergab, und dass schliesslich unter Annahme von p = $0^s,034$ die Längendifferenz Zürich-Neuenburg zu $6^m\ 22^s,367$ angenommen wurde. — ***b.*** Der Gedanke, telegraphische Verbindungen für Uhrvergleichungen zu benutzen, liegt so nahe, dass es nicht überraschend ist zu hören, es haben schon 1839 sowohl **Gauss** als **Morse** diese

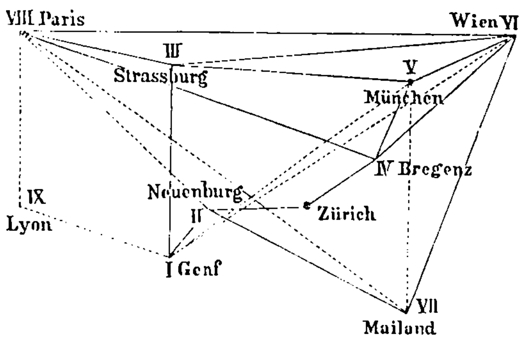
Methode empfohlen; jedoch scheint sie erst 1844 durch Kapitän Karl **Wilkes** zur Bestimmung der Längendifferenz Washington-Baltimore wirklich in Anwendung gekommen zu sein, und zwar noch in der primitiven Weise, dass er an beiden Stationen auf Ortszeit regulierte Chronometer nach den Telegraphenbureaus bringen, und sodann während fünf Tagen durch Zeichen vergleichen liess, welche abwechselnd am einen Orte gegeben und am andern mit dem Ohr beobachtet wurden. Da der Erfolg nicht unbefriedigend war, so entschloss sich sodann im folgenden Jahre Alexander Dallas **Bache** (Philadelphia 1806 — Newport 1867; Urenkel von Franklin; Prof. phys. Philadelphia, dann Nachfolger von Hassler), die Längendifferenzen der Hauptpunkte der Coast Survey auf diese Weise bestimmen zu lassen, wofür nunmehr von 1846 hinweg unter Direktion von **Walker** die nötigen Arbeiten in Gang kamen: Die Sternwarten und Stationen von Washington, Philadelphia, New-York, etc. wurden mit den Telegraphenlinien verbunden, — man tauschte sowohl Zeitzeichen als Fadendurchgänge aus, wofür alsbald der Chronograph (159) vortreffliche Dienste leistete, — etc. Bald folgte auch Europa, indem schon 1848 (vgl. Wien. Sitzungsber. von 1848 XI 30) unter Leitung von **Kreil** die Längendifferenzen Wien-Prag und Wien-Olmütz auf telegraphischem Wege bestimmt wurden, und nach wenigen Jahren schlug diese Methode, welche in der Schweiz zum erstenmale 1861 durch **Plantamour** und **Hirsch** für Genf-Neuenburg Anwendung fand, wenigstens auf dem Lande alle übrigen Verfahren aus dem Felde, ja erlaubte 1866, vgl. „B. A. **Gould**, The transatlantic Longitude, as determined by the Coast Survey expedition of 1866. (Smiths. Contrib. 1869)“, mit Hilfe des kurz zuvor gelegten atlantischen Kabels auch die überseeischen Längen in sicherster Weise zu kontrolieren: Es ergab sich dabei für Washington-Greenwich die Längendifferenz $5^h\ 8^m\ 12^s,45$, während man früher durch Finsternisse und Bedeckungen durchschnittlich $14^s,86$, durch Mondculminationen $10^s,12$ und durch Chronometer $12^s,30$, also im Mittel $12^s,43$ gefunden hatte. — Anhangsweise füge ich bei, dass man früher, in Ermanglung zuverlässiger Chronographen, häufig die sog. **Methode der Coincidenzen** anwandte, welche darin bestand, dass man an jedem Beobachtungsabende zu verabredeten Zeiten zuerst auf der einen, dann auf der andern Station eine Hilfsuhr, deren Sekunden merklich von einer Sternsekunde abwichen, in die Telegraphenleitung einschaltete, und den durch sie bewirkten Sekundenschluss durch das Schlagen von Relais (158) auf beiden Stationen hörbar machte, so dass jeder der beiden Beobachter die Coincidenzen zwischen den Schlägen seiner Sternuhr und denjenigen seines Relais aufsuchen konnte; dass sich so ebenfalls eine Uhrvergleichung erhalten lässt, ist klar, und für den Detail einer solchen Operation kann z. B. auf die 1865 durch Wilhelm **Förster** (Grünberg in Schlesien 1832 geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Berlin) und E. **Weiss** ausgeführte Längenbestimmung Berlin-Wien (Publ. preuss. geod. Inst. 1871) verwiesen werden.

411. Die Längenausgleichung. — Die bequeme und sichere Weise der Längenbestimmung mit Hilfe der elektrischen Telegraphen hat es in Verbindung mit dem durch die neuern geodätischen Arbeiten (434) geschaffenen Bedürfnisse genauer und zahlreicher Ortsbestimmungen bereits dazu gebracht, dass für grössere Netze astronomischer Punkte sog. überschüssige Bestimmungen vorliegen, welche eine Ausgleichung und damit eine vorzügliche Kontrole der einzelnen Bestimmungen ermöglichen".

Zu 411: *a.* Als Beispiel einer Längenausgleichung gebe ich die von mir vor einigen Jahren auf Grund folgender 14 damals bereits auf telegraphischem Wege, teils definitiv (d), teils provisorisch (p) erhaltenen Längenbestimmungen

Nr.	Stationen	Jahr	Längendifferenz Beobachtung	Längendifferenz Rechnung	Diff. R — B Δw	Diff. R — B Δh
1	Zürich-Neuenburg .	1867	6^m $22{,}37^s$. d	$22{,}33^s$	— 4	12
2	Bregenz-Zürich . .	1872	4 53,69. d	53,87	18	19
3	Neuenburg-Genf . .	1861	3 12,97. d	13,02	5	23
4	Strassburg-Genf . .	1876	6 27,93. d	27,88	— 5	4
5	Mailand-Neuenburg	1870	8 55,99. d	56,08	9	6
6	Strassburg-Paris .	1863	21 43,56. d	43,59	3	7
7	München-Strassburg	1875	15 21,41. p	21,36	— 5	2
8	Wien-Strassburg .	1875	34 16,53. p	16,50	— 3	0
9	Bregenz-Paris . .	1874	29 45,15. p	44,93	— 22	8
10	München-Bregenz .	1874	7 19,85. p	20,02	14	— 5
11	Wien-Bregenz . .	1873	26 14,78. p	15,16	38	15
12	Wien-München . .	1875	18 55,11. d	55,13	2	— 1
13	Wien-Paris . . .	1873	56 0,07. d	0,09	2	9
14	Wien-Mailand . .	1875	28 35,18. d	35,20	2	7

für Zürich ausgeführte Rechnung, bei welcher die definitiv berechneten Längen mit dem Gewichte 1, die provisorisch berechneten mit dem Gewichte $1/2$ eingeführt wurden. Ich setzte nun



I	Zürich-Genf	=	9^m	$35^s + \Delta_1$
II	- Neuenburg		6	$22 + \Delta_2$
III	- Strassburg		3	$7 + \Delta_3$
IV	- Bregenz		— 4	$54 + \Delta_4$
V	- München		— 12	$14 + \Delta_5$
VI	- Wien		— 31	$9 + \Delta_6$
VII	- Mailand		— 2	$34 + \Delta_7$
VIII	- Paris		24	$51 + \Delta_8$

und erhielt so, indem ich in Hundertstels-Sekunden rechnete, jede der 14 gegebenen Längen durch Kombination der Annahmen I bis VIII ausdrückte und überdies die angenommenen Gewichte einführte, die Bedingungsgleichungen

1 = II	oder 37 =		Δ_2						
2 = — IV	— 31 =				$-\Delta_4$				
3 = I—II	— 3 =	Δ_1	$-\Delta_2$						
4 = I—III	— 7 =	Δ_1		$-\Delta_3$					
5 = II—VII	— 1 =		Δ_2					$-\Delta_7$	
6 = VIII—III	— 44 =			$-\Delta_3$					$+\Delta_8$
7 = III—V	20,5 =			$\frac{1}{2}\Delta_3$		$-\frac{1}{2}\Delta_5$			
8 = III—VI	26,5 =			$\frac{1}{2}\Delta_3$			$-\frac{1}{2}\Delta_6$		
9 = VIII—IV	7,5 =				$-\frac{1}{2}\Delta_4$				$+\frac{1}{2}\Delta_8$
10 = IV—V	— 6 =				$\frac{1}{2}\Delta_4$	$-\frac{1}{2}\Delta_5$			
11 = IV—VI	— 11 =				$\frac{1}{2}\Delta_4$		$-\frac{1}{2}\Delta_6$		
12 = V—VI	11 =					Δ_5	$-\Delta_6$		
13 = VIII—VI	7 =						$-\Delta_6$		$+\Delta_8$
14 = VII—VI	18 =						$-\Delta_6$	$+\Delta_7$	

und aus diesen ergeben sich die Normalgleichungen

$-10 =$	$2\Delta_1$	$-\Delta_2$	$-\Delta_3$					
$39 =$	$-\Delta_1$	$+3\Delta_2$					$-\Delta_7$	
$74\frac{1}{2} =$	$-\Delta_1$		$+\frac{3}{2}\Delta_3$		$-\frac{1}{4}\Delta_5$	$-\frac{1}{4}\Delta_6$		$-\Delta_8$
$18\frac{3}{4} =$				$\frac{3}{4}\Delta_4$	$-\frac{1}{4}\Delta_5$	$-\frac{1}{4}\Delta_6$		$-\frac{1}{4}\Delta_8$
$3\frac{3}{4} =$			$-\frac{1}{4}\Delta_3$	$-\frac{1}{4}\Delta_4$	$+\frac{3}{2}\Delta_5$	$-\Delta_6$		
$-43\frac{3}{4} =$			$-\frac{1}{4}\Delta_3$	$-\frac{1}{4}\Delta_4$	$-\Delta_5$	$-\frac{7}{2}\Delta_6$	$-\Delta_7$	$-\Delta_8$
$19 =$		$-\Delta_2$				$-\Delta_6$	$+2\Delta_7$	
$-33\frac{1}{4} =$			$+\Delta_3$	$-\frac{1}{4}\Delta_4$		$-\Delta_6$		$+\frac{9}{4}\Delta_8$

Rechnet man nun der Reihe nach aus jeder Normalgleichung diejenige Grösse aus, nach welcher sie gebildet ist, und substituiert je ihren Wert in alle folgenden Gleichungen, so erhält man successive, erst abwärts und dann aufwärts operierend,

$\Delta_1 = -5 + 0{,}5 \cdot \Delta_2 + 0{,}5 \cdot \Delta_3 \ldots\ldots = 0^s{,}34664$

$\Delta_2 = 13{,}6 + 0{,}2 \cdot \Delta_3 + 0{,}4 \cdot \Delta_7 \ldots\ldots = 0{,}32652$

$\Delta_3 = 40{,}158 + 0{,}132 \cdot \Delta_5 + 0{,}132 \cdot \Delta_6 + 0{,}105 \cdot \Delta_7 + 0{,}526 \cdot \Delta_8 = 0{,}46676$

$\Delta_4 = 10{,}714 + 0{,}143 \cdot \Delta_5 + 0{,}143 \cdot \Delta_6 + 0{,}143 \cdot \Delta_8 \ldots\ldots = 0{,}12547$

$\Delta_5 = 11{,}507 + 0{,}747 \cdot \Delta_6 + 0{,}018 \cdot \Delta_7 + 0{,}117 \cdot \Delta_8 \ldots\ldots = 0{,}10199$

$\Delta_6 = 4{,}289 - 0{,}239 \cdot \Delta_7 - 0{,}296 \cdot \Delta_8 \ldots\ldots = -0{,}03256$

$\Delta_7 = 24{,}938 - 0{,}110 \cdot \Delta_8 \ldots\ldots = 0{,}24292$

$\Delta_8 = 5{,}876 \ldots\ldots = 0{,}05876$

oder

I = $9^m\,35^s{,}347$ II = $6^m\,22^s{,}327$ III = $3^m\,7^s{,}467$ IV = $-\,4^m\,53^s{,}875$

V = $-\,12\;13{,}898$ VI = $-\,31\;9{,}033$ VII = $-\,2\;33{,}757$ VIII = $24\;51{,}059$

Berechnet man sodann rückwärts mit Hilfe dieser letztern Werte die 1 bis 14, so erhält man die in obige Tafel als **durch Rechnung erhalten** eingetragenen Längendifferenzen und durch Vergleichung derselben mit den direkt **aus**

Beobachtung hervorgegangenen Werten die, R — B = $\triangle$w, aus welchen sich

$$\Sigma p \cdot w^2 = 1571 \quad \text{und} \quad \sqrt{1/_{14} \cdot \Sigma p w^2} = \pm 11 = \pm 0^s{,}11$$

ergeben. Die in die Tafel eingetragenen $\triangle$h endlich sind die definitiven, von den $\triangle$w begreiflicherweise zum Teil merklich abweichenden Korrektionen, welche die 14 Längendifferenzen nach Jakob **Hilfiker** (Kölliken im Aargau 1851 geb.; Obs. Neuenburg), dessen „Ausgleichung des Längennetzes der europäischen Gradmessung (A. N. 2674 von 1885)" nicht weniger als 93 Längenvergleichungen zwischen 39 Stationen umfasst, zu erhalten haben. — Seit der Zeit, wo ich vorstehende Längenausgleichung durchführte, sind noch folgende 7 betreffende und in obiger Figur bereits durch punktierte Linien angedeutete Längenvergleichungen bekannt geworden:

Nr.	Stationen	Jahr	Längendifferenz		Diff. R — B	
			Beobachtung	Rechnung	$\triangle$w	$\triangle$h
			m s	s	s	s
15	Genf-Lyon . . .	1877	5 28,32 · p	—	—	28
16	München-Genf . .	1877	21 49,36 · d	49,25	— 11	3
17	Wien-Genf . . .	1881	40 44,65 · p	44,38	— 27	— 16
18	Lyon-Paris . . .	1877	9 46,81 · p	—	—	25
19	Mailand-Paris . .	1881	27 24,96 · d	24,82	— 14	— 5
20	Neuenburg-Paris .	1877	18 28,53 · p	28,73	20	33
21	München-Mailand .	1875	9 40,15 · d	40,14	— 1	0

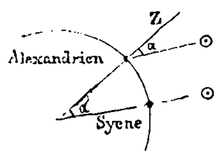
In dieser Supplementartafel sind die, als **durch Rechnung erhalten**, eingetragenen Längen aus Kombination der oben gefundenen I bis VIII hervorgegangen und aus ihnen die $\triangle$w berechnet, die $\triangle$h aber wieder Hilfikers Arbeit entnommen worden: Die Vergleichung dieser $\triangle$w und $\triangle$h legt für die frühere Rechnung offenbar ein befriedigendes Zeugnis ab.

412. Die ältesten Angaben über die Grösse der Erde. — Wenn die Erzählung begründet ist, dass die Chaldäer angenommen haben, man könnte die Erde in einem Jahre umwandern, so hat man nicht nur anzunehmen, dass sie (216) die Erde wirklich als eine Kugel betrachteten, sondern auch, dass sie deren Grösse durch eine Art Messung zu bestimmen versucht hatten; denn jene Angabe kömmt der Wahrheit zu nahe, um Resultat einer blossen Spekulation zu sein [a], und namentlich viel näher als die bei den ältern Griechen vorkommenden Erdumfänge von 40 und 30 Myriaden Stadien, obschon auch diese als Resultate von Beobachtung und Rechnung mitgeteilt werden [b].

Zu 412: *a.* Ein Jahr hält nämlich $365^1/_4 \times 24 = 8766$ Zeitstunden, während der Erdumfang circa $360 \times 15 \times 1^1/_2 = 8100$ Wegstunden gleichkömmt. — Wie die Chaldäer zu dieser Annahme gekommen sind, weiss man nicht. Möglicherweise hatten sie sich abstrahiert, dass nach 24-stündigem Wandern gegen Norden ein nördlicher Stern um etwa 1° höher als zuvor erscheine. — *b.* Da **Horaz** den Pythagoräer **Archytas**, einen Zeitgenossen von Plato, in einer seiner Oden mit den Worten „Te maris et terræ, numeroque carentis arenæ mensorem cohibent, Archyta“ verewigte, so ist wohl anzunehmen, dass dieser in irgend einer Weise den Erdumfang ermittelt, und sich **Aristoteles** bei seiner Angabe (in „De coelo“; ed. Prantl p. 183), es betrage nach Berechnung der Mathematiker der Umfang der Erde etwa 400000 Stadien (was allerdings ein Stadium von nur 100 statt 184^m voraussetzen würde), zunächst auf ihn gestützt habe. — Einer wenig spätern, etwa mit Aristarch korrespondierenden Zeit, scheint **Kleomedes** in seiner Schrift „De mundo“ zu gedenken, wenn er erzählt: „Denen die in Lysimachia (Thrakien) wohnen, steht der Kopf des Drachen über dem Scheitel, in Syene aber steht der Krebs im Zenit; der Raum zwischen dem Drachen und dem Krebs ist aber (wie auch der Gnomon zeigt) der 15. Teil des Meridianes von Lysimachia und Syene (im Mittel aus dem Deklinationsunterschiede $^1/_{12}$ und dem Breitenunterschiede $^1/_{20}$), die 20000 Stadien von einander entfernt sind, so dass der ganze Kreis 300000 Stadien enthält“; denn **Archimedes** sagt in seiner Sandrechnung (Peyrard 349) ausdrücklich, man habe zeigen wollen, dass der Erdumfang 30 Myriaden Stadien halte.

413. Die Bestimmungen von Eratosthenes und Posidonius. — Die ersten Griechen, von welchen man ziemlich sicher weiss, dass sie zur Ermittlung des Erdumfanges richtige geometrische Grundsätze und wenigstens zum Teil wirkliche Messungen anwandten, waren **Eratosthenes** und der etwas spätere **Posidonius** [a], und es bildet für mich der den Grundsätzen der Erfahrungswahrscheinlichkeit konforme Umstand, dass der wirkliche Erdumfang nahe in die Mitte zwischen die von ihnen erhaltenen Extreme von 252000 und 180000 Stadien fällt, ein starkes Argument für die von einzelnen angezweifelte Realität ihrer Bestimmungen [b].

Zu 413: *a.* Die unter vorhergehender Nummer nach **Kleomedes** geschilderte Methode der Erdmessung stimmt einigermassen mit derjenigen überein, welche nach demselben Gewährsmanne **Eratosthenes** benutzte; aber immerhin deuten die Angaben über die Bestimmung dieses letztern viel sicherer auf wirkliche Messung hin. Derselbe soll nämlich erfahren haben, dass sich in Syene (dem heutigen Assuan in Ober-Egypten) die Sonne am längsten Tage in einem tiefen Brunnen spiegle oder also dort um Mittag im Zenite stehe, während er durch Messung fand, dass in Alexandrien die kleinste Zenitdistanz der Sonne (vgl. 57: c) etwa $\alpha = {}^1/_{50}$ des Kreises sei; da er nun überdies aus den Angaben der königlichen Wegmesser wusste, dass Alexandrien etwa 5000 Stadien nördlich von Syene liege, so schloss er folgerichtig, dass der Erdumfang circa $50 \times 5000 = 250000$ Stadien betragen werde, — eine Zahl, welche später auf 252000 erhöht wurde, weil dadurch für einen Grad des Erdmeridianes sich die runde Zahl von 700 Stadien ergab. — An die Genauigkeit dieser Bestimmung darf man offenbar keine zu grossen Anforderungen stellen; aber wenn man der Länge des griechischen Stadiums den üblichen Wert von 184^m,97 beilegt, so folgt für den Erdumfang der Wert von $250000 \times 184{,}97 = 46\,242\,500^m$, und da kann man sich dennoch fragen, wovon der für eine wirk-



liche Messung etwas grosse Überschuss von circa $6^1/_4$ Million Meter herrühren möchte. Da sich nun kaum jemand entschliessen dürfte, den in „J. W. **Schmitz,** Das Weltall. Köln 1852 in 8." ausgesprochenen abenteuerlichen Gedanken zu acceptieren, es habe der Umfang der Erde zur Zeit von Eratosthenes wirklich jene Grösse besessen, sei dann aber seither durch Schwinden infolge von Abkühlung jedes Jahr um 3121^m kleiner geworden, so muss man, um jenen Unterschied zu heben, von den drei bei der Berechnung mitwirkenden Faktoren entweder 50 (d. h. $\alpha = 7^0\,20'$) auf etwa 43 (d. h. $\alpha = 8^0\,20'$) reduzieren, was aber kaum angeht, — oder 184,97 auf etwa 158,25, was so ziemlich mit den 157,5 übereinstimmen würde, welche Friedrich Otto **Hultsch** (Dresden 1833 geb.; Rektor der Kreuzschule in Dresden) nach gründlicher Untersuchung (vgl. seine Griechische und römische Metrologie. 2. A. Berlin 1882 in 8.") als Wert des Stadiums von Eratosthenes erhielt, — oder 5000 auf etwa 4325, was ebenfalls ganz zulässig ist, da die 5000 kaum als Ergebnis einer wirklichen **Distanzmessung**, sondern wohl nur als ein approximatives **Wegmass** zu betrachten sind. Da nun **Posidonius** etwa 200 Jahre später in analoger Weise aus dem Umstande, dass Canopus auf Rhodus kaum noch aufgehe, während er in dem, nach den einen 5000 und nach andern 3750 Stadien, südlichern Alexandrien noch die Höhe von $^1/_{48}$ des Kreises erreiche, den Schluss zog, dass der Erdumfang zwischen $48 \times 5000 = 240000$ und $48 \times 3750 = 180000$ Stadien liege, also etwa $210000 \times 184{,}97 = 38\,843\,700^m$ betrage, und die Erklärung dieses Defizits (von Schmitz, der diese ihm unbequeme Messung einfach ignorierte, kaum zu sprechen) nach der Hultsch'en Methode wieder ein neues Stadium von circa $190^m{,}5$ erfordern würde, während sie sich aus der hier offen zu Tage tretenden ungenügenden Kenntnis der Distanz von selbst ergiebt, so muss ich auch die Anomalie bei Eratosthenes zunächst auf jenen dritten Grund zurückführen. — *b.* Im Mittel aus den extremen Werten von 252000 und 180000 Stadien ergiebt sich nämlich $216000 \times 184{,}97 = 39\,953\,520^m$ als Erdumfang. — Ich füge zum Schlusse bei, dass ich, entsprechend der Erzählung von **Kleomedes,** daran festhalten muss, es habe **Eratosthenes** eine wirkliche Erdmessung ausgeführt, verweise übrigens für die Gegengründe der Egyptiologen auf „**Sprenger,** Zur Geschichte der Erdmessung im Alterthume (Ausland 1867)".

414. Die Messungen der Araber. — Die erste bekannte Bestimmung der Grösse der Erde, welche allseitig auf unmittelbarer Messung beruhte und den früher (219) besprochenen Grundsätzen völlig konform war, wurde um das Jahr 827 in Vorderasien auf Befehl des Khalifen Almamum durch dessen Astronomen **Chalid ben Abdulmelik** und **Ali ben Isa** ausgeführt [a], — und es ist nur zu bedauern, dass man das erhaltene Ergebnis, nämlich dass ein Grad $56^2/_3$ arabische Meilen halte, nicht mit voller Sicherheit auf unsere gegenwärtigen Masse zu reduzieren weiss [b].

Zu 414: *a.* Nach den Berichten, welche uns der Zeitgenosse **Alfragan** und der etwas spätere **Ibn Junis** über diese Arbeiten in ihren Schriften hinterlassen haben, wurde zuerst in der Nähe von Palmyra ein Meridianbogen abgesteckt und mit Stäben gemessen, woraus sich die Länge eines Grades gleich 57 arabische Meilen ergab; sodann wurde die Operation in der nördlich vom Euphrat liegenden Ebene Sindjar in der Weise wiederholt, dass von einem

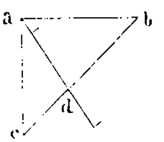
Punkte aus sowohl nach Süden als nach Norden ein Meridianbogen abgesteckt und durch zwei sich kontrolierende Gruppen von Astronomen gemessen wurde, wobei der Grad $56^1/_4$ Meilen erhielt; schliesslich wurde derselbe im Mittel aus beiden Messungen definitiv zu $56^2/_3$ festgesetzt. — *b.* Unter Annahme, dass die von Almamum eingeführte Meile 4000 sog. „schwarze", der Armlänge eines Neger-Eunuchen entnommene Ellen, und diese Elle 234''',69 P. gehalten habe, würde der arabische Grad

$$56^2/_3 \times 4000 \times 234{,}69 : (6 \cdot 12 \cdot 12) = 61570^t$$

betragen oder (vgl. 418) etwa um $4^1/_2$ tausend Toisen zu gross sein, — jedoch wohl weniger um der Messung willen als wegen der Unsicherheit der Massübertragung.

415. Die angebliche Messung von Fernel. — Eine erste Erdmessung im Abendlande, welche der Franzose Jean **Fernel** [a] in seiner Schrift „Cosmotheoria, libros duos complexa. Parisiis 1528 in fol." gemacht zu haben vorgab, flösst schon wegen des angewandten, in einer Verschlimmbesserung der arabischen Methode bestehenden Verfahrens wenig Zutrauen ein [b], und überdies sind die schon früher ausgesprochenen Zweifel an der Realität dieser Messung durch die neuere Kritik noch verstärkt, ja sogar die Grundlagen der spätern, ein merkwürdig gutes Resultat ergebenden Neuberechnung als mutmasslich irrige erwiesen worden [c].

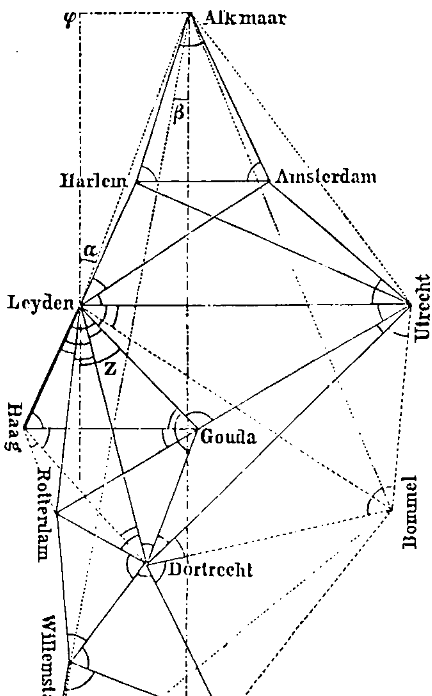
Zu 415: *a.* Jean **Fernel** (Clermont 1497 — Paris 1558) lebte als praktischer Arzt in Paris. — *b.* **Fernel** berichtet nämlich selbst, er habe am 25. August



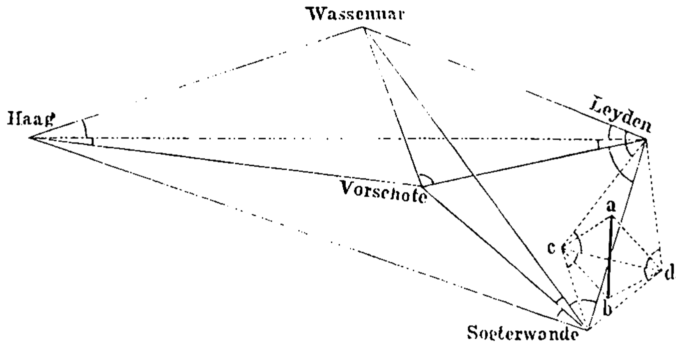
(1527?) in Paris mit Hilfe einer Art „Regula Ptolemaica (333)", welche aus einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke abc von 8' Kathete und einem um a drehbaren Diopterlineale bestand, an der eine Minutenteilung tragenden Hypotenuse bc die Mittagshöhe der Sonne abgelesen und daraus die Polhöhe 48° 38' abgeleitet; sodann habe er ausgemittelt, in welcher Höhe die Sonne an einer Reihe von folgenden Tagen unter 49° 38' culminieren müsste, und sei nun mit seinem Instrumente nach Norden gezogen: Als er nach einem Marsche von $1^1/_2$ Tagen die Sonnenhöhe gemessen habe, sei sie noch zu gross gewesen und er habe also weiter gehen müssen; auch am 28. habe er sie noch etwas zu gross gefunden, aber nun berechnen können, wie weit er noch zu gehen brauche, und am 29. habe wirklich die Sonnenhöhe genau die für diesen Tag vorausberechneten 46° 41' betragen, so dass er nunmehr sicher gewesen sei, sich wirklich 1° nördlich von Paris zu befinden. Er habe nun einen Wagen genommen, in welchem sich eine Glocke befand, an die nach jeder Umdrehung eines Rades ein Hammer schlug, und sei in demselben unter Zählen der Schläge nach Paris zurückgefahren. Einigermassen die Umwege und Unebenheiten berücksichtigend, habe er schliesslich 17024 Umdrehungen in Rechnung gebracht und so, da der Umfang des Rades sehr nahe 20' oder 4 sog. „geometrische Schritte" betrug, als Resultat erhalten, dass die Länge eines Grades 68096 Schritte sei, was ziemlich gut mit den Angaben der Alten übereinstimme. — *c.* Den Schritt zu $^5/_6{}^t$ einführend, setzte die spätere Zeit den Fernel'schen Grad gleich $56746^2/_3{}^t$, und als **Lalande** (Mém. Par. 1787) die ganze Rechnung revidierte, dabei namentlich berücksichtigend, dass 1668 die Toise um 5''' verkürzt wurde, also schon aus diesem Grunde die Fernel'sche Zahl im Verhältnisse von 864 zu 859 vergrössert werden müsse, erhielt er 57070^t^, d. h. eine ganz merkwürdig nahe Übereinstimmung mit dem 1½ Jahrhunderte später von Picard (418) nach strenger Methode zu 57060^t^ bestimmten Grade. — So weit wäre nun alles schön und gut; aber nun kömmt „le revers de la médaille“: Ganz abgesehen davon, dass schon die von **Fernel** um volle 12' zu klein angesetzte Polhöhe von Paris wenig Zutrauen auf seine Sonnenhöhen einflösst, und dass die von **Snellius** in seinem „Eratosthenes batavus (p. 210)“ ausgesprochene Meinung, es habe **Fernel** gar nicht wirklich gemessen, sondern nur das Ergebnis der arabischen Gradmessung in willkürlicher Weise in geometrische Schritte umgewandelt und seine Zeitgenossen durch ein Blendwerk getäuscht, auch manches für sich hat, — so hat die strengere Kritik der neuern Zeit auch noch die Voraussetzung, es sei der von Fernel angewandte Fuss wenigstens annähernd der Pariser-Fuss gewesen, als irrig erwiesen. Es hat nämlich A. de **Morgan** in seinen Artikeln „On Fernel's measure of a degree (Phil. Mag. 1841—42)“ und dann wieder in seinen „Arithmetical books from the invention of printing to the present time. London 1847 in 8.“ darauf aufmerksam gemacht, dass **Fernel** in dem zwei Jahre vor seiner „Cosmographia“ herausgegebenen „Monalosphærium. Paris 1526 in fol.“ auf Blatt 25 eine „Figuratio pedis geometrici“ gab, auf welche er im Texte mit den Worten „Caeterum virga quædam mensoria **omni molimine** nobis deligenda est, mensurarum diversitate locupletata“ hinwies, — und von diesem Fuss, der nur $0^m,246 = {}^3/_4{}'$ P. (Morgan fand 9'',65 E.) hält, rechnete Fernel **fünf** auf einen Passus. Da es nun kaum einem Zweifel unterliegt, dass der von **Fernel** in seiner „Cosmotheoria“ angewandte Passus mit demjenigen des „Monalosphærium“ übereinstimmt, so ist damit in der That die neuere Berechnung der Fernel'schen Messung hinfällig geworden, ja letztere selbst im Sinne von Snellius in Frage gestellt, da ein um ein volles Viertel zu kleines Resultat wirklich verdächtig erscheint.

416. Die Messung von Snellius. — Ganz anders verhält es sich mit der Erdmessung, welche der ausgezeichnete Willebrord **Snellius** von 1614 hinweg ausführte und sodann in seinem „Eratosthenes batavus de terræ ambitus vera quantitate. Lugduni Bat. 1617 in 4.“ beschrieb, indem die von ihm eingeführte Methode, **einerseits durch ein orientiertes Dreiecksnetz die Distanz eines Punktes von dem Parallel eines andern Punktes zu bestimmen, und sodann anderseits den Breitenunterschied der beiden Punkte zu ermitteln**, nicht nur für damals einen ungemeinen Fortschritt repräsentierte, sondern auch für die Zukunft massgebend blieb [a]. Auch die Ausführung seiner Arbeit und die feine Weise, wie sich **Snellius** über verschiedene Schwierigkeiten wegzuhelfen wusste, verdienen die höchste Anerkennung [b], und dass sein Schlussresultat kein brillantes war, hängt nicht mit der befolgten Methode, sondern einzig damit zusammen, dass sein früher Tod den Abschluss einer begonnenen Revision der unter den ungünstigsten äussern Verhältnissen unternommenen Messungen verhinderte [c].

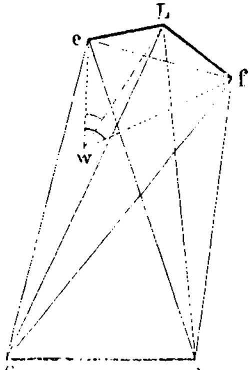
Zu 416: *a.* **Snellius** ist entschieden der Erste, der eine eigentliche Triangulation ausführte; denn wenn wir auch schon ein Jahrhundert früher in „Rainer **Gemma,** Libellus de locorum describendorum ratione. Antwerpiæ 1533 in 4.", in „Sebastian **Münster,** Cosmographei. Frankfurt 1537 in 4.", und in dem von 1541 datierenden, durch Joachim gen. **Rhäticus** hinterlassenen Mss. über Chorographie (vgl. Hiplers Reproduktion in Z. f. M. u. Ph von 1876) einige bezügliche Andeutungen finden, so beziehen sich diese doch noch eher auf das sog. Polygonisieren (Messen von Richtung und Distanz) als auf das eigentliche Triangulieren (Bestimmung aus Basis und Winkeln), und sind auch sonst noch gar zu roh und dürftig. So z. B. giebt **Münster** (l. c.) folgende Regel: Man steigt auf einen Turm oder Berg, — stellt den (von der Mitte aus nach jeder Seite 36 Teile zeigenden, somit $2^1/_2{}^0$ gebenden) Halbkreis mit Hilfe der (damals ziemlich richtig weisenden) Boussole so auf, dass seine Mittellinie in den Meridian fällt, — richtet nun den drehbaren Radius auf verschiedene von da aus sichtbare Punkte, jeweilen ablesend, — verzeichnet die so erhaltenen Azimute, und trägt schliesslich auf jede dadurch erhaltene Richtung die Anzahl Meilen auf, welche man für die Distanzen der betreffenden Punkte durch „fussgang oder ritt" erhalten hat; dann begiebt man sich auf einen dieser neu erhaltenen Punkte, — operiert da wieder in ähnlicher Weise, — u. s. f. — *b.* Der von **Snellius** bei Anwendung seiner Methode eingeschlagene Gang war folgender: Er legte an die Distanz Leyden-Haag, welche den Ausgang bilden sollte, ein erstes Dreieck Leyden-Gouda Haag, an dieses wieder andere Dreiecke, u. s. f., wie dies beistehende Figur (wo die ganzen Linien die notwendigen, die durch Folgen von Strichen angedeuteten aber die kontrolierenden Verbindungen darstellen) zeigt, bis er nach Norden Alkmaar und nach Süden Bergen-op-Zoom erreicht hatte. — Um die Länge der Ausgangslinie Leyden-Haag zu bestimmen, wurde von **Snellius** zuerst zwischen Leyden und dem benachbarten Dorfe Soeterwonde mit eisernen Mass-Stäben von 12' Länge (einer holländischen Rute, die er in 100 Teile geteilt hatte) eine kleine Basis ab = $87^r,05$ gemessen, und sodann diese vorerst mit der Linie Leyden-Soeterwonde, dann mit Haag-Leyden durch das in der folgenden Figur dargestellte Hilfsnetz



verbunden, in welchem die Winkel mit einem zweifüssigen messingenen Quadranten gemessen wurden, der mittelst Transversalen notdürftig Minuten gab.



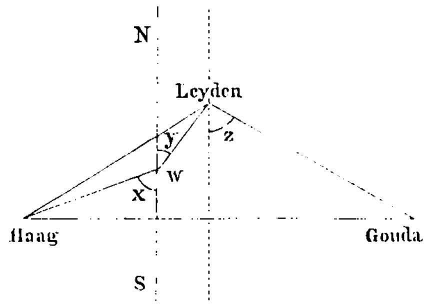
Dass nun mit solchen Hilfsmitteln, trotz der von **Snellius** angewandten Vorsicht und der von ihm gemachten Kontrolmessungen, das schliesslich für Leyden-Haag erhaltene Rechnungsresultat von 4103r,30 keine grosse Zuverlässigkeit besitzen konnte, liegt auf der Hand, und auch für die Winkelmessung im Hauptnetze blieben anfänglich dieselben Verhältnisse bestehen, so dass **Snellius,** dem alsgemach auch die Umkosten bei dem für seine starke Familie ohnehin kaum ausreichenden Professoren-Gehalte von bloss 400 fl. beschwerlich fielen, kaum den Mut besessen hätte, seine Arbeit zum Ende zu führen, wenn sich nicht einerseits zwei seiner Schüler, die Barone Erasmus und Caspar **Sternberg**, samt ihrem Hofmeister Joh. **Philemon**, anerboten hätten, ihm auf ihre Kosten bei derselben behilflich zu sein, — und ihm anderseits in einem $3\frac{1}{2}$-füssigen messingenen Halbkreise ein Winkelinstrument zur Verfügung gestellt worden wäre, mit dem es ihm möglich wurde, seine Dreiecke wenigstens bis auf circa 1' zum Schlusse zu bringen. So konnte die Feldarbeit im Sommer 1615 erledigt und nunmehr die für **Snellius**, der noch keine Logarithmen benutzen konnte, ebenfalls noch äusserst mühsame Berechnung des Hauptnetzes durchgeführt werden, bei der sich schliesslich nach nicht weniger als 32, sich ausser den Haupt- und Versicherungs-Dreiecken auch auf die (Fig. 1) durch punktierte Linien angedeuteten Hilfsdreiecke beziehenden trigonometrischen Operationen, die Distanzen



Alkmaar-Leyden = 14749r,0

Alkmaar-Bergen = 34710r,6

ergaben. — Um sein Dreiecknetz zu orientieren, bestimmte **Snellius** in seiner Wohnung bei w, von wo aus er nicht nur den als Signalpunkt für Leyden benutzten Turm L der Kathedrale, sondern auch die Türme e und f der Peters- und Pankratius-Kirche, sowie seinen Signalpunkt in Haag sehen konnte, und deren Meridian er längst (wahrscheinlich durch korrespondierende Schatten) auf das genauste bestimmt hatte, die Winkel ewL und ewf, — während er von c und d aus (vgl. auch Fig. 2) die Winkel von cd mit den Richtungen nach e, L und f mass. Aus diesen letztern und der Bekannten cd berechnete er sodann successive die Distanzen ce, cL, cf, — de, dL, df, — eL, Lf, ef, — und endlich mit Hilfe der in w gemessenen Winkel auch wL, womit er (67) zum ersten Male die fälschlich nach dem damals noch nicht einmal gebornen Pothenot benannte Aufgabe gelöst hatte. — Sodann mass **Snellius** in w die beiden Azimute x und y, welche ihm den Winkel $HwL = 180^0 - x + y$ ergaben und mit Hilfe der längst bekannten HL und der soeben berechneten wL den Winkel HLw und somit das Azimut $z = HLG - (HLw + y) = 44^0\ 49'$ von Gouda zu berechnen erlaubten. Es war also eine erste, folglich mit Hilfe der bekannten Dreieckswinkel **jede** Seite des Netzes orientiert, und so ergaben sich (vgl. Fig. 1)



$$\alpha = 15^0\ 28' \quad \beta = 11^0\ 16' \quad \text{folglich} \quad L\varphi = 14214^r{,}9 \quad A\psi = 34018^r{,}2$$

als Abstände von Leyden und Bergen von dem durch Alkmaar gelegten Parallel. — Die Polhöhe seines Hauses in Leyden, das um 95^r südlich vom Turme der Kathedrale lag, hatte **Snellius** schon früher im Mittel aus wiederholten und nach verschiedenen Methoden gemachten Messungen (wahrscheinlich aus Polarstern- und Solstitial-Höhen) gleich $52^0\ 10\frac{1}{2}'$ (statt den $52^0\ 9'$ der gegenwärtigen Sternwarte) gefunden. Dagegen bestimmte er nun auch durch Beobachtungen des Polarsternes mit einem $5\frac{1}{2}$-füssigen Quadranten diejenige von Alkmaar an einer 55^r südlicher als der geodätische Punkt gelegenen Station zu $52^0\ 40\frac{1}{2}'$, — und diejenige von Bergen an einer 33^r nördlicher als der geodätische Punkt gelegenen Station zu $51^0\ 29'$. Es korrespondierten also einerseits $52^0\ 40\frac{1}{2}' - 52^0\ 10\frac{1}{2} = 30'$ mit $14215 + 95 - 55 = 14255^r$, was einem Grade von 28510^r entsprach, — und anderseits $52^0\ 40\frac{1}{2}' - 51^0\ 29' = 71\frac{1}{2}'$ mit $34018 - 55 - 33 = 33930^r$, was einen Grad von 28473^r ergab. **Snellius** glaubte daher

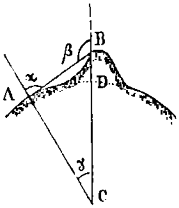
$$1^0 = 28500^r \fallingdotseq 55100^t$$

annehmen zu sollen, wobei ich nach Picard das Verhältnis zwischen dem rheinländischen und französischen Fuss gleich 1000 : 1034,5 setzte. — *c.* Nachdem so **Snellius** das gewünschte Ziel erreicht hatte, publizierte er sein Verfahren in dem bereits erwähnten „Eratosthenes batavus“. Kaum war jedoch diese Schrift erschienen, als er in seiner Arbeit verschiedene Messungs- und Rechnungsfehler entdeckte, — dadurch veranlasst wurde, dieselbe nochmals zu revidieren, — und voraus alle Winkel seines Netzes neu zu messen, wozu er sich wahrscheinlich des trefflichen Bürgi'schen Sextanten bediente, welchen er zur Beobachtung des Kometen von 1618 aus der Instrumentensammlung des Prinzen Moritz von Oranien erhalten hatte; auch dehnte er bei dieser Gelegenheit sein Netz südlich noch bis Mecheln aus. Er schrieb, offenbar behufs neuer Bearbeitung, alle erhaltenen Korrekturen an den Rand seines Handexemplares des „Eratosthenes batavus“, und benutzte dann noch im Winter 1622, wo die rings um Leyden unter Wasser stehenden Felder durch den Frost in die schönste Eisebene verwandelt waren, dieses Vorkommnis, um eine neue Basis von 475^r zu messen, aus welcher er nach sorgfältiger Verbindungstriangulation für die Distanz Leyden-Soeterwonde (vgl. Fig. 2) den Wert $1097^r{,}10$ erhielt, während er früher nur $1092^r,33$ gefunden hatte. Aber zur Neuberechnung seines Netzes kam dann **Snellius** leider nicht mehr, da ihn bald darauf, wohl infolge jener Winterarbeiten, die schwere Krankheit überfiel, welcher er 1626 im besten Alter erliegen sollte. — Erst ein volles Jahrhundert später nahm P. v. **Musschenbroek** aus Pietät die unvollendet gebliebene Arbeit zur Hand und führte sie (vgl. seine „Dissertationes physicæ et geometricæ. Lugd. Bat. 1729 in 4.") nach den Snellius'schen Revisionen zum Abschlusse: Er erhielt so, die Breitendifferenz Alkmaar-Bergen nach neuen Beobachtungen zu $1^0\ 9'\ 47''$ einführend, einen Grad von $29514^r,19 = 57033^t,11$, d. h. eine Bestimmung, welche für die Zeit von Snellius ganz vorzüglich gewesen wäre. — Schliesslich kann noch für diese klassische Arbeit auf „J. D. van der **Plaats**, Overzicht van de Graadmetingen in Nederland. Utrecht 1889 in 8." verwiesen werden, wo in der Nachschrift mitgeteilt wird, dass das verloren geglaubte Protokoll über die Messung Bergen-Mecheln neuerlich auf der Brüsseler Bibliothek aufgefunden wurde.

417. Einige andere Messungen damaliger Zeit. — Der Vollständigkeit wegen ist auch an die, ebenfalls in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts, aber noch nach altarabischer Methode, durch Willem **Blaeu** und Richard **Norwood** [a] ausgeführten Gradmessungen zu erinnern [b], sowie an den durch **Grimaldi** und **Riccioli** gemeinschaftlich unternommenen Versuch, zu demselben Zwecke ein durch **Kepler** angedeutetes Verfahren in Anwendung zu bringen [c], obschon durch diese Arbeiten unsere Kenntnisse von der Grösse der Erde kaum erheblich vermehrt wurden [d].

Zu 417: *a.* Richard **Norwood** (1600? — 1650?) scheint erst Seefahrer, dann Lehrer der Mathematik und Nautik in London gewesen zu sein. — *b.* Von der durch **Blaeu** unternommenen Gradmessung weiss man leider nur, dass sie zwischen 1596 (wo Blaeu noch Gehilfe von Tycho war) und 1638 (wo er starb) ausgeführt wurde, — dass sich dabei **Blaeu** die Mühe nicht verdriessen liess („non refugit laborem", wie sich Vossius in seiner Geschichte von 1650 ausdrückte und sodann J. F. Reimann mit „er hat sich nicht geschämt" übersetzte), mit einer zwölffüssigen Rute eine etwa einen Breitengrad betragende Strecke von der Mündung der Maas bis zum Texel zu messen und an beiden Enden mit einem Zenitsector die Polhöhe zu bestimmen, — und dass das Resultat nicht übel war, indem **Picard**, welcher 1671 (vgl. p. 64 seiner „Oeuvres") auf seiner Reise nach der Uranienburg in Amsterdam bei dem Sohne Johannes **Blaeu** das (mutmasslich sodann im folgenden Jahre vom Feuer verzehrte) Vermessungsprotokoll einsah, berichtet: „Nous eusmes une joye extraordinaire, ce bon vieillard et moy, de voir que nous estions presque d'accord touchant la grandeur du degré d'un grand cercle de la Terre, et que le différend n'allait pas à cinq perches". — Die Messung von **Norwood** dagegen kennt man vollständig aus der Beschreibung, welche er dem zweiten Teile seiner „Trigonometry", der auch selbständig unter dem Titel „The Seaman's Practice. London 1636 in 8. (8. ed. 1668)" erschien, einverleibte: Er mass 1633 VI 11 zu London mit einem fünffüssigen Sextanten die Mittagshöhe der Sonne und fand $62^0\ 1'$, während er 1635 VI 11 zu York dafür nur $59^0\ 33'$ erhielt, so dass er (ohne auf Deklination, Refraktion, Parallaxe, etc., ernstlich Rücksicht zu nehmen) schliessen konnte, es liege York um $2^0\ 28' = 2^7/_{15}{}^0$ nördlicher als London.

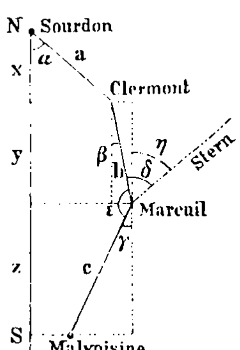
Sodann mass er mit einer Kette die ganze Distanz von London bis York, wobei er den Wegen folgte, aber jeweilen mit einer Boussole die Abweichung seiner Kettenrichtung vom Meridiane bestimmte und auch die Neigungen gegen den Horizont ermittelte. Nach entsprechender Reduktion fand er so für die Distanz 9149 Ketten à 99' E. und somit schliesslich die Länge eines Grades gleich $9149 \times 99 : 2\,{}^{7}/_{15} = 367196'$ E. $= 57300^t$, was bis auf 267^t mit dem verbesserten Snellius'schen Grade übereinstimmt. — *c.* Das von **Grimaldi** und **Riccioli** bei ihrer 1645 versuchten Gradmessung befolgte Verfahren war zwar sehr sinnreich, aber bewährte sich praktisch doch nicht: Sie massen nämlich (vgl. Ricciolis neuen Almagest I 59—60) in zwei Punkten A und B von bedeutender Niveaudifferenz sog. gegenseitige Zenitdistanzen α und β, — berechneten daraus $\gamma = \alpha + \beta - 180^0$, — bestimmten durch eine Triangulation die Horizontaldistanz AD, — und fanden schliesslich die Länge eines Grades $AD : \gamma = 64368$ Schritte $= 62650^t$, also im Vergleich mit Snellius und Norwood ein viel zu grosses Resultat. — *d.* Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass in China 1702 auf Befehl des Kaisers Camhi und unter Leitung des Pater Antoine **Thomas** (Verdun 1644 — Peking 1715?; Präsident des mathem. Tribunals) bei Peking ein Grad gemessen wurde, der aber (vgl. Mon. Corr. I, X und XII) trotz fleissiger Arbeit wegen Unsicherheit der Längeneinheit unbrauchbar sein soll.



418. Die Messung von Picard. — Die erste Messung, welche eine etwas zuverlässige Kenntnis von der Grösse der Erde verschaffte, war diejenige, welche der für eine solche Arbeit ganz vorzüglich qualifizierte Jean **Picard** in den Jahren 1669—70 unter möglichst günstigen Verhältnissen nach der Snellius'schen Methode in Frankreich ausführte und in seiner Schrift „Mesure de la Terre. Paris 1671 in fol. (auch Oeuvres p. 1—59)“ beschrieb [a]. Nach sorgfältigster Durchführung der nötigen trigonometrischen und astronomischen Arbeiten ergab ihm deren Berechnung für die Länge eines Meridiangrades den Wert von 57060 Toisen [b], dessen Bedeutung er in höchst anerkennenswerter Weise durch die Bestimmung, dass ein Sekundenpendel $36''\ 8^1/_2{}'''$ der benutzten Toise messe, für alle Zeiten zu definieren suchte [c].

Zu 418: *a.* Die Methode von **Picard** war nicht nur, wie er sich selbst ausdrückte, „**semblable** à celle de Snellius“, sondern genau dieselbe; dagegen waren die Verhältnisse, unter welchen er sie zur Anwendung brachte, viel günstiger, da er nicht nur die Erfahrungen seines Vorgängers berücksichtigen, sondern sich auf die Akademie stützen konnte, überdies viel bessere Instrumente besass und, was gar nicht unbedeutend ins Gewicht fiel, bereits über Logarithmentafeln verfügte. — *b.* Vor allem aus sah **Picard** ein, dass Snellius seine Bestimmungen auf eine viel zu kleine Basis gestützt hatte, und wählte darum für sein Netz südlich von Paris zwischen Villejuive und Juvisy eine mehr als 30 mal so lange und überdies auf einer schnurgeraden, fast horizontalen, gepflasterten Strasse möglichst gut situierte Grundlinie, zu deren Messung er zwei hölzerne, je aus zwei zusammengeschraubten Stäben von

2^t Länge bestehende Messlatten verwandte, welche abwechselnd längs einer gespannten Schnur gelegt wurden, und ihm ein erstes Mal $5662^t\,5'$, ein zweites Mal $5663^t\,1'$ ergaben, so dass er die Basislänge zu 5663^t festsetzen konnte. — Sein Netz selbst, mit welchem er diese Basis durch einige Hilfsdreiecke verband, bestand aus 13 Hauptdreiecken, welche von dem noch etwas südlicher gelegenen Malvoisine nach dem nördlich von Paris gegen Amiens hin liegenden Sourdon führten, und für die Winkelmessung benutzte er einen eisernen Quadranten von 38″ Radius, dessen kupferner Limbus durch Transversalen in Minuten geteilt war: Der Quadrant trug zwei Fernröhren mit Fadenkreuz aus schwarzer Seide, von welchen das eine fest, das andere mit der Alydade drehbar war; mit letzterer war ein kleiner Rahmen verbunden, über den ein als Index dienender Silberfaden gespannt war, so dass man mit einer Loupe bequem noch Viertelsminuten abschätzen konnte und die Proben, welche sich in Dreieck-Abschlüssen und einigen „Tours de l'horizon" ergaben, im ganzen befriedigend ausfielen, wenn auch **Picard** sagt: „Il est vray qu'avec toutes les précautions que l'on a pû prendre, et après estre mesme retourné deux et trois fois à une mesme station, il a esté quelquefois impossible d'éviter l'erreur de quelques secondes sur la somme des trois angles d'un mesme triangle; auquel cas on n'a point fait de difficulté de corriger le triangle, sans craindre qu'il ne s'en suivist aucune erreur considérable, parceque tous les angles estoients grands, et qu'il y en avoit toûjours quelqu'un dont on n'estoit pas si asseuré que des autres, et sur lequel la faute devoit estre rejettée". — Mit Hilfe solcher Winkel konnten natürlich auch die Seiten ziemlich sicher berechnet werden, und so erhielt **Picard** z. B. für die Seite Malvoisine-Brie, welche das Hauptdreieck zu $12389^t\,3'$ ergeben hatte, aus andern Kombinationen die wenig verschiedenen Werte $12388^t\,2'$, $12390^t\,0'$ und $12389^t\,0'$, nahm dann aber nicht das Mittel aus sämtlichen Werten, sondern schloss aus der Übereinstimmung bloss, dass der erste Wert als gut betrachtet werden könne. Nur als er aus seinem grössten Dreiecke Malvoisine-Montlehery-Mareuil, dessen Winkel er Nachts mit Hilfe von Feuern beobachtet hatte, die Seite Malvoisine-Mareuil gleich 31897^t fand, während ihm eine Kombination von andern Dreiecken dafür $31893\frac{1}{2}^t$ ergab, entschloss er sich „partageant le différend", dafür definitiv 31895^t anzunehmen. — Um sein Dreiecksnetz zu orientieren, stellte **Picard** im September 1769 seinen Quadranten zu Mareuil in den Vertikal des Polarsternes, so dass das feste Fernrohr horizontal, dasjenige der Alydade auf den Stern gerichtet war: „On suivit ainsi cette Estoille jusques à la plus grande digression, où elle demeurait un espace de temps assez sensible, sans sortir du filet vertical de la Lunette avec laquelle on l'observait; et alors on laissa l'instrument fixe dans sa position le reste de la nuit, jus'qu'à ce que, le jour étant venu, on peut découvrir l'endroit du bord de l'Horizon auquel la lunette fixe se trouvait pointée". **Picard** mass sodann den Winkel $\delta = 4^0\,55'$, welchen jener Punkt am Horizonte mit dem trigonometrischen Punkte in Clermont bestimmte,



und berechnete die östliche Elongation η des Polarsternes, woraus sich ihm das Azimut von Clermont $\beta = \delta - \eta = 1^0\,9'$, und sodann unter Zuhilfenahme des aus der Triangulation bekannten Winkels ι auch dasjenige von Malvoisine

$\gamma = 180^0 - (\varepsilon + \beta) = 0^0\,26'$ ergab. Da er im Oktober 1670 auch noch in Sourdon das Azimut von Clermont $\alpha = 2^0\,9'\,10''$ bestimmte und aus der Triangulation a, b, c kannte, so konnte er $x = 18894^t$, $y = 17560^t$, $z = 31894^t$ berechnen, und durfte nun, obschon er sich wohl bewusst war, dass deren 68348^t betragende Summe strenge genommen dem umschriebenen Polygone angehöre, dieselbe unbedenklich als Mass des zwischen den Parallelen von Sourdon und Malvoisine liegenden Meridianbogens einführen. — Um endlich die Polhöhendifferenz von Malvoisine und Sourdon zu bestimmen, beobachtete **Picard** im September und Oktober 1670 an diesen beiden Punkten mit einem 10-füssigen Zenitsector, der mittelst Transversalen 20'' gab, aber etwa 3'' abzuschätzen erlaubte, den zenitalen Stern δ Cassiopejæ wiederholt zur Zeit seiner Culmination und fand für dessen Zenitdistanz in Malvoisine (18^t südl. vom Signal) $9^0\,59'\,5''$ und in Sourdon (65^t nördl. vom Signal) $8^0\,47'\,8''$, wobei er die früher (51 : a) mitgeteilte interessante Bemerkung machte. Es entsprachen sich also $9^0\,59'\,5'' - 8^0\,47'\,8'' = 1^0\,11'\,57''$ und $68348 + 65 + 18 = 68431^t$, woraus für 1^0 der Wert 57065^t folgte, während nach nachträglicher Verlängerung seiner Triangulation bis Amiens bei gleicher Behandlung 57057^t erhalten wurde, so dass er schliesslich, wie bereits mitgeteilt, $1^0 = 57060^t$ annehmen zu sollen glaubte. — *c.* Sein Sekundenpendel konstruierte **Picard** aus einer kupfernen Kugel von 1'' Durchmesser, welche er erst an einem Seidenfaden, dann, da er diesen zu hygroskopisch fand, an einem „simple brin de Pite, qui est une sorte de filasse qu'on apporte de l'Amérique" aufhing, dessen oberes Ende er in einer „pincette quarrée, qui le tenait serré, et le terminait exactement", befestigte, um die Distanz des Aufhängepunktes von der Kugel, welche er sodann noch um deren Radius zu vermehren hatte, genau messen zu können. Er liess dasselbe vor einer auf mittlere Zeit regulierten Pendeluhr schwingen und fand so, dass er seinem einfachen Pendel eine Länge von 36'' $8^1/_2$''' seiner Toise geben müsse, damit dessen Schwingungen auf die Dauer mit denjenigen des Uhrpendels übereinstimmen. Er fügte bei: „Pour peu que ce pendule simple fut ou plus long ou plus petit, on s'appercevoit en moins d'une heure de quelque discordance", — und schloss daraus, dass die Länge des einfachen Sekundenpendels wenigstens an einem bestimmten Orte ein sehr genau definiertes und immer wieder herstellbares Mass sei, das man „Rayon astronomique" nennen und als Normalmass benutzen könnte.

419. Die Theorien der Huygens und Newton. — Schon 1669 hatte **Huygens** die Pariser Akademie darauf aufmerksam gemacht, dass bei rotierender Erde durch Wirkung der Centrifugalkraft die Schwere, und somit auch die Länge des Sekundenpendels, mit der Breite abnehmen müsse, — auch das Lot nicht nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet sein könne, — folglich die nach den Gesetzen der Hydrostatik überall zur Lotrichtung senkrechte Oberfläche des Meeres eine sphäroidische Gestalt haben werde[a]. — Diese Lehre, der sich alsbald auch **Picard** anschloss[b], erhielt sodann durch die nach Wunsch desselben 1671 von **Richer** in Cayenne angestellten Pendelmessungen volle Bestätigung[c], — ja es gelang sogar **Newton** und **Huygens**, durch mathematische Deduktionen zu zeigen, dass die Abplattung der Erde zwischen $^1/_{230}$ und $^1/_{578}$ fallen müsse[d], woraus sich für jeden Geometer von selbst ergab, dass der Krümmungshalbmesser, und damit die Länge eines Meridiangrades, mit der Breite merklich zunehmen werde[e].

Zu 419: *a.* **Huygens** sprach schon damals ganz bestimmt aus: „La Terre n'est pas sphérique; ses méridiens ont la figure d'une ellipse aplatie au pôle". — *b.* Aus der pag. 11 seiner „Oeuvres" gebrauchten Bezeichnung „Conjecture" geht allerdings hervor, dass er sich 1671 Huygens nur noch mit einer gewissen Reserve anschloss. — *c.* **Richer** fand nämlich auf seiner Expedition (vgl. 441) durch zahlreiche und sorgfältige Beobachtungen (in vollständiger Übereinstimmung mit der Pouillet'schen Formel in 432), dass das Sekundenpendel in Cayenne um volle $^5/_4'''$ kürzer als in Paris sei, — und sogar der alle Erfolge von andern bemängelnde **Cassini**, der anfänglich die gefundene Retardation auf ungenaue Beobachtung und ungenügende Berücksichtigung der Temperatureinflüsse zurückführen wollte, musste nach entsprechenden Bestimmungen, welche er ein Decennium später am Kap Vert machen liess, das von **Richer** konstatierte Faktum als richtig anerkennen. Auch **Halley** hatte (Phil. Trans. 1686) zu berichten, dass er 1676 auf St. Helena (vgl. 448) genötigt gewesen sei, sein Sekundenpendel merklich zu verkürzen, leider jedoch ohne dass er damals die Sache weiter verfolgt habe. — *d.* Da **Newton** nach Picard anzunehmen hatte, es sei der Erdumfang $u = 360 \times 57060' = 123\,249\,600'$ P., während die Umdrehungszeit $t = 23^h\,56^m\,4^s = 86164^s$ zu setzen war, so erhielt er die Centrifugalkraft am Equator

$$f = 4\pi^2 \cdot \frac{r}{t^2} = \frac{2u\pi}{t^2} = 0',1047312 \cdot P = 15''',0813 \cdot P \qquad \mathbf{1}$$

Es wird somit am Equator der Fallraum in der ersten Sekunde durch die Centrifugalkraft um $^1/_2\,f = 7''',5406$ vermindert, — also unter der Breite φ, da hiefür der Umfang mit $\text{Co}\,\varphi$ multipliziert werden muss und dann noch einmal mit $\text{Co}\,\varphi$, um die zur Erde senkrechte Komponente zu erhalten, um $7,5406 \cdot \text{Co}^2\,\varphi$, so z. B. für Paris ($\varphi = 48^0\,50'$) um $3''',267$. Da ferner **Newton** die Länge des Sekundenpendels in Paris $l = 36''\,8,6''' = 440''',6$ anzunehmen hatte, so schloss er aus

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{g}{2} = \frac{l \cdot \pi^2}{2t^2} \qquad \mathbf{2}$$

dass in Paris der Fallraum in der ersten Sekunde $2174''',274$ betrage, also ohne die Centrifugalkraft $2174,274 + 3,267 = 2177''',541$ betragen würde, — dass sich somit die Schwere in Paris zur Centrifugalkraft am Equator wie $2 \times 2177,541 : 15,0813 = 288,78 : 1 \fallingdotseq 289 : 1 = 17^2 : 1$ verhalte, somit unter dem Equator, wenn die Erde 17 mal rascher rotieren würde, die Centrifugalkraft die Schwere total aufheben müsste. — Bezeichnet man nun die Anziehungen eines homogenen Rotationsellipsoides auf einen im Abstande α von der Rotationsaxe befindlichen Punkt des Equators und einen in der Rotationsaxe selbst im Abstande γ vom Mittelpunkte liegenden Punkt mit A und C, so hat man nach 116 : 17, wenn M eine Konstante ist,

$$A = M \cdot (1 + 0,3 \cdot e^2) \cdot \alpha \qquad C = M \cdot (1 + 6,9 \cdot e^2) \cdot \gamma \qquad \mathbf{3}$$

wobei A, wenn $k = {^1/_{289}}$ gesetzt wird, wegen der Centrifugalkraft noch nahe um $k \cdot A$ zu vermindern ist. Gehen wir somit mit **Newton** von der Voraussetzung aus, es müsse die Gestalt der rotierenden Erde so beschaffen sein, dass, wenn ein Kanal vom Pole zum Erdmittelpunkte und von da bis zu einem

Punkte des Equators führen würde, in demselben Gleichgewicht statt hätte, — teilen den Radius a des Equators in a, die halbe Umdrehungsaxe c in c Teile, — und berechnen nach 3 die Wirkungen in allen diesen Teilpunkten, so muss die dem Equatorarme des Kanales entsprechende Summe

$$\Sigma A \cdot (1 - k) = (1 - k) \cdot M \cdot (1 + 0{,}3 \cdot e^2) \cdot \Sigma_1^a \alpha \fallingdotseq \tfrac{1}{2} a^2 \cdot M\,(1 - k)\,(1 + 0{,}3 \cdot e^2) \qquad \mathbf{4}$$

der dem andern Arme entsprechenden Summe

$$\Sigma C = M\,(1 + 0{,}9 \cdot e^2) \cdot \Sigma_1^c \gamma \fallingdotseq \tfrac{1}{2} a^2 M\,(1 - e^2)\,(1 + 0{,}9 \cdot e^2) \qquad \mathbf{5}$$

gleich sein, d. h.

$$(1 - k)\,(1 + 0{,}3 \cdot e^2) = (1 - e^2)\,(1 + 0{,}9 \cdot e^2) \fallingdotseq 1 - 0{,}1 \cdot e^2$$

woraus
$$e^2 = k : (0{,}4 - 0{,}3 \cdot k) \fallingdotseq \tfrac{1}{115} \qquad \mathbf{6}$$

und somit nach 74:2 die Abplattung

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \cdot e^2 = \tfrac{1}{230} \qquad \mathbf{7}$$

folgt, wie solche **Newton** (vgl. Principien ed. Wolfers 401—3) durch eine entsprechende Rechnung ebenfalls erhalten hat. Hätte letzterer die andere extreme Annahme gemacht, es bestehe die Erde aus Schichten, deren Dichte von der Oberfläche bis zum Centrum von 0 bis ∞ zunehme, so wäre er mit **Huygens** zusammengetroffen, der in einem Appendix zu seinem 1690 gleichzeitig mit dem „Traité de la lumière“ veröffentlichten „Discours de la cause de la pesanteur“ von der ihm plausibler scheinenden Annahme ausging, die Schwerkraft habe ihren Sitz im Mittelpunkte der Erde, von welchem aus sie auf alle Punkte derselben in gleicher Weise einwirke, und so für jenen Kanal die Gleichgewichtsgleichung

$$a\,(g - \tfrac{1}{2} f) = c \cdot g \qquad \text{folglich} \qquad \alpha = \frac{a - c}{a} = \frac{f}{2g} = \tfrac{1}{578} \qquad \mathbf{8}$$

erhielt. Es folgt hieraus, dass der wirkliche Wert von α zwischen $\frac{1}{230}$ und $\frac{1}{578}$, und zwar mutmasslich näher an den erstern Grenzwert fällt, wie dies die Folge (vgl. 428) auch wirklich bestätigt hat. — *c.* Wir werden auf einen betreffenden Irrschluss von **Cassini** unter der folgenden Nummer zurückzukommen haben.

420. Die spätern Messungen in Frankreich und der Streit über die Gestalt der Erde. — Als in Frankreich die schon von **Picard** projektierten Neumessungen durch die **Cassini** wirklich ausgeführt wurden[a], ergab sich auffallender Weise im Gegensatze zu den eben besprochenen theoretischen Resultaten, dagegen in Übereinstimmung mit dem Ergebnisse der Zusammenstellungen von Joh. Casp. **Eisenschmidt**[b], dass die Meridiangrade nach Süden, statt nach Norden, zuzunehmen scheinen[c], und ein entsprechendes Resultat ergab auch eine etwas später, mutmasslich infolge der von **Poleni** und **Calandrini** erhaltenen Anregung[d], vorgenommene **erste** Längengradmessung[e]. Eine Abplattung am Equator wollten nun die **Cassini** nicht gerade annehmen, dagegen glaubten sie wenigstens an der Kugelgestalt der Erde festhalten zu müssen[f], und da auch die Theoretiker nicht nachgeben konnten und wollten, so entspann sich ein nach und nach ziemlich heftig werdender Streit, welcher erst seinen Abschluss fand, als sich Frankreich entschloss, dem Vorschlage von Jean-Théophyle **Désaguliers** entsprechend [g], zwei der Breite nach möglichst verschiedene Gradmessungen in Peru und Lappland anzuordnen [h], mit welchen wir uns unter den folgenden Nummern speciell befassen werden.

Zu 420: *a.* Schon 1677 hatte **Picard** die Absicht, mit Hilfe von **Römer** die Amplitude seines Gradbogens durch gleichzeitige Beobachtungen an beiden Endpunkten neu zu bestimmen, was jedoch wegen andern Aufträgen und Krankheit nicht zur Ausführung kam; dagegen wusste er 1681 Colbert zu belieben, die Gradmessung nach beiden Seiten hin bis an die Grenzen des Reiches verlängern zu lassen, teils um die Grösse der Erde noch sicherer bestimmen zu können, teils namentlich auch, um an diese Meridianlinie als Axe ein ganz Frankreich bedeckendes, eine richtige Grundlage für eine Landeskarte verschaffendes Dreiecksnetz zu legen. Da **Picard** leider schon im folgenden Jahre starb und **Römer** in seine Heimat zurückgekehrt war, so fiel jedoch die Lösung der Aufgabe Dom. **Cassini** zu, der nun wenigstens ihren ersten Teil, wenn auch die Arbeiten durch Kriege wiederholt auf längere Zeit unterbrochen wurden, von 1683 bis 1720 mit Hilfe seines Sohnes Jacques und seines Neffen Maraldi in bestmöglicher Weise löste; aber es darf nicht vergessen werden, dass **Picard** der eigentliche Vater des Ganzen war, und es der Unverfrorenheit von **Cassini** (der sich nach Delambre V 727 schon 1670 nicht geschämt hatte, nach Bologna zu schreiben „que depuis son arrivée en France il a fait reprendre et recommencer avec de plus grands instrumens la mesure de la terre") bedurfte, seinen vielen reellen Verdiensten auch noch dieses beilegen zu wollen. — *b.* Joh. Kaspar **Eisenschmidt** (Strassburg 1656 — ebenda 1712; Arzt in Strassburg) gab in seiner „Diatribe de figura telluris elliptico. sphæroide. Argentorati 1691 in 4." an, dass die Gradlänge nach

Eratosthenes	100	römische	Meilen	unter	27°	Polhöhe
Riccioli	80	"	"	"	$44\frac{1}{2}$	"
Picard	74	"	"	"	49	"
Fernel	$73\frac{1}{2}$	"	"	"	$49\frac{1}{2}$	"
Snellius	$71\frac{1}{3}$	"	"	"	52	"

betrage, und dass diese Daten ein verlängertes Rotationsellipsoid bedingen, dessen Axe etwa 10890 r. M. besitze, während dem Radius des Equators nur 8288 r. M. zukommen. Wenn man nun nicht berücksichtigt, dass nach dem Vorhergehenden nur die mittlere dieser 5 Angaben Zutrauen verdient, so scheint sich hieraus allerdings ein starkes Argument für die Eiform der Erde zu ergeben, an welche (vgl. Günthers Note in Leopoldina XXV von 1889) schon im Altertume zuweilen gedacht wurde, während von einer Abplattung an den Polen nie die Rede war. — *c.* Als Dom. **Cassini** von 1700 hinweg die Picard'sche Gradmessung nach Süden verlängerte, schien ihm die Gradlänge zuzunehmen, und daraus zog er anfänglich (vgl. Mém. Par. 1701) den Irrschluss, dass also wirklich entsprechend den Ansichten der Theoretiker die Erde an den Polen abgeplattet zu sein scheine, wofür ihn noch 1740 **Maupertuis** in seinem Pamphlete „Lettre d'un horloger anglais à un astronome de Pékin" verhöhnte, — später dagegen sah er (vgl. Mém. Par. 1713) ganz gut ein, dass dies gegenteils auf eine Meridianellipse deute „dont le grand diamètre représente l'axe de la terre", und dieser Ansicht pflichtete dann auch sein Sohn Jacques **Cassini** bei, als er in der Schrift „De la grandeur et de la figure de la Terre. Paris 1720 in 4. (Suite des Mém. 1718)" über die von ihm und seinem Vater geleiteten Arbeiten relatierte, dabei als Hauptresultate mitteilend, dass sich aus den von

$$50^0\,44'\,3'' - 48^0\,31'\,48'' \qquad \text{und} \qquad 48^0\,50'\,10'' - 42^0\,31'\,14''$$

bestimmten Bogen die mittlern Gradlängen

$$56960^t \qquad \text{und} \qquad 57097^t$$

ergeben haben, — so dass 1^0 Abnahme der Polhöhe eine Zunahme von circa 34^t entspreche. — *d.* Schon Giovanni **Poleni** (Venedig 1683 — Padua 1761; Prof. math. Padua) hob in seinem „Epistolarum mathematicarum Fasciculus. Padovæ 1729 in 4." hervor, wie unsicher die Schlüsse seien, welche man auf eine so geringe, nur einigen Sekunden der Amplitude entsprechende Differenz bauen könne, und machte den Vorschlag, „de mesurer la longueur de l'arc d'un degré d'un des cercles parallèls à l'équateur, p. e. du Parallèle qui passe par le 48. degré", da ihm seine Rechnung ergeben habe, „qu'un degré de ce Parallèle doit être plus petit de 777^t dans l'hypothèse de Mss. de l'Académie que dans celle de Mr. Newton, — une différence tellement sensible qu'on ne saurait s'y méprendre". **Calandrini** fügte sodann (vgl. meine Notiz 424) in der „Remarque", welche er zu Anfang 1733 im „Journal historique" seiner Besprechung des Poleni'schen Werkes folgen liess, folgende weitere Erörterung bei: Bezeichnen unter der Breite φ der Reihe nach α, β, N und R die Länge eines Breitengrades, eines Längengrades, der Conormale und des Krümmungsradius, — unter der Breite $90^0 - \varphi$ aber N' und R' Normale und Krümmungsradius, so hat man mit Hilfe von 74, je nachdem man der Erde eine abgeplattete, sphärische oder eiförmige Gestalt beilegt,

$$\beta' = \frac{\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{N}}{\mathrm{R}} = \frac{\alpha\,\mathrm{Co}\,\varphi\,(1 - e^2\,\mathrm{Si}^2\,\varphi)}{1 - e^2} = \alpha\,\mathrm{Co}\,\varphi\,(1 + e^2\,\mathrm{Co}^2\,\varphi) \qquad \mathbf{1}$$

$$\beta'' = \alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \qquad \beta''' = \alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{N}' : \mathrm{R} = \alpha\,\mathrm{Co}\,\varphi\,(1 - e^2\,\mathrm{Co}^2\,\varphi)$$

so dass $\beta' > \beta'' > \beta'''$ wird. Bezeichnen ferner im ersten und dritten Falle $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ Radius des Equators und halbe Umdrehungsaxe, so hat man, da aus den 1

$$e^2 = \frac{\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi - \beta'}{\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}^2\,\varphi - \beta'} \qquad \text{und} \qquad e^2 = \frac{\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi - \beta'''}{\alpha \cdot \mathrm{Co}^3\,\varphi} \qquad \mathbf{2}$$

folgen,

$$\mathfrak{a}^2 : \mathfrak{b}^2 = 1 : (1 - e^2) = {}^1\!/\alpha\,(\beta' \cdot \mathrm{Se}^3\,\varphi - \alpha \cdot \mathrm{Tg}^2\,\varphi) \qquad \mathbf{3}$$

und

$$\mathfrak{a}'^2 : \mathfrak{b}'^2 = (1 - e^2) : 1 = {}^1\!/\alpha\,(\beta''' \cdot \mathrm{Se}^3\,\varphi - \alpha \cdot \mathrm{Tg}^2\,\varphi) \qquad \mathbf{4}$$

Es wird somit die Erde abgeplattet oder eiförmig sein, je nachdem der Messungswert von β grösser oder kleiner als $\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi$ ausfällt, und sodann das Verhältnis der Axen nach 3 oder 4 ermittelt werden können. — *e.* Obschon J. **Cassini** in einer im Frühjahr 1733 geschriebenen, aber noch den Mém. Par. 1732 angehängten Note sich nur gegen einige Ausstellungen des vorerwähnten Artikels verteidigt und nichts von der erhaltenen Anregung sagt, so ist es doch kaum ein Zufall, dass er (vgl. Mém. Par. 1733) unmittelbar darauf mit Hilfe seiner Söhne und seines Vetters Maraldi eine solche Längengradmessung unternahm, nämlich den Abstand von S. Malo ($\varphi = 48^0\,39'$) vom Pariser Meridiane ermittelte. Da er für denselben 165015^t fand und die Längendifferenz nach Picard zu $4^0{,}500$ (anstatt zu $4^0{,}363$) annahm, so erhielt er für den Längengrad 36670^t (anstatt 37821) und damit, da nach den frühern Messungen $\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi = 37707^t$ war, scheinbar einen neuen Beweis für (statt gegen) die Ei-Gestalt der Erde. — *f.* Dass die **Cassini** infolge solcher Messungsergebnisse sich gegen die Annahme einer erheblichen Abplattung sträubten, ist zu begreifen; dass sich dagegen Joh. **Bernoulli** in kluger Berechnung der Schwächen seiner Richter beigehen liess, in seinem hierauf wirklich von der Pariser Akademie gekrönten „Essai d'une nouvelle physique céleste. Paris 1735 in 4. (Opera III 261—364)" auf die Wirbeltheorie einen Scheinbeweis für die Ei-Gestalt zu gründen, lässt sich dagegen kaum entschuldigen. — *g.* Jean-Théophile **Désaguliers** (La Rochelle 1683 — London 1744; protest. Geistlicher, der nach England emigrierte und Prof. phys. Oxford wurde) machte in seiner „Dissertation concerning the figure of the earth (Ph. Tr. 1724/5)" darauf aufmerksam, dass zwar die Cassini'schen Messungen als solche ganz gut seien, aber doch nicht eine hinlängliche Genauigkeit besitzen, um aus Vergleichung ihrer Teile Schlüsse auf den ganzen Erdkörper machen zu dürfen, — dass es hiefür, wie dies übrigens Dom. **Cassini** schon 1713 betont hatte, absolut notwendig wäre, eine Gradmessung in sehr geringer oder sehr hoher Breite zu besitzen. — *h.* Anfänglich wurde in Aussicht genommen, in Peru einen Meridianbogen und ein Stück des Equators selbst zu messen, — später aber beschlossen, von letzterer Messung zu Gunsten eines Meridiangrades in Lappland zu abstrahieren.

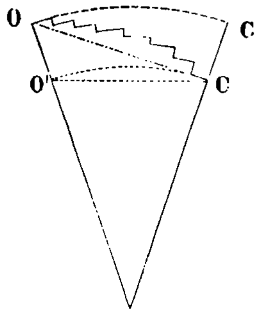
421. Die Expedition nach Peru. — Die im Mai 1735 nach Peru abgehende und etwa nach Jahresfrist in der Provinz Quito anlangende Expedition wurde zunächst durch **Bouguer** und **La Condamine** mit grossem Geschicke geleitet [a], — überwand glücklich alle Schwierigkeiten, welche ihr das damals noch wenig bekannte Gebirgsland, das ungesunde Klima, das Misstrauen der Behörden, sowie die diebischen und händelsüchtigen Einwohner verursachten [b], — legte längs dem Meridiane von Quito ein ungefähr die drei ersten Grade desselben beschlagendes musterhaftes Dreiecksnetz [c], — mass die zur Bestimmung nötigen Grundlinien und Winkel auf das sorgfältigste [d], — führte ebenso die zur Ermittlung der Azimute und Polhöhen erforderlichen Beobachtungen auf das beste aus [e], — liess sich die Mühe nicht reuen, die sämtlichen Rechnungen unter Berücksichtigung aller Nebenumstände mehrfach auszuführen [f], — und erhielt so schliesslich als Hauptresultat, dass sich, wenn φ die mittlere Breite der gemessenen Strecke und g die derselben zukommende Gradlänge bezeichnen, die Werte

$$\varphi = -1^0\,31' \qquad \text{und} \qquad g = 56734^t{,}0$$

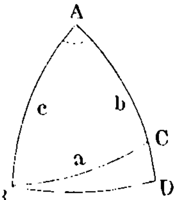
entsprechen [g], — anderer wichtiger Untersuchungen, von welchen zum Teil bereits (126, 371) die Rede war, zum Teil noch später (432) zu sprechen sein wird, hier nicht einmal zu gedenken [h].

Zu 421: *a.* Ausser den zwei Genannten hatte die Akademie noch Louis **Godin** (Paris 1704 — Cadix 1760; damals Akad. Par., später Direktor der Seekadettenschule in Cadix; vgl. Fouchy in Mém. Par. 1760) zur Teilnahme an der Expedition bestimmt, und sodann schlossen sich noch die spanischen Marine-Offiziere Don George **Juan** y Santacilia (Novelda 1713 — Madrid 1773; später Kommandant der Marine-Arsenale) und Don Antonio de **Ulloa** (Sevilla 1716 — Isla de Leon 1795; später Gouverneur von Louisiana und Generallieutenant) an. Mit den Gehilfen und Dienern zählte die ganze Expedition 26 Köpfe. —

b. So wurden die Signale gestohlen oder zerstört, ja eines der wichtigsten mehrfach, bis **La Condamine** den glücklichen Einfall hatte, demselben ein steinernes Kreuz substituieren zu lassen. Einer der Gehilfen (Couplet) erlag dem Klima, ein anderer (Seniergue) den bei einem Auflaufe erhaltenen Verwundungen. Etc. — *c.* Das Netz bestand aus 32 Dreiecken, in welchen fast alle Winkel zwischen 40 und 90° fielen. — *d.* Die am nördlichen Ende des Netzes bei Cotchesqui gewählte Basis stieg von Carabarou (C) nach Oyambara



(O) auf, wurde durch Zwischensignale in 8 Sektionen geteilt und von 1736 X 9 bis XI 3 teils durch **Bouguer, La Condamine** und **Ulloa** von Carabarou ausgehend, teils von **Godin** und **Juan** in entgegengesetztem Sinne nach der bereits (326) beschriebenen Methode gemessen, wobei erstere Sektion als Summe aller gemessenen Horizontalen 6272ᵗ 4' 5", letztere 6272ᵗ 4' $2\frac{1}{6}$" erhielt, so dass schliesslich (an das Mittel wegen einer nachträglichen Veränderung des einen Endpunktes noch $3\frac{2}{3}$" anfügend) 6272ᵗ,77 als definitives Resultat angenommen wurde. Um aus dieser Zahl die wirkliche Distanz O C zu erhalten, wurde sodann (vgl. „La Condamine, Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral. Paris 1751 in 4.") in folgender Weise vorgegangen: Aus den Entfernungen der Sektionspunkte und den während der Messung bestimmten gegenseitigen Elevations- oder Depressions-Winkeln derselben wurden ihre Höhenunterschiede berechnet, deren Summe CC' nicht weniger als 126ᵗ,08 betrug. Sodann wurde jede Sektion mit ihrer mittlern Höhe über Carabarou und unter der Annahme, es stehe dieser Punkt um 1226 (hypsom. Höhe über dem Meere) + 3268219 (mutmasslicher Radius des Equators „en prenant un milieu entre les hypothèses les plus différentes") = 3269445ᵗ vom Erdmittelpunkte ab, auf den Horizont von Carabarou reduziert, wodurch der Bogenabstand O'C = 6272ᵗ,672 und sodann die Sehne O'C = 6272ᵗ,656 gefunden wurde. Aus dieser Sehne und den in O und C gemessenen gegenseitigen Zenitdistanzen ergab sich endlich die wirkliche Distanz OC = 6274ᵗ,045, — und in ähnlicher Weise wurde sodann im August 1739 zu Tarqui am Südende der Dreieckskette eine Verifikationsbasis gemessen und berechnet, wobei für die wirkliche Distanz der Endpunkte 5259ᵗ,414 und bei Reduktion auf das 185ᵗ unter dem Südende der Verifikationsbasis gelegene Niveau von Carabarou 5258ᵗ,949 erhalten wurde. — Für die Winkelmessung standen mehrere, durch Horizont- und Dreieckabschlüsse vielfach geprüfte Quadranten von 2 bis 3' Radius zur Verfügung, deren mikrometrische Vorrichtungen bis auf wenige Sekunden genau abzulesen erlaubten. Fast ausnahmslos wurden in jedem Dreiecke alle drei wahren Winkel, inklusive der zu ihrer Reduktion auf Centrum und Horizont (vgl. 348) nötigen Hilfsgrössen, gemessen, — und zwar von jeder der beiden Gruppen mindestens zwei derselben, so dass eine grosse Anzahl von Kontrolen vorhanden war. — *e.* Während der Triangulation wurde, und zwar nicht nur Ein mal, wie es zur Not hätte genügen können, sondern so oft sich die Gelegenheit darbot (im ganzen bei 20 mal), eine Azimutalbestimmung (vgl. 364) vorgenommen, — dagegen die Polhöhenbestimmung, auf welche die Akademiker mit Recht das grösste Gewicht legten, erst nach Beendigung derselben als selbständige Operation durchgeführt. Für die zu letzterer gebrauchten Instrumente auf 316 verweisend, genügt es wohl beizufügen, dass, nachdem schon 1739/40 **Bouguer** und **La Condamine** gemeinschaftlich sowohl in Tarqui als in Cotchesqui die Zenitdistanzen von ε Orionis vielfach beobachtet hatten, **Bouguer** zwei Jahre später auf Wunsch von **La Condamine** nochmals nach Cotchesqui zurückkehrte, um dort 1742/3 neue Serien aufzunehmen, während dieser in Tarqui entsprechende Beobachtungen mache, — dass so, neben vielen vereinzelten, sich auch manche korrespondierende Beobachtungen ergaben, — und mit Recht beschlossen wurde, nur dieses neue Material zu benutzen: Die einzelnen, abwechselnd in beiden Lagen des betreffenden Instrumentes erhaltenen Beobachtungen, für welche alle durch Präcession, Nutation und Aberration (nach 613) erforderlichen Korrektionen zur Reduktion auf 1743 I 1 in Betracht gezogen wurden, ergaben im Mittel für ε Orionis in Cotchesqui die südliche Zenitdistanz 1° 25′ 48″,3, in Tarqui die nördliche 1° 41′ 10″,7, also den Unterschied 3° 6′ 59″,0, und somit, unter Anbringung von je 1″ für die Refraktion, den Polhöhenunterschied 3° 7′ 1″,0; — die korrespondierenden Beobachtungen, bei welchen jene Korrektionen wegfallen konnten, zeigten bei normaler Lage den Unterschied 3° 8′ 40″,1, bei umgelegten Instrumenten 3° 5′ 17″,8, also im Mittel unter Beilage der frühern Refraktion, ganz genau denselben Polhöhenunterschied. — *f.* Anfang Mai 1740 begann **La Condamine**, an den ich mich zunächst halte, die Berechnung seiner Dreiecke, welche ihn bis in den August hinein vollauf beschäftigte, da er kein sehr geübter Rechner war und überdies der Sicherheit wegen alles doppelt rechnete. „Je me sentis effrayé à la vue des longs calculs qu'il me fallait entreprendre", schrieb er in sein „Journal du voyage fait par ordre du roi à l'équateur. Paris 1751 in 4. (Suppl. 1752)", auf welches ich für weitern Detail verweise; „j'avais une extrême répugnance pour un travail que le peu d'habitude rend **pénible et rebutant** quand on n'y est pas rompu, tandis qu'il n'est pour le calculateur exercé qu'une occupation **douce et paisible**". Zunächst wurde in jedem Dreiecke die Winkelsumme dadurch auf 180° reduziert, dass man (entsprechend wie es jetzt der Legendre'sche Satz in 91 vorschreibt) von jedem Winkel ⅓ des Überschusses abzog; dann wurden successive, beim ersten Dreiecke die schiefe Basis 6274^t,05 einführend, die Seiten sämtlicher Dreiecke nach den Regeln der ebenen Trigonometrie berechnet, — mit ihrer Hilfe und der von jedem Dreieckspunkte aus gemessenen Elevations- oder Depressions-Winkel der beiden andern Dreieckspunkte die Höhenunterschiede berechnet, deren Kombination mit der oben zu 1226^t angenommenen Meereshöhe von Carabarou die Meereshöhe jedes Signales ergab, und auch die Reduktion der schiefen Winkel auf den Horizont vorgenommen, — mit Hilfe dieser reduzierten Winkel, in das erste Dreieck nunmehr die auf den Horizont reduzierte Basis 6272^t,66 einführend, die Seitenberechnung nochmals durchgeführt, — endlich mit Hilfe dieser neuen Seiten und der beobachteten oder unter Berücksichtigung der Konvergenz der Meridiane abgeleiteten Azimute, die Abstände aller Dreiecksecken von dem Meridiane und dem Parallel von Quito berechnet, woraus sich sodann z. B. für den Abstand des südlichsten Dreieckspunktes (bei Chinan) vom Parallel des nördlichsten (bei Cotchesqui) 177807^t,87 ergaben. — Überdies ist noch anzuführen, dass mittelst der Kette von 32 Dreiecken aus der nördlichen für die südliche Basis die schiefe Länge 5260^t,35 (statt 5259,25) und die horizontale Länge 5260^t,09 (statt 5258,95) folgten, somit eine nach damaligen Begriffen sehr befriedigende Übereinstimmung statt hatte. — *g.* Für die Berechnung der Gradlänge ging **La Condamine** in folgender Weise vor: Zunächst brachte er an der oben erhaltenen Distanz 177807',87 die vier Korrektionen — 17,78, + 25,06, — 856,71 und — 7,97 an, durch welche sie auf 176950,47 oder rund auf 176950' gebracht wurde. **Die erste** dieser Korrektionen ist ein Abzug von (5260,09 — 5258,95) : (5260,09 + 5258,95) = $^1/_{10000}$, welchen er sich auf der ganzen Länge erlaubte, um die gemessene mit der berechneten Länge der südlichen Basis, d. h. zwei Werte auszugleichen, welchen er glaubte gleiches Gewicht beilegen zu sollen. **Die zweite** hat ihren Grund einfach darin, dass der Sector zu Cotchesqui um 25',06 nördlicher als das dortige Signal aufgestellt war, — und **die dritte** entsprechend darin, dass der Sector zu Tarqui 856',71 nördlich vom Signale zu Chinan stand. **Die vierte** Korrektion endlich beruhte auf der Überlegung, dass die durch einen grössten Kreis dargestellte Senkrechte von einem Punkte B auf einen Meridian AC letztern in einem Punkte C trifft, der etwas näher am Pole A liegt als der Punkt D, in welchem ihn der durch B gelegte Parallel erreicht, und zwar so, dass CD = c — b leicht gefunden werden kann, indem aus Tg b = Tg c · Co A nach 40 : 22, unter Voraussetzung, dass c — b in Sekunden ausgedrückt werden soll, die Reihe



$$c - b = \frac{Si\,2\,c}{Si\,1''} \cdot Tg^2\,\frac{A}{2} - \frac{Si\,4\,c}{2 \cdot Si\,1''} \cdot Tg^4\,\frac{A}{2} + \ldots \qquad \mathbf{1}$$

folgt, von der in der Regel das erste Glied genügt, und A aus

$$Si\,A = Si\,a : Si\,c \qquad \mathbf{2}$$

erhältlich ist, für deren Anwendung allerdings die aus der Messung erhaltene Bogenlänge a durch die approximative Länge g eines Grades dividiert werden muss, um sie in Graden auszudrücken. Setzt man für Tarqui c = 86° 55' und (g zu 57041' angenommen) a = 31344 : 57041° = 0° 33', so wird nach obigen Formeln A = 0° 33' und c — b = 0'',51 × 57041 : 3600 = 8',08, was nahe mit jener 4. Korrektion übereinstimmt; für Cotchesqui wird dieselbe kaum merklich, da dieser Ort nahe am Equator und nahe am Meridiane von Quito liegt. — Jene 176950' durch die auf 3° 7' abgerundete Polhöhendifferenz teilend, erhielt somit **La Condamine** 56775' als Länge eines Grades im Niveau von Carabarou, und somit nach Reduktion auf den Meereshorizont 56749 oder rund **56750'** als Hauptresultat der ganzen Messung, — während **Bouguer**, der (vgl. seine Schrift „La figure de la terre. Paris 1749 in 4.") ebenfalls alle Rechnungen unabhängig durchführte, die Distanz 176940' und daraus ohne Abrundung der Polhöhendifferenz 56746 oder, nach Anbringung einer Korrektion wegen der Ausdehnung des Etalons, **56753'**, — und endlich später **Delambre** (vgl. Base du système métrique III 133), indem er als geodätische Distanz den mittlern Wert 176945' benutzte, dagegen gestützt auf Neuberechnung die Polhöhendifferenz auf 3° 7' 3'',12 erhöhte, die jetzt gewöhnlich und so auch oben angenommenen **56734'** erhielt. — *h.* Nachdem im grossen Ganzen die Arbeiten in Peru, für deren Detail auch noch auf die von **Juan** und **Ulloa** mit Benutzung der Arbeiten von **Godin** redigierte „Relacion historica del viage a la America meridional. Madrid 1748, 4 Vol. in 4. (auch 1773; franz. Paris und Amsterdam 1752 in 2 Vol.)" verwiesen werden kann, vollendet waren, errichteten die Akademiker 1742 im Jesuitenkollegium zu Quito ein Denkmal, auf dessen Marmortafel die Länge des Sekundenpendels mit der Inschrift „Penduli simplicis æquinoctialis unius minuti secundi archetypus, mensuræ naturalis exemplar, utinam et universalis" eingegraben war, und kehrten sodann im folgenden Jahre (jedoch mit Ausnahme von Godin, der noch bis 1751 im Süden blieb) nach Europa zurück, um ihre Arbeiten zu redigieren und zu veröffentlichen. Während bisdahin **Bouguer** und **La Condamine**, wenn auch sich scharf kontrolierend, getreulich zusammen gearbeitet hatten, trat nun infolge dieser Publikationen eine sich immer mehr verschärfende Reibung zwischen ihnen ein, welche eine Reihe von Streitschriften zur Folge hatte, auf die ich jedoch hier nicht näher eintreten will, da sie sich fast nur auf Nebensächliches bezogen und höchstens geeignet waren, die vorzügliche Messung beim grössern Publikum in unverdienter Weise zu diskreditieren.

422. Die Expedition nach Lappland. — Die zweite französische Expedition, welche im April 1736 von Paris abging und zwei Monate später zu Tornea am bothnischen Meerbusen anlangte, stand unter Oberleitung von **Maupertuis** [a], — hatte ebenfalls viele lokale Schwierigkeiten zu überwinden, ehe es gelang, längs dem Meridiane von Tornea ein nicht einmal einen vollen Grad desselben beschlagendes erträgliches Dreiecksnetz legen zu können [b], — mass sodann sorgfältig die zur Bestimmung desselben nötigen Winkel, sowie, wenn auch unter sehr ungünstigen Verhältnissen, eine Grundlinie [c], — führte in nicht ganz tadelloser Weise die zur Ermittlung der Azimute und Breiten dienenden Beobachtungen aus [d], — und erhielt schon im Frühling 1737 nach ausgeführter Doppelrechnung das Resultat, dass sich bei ihrer Messung

$$\varphi = 66^{0}\ 20' \qquad \text{und} \qquad g = 57437^{t},9$$

entsprechen [e], woraus sich in Vergleichung mit den Picard'schen Werten

$$\varphi = 49^{0}\ 13' \qquad \text{und} \qquad g = 57060^{t},0$$

sofort auf eine beträchtliche Abplattung am Pole schliessen liess [f].

Zu 422: *a.* Zu dem bereits (424) erwähnten Beschlusse, einem eigentlichen Equatorgrad einen Meridiangrad in hoher Breite zu substituieren, hatte neben dem damals in Paris auf Besuch anwesenden **Celsius** namentlich auch **Maupertuis** beigetragen und sich sodann durch seine Liebenswürdigkeit, trotz seiner Unerfahrenheit in praktischen Arbeiten, die erwünschte Oberleitung der betreffenden Expedition verschafft. „Maupertuis était agréable", sagt (Montucla IV 149) der ihm sonst wohlgewogene Lalande; „il faisait des chansons, il jouait de la guitare, et cela lui aida à obtenir la commission qu'il demandait". Er machte sich jedoch besser als man erwarten konnte, und hatte das Glück, in **Clairaut**, **Lemonnier**, Charles-Etienne-Louis **Camus** (Cressy 1699 — Paris 1768; Akad. Paris) und dem ursprünglich nur als „Aumônier et Historiographe" beigegebenen Abbé Réginaud **Outhier** (Lamare Jousserand 1694 — Bayeux 1774; früher Elève des Par. Obs., später Canonicus zu Bayeux) sehr tüchtige, wenn auch grossenteils in solchen Arbeiten noch ganz unerfahrne Gehilfen zu erhalten, — sowie in dem landeskundigen **Celsius**, der sich der Expedition aus Interesse ebenfalls anschloss, einen erwünschten Berater zu besitzen. — *b.* Der vor der Abreise ausgeheckte Plan, die Netzpunkte auf die längs der schwedischen Küste befindlichen „Skären (Felseninseln)" und nur die Basis auf jener zu messen, erwies sich schon bei den ersten Rekognoscierungen als un-tauglich und es blieb kaum etwas anderes übrig, als Tornea ($\varphi = 65^\circ\ 51'$) zum Südpunkte des Dreiecksnetzes zu wählen, — letzteres längs dem ebenfalls Tornea benannten, in diesem gebirgigen und unwegsamen Lande die Hauptkommunikation bildenden Flusse bis zu dem hinter Pello liegenden Berge Kittis ($\varphi = 66^\circ\ 48'$) fortzuführen, — und die Basis (abgesehen von auf dem Lande gewählten Endpunkten) auf den Fluss selbst zu legen, folglich deren Messung im Winter vorzunehmen. — *c.* Nachdem jeder Dreieckpunkt mit einem aus drei zu einer Pyramide vereinigten Bäumen bestehenden Signale versehen und durch Distanzmessung zu benachbarten Objekten versichert war, begannen die Winkelmessungen, für welche ein zweifüssiger, mikrometrisch bis auf wenige Sekunden ablesbarer, aber, da die Okulare nach Tychonischer Weise am Limbus sassen, zwei Beobachter erfordernder Quadrant von Langlois zur Verwendung kam, der sich wiederholt beim „Tour de l'horizon" als richtig bewährte. Die Winkel wurden unter Wechsel der Beobachter mehrfach und fast ausnahmslos centrisch gemessen, — auch die Elevationen und Depressionen der Schenkel behufs Reduktion auf den Horizont bestimmt, — überhaupt, wie man sich aus den Berichten (vgl. f) überzeugen kann, mit Sorgfalt und Sachverständnis vorgegangen. — Als sodann Mitte Dezember der Fluss überfroren war, wurde auch noch die Basismessung in Angriff genommen, und von XII 21—28 von den zwei Partien, in welche man sich geteilt hatte, doppelt, aber allerdings leider in demselben Sinne, ausgeführt, — trotzdem mit Einschluss der Dämmerung täglich höchstens 5 Stunden gearbeitet werden konnte, — trotzdem auf dem Eise eine 2 bis 3 Fuss hohe Schneedecke lag, welche man vergeblich versucht hatte, längs der Basis mit einer Art Schneeschlitten wegzuschaffen, — und trotzdem die Kälte zuweilen auf 20 und 30° anstieg, so dass wiederholt die Messlatten (vgl. 326) denjenigen, welche sie vorwärts zu tragen hatten, an die Hände festfroren: Die eine Partie erhielt dabei $7406^t\ 5'\ 4''$ als Länge der Basis, die andere $7406^t\ 5'\ 0''$, so dass man mit der Übereinstimmung zufrieden sein konnte und höchstens noch die Zählung der Latten zu kontrolieren hatte, was dann auch wirklich nachträglich „en traînant une corde longue de 50^t dans toute la longueur de la base" ausgeführt wurde. — *d.* Die Zeit zwischen Winkel- und Basis-Messung wurde zu den astronomischen Bestimmungen und den später (432) zu besprechenden Pendelmessungen benutzt. Für die Messung der Amplitude hatte Graham einen 8-füssigen Zenitsector (vgl. 346) und zur Orientierung des Netzes ein in jedem beliebigen Vertikal als Passageninstrument aufstellbares 15-zölliges Fernrohr, sowie eine Sekundenuhr geliefert. Der Sector wurde, zuerst auf dem Kittis und dann entsprechend in Tornea, mit Hilfe einer gezogenen Mittagslinie in den Meridian gebracht, und sodann sein Fernrohr je an 5 Tagen auf δ Draconis eingestellt, wobei sich durchschnittlich das Lot auf $2^\circ\ 37'\ 30'' - (1^r\ 25{,}8^p)$, respektive auf $1^\circ\ 37'\ 30'' + (1^r\ 40{,}6^p)$ stellte, wo r die $43'',8$ wertigen vollen Schraubengänge und p die Partes zählt, von welchen 44 auf einen Schraubengang kommen; es betrug also die Amplitude $1^\circ\ 0'\ 0'' - (3^r\ 22{,}4^p) = 0^\circ\ 57'\ 26'',3$ oder, wenn dem Fehler des Sectors (346) und der Veränderung von Präcession und Aberration in der circa 28 Tage betragenden Zwischenzeit Rechnung getragen wird, $0^\circ\ 57'\ 26'',93$, — jedoch allerdings unter der gewagten Voraussetzung, es habe sich das Instrument auf dem Transporte vom Kittis nach Tornea absolut nicht verändert; denn es war unverantwortlicher Weise verabsäumt worden, an den beiden Stationen auch bei umgelegtem Instrumente zu beobachten, — und der Versuch, seine Stabilität nachträglich dadurch erweisen zu wollen, dass man dasselbe zwischen zwei Beobachtungsserien eine Viertelstunde weit spazieren führte, ist ja natürlich geradezu lächerlich. — Die Azimutalbestimmung auf Kittis bestand darin, dass man das über dem Stationspunkte aufgestellte Passageninstrument abwechselnd in die Vertikale der benachbarten Signale brachte, — an der Uhr, welche täglich durch korrespondierende Höhen der Sonne auf wahre Zeit reguliert wurde, die Durchgangszeit des Sonnencentrums durch Beobachtung der beiden Ränder, somit den Stundenwinkel der Sonne bestimmte, — endlich aus diesem letztern, der den Tafeln entnommenen Sonnendeklination und der vorläufig zu 66° 48′ 20″ angenommenen Polhöhe jeweilen das Azimut berechnete. — *c.* Aus einer ersten Kombination von Dreiecken erhielt **Maupertuis** die Distanz des Kittis vom Parallel von Tornea x = 54940ᵗ,39, aus einer zweiten x = 54944ᵗ,76, so dass er im Mittel x = 54942ᵗ,57 anzunehmen hatte. Da nun aber der Aufstellungsort des Sectors in Tornea um 73ᵗ,74 südlicher, und derjenige auf Kittis um 3ᵗ,48 nördlicher als der betreffende Dreieckspunkt war, so mussten offenbar noch diese beiden Distanzen zugefügt werden; ferner war nach der Rechnung von **Maupertuis** die Entfernung von Tornea zum Meridiane von Kittis y = 3149ᵗ,5, und für diese ergab sich ihm unter $\varphi = 65^0\ 51'$ noch ein Zuschlag $\Delta x = 3^t,38$, wie ein solcher in der That, da aus 421 : 1, 2

$$\Delta x = g' \cdot \frac{\mathrm{Si}\ 2\varphi}{\mathrm{Si}\ 1''} \cdot \frac{y^2 \cdot \mathrm{Si}^2\ 1''}{4\, g'^2 \cdot \mathrm{Co}^2\,\varphi} = \frac{y^2 \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\ 1''}{2\, g'}$$

folgt, wenn (421) $g' = g : 3600 = 15^t,84$ gesetzt wird, wirklich hervorgeht. Es war also schliesslich die der Amplitude 0° 57′ 26″,93 entsprechende Distanz x′ = 55023ᵗ,47, woraus für die mittlere Breite von 66° 20′ die Gradlänge **57466ᵗ,8** folgte, welche dann allerdings (423) etwas später noch auf **57437ᵗ,9** herabgemindert wurde. — *f.* **Maupertuis** gab als sofortiges Resultat seiner Messung und Rechnung den Satz: „Le degré du méridien qui coupe le cercle polaire, surpassant le degré du méridien en France, **la Terre est un Sphéroide applati vers les Poles**". — Für weitern Detail vgl. die beiden Schriften „**Maupertuis**, La figure de la terre déterminée par les observations de Mss. de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier et Outhier, accompagnés de Mr. Celsius: faites par Ordre du Roi au cercle polaire. Paris 1738 in 8. (2 éd. Amsterdam 1738; engl. London 1738; deutsch durch Sam. König, Zürich 1741; lat. durch A. Zeller, Lipsiæ 1742), — und: **Outhier**, Journal d'un voyage au Nord en 1736 et 1737. Paris 1744 in 4."

423. Die Resultate und die dadurch veranlassten Nachmessungen. — Als **Maupertuis**, mit Hilfe von schon früher durch ihn aufgestellten Beziehungen [a], die oben (422) einander gegenüber gestellten Wertepaare genauer miteinander verglich und dabei die starke, ja ausserhalb die (419) durch die Theorie festgestellten Grenzen fallende Abplattung $\alpha = {}^1/_{114}$ fand, wurde er stutzig und ordnete zur Verifikation seines Grades einige neue Beobachtungen und Rechnungen an, welche jedoch nur zu kleinen Abänderungen führten [b], folglich ihn insoweit beruhigten, dass er nicht nur seine Rückreise antrat und im August 1737 einen solennen Einzug in Paris hielt [c], sondern über die frühern Arbeiten der **Cassini** mit so beissendem Spott herfiel, dass diese sich entschlossen, die Messungen im Meridiane von Paris zu verifizieren und zugleich nach Norden und Süden weiter auszudehnen [d]. Sie erhielten nun dabei einerseits das Resultat, dass sich schon aus den Sektionen des französischen Bogens eine merkliche Zunahme der Grade von Süden nach Norden ergebe, und anderseits ihrer ganzen Messung das Wertepaar

$$\varphi = 46^0\ 45' \qquad \text{und} \qquad g = 57059^t{,}5$$

entspreche, woraus nun, je nachdem man zur Vergleichung den lappländischen oder peruanischen Grad wählt, die Abplattung

$$\alpha = {}^1/_{143} \qquad \text{oder} \qquad \alpha = {}^1/_{270}$$

folgt [e]. Auf einige spätere Verifikationsarbeiten in Frankreich nicht näher eintretend [f], erwähne ich dagegen noch zum Schlusse, dass zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts durch Jöns **Svanberg** die lappländische Gradmessung wiederholt und zugleich etwas ausgedehnt wurde [g], woraus die Werte

$$\varphi = 66^0\ 20' \qquad g = 57196^t{,}2 \qquad \alpha = {}^1/_{323}$$

hervorgingen, so dass die frühern Wiedersprüche wenigstens einigermassen beglichen waren [h].

Zu 423: *a.* **Maupertuis** hatte sich schon in seiner Abhandlung „Sur la figure de la terre et sur les moyens que l'astronomie et la géographie fournissent pour la déterminer (Mém. Par. 1733)“ unter anderm das Problem gestellt „Connaissant la courbure du méridien de l'Ellipsoide dans deux points, dont la latitude est connue, déterminer l'Ellipsoide“, und für dasselbe die folgende Lösung gegeben: Bezeichnet R den Krümmungshalbmesser in einem Punkte einer Ellipse der Halbaxen A und B oder des Parameters $P = B^2 : A = A(1 - e^2)$, und φ den Winkel desselben mit der Axe 2 A, so ist (74:9)

$$R^{2/3} = \frac{M^2 \cdot A \cdot P^{2/3}}{N^2 \cdot A + P} \qquad \text{wo} \qquad M = \frac{1}{\operatorname{Si}\varphi} \qquad N = \frac{1}{\operatorname{Tg}\varphi} \tag{1}$$

und für einen zweiten Punkt der Breite ψ ist ebenso

$$r^{2/3} = \frac{m^2 \cdot A \cdot P^{2/3}}{n^2 \cdot A + P} \qquad \text{wo} \qquad m = \frac{1}{\operatorname{Si}\psi} \qquad n = \frac{1}{\operatorname{Tg}\psi} \tag{2}$$

woraus durch Elimination von A

$$P = \frac{(N^2 - n^2)^{3/2} \cdot R \cdot r}{(M^2 \cdot r^{2/3} - m^2 \cdot R^{2/3})^{3/2}} \tag{3}$$

hervorgeht, so dass man wirklich aus zwei Messungen den Parameter P, und sodann auch A, B, e berechnen kann. — In seiner 422: f erwähnten Schrift nahm sodann **Maupertuis** $A = 1$ an, setzte in dieser Einheit $B = \mu$, und führte nunmehr $S = \operatorname{Si}\varphi$ und $s = \operatorname{Si}\psi$ ein, wodurch 1 und 2 in

$$R = \frac{\mu^2}{[1 + (\mu^2 - 1) S^2]^{3/2}} \qquad \text{und} \qquad r = \frac{\mu^2}{[1 + (\mu^2 - 1) s^2]^{3/2}} \tag{4}$$

übergehen, in welchen offenbar $\mu^2 = 1 - e^2$ ist. Sind nun G und g die den Radien R und r entsprechenden Gradlängen, so hat man somit

$$G : g = R : r = [1 + (\mu^2 - 1) s^2]^{3/2} : [1 + (\mu^2 - 1) S^2]^{3/2} \tag{5}$$

oder mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, wenn nur die ersten Potenzen der jedenfalls sehr kleinen Grösse $\mu^2 - 1$ beibehalten werden, mit genügender Annäherung

$$\frac{G}{g} = \frac{1 + {}^3/_2\,(\mu^2 - 1)\cdot s^2}{1 + {}^3/_2\,(\mu^2 - 1)\cdot S^2} \qquad \text{oder} \qquad 1 - \mu^2 = \frac{2\,(G - g)}{3\,(G\cdot S^2 - g\cdot s^2)} \qquad \mathbf{6}$$

Ist aber $1 - \mu^2 = a$, so wird $\mu = \sqrt{1 - a}$ oder $1 - \mu = 1 - \sqrt{1 - a} \approx {}^1/_2\,a = {}^1/_2\,(1 - \mu^2)$, also folgt mit Hilfe von 6 die sog. Abplattung

$$\alpha = \frac{A - B}{A} = 1 - \mu \approx {}^1/_2\,(1 - \mu^2) = {}^1/_3 \cdot \frac{G - g}{G\cdot S^2 - g\cdot s^2} \qquad \mathbf{7}$$

— *b.* Als **Maupertuis** die 6 unter Benutzung der Picard'schen auf seine eigenen Werte anwandte, erhielt er $\alpha = {}^1/_{114}$, während ihm wohl bekannt war, dass die Abplattung (419) von den Newton'schen ${}^1/_{230}$ gegen den Huygens'schen ${}^1/_{578}$ hin liegen müsse. Es erschien ihm also sein Messungsresultat etwas verdächtig und er entschloss sich, der bisherigen Operation noch eine Reihe von kontrolierenden Messungen und Rechnungen folgen zu lassen, — namentlich auch noch eine zweite Bestimmung der Amplitude mit Hilfe des ebenfalls zenitalen Sternes α Draconis anzuordnen. Da nun letztere Bestimmung, bei der allerdings das „Renversement" mutmasslich wieder verabsäumt wurde, 0° 57′ 30″,42 ergab, so glaubte **Maupertuis** der Amplitude schliesslich den mittlern Wert 0° 57′ 28″,67, also seinem Grade die eine Abplattung von ${}^1/_{122}$ involvierende, schon oben (422) mitgeteilte Länge von **57437^t,9** geben zu sollen, und nunmehr höchstens einen Fehler von 2″ oder etwa 32^t befürchten zu müssen, — und da eine in Tornea vorgenommene neue Azimutalbestimmung die frühere Orientierung des Netzes ebenfalls als nahe richtig erwies, auch die denkbar ungünstigsten Annahmen über den Einfluss allfälliger Winkelfehler den Gesamtfehler der Distanz nur auf 54^t ansteigen liessen, so glaubte er mit aller Sicherheit daran festhalten zu dürfen, dass der lappländische Grad den französischen jedenfalls weit übertreffe. — *c.* Bei seinem Einzuge in Paris soll sich **Maupertuis** in lappländischer Kleidung gezeigt und ein Gefolge von lappländischen Schönheiten und Renntieren besessen haben. Vgl. darüber und über die verschiedenen „Amusements", durch welche sich die leichtlebigen Franzosen ihren Aufenthalt in Lappland erträglich gemacht zu haben scheinen, die 11 : p angeführten Quellen. — *d.* Nachdem **Langlois** speciell zu diesem Zwecke einen 6-füssigen Sector von 50° und einen 2-füssigen Quadranten konstruiert hatte, führte **Cassini** de Thury mit seinem jungen Gehilfen **Lacaille** in den Jahren 1739—40 die beabsichtigten Arbeiten mit grösster Umsicht aus: Alle Basen, Winkel, Azimute und Polhöhen wurden auf das sorgfältigste neu bestimmt und zugleich die Messung nördlich bis Dünkirchen und südlich bis Perpignan ausgedehnt, so dass sie nun volle $8\,{}^1/_3{}^0$ umfasste, wie im Detail aus der Schrift „**Cassini** de Thury, La Méridienne de l'Observatoire de Paris, vérifiée dans toute l'étendue du Royaume par de nouvelles observations. Paris 1744 in 4." ersehen werden kann. — *e.* Dem bereits oben mitgeteilten Hauptresultate der Neumessung ist beizufügen, dass sich aus der nördlichsten der 11 Sektionen, in welche der ganze Bogen eingeteilt wurde, für die mittlere Breite von 49° 56′ ein Grad von 57084^t, aus der südlichsten dagegen für 43° 31′ ein Grad von 57048^t, und speciell für die Strecke Paris-Amiens oder den Picard'schen Grad 57074^t ergab, während **Maupertuis** für letztern, als er (vgl. seine Schrift „Degré du Méridien entre Paris et Amiens. Paris 1740 in 8.") im Herbst 1739 mit seinen lappländischen Gehilfen und Instrumenten dessen Amplitude neu bestimmte, 57183^t und aus diesem Werte in Verbindung mit dem lappländischen

Grade die Abplattung $^1/_{178}$ fand. — *f.* Es waren also immer noch bedeutende Widersprüche vorhanden, zu deren Aufklärung eine Ober-Expertise wünschbar erschien, welche durch zwei unabhängig von einander arbeitende Gruppen von Akademikern ausgeführt werden sollte. Als jedoch die erste Gruppe (Bouguer, Camus, Cassini de Thury und Pingré), gestützt auf eine neue Basismessung für die Distanz der Kirchtürme von Montlehéri und Brie-Comte-Robert den Wert 13108ᵗ,05 erhielt, welcher fast genau mit den durch Cassini-Lacaille gefundenen 13108ᵗ,32 übereinstimmte, während er von dem durch Maupertuis nach Picard übernommenen Werte 13121,5 um 1‰ abwich, so schien dies so entschieden zu Gunsten der Arbeit von Cassini-Lacaille gegenüber derjenigen von Picard-Maupertuis zu sprechen, dass diese Gruppe ihre Arbeiten alsbald sistierte, — die zweite Gruppe (Godin, Clairaut, Lemonnier und Lacaille) gar nicht in Thätigkeit trat — und die bestehende Differenz dadurch erklärt wurde, dass **Maupertuis** auch die ganze geodätische Distanz um 1‰ zu gross angenommen, und überdies mutmasslich die Amplitude um 3 bis 4″ zu klein gefunden habe. Vgl. für weitern Detail „**Bouguer**, Opérations faites par ordre de l'Académie pour la vérification du Degré du méridien compris entre Paris et Amiens. Paris 1757 in 8. (auch Mém. Par. 1754)“. — *g.* Gegen Ende des vorigen Jahrhunderts machte Daniel **Melanderhjelm** (Stockholm 1726 — ebenda 1810; Prof. astr. Upsala und Akad. Stockholm) darauf aufmerksam, dass es wünschbar wäre, auch den lappländischen Grad zu verifizieren, und infolge davon erhielt Jöns **Svanberg** (Neder-Kalix bei Tornea 1771 — Upsala 1851; Prof. math. et astr. Upsala) den Auftrag, diese Arbeit mit Hilfe der schwedischen Geodäten **Öfverbon, Holmquist** und **Palander** sofort auszuführen. Er mass seine Basis mit Hilfe von aus Paris bezogenen Etalons nahe an derselben Stelle wie Maupertuis, — behielt auch dessen Dreiecksnetz zwischen Tornea und Kittis im wesentlichen bei, — verlängerte jedoch dasselbe südlich durch vier neue Dreiecke bis Mallörn, nördlich durch drei neue Dreiecke bis Pahtawara, — und erhielt nun das Resultat, dass einer Amplitude von 1° 37′ 19″,566 eine Distanz von 92777ᵗ,981 entspreche, folglich dem Grade der oben gegebene, um volle 242ᵗ kleinere Wert beizulegen und etwa anzunehmen sei, es habe **Maupertuis** den geodätischen Abstand der Parallele von Tornea und Kittis um $22^1/_3$ᵗ zu gross, dagegen die entsprechende Amplitude um $10^2/_3$″ zu klein erhalten. Vgl. für weitern Detail die Schrift „**Svanberg**, Exposition des opérations faites en Lapponie en 1801—3 pour la détermination d'un arc du méridien. Stockholm 1805 in 8.“ — *h.* Sobald das eben mitgeteilte Ergebnis bekannt wurde, taxierte man ohne weitere Prüfung die frühere Arbeit als eine schlechte, ja stellte **Maupertuis** selbst vielfach als einen Windbeutel hin, von dem man eigentlich nichts Besseres habe erwarten können, — und erst **Rosenberger** (A. N. 121 von 1827) und **Hansen** (A. N. 202 f. von 1831) leiteten eine gerechtere Beurteilung ein, indem sie als Resultat gründlicher Untersuchung darlegten, dass die Arbeit der Akademiker im allgemeinen eine sorgfältige gewesen sei, — dass sie keine grössern Fehler zeige als die bei den damaligen Hilfsmitteln unvermeidlichen, — und dass die Differenz in der Amplitude sich wohl nur durch lokale Störungen auf Kittis erklären lasse, welche sich bei **Maupertuis** geltend machten, während sie bei **Svanberg** ohne Einfluss blieben, da er auf Kittis selbst keine astronomischen Bestimmungen ausführte, sondern die an entlegenen andern Punkten gemachten geodätisch auf denselben übertrug. — So sehr ich nun damit einverstanden bin, dass **Maupertuis** und seine Gehilfen eine Ehrenrettung verdienen, so möchte ich doch nicht fast alle Schuld auf den bösen Kittis werfen, sondern würde vorziehen, von den circa 240^t, um welche die Grade von **Maupertuis** und **Svanberg** differieren, vorab etwa 100^t den geodätischen Bestimmungen des erstern zuzuteilen, indem sowohl die Basismessung (vgl. 326) als eingestandenermassen (vgl. Note b) auch die Winkelmessungen nicht ganz vorwurfsfrei waren. Die übrig bleibenden 140^t repräsentieren sodann noch etwa 9″ der Amplitude, von welchen ich $2\frac{1}{2}$″ (oder 40^t) **Svanberg** zuteilen möchte, dessen Beobachtungen mit einem Bordakreise nach Rosenberger auch nicht gerade vollkommen waren, — und die übrigen $6\frac{1}{2}$″ (oder 100^t) **Maupertuis**, was auch abgesehen von einer Lotablenkung kaum zu viel sein dürfte, da einerseits eine etwelche Veränderung der Kollimation sehr wahrscheinlich statt hatte, — anderseits bei der damaligen Beschaffenheit von Fadennetzen und Mikrometerschrauben die Anzahl der Beobachtungen ungenügend war, um die zufälligen Fehler auszugleichen, und sich auch schon bei den zwei angewandten Sternen ein Unterschied von $3\frac{1}{2}$″ ergab, der bei weitern Sternen vielleicht noch beträchtlicher geworden wäre, — und da endlich in dem Umstande, dass die mit dem Sector in Lappland und Frankreich gemachten Bestimmungen Abweichungen in einem und demselben Sinne zeigten, eine Andeutung eines nicht erkannten systematischen Fehlers zu liegen scheint. Es würde so als Facit für den Lappländer Grad ein Wert von etwa **57240^t** hervorgehen, — ein Wert, den man auch nahezu im Mittel aus 57196 und 57438 unter der plausibeln Annahme erhalten würde, es sei der ersten Zahl im Vergleiche zur zweiten ein fünffaches Gewicht beizulegen.

424. Die Messung am Kap. — Als **Lacaille** seinen noch später (444) zu besprechenden Aufenthalt am Kap machte, führte er daselbst 1751 neben seiner Hauptarbeit auch eine Gradmessung aus [a], welche ihm die korrespondierenden Werte

$$\varphi = -\ 33^0\ 18' \qquad g = 57036^t{,}6$$

ergab, d. h. einen für jene Breite, unter Annahme, dass sich die beiden Erdhälften entsprechen, merklich zu grossen Grad [b]. Da eine spätere Verifikation seiner Messung durch Thom. **Maclear** dieselbe nahezu als richtig bewährte [c], so ist somit anzunehmen, es sei entweder jene Annahme wenigstens nicht strenge haltbar, oder es haben bedeutende Lotablenkungen störend eingewirkt [d].

Zu 424: *a.* Schon **Godin** planierte, nach Beendigung der Messung in Peru noch einen wesentlich südlichern Grad zu messen, kam aber nicht dazu, es wirklich auszuführen, und so blieb es **Lacaille**, der hiezu durch seine frühern Arbeiten (vgl. 423 : d) ebenfalls sehr tüchtig erschien, vorbehalten, diese Lücke in geeigneter Weise auszufüllen. Für den Detail der Operation auf seine „Observations sur la mesure du 34^{me} degré de la latitude australe au Cap de bonne espérance (Mém. Par. 1751; ausgeg. 1755)" verweisend, beschränke ich mich darauf mitzuteilen, dass er für den Abstand der Parallele von Cape Town und Klyp Fontein 69669^t,1 bei einer Amplitude von $1^0\ 13'\ 17\frac{1}{3}'' = 1^0{,}22148$ fand, woraus sich sodann das oben mitgeteilte Resultat ergab. — *b.* Nach den Messungen in Peru und Frankreich würde auf der nördlichen Halbkugel eine Gradlänge von 57037^t etwa der Breite von $47^0\ 25'$, und der Breite von $33^0\ 18'$ etwa eine Gradlänge von 56900^t entsprechen. — *c.* Als Thomas **Maclear** (1794 — Capetown 1879; Dir. Obs. am Kap) in den Vierzigerjahren des laufenden Jahrhunderts, vgl. sein Schreiben in A. N. 574 von 1846 und seine „Verification and extension of Lacaille's Arc of Meridian at the Cape of Good Hope. London 1866, 2 Vol. in 4.", den Lacaille'schen Grad revidierte, erhielt er für die geodätische Distanz 445027',51 E. = 69594^t,36 und für die Amplitude 1° 13' 14",51 = 1°,22070, folglich die Gradlänge 57011^t,8, so dass die Anomalie etwas vermindert, aber doch nicht gehoben wurde. Überdies verlängerte er den Bogen nach Norden fast auf das Dreifache, woraus für die mittlere südliche Breite von 32° 9' ein Grad von 56932^t,3 hervorging, der sich noch etwas besser an die auf der nördlichen Halbkugel erhaltenen Resultate anschloss, aber doch immerhin noch bedeutend zu gross war. — *d.* **Lalande** fügte (Montucla IV 172) seinem Berichte über Lacaille's Bestimmung die Bemerkung bei: „On ne s'attendait pas à un pareil résultat; mais comme le remarque **Lacaille**, le devoir de l'astronome est uniquement de rendre compte de ses observations, et les irrégularités de la terre peuvent bien expliquer cette différence", und es scheint hier wirklich der Fall zu sein, dass die Amplitude infolge von Lokaleinflüssen merklich vermindert wurde, indem das bei Cape Town liegende Südende des von Lacaille bestimmten Bogens am Nordfusse des mächtigen Tafelberges, das Nordende dagegen am Südfusse der sich bei Klyp Fontein erhebenden Gebirgsmasse lag. (Vgl. 427—28.)

425. Die Messungen im Kirchenstaate und einige andere Messungen damaliger Zeit. — Durch die Nichtübereinstimmung der Grade von Peru, Frankreich und Lappland wurde **Boscovich** gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts auf die Idee geführt, dass die Erde vielleicht nicht ein Rotationsellipsoid, ja nicht einmal ein Rotationskörper sein dürfte, und dass es zur Erledigung dieser Frage nützlich wäre, noch einen Grad, unter gleicher Breite mit dem französischen, aber unter verschiedener Länge zu messen. Bei den damals vorhandenen Hilfsmitteln konnte jedoch die von ihm hierauf unternommene Messung unmöglich zu einem entscheidenden Resultate führen [a], und ebensowenig war dieses von den gleichzeitigen Operationen der **Beccaria, Liesganig, Mason** und **Dixon** zu erwarten [b]; dagegen repräsentieren der Gedankengang von **Boscovich** und voraus die Methode, nach welcher er etwas später aus den sämtlichen ihm zu Gebote stehenden Messungsresultaten einen wahrscheinlichsten Wert $\alpha = {}^1/_{273}$ für die Abplattung ermittelte [c], für die Geodäsie die Morgenröte eines neuen Tages [d].

Zu 425: *a.* **Boscovich** liess sich 1750 von Papst Benedikt XIV. den Auftrag geben, in Verbindung mit Christoph **Maire** (1697 — Gent 1767; Jesuit; Rektor in Lüttich und Rom) zwischen Rom und Rimini einen Meridianbogen von 2° 9³/₄' zu messen und erhielt so für die mittlere Breite von 43° einen Grad von 56979^t, der nur wenig von den für 43° durch die Theorie von **Bouguer** geforderten 56962^t gegen die durch **Cassini** und **Lacaille** unter 43½° gefundenen 57048^t hin abwich, — offenbar ein Ergebnis, das den beiden Geodäten, angesichts der ihnen zu Gebote stehenden instrumentalen Hilfsmittel, alle Ehre macht, wenn es auch zur Erledigung der aufgeworfenen Frage wenig beitragen konnte. Vgl. „**Maire et Boscovich**, De litteraria expeditione per pontificum ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus. Romæ 1755 in 4." — *b.* Vgl. „Giacomo Battista **Beccaria** (Mondovi 1716 — Turin 1781; Prof. phys. Turin) et Domenico **Canonica** (Cortemiglia 1739 — Borgomale 1790; Prof. phys. Turin), Gradus Taurinensis. Aug. Taur. 1774 in 4., — Joseph **Liesganig** (Gratz 1719 — Lemberg 1799; Jesuit; Prof. math. Kaschau und Wien), Dimensio graduum meridiani viennensis et hungarici. Viennæ 1770 in 4., — und: **Maskelyne**, Introduction to the observations made by Charles **Mason** (1735? — Pennsylvanien 1787; Obs. Greenwich) and Jeremiah **Dixon** (1735? — Durham 1777) for determining the length of a degree of latitude in the Provinces of Maryland and Pennsylvania. (Ph. Tr. 1765)". Die Hauptresultate sind in die nachstehende Tafel eingetragen. — *c.* **Boscovich** stellte sich in einem Anhange zu seiner „Voyage astronomique et géographique. Paris 1770 in 4. (einer Art neuer Ausgabe der Schrift von 1755)" die Aufgabe „Etant donné un certain nombre de degrés, trouver la correction qu'il faut faire à chacun d'eux, en observant ces trois conditions: **la première**, que leurs différences soient proportionelles aux différences des Sinus verses d'une latitude double; **la seconde**, que la somme des corrections positives soit égale à la somme des négatives; **la troisième** que la somme de toutes les corrections, tant positives que négatives, soit **la moindre possible** pour le cas où les deux premières conditions soient remplies", — wobei er durch die erste Bedingung der aus den Gleichgewichtsgesetzen zu erwartenden sphäroidischen Gestalt der Erde Rechnung tragen wollte, indem bei einer solchen nach 423 : 6 wirklich

$$G_1 - G_2 = {}^3/_2\, e^2\, G_1 (\mathrm{Si}^2 \varphi_1 - \mathrm{Si}^2 \varphi_2) = {}^1/_{240}\, a \pi e^2 (\mathrm{Sv}\, 2\varphi_1 - \mathrm{Sv}\, 2\varphi_2) \qquad \mathbf{1}$$

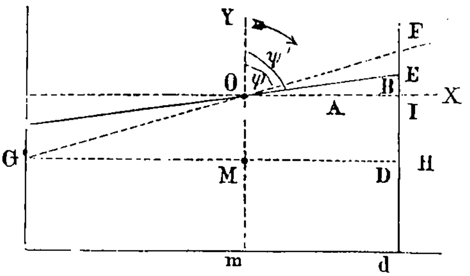
wird, — durch die zweite den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (50—52) zu genügen suchte, — und durch die dritte verhindern wollte, dass man sich unnötig weit von den gegebenen Zahlen entferne. Er ging dabei unter Zugrundelegung der in den Jahren 1736—68 ausgeführten, in die Tafel

Nr.	Autor	g in t	φ (° ′)	d	D	A	B	C	D′	D″
1	Bouguer	56750	0 0	0,0000	0	−4581,2	−287,6	15,9	0,0	−45,7
2	Lacaille	57037	−33 18	3015	287	−1566,2	− 0,6	2610,3	189,3	173,6
3	Mason	56888	39 12	3995	138	− 586,2	−149,6	3,9	250,8	244,9
4	Boscovich	56979	43 0	4651	229	69,8	− 58,6	− 1,2	292,0	292,7
5	Beccaria	57069	44 44	4954	319	372,8	31,4	11,9	311,0	314,7
6	Cassini	57028	45 0	5000	278	418,8	9,6	− 43,6	313,9	318,1
7	Liesganig	57091	47 40	5465	341	883,8	53,4	16,6	343,2	351,9
8	Maupert.	57074	49 23	5762	324	1180,8	36,4	32,4	361,8	372,6
9	Maupert.	57422	66 20	8389	672	3807,8	384,4	9,9	526,7	564,7

nach den Gradlängen g und den ihnen entsprechenden mittlern Breiten φ eingetragenen neun Messungen in folgender Weise vor: Zuerst berechnete er für alle Gradmessungen die in die Tafel eingetragenen Werte $d = {}^1/_2\, \mathrm{Sv}\, 2\varphi$, ferner die Überschüsse D der übrigen Grade über den Equatorgrad Nro. 1, sowie die Mittelwerte

$$m = {}^1/_9\, \Sigma\, d = 4581{,}2 \qquad M = {}^1/_9\, \Sigma\, D = 287{,}6$$

und trug die d und m als Abscissen, die D und M aber als Ordinaten auf, so



dass jede Gradmessung durch einen Punkt E dargestellt und zugleich der Schwerpunkt O aller dieser für ihn gleichgewichtigen Punkte verzeichnet war. Zog er nun durch O irgend eine Gerade OF, so bestimmte ihm diese **einerseits** für jeden Grad einen Abschnitt FH, welcher nach der aus 1 hervorgehenden Beziehung

$$D_h = G_h - G_o = {}^1/_{240}\, a \pi e^2 \cdot (\mathrm{Sv}\, 2\varphi_h - \mathrm{Sv}\, 2\varphi_o) = {}^1/_{120}\, a \pi e^2 d \qquad 2$$

in einem bestimmten Verhältnisse zu GH = d stand, — und **anderseits** unterlagen die so erhaltenen Korrektionen FE für die einzelnen Grade, weil OF eine Schweraxe ist, der Bedingung $\Sigma\, FE = 0$, wie verlangt war. Blieb also nur noch übrig, die Richtung von OF oder ψ so zu wählen, dass die Summe der absoluten Werte der FE ein Minimum wurde: Um hiefür eine Grundlage zu erhalten, berechnete **Boscovich** die in die Tafel eingetragenen Werte

$$A = d - m \qquad B = D - M \qquad C = A : B = \mathrm{Tg}\, \psi' \qquad 3$$

wobei er aus den C ersah, dass, wenn er die Gerade von Y aus in der Richtung des Pfeiles drehe, dieselbe die Punkte E in der Reihenfolge: 3, 9, 5, 1, 7, 8, 2, 6, 4 treffen werde. Wie die Gerade sich einem dieser Punkte nähert, wird die seinem A proportionale Korrektion des betreffenden Grades kleiner, — verschwindet in dem Augenblicke, wo die Gerade durch ihn geht, vollständig, — und nimmt dann wieder zu, wobei es für uns auf den Sinn nicht ankömmt. Es sind also die schon passierten Punkte als solche zu betrachten, welche mit einem ihrem A proportionalen Gewichte für Zunahme stimmen, und wenn daher die Summe ihrer A bis zur Hälfte der Summe aller A angewachsen ist, so wird die sich drehende Gerade die Lage erreicht haben, über die sie nicht mehr hinausgehen darf, wenn nicht die Zunahme Meister werden soll, — also diejenige Lage, welche dem verlangten Minimum entspricht. Da nun im vorliegenden Falle die Summe aller A auf $13467{,}4 = 2 \times 6733{,}7$ ansteigt und $A_3 + A_9 + A_5 = 4766{,}8 < 6733{,}7 < 9348{,}0 = A_3 + A_9 + A_5 + A_1$ ist, so wird, nachdem die Gerade den Punkt 5 passiert hat, noch Abnahme, — nachdem sie auch 1 passiert hat, dagegen bereits Zunahme überwiegen, — und man darf daher mit **Boscovich** annehmen, dass die Gerade wenigstens nahezu ihre günstigste Lage beim Treffen auf 1 erreicht hat, folglich wenn $\psi = \mathrm{Atg}\, 15{,}9 = 86^0\, 24'$ geworden ist. Man erhält somit für D (s. Fig.) die verbesserten Werte

$$D' = M + A \cdot \mathrm{Ct}\, \psi = 287{,}6 + A \cdot \mathrm{Ct}\, 86^0\, 24' \qquad 4$$

welche sich bereits in die Tafel eingetragen finden. Es ist somit die Summe der positiven Verbesserungen $D' - D$ gleich 251,7, die der negativen 251,0, also absolut genommen $\Sigma\,(D' - D) = 502{,}7$, während $\Sigma\,(D' - D)^2 = 50136{,}71$ wird. — So scharfsinnig im Ganzen das Verfahren von **Boscovich** ist, so lässt allerdings seine Erledigung der dritten Bedingung etwas zu wünschen übrig, und er hätte sich die Sache bedeutend erleichtern können, wenn er in derselben die absolute Summe der Korrektionen durch deren Quadratsumme ersetzt hätte; denn in diesem Falle hätte er aus

$$\Sigma\, EF^2 = \Sigma\,(A \cdot \mathrm{Ct}\, \psi - B)^2 = \mathrm{Ct}^2\, \psi \cdot \Sigma\, A^2 - 2\, \mathrm{Ct}\, \psi\, \Sigma\, AB + \Sigma\, B^2$$

für das Minimum sofort in ganz lucider Weise

$$0 = \frac{d \sum E F^2}{d \psi} = -2 \operatorname{Ct} \psi \cdot \frac{1}{\operatorname{Si}^2 \psi} \cdot \sum A^2 + 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{Si}^2 \psi} \cdot \sum A B$$

erhalten, und daraus

$$\operatorname{Tg} \psi = \frac{\sum A^2}{\sum A B} = \frac{40\,778\,405}{2\,967\,274} = 13{,}74 = \operatorname{Atg} 85^0\,50' \qquad 5$$

berechnen können. Die Tafel enthält zur Vergleichung auch die nach der 4 entsprechenden Formel

$$D'' = 287{,}6 + A \cdot \operatorname{Ct} 85^0\,50' \qquad 6$$

bestimmten Werte. Die Summe der positiven $D'' - D$ beträgt 271,1, die der negativen 270,7, so dass absolut genommen $\sum (D'' - D) = 541{,}8$, während $\sum (D'' - D)^2 = 46142{,}20$ wird, — also erstere Zahl etwas grösser, letztere aber merklich kleiner als bei der frühern Rechnung. — Setzen wir in 423 : 7 den Equatorgrad 56750 für g und den dem Schwerpunkte entsprechenden Grad $g + M = 57037{,}6$ für G ein, sowie $s^2 = 0$ und $S^2 = \frac{1}{9} \cdot \sum \operatorname{Si}^2 \varphi = m = 0{,}45812$, so erhalten wir die Abplattung

$$\alpha = M : 3\,m\,G = \tfrac{1}{237}$$

was ein für damalige Verhältnisse ganz respektabler Wert ist. — *d.* Anhangsweise mag noch der Schriften „Christ. **Mayer**, Basis palatina. Manhemii 1763 in 4., — und: J. **Michell**, Proposal of a method for measuring degrees of longitude upon parallels of the æquator (Ph. Tr. 1766)“ gedacht werden, — sowie endlich der auf 1790 von der Lyoner-Akademie (vgl. Journ. d. Sav. 1789) ausgeschriebenen, für damalige Zeit ziemlich müssigen, und wahrscheinlich (vgl. Lalande in Bibl. 613 und Notiz 424) aus ehrgeizigen Absichten durch den nachmals so berüchtigten Sardinier Jean-Paul Mara oder **Marat** (Boudry bei Neuenburg 1743 — Paris 1793, wo er durch Charlotte Corday beseitigt wurde; vgl. 426 : d) veranlassten Preisaufgabe „Le système de l'aplatissement de la terre vers les pôles, est-il fondé sur des idées purement hypothétiques, ou peut-il être démontré rigoureusement?“, von deren Lösung jedoch nichts verlautet.

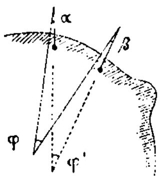
426. Die dem metrischen Systeme zu Grunde liegenden Messungen. — Als die französische Nationalversammlung 1790 beschloss, ein einheitliches, auf die Länge des Sekundenpendels gegründetes Mass- und Gewichtssystem einzuführen [a], dann aber im folgenden Jahre als Grundeinheit den zehnmillionsten Teil des Erdquadranten festsetzte [b], erschien es notwendig, die Messungen im Meridian von Paris, unter Benutzung der seither vervollkommneten und kurz zuvor bei der zur Verbindung der Sternwarten von Paris und Greenwich ausgeführten Operation [c] bewährten Instrumente und Methoden, zu wiederholen, was dann auch unter der Leitung von **Méchain** und **Delambre** sofort begonnen, aber natürlich erst gegen Ende des Jahrhunderts zu einem gewissen Abschlusse gebracht wurde [d], so dass der bei Einführung des metrischen Systemes im Jahre 1795 provisorisch zu 443‴,443 der Toise du Pérou festgesetzte **Meter** erst 1799 durch einen definitiven von 443‴,296 ersetzt werden konnte [e]. Für die geodätischen Ergebnisse dieser Neumessung auf eine spätere Nummer (428) verweisend, bleibt noch beizufügen, dass sie schon durch **Méchain** bis Barcelona, etwas später durch **Biot** und **Arago** bis zu den balearischen Inseln, und in der neuesten Zeit unter Leitung von **Perrier** sogar bis nach Algier fortgeführt wurde, während **James** und **Clarke** nach Norden die englische Gradmessung anschlossen, so dass nunmehr ein Bogen von vollen $28^1/_2{}^0$ vorliegen dürfte *f*.

Zu 426: *a.* Der Gedanke, die Länge des Sekundenpendels als Masseinheit einzuführen, war (vgl. Littrows W. d. H., 6. A., p. 43) schon 1661 durch Christoph **Wren** ausgesprochen, ferner bald darauf durch **Picard** bei seiner Gradmessung (vgl. 418) und durch den von **Huygens** (vgl. Horol. oscill. p. 7 und 146) als Dritteil des Sekundenpendels definierten „Pes horarius" sogar zu einer gewissen Verwirklichung gebracht worden, — ja noch **Bouguer** und **La Condamine** hatten für denselben plaidiert, wenn auch mit dem Unterschiede, dass ersterer die Länge des Sekundenpendels unter 45^0 Breite, letzterer diejenige am Equator benutzt wissen wollte. Es war daher gar nichts auffallendes, dass die französische Nationalversammlung, um die herrschende Verwirrung in Mass und Gewicht zu beseitigen, nach Antrag von Charles-Maurice de **Talleyrand** (Paris 1754 — ebenda 1838; früher Bischof von Autun, damals Präsident der Nationalversammlung, später Minister), 1790 V 8 beschloss (vgl. die „Collection des décrets rendus par l'assemblée nationale"), „de faire **déterminer**, à la latitude de 45^0, ou toute autre latitude qui pourrait être préférée, **la longueur du pendule et en déduire un modèle invariable pour toutes les mesures et pour les poids**", und hiefür eine Verständigung mit England zu versuchen. Auch war es kaum ein Zufall, dass gerade damals **Borda** (vgl. Lalande, Bibl. 695) mit einem nach seinen Ideen durch **Lenoir** konstruierten 12-füssigen Pendel Versuche anstellte, welche ihm ergaben, dass im leeren Raume und bei 10^0 Wärme dem Sekundenpendel in Paris eine Länge von 36" 8''',60 zukomme. — *b.* Ein eigentliches Naturmass für Längen giebt es nicht (vgl. 54), und es geht auch dem Sekundenpendel diese Eigenschaft so gut ab als allen im Laufe der Zeiten in Anwendung gekommenen oder wenigstens vorgeschlagenen Längeneinheiten, wie z. B., um nur von leicht definierbaren Grössen zu sprechen, der frühe als $^1/_{15}$ oder $^1/_{60}$ des Equatorgrades eingeführten deutschen oder englischen **Meile**, der von Jacq. **Cassini** (vgl. dessen bereits erwähnte Schrift von 1720) **als geometrischer Fuss** proponierten Länge einer Hundertstels-Sekunde des Erdequators, etc., — von der durch Jacques **Babinet** (Lusignan 1794 — Paris 1872; Akad. Paris) befürworteten Länge einer Lichtwelle von circa $^1/_2$ Mikron, und der durch Joseph Anton **Berchtold** (Möril ob Brig 1780 — Sitten 1859; Domherr in Sitten) angepriesenen Länge eines Tagespendels von mehr als einer Million deutscher Meilen, nur ihrer Kuriosität wegen Notiz nehmend. Dagegen hat das Sekundenpendel den Vorzug, dass seine für uns als Einheit bequeme Länge leicht hergestellt, folglich auch mit andern üblichen Massen bequem verglichen werden kann, und es ist daher kaum zu begreifen, jedenfalls zu bedauern, dass die von der Pariser Akademie zu eingehender Prüfung niedergesetzte, aus **Borda, Lagrange, Laplace, Monge** und **Condorcet** bestehende Kommission dasselbe auf Antrag von **Laplace** aus dem futilen Grunde verwarf, dass die Masseinheit nicht von heterogenen Elementen wie Zeit und Schwere abhängen dürfe, und in ihrem „Mémoire sur le choix d'une unité de mesures (Mém. Par. 1788, ausgeg. 1791)" den 10-millionsten Teil des Meridianquadranten als Längeneinheit oder **Meter** vorschlug, — dass die Akademie entgegen dem Antrage von Mathurin Jacques **Brisson** (Fontenay-le-Comte 1723 — Broissi bei Versailles 1806; Prof. phys. und Akad. Paris), das Sekundenpendel als halbe Toise einzuführen, diesen Vorschlag zu dem ihrigen machte, — und dass hierauf die Nationalversammlung 1791 III 16 ihr früheres Dekret in entsprechendem Sinne abänderte. Es ist mir nicht unwahrscheinlich, dass **Laplace** bei seinem Antrage den Hintergedanken hatte, dadurch eine Neumessung im Meridiane von Paris zu veranlassen, und es wurde dann auch wirklich in derselben Sitzung die Akademie beauftragt, eine solche sofort anzuordnen, ja ihr zu diesem Zwecke 1791 VIII 8 ein erster Kredit von 100000 Livres eröffnet. — *c.* Zu Anfang der Achzigerjahre des vorigen Jahrhunderts wusste nämlich **Cassini** de Thury sowohl die Pariser Akademie als den König von England von der Wünschbarkeit zu überzeugen, die gegenseitige Lage der beiden Sternwarten von Paris und Greenwich möglichst genau zu bestimmen und dadurch die schöne Arbeit zu provozieren, welche einige Jahre später durch die französischen und englischen Geodäten gemeinschaftlich ausgeführt und in den Schriften „William **Roy** (Schottland 1710? — London 1790; Generalmajor), An account of the trigonometrical operations whereby the distance between the meridians of the roy. observatories of Greenwich and Paris has been determined (Ph. Tr. 1790), — und: J. Dom. **Cassini**, Exposé des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich, par M. M. Cassini, Méchain et Legendre. Paris 1791 in 4.“ einlässlich beschrieben wurde. Ich beschränke mich darauf anzuführen, dass die drei soeben genannten Akademiker das französische Dreiecksnetz bis an die Westküste fortführten, wobei der nach **Borda** benannte Kreis und die durch **Legendre** verbesserten Rechnungsmethoden zum ersten Male zur Verwendung kamen, — dass General **Roy**, welchem Sir Charles **Blagden** (1748 — Arceuil 1820; engl. Militärarzt) zur Hilfe beigeordnet war und ein durch Ramsden eigens zu diesem Zwecke konstruierter grosser Theodolit zur Verfügung stand, entsprechend Greenwich trigonometrisch mit der englischen Ostküste verband, — dass die Überbrückung des Kanales gemeinschaftlich ausgeführt wurde, wobei während 17 Tagen abwechselnd jede Partie der andern ihre Aufstellungspunkte mittelst „réverbères et de nouveaux feux indiens“ zu verabredeten Stunden sichtbar machte, — und dass sich schliesslich als Hauptresultat für die Längendifferenz Greenwich-Paris der nach den neuesten Bestimmungen nur um $^1/_2{}^s$ zu kleine Wert $9^m\ 20^1/_2{}^s$ ergab. — *d.* Für diese Messung, in welche sich **Méchain**, der den schon früher bei der trigonometrischen Verbindung von Korsika und Toskana bethätigten **Tranchot** zum Hauptgehilfen hatte, und **Delambre**, der namentlich durch Mich. **Lefrançais** sekundiert wurde, so teilten, dass ersterer zunächst die südlichen und letzterer die nördlichen Partien in Angriff nahm, mag es um so eher genügen, auf das grosse Werk „Base du système métrique décimal ou Mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone. Paris 1806—10, 3 Vol. in 4.“ zu verweisen, als schon früher (327, 347, 367, etc.) das wichtigste über die angewandten Instrumente und Methoden beigebracht wurde, die Hauptresultate aber ohnehin später (428) mitzuteilen sein werden. — *e.* Es dauerte begreiflicherweise bis 1800, ehe **Méchain** und **Delambre** sich durch mehr als 100 Dreiecke durchgearbeitet, sowie die Grundlinien bei Melun und Perpignan gemessen hatten, zumal sie (wenn auch nur ein kleiner Teil des von Fonvielle in seiner Novelle „La mesure du mètre. Paris 1886 in 8.“ Erzählten auf Wahrheit beruht) unter der misstrauischen und durch den nichtswürdigen **Marat** in seinem sog. „Ami du peuple“ noch speciell gegen sie aufgewiegelten Bevölkerung unter vielen Hindernissen, ja mehrmals mit Todesgefahr, zu arbeiten hatten, — und so weit ging die Geduld der Revolutionsmänner nicht: Schon 1795 IV 7 beschloss der Konvent auf Antrag von Claude Antoine **Prieur** (Auxonne 1763 — Dijon 1832; Genieoffizier), sofort den Zehnmillionstel des Erdquadranten unter dem Namen **Mètre** (Meter = 1^m à 10^{dm} à 10^{cm} à 10^{mm}; Mikron = μ = $0{,}001^{mm}$; Kilometer = 1^{km} = 1000^m) als Längeneinheit zu proklamieren, — die **Are** (Are = 1^a = 100^{qm}; Hektare = 1^{ha} = 100^a) als Flächeneinheit, — den **Stère** (Ster = 1^{st} = 1^{cm}) als Volumeneinheit, — den **Litre** (Liter = 1^l = 1^{cdm}; Hektoliter = 100^l) als Flüssigkeitsmass, — das **Gramme** (Gramm = 1^g = Gewicht von 1^{ccm} reinen Wassers bei seiner grössten Dichte; Kilogramm = 1^{kl} = 1000^g; Metercentner = 1^q = 100^{kl}; Tonne = 1^t = 100^q) als Gewichtseinheit, — und den **Franc** (Franken = $4{,}5^g$ Silber + $0{,}5^g$ Kupfer = 100 Centimes) als Münzeinheit. Provisorisch wurde der Meter zu $443''',443$ der Toise du Pérou bei 13^0 R. angenommen und sodann, nachdem eine internationale Kommission, bei der z. B. Helvetien durch **Tralles**, Cisalpinien durch Lorenzo **Mascheroni** (Castagnetto bei Bergamo 1750 — Paris 1800; Prof. math. Pavia) und Batavien durch van **Swinden** vertreten war, die Grundlagen des Gesetzes nochmals durchberaten hatte, definitiv zu $443''',296$ festgesetzt. Das betreffende Dekret datiert von 1799 IV 24 und zugleich wurde **Lenoir** beauftragt, zwei Normalmeter in Platin auszuführen (denjenigen der Archive und denjenigen des Observatoriums), sowie eine Art Komparator, um Kopien derselben möglichst genau vergleichen zu können. Für weitern Detail über diese letztern Arbeiten kann auf „Ch. **Wolf**, Recherches historiques sur les étalons de poids et mesures de l'observatoire et les appareils qui ont servi à les construire. Paris 1882 in 4.“ verwiesen werden; dagegen bleibt noch anzuführen, dass schon **Delambre** (vgl. Base III 140) den Meter auf $443''',328$ erhöhen oder dann die Bestimmung treffen wollte, dass der acceptierte Meter seiner Definition bei $8^0,445$ C. entspreche, und dass später (vgl. 428) **Bessel** fand, der Meter sollte nach seiner Definition $443''',334$ halten. — Anhangsweise mag ferner erwähnt werden, dass die Ausgrabungen in Ninive beweisen sollen, dass die Assyrer oder Babylonier schon vor circa $2\frac{1}{2}$ Tausend Jahren eine Art metrisches System hatten: Ihre Grundmasse waren die Länge vom Ellbogen bis an die Fingerspitzen (Coudée = 1^c; Stadium = 360^c) und ein dazu im Verhältnis von 3:5 stehender Fuss; Quadratfuss und Kubikfuss waren die Einheiten für Flächen- und Körpermasse; ein Kubikfuss Wasser war die Gewichtseinheit, welche „Talent“ hiess; die Einteilung war durchweg sexagesimal, wie sie jetzt noch bei Zeit und Kreis gebräuchlich ist. Es besass also schon dieses alte System annähernd die schöne Gliederung, der das neue metrische System **ausschliesslich** verdankt, dass es nach und nach auch in den meisten andern Kulturstaaten eingeführt wurde und in der Wissenschaft jetzt fast ausnahmslos benutzt wird. — *f*. Glücklicherweise hatten die französischen Messungen trotz der etwas voreiligen Dekretierung des Meters ihren ungestörten Fortgang, indem nicht nur nach dem Wunsche von **Méchain** noch eine Fortsetzung bis Formentera auf den Balearen beschlossen und nach dessen Tode, wie aus dem „Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques. Paris 1821 in 4. (auch als Vol. IV der „Base“ zu betrachten)“ hervorgeht, von 1806 bis 1808 durch **Biot** und **Arago** wirklich durchgeführt wurde, sondern von 1869 hinweg, unter Leitung von General François **Perrier** (Vallerange in Gard 1834 — Montpellier 1888) und Kommandant **Bassot**, teils eine Revision der

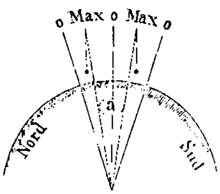
„Méridienne de Delambre et Méchain" zur Ausführung kam, teils das mittelländische Meer überbrückt, und durch die in Algier gemessene „Méridienne de Laghouat" eine neue Fortsetzung erzielt wurde, so dass nun mit Einbezug der englischen Messung ein ununterbrochener Bogen von $28\frac{1}{2}^0$ vorliegt, welcher von der Nordspitze Schottlands bis an die Sahara reicht.

427. Einige andere Gradmessungen der Neuzeit. — Ausser den bereits erwähnten Ergänzungs- und Revisions-Arbeiten wurden im gegenwärtigen Jahrhundert noch mehrere grosse Operationen durchgeführt, wie namentlich zwei ausgedehnte, fast ganz Europa durchschneidende Längengradmessungen im 45. und 52. Parallel [a], und zwei grosse Breitengradmessungen in Russland und Ostindien [b], — an welche sich sodann, abgesehen von den (434) in allerneuester Zeit zu Gunsten der Geodäsie in Angriff genommenen oder projektierten Arbeiten, noch einige kleinere, aber ebenfalls sehr wertvolle Messungen anschlossen [c]. Die Ergebnisse dieser unblutigen Feldzüge werden uns schon unter der nächstfolgenden Nummer, und später noch wiederholt, beschäftigen.

Zu 427: *a.* Schon 1790 hatte Marc-Auguste **Pictet** der Roy. Society in seinen „Considerations on the convenience of measuring an arch of the meridian, and of the parallel of longitude, having the observatory of Geneva for their common intersection (Ph. Tr. 1791)" einen detaillierten, durch eine Karte mit Dreiecksnetz veranschaulichten Plan für eine Doppel-Gradmessung vorgelegt, der damals allerdings wegen der Ungunst der Zeiten nicht zur Ausführung kam, aber als Vorläufer der erwähnten spätern Arbeiten im 45. Parallel nicht übersehen werden darf. Letztere wurden allerdings zunächst durch **Laplace** veranlasst, der aus gewissen Anomalien in den Delambre'schen Messungsergebnissen und sie bestätigenden Resultaten der 1808 durch **Biot** im Auftrage des Bureau des longitudes im 45. Parallel ausgeführten Schwerebestimmungen (432) auf Abweichungen der Erdgestalt von einem regelmässig geschichteten Rotationsellipsoide schliessen musste, indem auf seinen Wunsch 1811 beschlossen wurde, das als Grundlage einer neuen Karte von Frankreich benötigte Netz nicht nur an den alten Meridian von Paris, sondern auch an den 45. Parallel anzulehnen, und die Triangulation längs des letztern sofort in zwei Sektionen beginnen zu lassen: Die westliche Sektion (Bordeaux-Genf) führte mit verschiedenen durch die Kriege veranlassten Unterbrechungen Oberst **Brousseau** bis 1820 aus, — die östliche Sektion (Genf-Fiume), welche Oberst Maurice **Henry** (Sauvigny 1763 — Paris? 1825; successive Lazarist, Obs. Mannheim und Petersburg, Ingénieur-géographe) begonnen hatte, wurde nach dem Frieden durch östreichische und sardinische Generalstabsoffiziere unter Zuzug der Astronomen **Carlini** und **Plana** bis 1823 zu Ende geführt, — und schliesslich mass **Biot** 1824/5 auch noch in Mailand, Padua und Fiume die Intensität der Schwere. — Für den Detail dieser Operationen auf die schon früher (406 : b und 426 : f) erwähnten Schriften verweisend, mag es hier genügen, im allgemeinen zu erwähnen, dass sie die Vermutungen von **Laplace** bestätigten, und speciell ein uns im Hinblicke auf 222, 371 und 423—24 besonders interessierendes Ergebnis derselben hervorzuheben: Für einen auf



der Südseite der Alpen bestimmten Meridiangrad erhielten nämlich **Carlini** und **Plana** 57687^t, während jener Breite nach den übrigen Gradmessungen nur eine Gradlänge von 57013^t zukommen sollte; es war dies offenbar eine Folge der gegen die Alpen hin merklich zunehmenden Ablenkung des Lotes, welche statt φ nur $\varphi' = \varphi - (\beta - \alpha)$ ergab, folglich, beim Teilen der Distanz durch eine zu kleine Grösse, einen zu grossen Grad, — und zwar erklärt, da der Unterschied 57687 — 57013 = 674^t etwa einem Winkelunterschiede von 42″,5 entspricht, die Annahme $\beta - \alpha = 42''{,}5$ die ganze Anomalie. — Verwandte merkwürdige Thatsachen veröffentlichte Gottfried **Schweizer** (Wyla bei Zürich 1816 — Moskau 1873; Prof. astr. und Dir. Moskau; vgl. Mitth. 40 von 1876)



in seinen „Untersuchungen über die in der Nähe von Moskau stattfindende Lokal-Attraktion (Bull. Moscou 1863—64)“: Er fand nämlich, dass die astronomisch bestimmte Equatorhöhe in Moskau um 10″ grösser sei als die geodätisch (431) auf verschiedenen Wegen übereinstimmend erhaltene, — dass die Abweichung nach N. abnehme, bis sie in etwa 20$^{kil.}$ verschwinde, — dass sie auch nach S abnehme, in 12^{kil} ebenfalls verschwinde, dann aber in entgegengesetztem Sinne wieder zunehme, bis sie nach weitern 12$^{kil.}$ auf 8″ gestiegen sei, und endlich nach circa neuen 20$^{kil.}$ ganz erlösche; eine ähnliche, nur etwas schwächere Erscheinung zeigte sich unter östlichen und westlichen Meridianen, und das Ganze schien darauf hinzudeuten, dass sich bei a eine von W nach E streichende Höhlung von etwa 1½ Kubikmeilen unter der Erde befinde. Die neueste Zeit hat noch mehrere andere in dieses Gebiet gehörende merkwürdige Thatsachen nachgewiesen, wie z. B. die auffallend geringe Lotablenkung durch das mächtige Himálaya-Gebirge, — und die alsbald (434) zu erwähnenden Arbeiten der Gegenwart dürften denselben binnen kurzem noch manche weitere beifügen. — Während auf die frühern Messungen im Parallel die Unsicherheit der Längenvergleichungen notwendig sehr störend einwirkte, und wohl zunächst aus diesem Grunde die im ersten Viertel unsers Jahrhunderts durch **Henry** und den jüngern **Bonne** im Parallel von Paris unternommene Messung von Brest nach Strassburg unbefriedigend ausfiel, so existiert diese Schwierigkeit gegenwärtig nicht mehr, und man darf daher in der nächsten Zeit von der Wiederaufnahme jener französischen Messung und ihrer Verlängerung nach Wien, namentlich aber von der grossartigen, nunmehr ziemlich beendigten, ganz Europa längs des 52. Parallels in einer Ausdehnung von 68½° durchziehenden Längengradmessung, zu welcher W. **Struve** 1857 den Plan entwarf, während sich Russland, Preussen, Belgien, Frankreich und England unter Verwendung aller modernen Hilfsmittel beteiligten, die sichersten und wichtigsten Aufschlüsse erwarten. — ***b.*** Nachdem schon ein früherer Gehilfe von Maskelyne, Reuben **Burrow** (Hoberley in Yorkshire 1747 — Buxor in Ostindien 1792; Prof. math. bei der engl.-ostind. Komp.), einige Messungen vorgenommen, für welche auf „Isaac **Dalby** (Gloucestershire 1744 — Farnham 1824; Gehilfe von General Roy und später Prof. math. Marlow), Account of the late Mr. Reuben Burrow measurement of a degree of longitude and another of latitude near the tropic in Bengal. London 1796 in 4.“ verwiesen werden kann, begann William **Lambton** (1748? — Kingin-Ghaut in Indien 1823; Oberst) aus eigener Initiative und fast ohne Unterstützung 1801 an der Küste von Coromandel die Arbeit, welche sodann von 1818 hinweg als sog. zweite ostindische Gradmessung (vgl. Tab. in 428) auf Staatskosten erst unter seiner, dann unter der Leitung seines frühern Gehilfen George **Everest** (Wales 1790 — London 1866; Oberst) fortgeführt und in den Schriften „**Lambton**, An abstract of the results deduced from the measurement of an arc of the meridian extending from latitude 8° 10′ to 18° 3′ (Ph. Tr. 1818, 1823), — und: **Everest**, An account of the measurement of an arc of the meridian between 18° 3′ and 24° 7′. London 1830 in 4., sowie: An account of the measurement of two sections of the meridional arc of India. London 1847, 2 Vol. in 4." behandelt wurde, ja noch seither durch Andrew **Waugh** und J. T. **Walker** bis auf volle 26 Meridiangrade ausgedehnt worden sein soll. — Für den Detail der fast ebenso ausgedehnten, in der erwähnten Tabelle ebenfalls teilweise vertretenen, auf 10 Basen und 258 Dreiecken beruhenden, unter der Oberleitung von W. **Struve** ausgeführten russischen Gradmessung verweise ich auf dessen Werke: „Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostsee-Provinzen Russlands. Dorpat 1831, 2 Bde. in 4., — und: Arc du méridien de 25° 20′ entre le Danube et la mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855 sous la direction de C. de Tenner, Chr. Hansteen, N. H. Selander et F. G. W. Struve. St-Petersbourg 1860, 2 Vol. in 4." — *c.* Ich verweise für dieselben teils auf die mehrerwähnte Tafel, teils auf die Schriften „William **Mudge** (Plymouth 1762 — London 1820; Generalmajor), An account of the operation for accomplishing the trigonometrical survey of England. London 1799—1811, 4 Vol. in 4., und: Account of the measurements of an arc of the meridian from Dunnos to Clifton (Ph. Tr. 1803, 1812), — **Schumacher**, Mesure de degrés en Danemark (Corr. astr. 1 von 1818, und später), — **Gauss**, Nachricht von der Hannover'schen Gradmessung (A. N. 7 und 24 von 1822, Berl. Jahrb. auf 1826), und: Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona. Göttingen 1828 in 4., — F. W. **Bessel** und J. **Baeyer**, Gradmessung in Ostpreussen. Berlin 1838 in 4., — Sir Henry **James** (1803—77; Director General of the Ordnance Survey) and A. R. **Clarke**, Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimension and mean specific gravity of the earth as derived there from. London 1858 in 4., und: Extension of the triangulation of the ordnance survey into France and Belgium, with the measurement of an arc of parallel in latitude 52° N. from Valentia in Ireland to mount Kemmel in Belgium. London 1863 in 4., — etc."

428. Die Berechnung der Grösse und Gestalt der Erde. — Entsprechend wie sich die Gradmessungen mehrten, entstand je auch wieder der Wunsch, die ihrer Gesamtheit möglichst entsprechende Grösse und Gestalt der Erde zu kennen, und so wurden im gegenwärtigen Jahrhundert wiederholt ähnliche Rechnungsarbeiten vorgenommen, wie solche (425) schon im vorigen durch **Boscovich** angestellt worden waren ", und namentlich führte **Bessel** 1837—41 eine betreffende Musterarbeit aus, deren Hauptergebnisse darin bestanden, dass den sämtlichen damals bekannten Messungsergebnissen ein Rotationsellipsoid der Halbaxen

$$\mathfrak{a} = 3\,272077^t{,}14 = \overline{6{,}804\,6435}^m \qquad \mathfrak{b} = 3\,261139^t{,}33 = \overline{6{,}803\,1893}^m \quad \textbf{1}$$

und somit der Abplattung $\alpha = 1 : 299{,}15$ sehr nahe genüge, folglich, wenn v die geocentrische Breite eines Ortes der Polhöhe φ bezeichne und ϱ das Verhältnis seines Abstandes vom Erdmittelpunkte zu dem Radius des Equators sei,

$$\begin{aligned} v &= \varphi - 11' 30'',65 \cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi + 1'',16 \cdot \mathrm{Si}\, 4\varphi - \dots \\ \mathrm{Lg}\, \varrho &= 9,999\,2747 + 0,000\,7215 \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi - 0,000\,0018 \cdot \mathrm{Co}\, 4\varphi + \dots \end{aligned} \qquad \mathbf{2}$$

gesetzt werden könne [b]. Trotz der seither unter Zuzug weiterer Daten ausgeführten Neuberechnungen [c] wird noch gegenwärtig meistens dieses Bessel'sche Ellipsoid als Ausgangspunkt für geodätische Untersuchungen benutzt [d].

Zu 428: *a.* Vgl. „Henric Johan **Walbeck** (Abo 1793 — ebenda 1822; Obs. Abo), Dissertatio de forma et magnitudine telluris ex dimensionis arcubus meridiani definiendis. Aboæ 1819 in 4., — G. B. **Airy**, On the figure of the earth (gelesen 1826, gedr. Cambr. Ph. Tr. 1827; auch in dessen Mathematical tracts und zwar 3. ed. 1842 pag. 123—84), — Ed. **Schmidt**, Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie. Göttingen 1829—30, 2 Th. in 8. (I 183—202; auch A. N. 438 von 1837), — etc." Es erhielten

	Walbeck	Airy	Schmidt
$\mathfrak{a}$	$3\,271819^t,5$	$3\,272109^t,4$	$3\,271852^t,3$
$\mathfrak{b}$	3 261012,8	3 261177,8	3 260853,7
α	$^1/302,78$	$^1/298,32$	$^1/297,48$

— *b.* Der von **Bessel** eingeschlagene Weg war (vgl. A. N. 333—34 von 1837 und 438 von 1841) wesentlich folgender: Bezeichnet s' die Länge des vom Scheitel der grossen Axe bis zu einem Punkte der Breite φ' führenden Ellipsenbogens und g den mittlern Wert eines Breitengrades, so hat man nach 75 : 3, 4

$$s' = \mathfrak{a}(1-e^2)\cdot E\cdot(\varphi' - A\cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi' + B\cdot \mathrm{Si}\, 4\varphi' - \dots), \quad g = \mathfrak{a}(1-e^2)\cdot E\cdot \pi : 180 \qquad \mathbf{3}$$

wo zur Abkürzung

$$E = 1 + {}^3/_4\, e^2 + {}^{45}/_{64}\, e^3 + \dots, \quad A\cdot E = {}^3/_8\, e^2 + {}^{15}/_{32}\, e^4 + \dots, \quad B\,E = {}^{15}/_{256}\, e^4 + \dots \qquad \mathbf{4}$$

und somit

$$A = {}^3/_8\, e^2 + {}^3/_{16}\, e^4 + \dots \qquad B = {}^{15}/_{264}\, e^4 + \dots = {}^5/_{12}\, A^2 \qquad \mathbf{5}$$

oder auch nach 37 : 4

$$e^2 = {}^8/_3\, A - {}^{32}/_9\, A^3 + \dots \qquad \mathbf{6}$$

Entsprechend hat man für einen Punkt der Breite φ''

$$s'' = \mathfrak{a}(1-e^2)\cdot E\cdot(\varphi'' - A\cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi'' + B\cdot \mathrm{Si}\, 4\varphi'' - \dots) \qquad \mathbf{7}$$

und daher, wenn man $\varphi'' + \varphi' = 2\varphi$ und $\varphi'' - \varphi' = \triangle\varphi$ setzt, beidseitig mit $180 \cdot 60 \cdot 60 : \pi = 1 : \mathrm{Si}\, 1''$ multipliziert, $\triangle\varphi$ in Sekunden ausdrückt, sowie schliesslich die höhern Glieder weglässt,

$$\frac{3600}{g}\cdot(s'' - s') = \triangle\varphi - \frac{2\,A}{\mathrm{Si}\, 1''}\cdot \mathrm{Si}\,\triangle\varphi\cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi + \frac{5\,A^2}{6\,\mathrm{Si}\, 1''}\cdot \mathrm{Si}\, 2\triangle\varphi \cdot \mathrm{Co}\, 4\varphi \qquad \mathbf{8}$$

Hat man nun eine Reihe von Gradmessungen und schreibt 8 für jede derselben auf, dabei

$$g = g_0 : (1 + i) \qquad \text{und} \qquad A = A_0\,(1 + k) \qquad \mathbf{9}$$

setzend, wo g_0 und A_0 vorläufige Annahmen für g und A sind, so kann man aus jeden zwei derselben ein Wertepaar für i und k berechnen; aber die verschiedenen Paare werden wegen den Fehlern der ihnen zu Grunde liegenden Daten nicht genau übereinstimmen, und da diese Fehler bei den Polhöhen infolge der Lotablenkungen, etc., einen ganz erheblichen Betrag erreichen können,

Station	Polhöhe Beobachtet	Polhöhe Korrekt.	Länge des Bogens Gemessen	Länge des Bogens Korrekt.
	1. Peruanische Gradmessung.			
Tarqui	— 3° 4′ 32″,068	— 0″,606		
Cotchesqui . .	0 2 31,387	0,606	176875ᵗ,50	— 0ᵗ,020
	2. Erste ostindische Gradmessung.			
Trivandeporum .	11° 44′ 52″,590	— 0″,271		
Paudree . . .	13 19 49,018	0,271	89813ᵗ,01	— 0ᵗ,011
	3. Zweite ostindische Gradmessung.			
Punnæ	8° 9′ 31″,132	— 1″,470		
Putchapollian .	10 59 42,276	— 1,712	160944ᵗ,20	0ᵗ,002
Dodagoontah .	12 59 52,165	4,016	274694,30	0,005
Namthabad . .	15 5 53,526	— 1,447	393828,09	— 0,018
Daumeragidda .	18 3 16,245	— 0,065	561690,06	— 0,023
Takal k'hera .	21 5 51,532	3,537	734570,43	— 0,003
Kulliampoor . .	24 7 11,860	— 2,859	906171,67	— 0,057
	4. Hannover'sche Gradmessung.			
Göttingen . .	51° 31′ 47″,85	— 2″,493		
Altona	53 32 45,27	2,493	115163ᵗ,725	— 0ᵗ,012
	5. Dänische Gradmessung.			
Lauenburg . .	53° 22′ 17″,046	0″,451		
Lyssabel . . .	54 54 10,352	— 0,451	87436ᵗ,538	— 0ᵗ,001
	6. Preussische Gradmessung.			
Trunz	54° 13′ 11″,466	— 0″,907		
Königsberg . .	54 42 50,500	— 1,448	28211ᵗ,629	0ᵗ,006
Memel	55 43 40,446	2,355	86176,975	0,017

während diejenigen der trigonometrisch bestimmten Distanzen, zumal ein Meter noch nicht $1/_{30}''$ ausmacht, bei irgend sorgfältiger Bestimmung kaum in Betracht fallen, so wird es am besten sein, die $\triangle\varphi$ in $\triangle\varphi + x$ übergehen zu lassen und sodann die i und k so zu bestimmen, dass Σx^2 ein Minimum wird. Unter diesen Annahmen geht aber 8, wenn man die Produkte und zweiten Potenzen der kleinen Grössen i, k, x, sowie den Einfluss von x auf φ vernachlässigt, in über, wo

$$x = a \cdot i + b \cdot k + n \qquad \mathbf{10}$$

$$a = \frac{3600}{\varrho \cdot g_0}(s'' - s') \qquad b = \frac{2}{\varrho \cdot \mathrm{Si}\,1''}\left(A_0 \cdot \mathrm{Si}\triangle\varphi \cdot \mathrm{Co}\,2\varphi - \frac{5}{6}A_0^2 \cdot \mathrm{Si}\,2\triangle\varphi \cdot \mathrm{Co}\,4\varphi\right)$$

$$n = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{3600}{g_0}(s'' - s') - 1\right] + \frac{2}{\varrho\,\mathrm{Si}\,1''}\left(A_0 \cdot \mathrm{Si}\triangle\varphi \cdot \mathrm{Co}\,2\varphi - \frac{5}{12}A_0^2 \cdot \mathrm{Si}\,2\triangle\varphi \cdot \mathrm{Co}\,4\varphi\right) \qquad \mathbf{11}$$

$$\varrho = 1 - 2A_0 \cdot \mathrm{Co}\triangle\varphi \cdot \mathrm{Co}\,2\varphi + {}^5/_3\,A_0^2 \cdot \mathrm{Co}\,2\triangle\varphi \cdot \mathrm{Co}\,4\varphi$$

ist, und man hat daher zur Bestimmung der besten Werte von i und k nach 52

$$i \cdot \Sigma a^2 + k \cdot \Sigma a \cdot b + \Sigma a \cdot n = 0 \qquad i \cdot \Sigma a \cdot b + k \cdot \Sigma b^2 + \Sigma b \cdot n = 0 \qquad \mathbf{12}$$

und kann sodann successive nach 9 die g und A, nach 6 und 4 die e und E, nach 3 endlich a berechnen, woraus sodann nach 74 : 2 leicht auch b und α

Station	Polhöhe Beobachtet	Polhöhe Korrekt.	Länge des Bogens Gemessen	Länge des Bogens Korrekt.
7. Französische Gradmessung.				
Formentera . .	38° 39′ 56″,11	0″,955		
Montjouy . . .	41 21 44,96	4,115	153673ᵗ,61	0ᵗ,026
Barcelona . .	41 22 47,90	0,764	154616,74	— 0,002
Carcasonne . .	43 12 54,30	— 0,433	259172,61	0,002
Evaux	46 10 42,54	— 6,447	428019,31	— 0,066
Panthéon . . .	48 50 49,37	— 1,099	580312,41	0,005
Dünkirchen . .	51 2 8,85	2,144	705257,21	0,047
8. Englische Gradmessung.				
Dunnose . . .	50° 37′ 7″,633	— 1″,816		
Greenwich . .	51 28 39,000	1,396	49059ᵗ,89	— 0ᵗ,012
Blenheim . . .	51 50 27,632	2,705	69829,19	0,001
Arburyhill . .	52 13 28,031	1,395	91696,39	— 0,144
Clifton	53 27 31,130	— 3,679	162075,93	— 0,012
9. Russische Gradmessung.				
Belin	52° 2′ 40″,864	— 1″,732		
Nemesch . . .	54 39 4,519	— 2,384	148811ᵗ,418	— 0ᵗ,011
Jacobstadt . .	56 30 4,562	1,826	254543,454	— 0,014
Bristen . . .	56 34 51,550	2,627	259110,085	0,004
Dorpat . . .	58 22 47,280	— 1,044	361824,461	— 0,019
Hochland . . .	60 5 9,771	0,707	459363,008	— 0,013
10. Schwedische Gradmessung.				
Malörn	65° 31′ 30″,265	0″,560		
Pahtawara . .	67 8 49,830	— 0,560	92777ᵗ,981	— 0ᵗ,024

abgeleitet werden können. — Wählen wir z. B. aus den 1837 von **Bessel** benutzten, oben nach ihren einzelnen Sektionen verzeichneten 10 Gradmessungen die Nummern 1, 2, 6 und 10 aus, welchen der Reihe nach die Gradlängen $56734^t.05$, $56759^t.55$, $57144^t.64$ und $57196^t.11$ entsprechen, und nehmen $g_0 = 57000^t$ und $A_0 = 1/_{400}$ an, so erhalten wir nach 10 und 11 die 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 11227 \cdot i + 56{,}059 \cdot k + 3{,}7 \\ x_2 &= 5698 \cdot i + 25{,}835 \cdot k + 1{,}8 \\ x_3 &= 5433 \cdot i - 9{,}157 \cdot k + 4{,}5 \\ x_4 &= 5840 \cdot i - 19{,}711 \cdot k + 0{,}3 \end{aligned} \qquad \mathbf{13}$$

und aus diesen nach 12 die Normalgleichungen

$$22214 \cdot i + 61{,}171 \cdot k + 7{,}7996 = 0 \qquad 61171 \cdot i + 428{,}244 \cdot k + 20{,}6802 = 0$$

welche $i = -0{,}0003\,5957$ und $k = 0{,}003\,0237$ ergeben, folglich nach 13

$$x_1 = -0'',2 \qquad x_2 = -0'',1 \qquad x_3 = 2'',5 \qquad x_4 = -1'',8 \qquad \mathbf{14}$$

und sodann in oben angegebener Weise

$$\begin{aligned} &g = 57020^t{,}51 \qquad A = 0{,}0025\,0756 \qquad e^2 = 0{,}0066\,6453 \\ &E = 1{,}0050\,2966 \qquad a = 3\,272\,493^t \qquad b = 3\,261\,571^t \qquad \alpha = 1/299 \cdot 60 \end{aligned} \qquad \mathbf{15}$$

Bessel selbst erhielt, indem er für jede der 38 Sektionen eine den 13 entsprechende Gleichung aufstellte, die oben angegebenen Werte und durch Rückwärtsrechnung die in vorstehende Tafel eingetragenen kleinen Korrektionen, welche die Polhöhen und Bogenlängen erfordern, um mit jenem Ellipsoide übereinzustimmen, somit den Beweis leisten, dass letzteres der wirklichen Gestalt der Erde sehr nahe kömmt. Als sodann **Encke** (vgl. Berl. Jahrb. 1852) die Bessel'schen Bestimmungen auch noch an der revidierten Gradmessung am Kap (vgl. 424) prüfte, fand er, dass auch diese sich durch dieselben ganz schön darstellen lasse, sofern man an den Polhöhen eine etwa 5″ betragende, durch die Nähe des Tafelberges erklärliche Korrektion anbringe, und dass somit die von manchen vermutete Ungleichheit der beiden Hemisphären unbegründet zu sein scheine. — Bezeichnen ϱ und v die geocentrischen Polarcoordinaten eines, durch die einem gegebenen Momente entsprechende Sternzeit t nach seinem Meridiane definierten Punktes der Polhöhe φ, und setzt man

$$n = \frac{a - b}{a + b} = \overline{7},2238034 \qquad m = \frac{2n}{1 + n^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \overline{7},5248346 \qquad \textbf{16}$$

folglich

$$b = a \cdot \frac{1 - n}{1 + n}, \quad a^2 - b^2 = \frac{4a^2 n}{(1 + n)^2}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{4n}{(1 + n)^2}, \quad 1 - e^2 = \left(\frac{1 - n}{1 + n}\right)^2 \qquad \textbf{17}$$

so ergeben sich nach 74 : 16, 17 für $a = 1$

$$\mathrm{Tg}\, v = b^2 \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi = \left(\frac{1 - n}{1 + n}\right)^2 \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{\mathrm{Co}\, \varphi}{\mathrm{Co}\, v \cdot \mathrm{Co}\, (\varphi - v)}} = \frac{1 + n^2}{1 + n} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2m \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi + m^2}{1 + 2n \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi + n^2}} \qquad \textbf{18}$$

und überdies nach 74 : 7, 9

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \mathrm{Si}^2 \varphi}} = \frac{1 + n}{\sqrt{1 + 2n \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi + n^2}}, \quad R = (1 - e^2) \cdot N^3 = \frac{(1 - n)^2 \cdot (1 + n)}{(1 + 2n \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi + n^2)^{3/2}} \qquad \textbf{19}$$

wo N und R Conormale und Krümmungsradius bezeichnen, — woraus mit Hilfe von 41 : 21, 22, 28 die bequemen, zum Teil schon oben gegebenen Reihen

$$\begin{aligned}
v &= \varphi - m \cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi + \tfrac{1}{2} m^2 \cdot \mathrm{Si}\, 4\varphi - \ldots \\
&= \varphi - 11' \, 30'',65 \cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi + 1'',16 \cdot \mathrm{Si}\, 4\varphi - \ldots \\
\mathrm{Lg}\, \varrho &= \mathrm{Lg}\,(1 + n^2) - \mathrm{Lg}\,(1 + n) + M\,[(m - n)\, \mathrm{Co}\, 2\varphi - \tfrac{1}{2}(m^2 - n^2)\, \mathrm{Co}\, 4\varphi + \ldots] \\
&= 9{,}999\,2747 + 0{,}000\,7215 \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi - 0{,}000\,0018 \cdot \mathrm{Co}\, 4\varphi + \ldots \\
\mathrm{Lg}\, R &= \mathrm{Lg}\,(1 - n^2) + \mathrm{Lg}\,(1 + n) - 3M\,[n \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi - \tfrac{1}{2} n^2 \cdot \mathrm{Co}\, 4\varphi + \ldots] \\
&= 9{,}999\,2711 - 0{,}002\,1813 \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi + 0{,}000\,0018 \cdot \mathrm{Co}\, 4\varphi - \ldots \\
\mathrm{Lg}\, N &= \mathrm{Lg}\,(1 + n) - M\,[n \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi - \tfrac{1}{2} n^2 \cdot \mathrm{Co}\, 4\varphi + \ldots] \\
&= 0{,}000\,7265 - 0{,}000\,7271 \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi + 0{,}000\,0006 \cdot \mathrm{Co}\, 4\varphi - \ldots
\end{aligned} \qquad \textbf{20}$$

hervorgehen, wo $M = 0{,}434\,2945$ den Modulus der gemeinen Logarithmen bezeichnet. Sie ergeben z. B. für Zürich mit $\varphi = 47^0\, 22'\, 40''$

$$\varphi - v = 11'\, 28'',49 \qquad \mathrm{Lg}\, \varrho = 9{,}999\,2157 \qquad \mathrm{Lg}\, R = 9{,}999\,4499 \qquad \mathrm{Lg}\, N = 0{,}000\,7861$$

und für einen Breitengrad oder eine Breitensekunde

$$R\, a\, \pi : 180 = 57076^t{,}22 \qquad R\, a \cdot \mathrm{Si}\, 1'' = 15^t{,}843 = 30^m{,}879$$

sowie für einen Längengrad oder eine Längensekunde

$$N\, a\, \pi \cdot \mathrm{Co}\, \varphi : 180 = 38741^t{,}75 \qquad N\, a \cdot \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, 1'' = 10^t{,}762 = 20^m{,}975$$

d. h. dieselben Werte, welche aus der von **Encke** (l. c.) gegebenen Tafel, von welcher unsere VII[d] ein Specimen enthält, durch Interpolation folgen. — ***c.*** Unter Mitbenutzung der seit Bessels Zeiten ausgeführten Vervollständigungen und Neumessungen (vgl. 427) erhielten z. B.

	James 1864	Clarke 1866	Clarke 1880
$\mathfrak{a}$	6 378 230^m	6 378 206^m	6 378 249^m
$\mathfrak{b}$	6 356 562	6 356 584	6 356 515
α	$^1/_{294,36}$	$^1/_{294,98}$	$^1/_{293,47}$

also etwas grössere Dimensionen und stärkere Abplattungen als sie **Bessel** gefunden hatte, und **Helmert** gelangte (vgl. Bericht in 371) zu der Ansicht, dass letzterer wirklich die beiden Halbaxen um etwa $^1/_{10000}$ ihrer Länge zu klein angenommen habe, während dagegen dessen Abplattung die richtigere sein dürfte. — *d.* Anhangsweise bleibt noch zu erwähnen, dass General Th. **Schubert** in seinem „Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre (Mém. Pét. 1860, mit Nachtrag in A. N. 1231 von 1860)" seinen Rechnungen ein dreiaxiges Ellipsoid zu Grunde legte und dabei fand, dass man den Messungen auch nahe genügen könne, wenn man annehme, dass dessen kleinste Axe von 3 261 467^t,9 mit der Umdrehungsaxe zusammenfalle, während die grösste Axe von 3 272 671^t,5 in der Länge 58° 44' von Ferro liege, die kleinere Equatoraxe 3 272 303^t,2 messe, und die grösste Abplattung der Meridiane $^1/_{292,109}$, die kleinste dagegen nur $^1/_{302,004}$ betrage. Als sodann bald darauf Elie **Ritter** in seinen „Recherches sur la figure de la terre (Mém. Genève 1860—61)" den Versuch machte, der Erde zwar die Gestalt eines Rotationskörpers zu belassen, dagegen die sich den Messungen am besten anschliessende Form der Meridiane zu bestimmen, erhielt er für letztere die Gleichung

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} = 1 + \left[\frac{1}{15297} \pm \frac{1}{17269}\right] \cdot \frac{x^2 \cdot y^2}{\mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{b}^2}$$

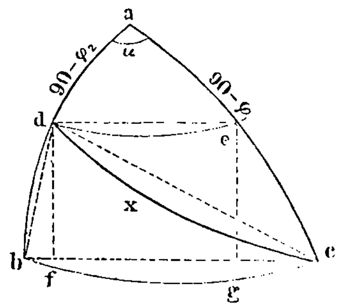
wo $\mathfrak{a} = 3\,272659^t,120$ und $\mathfrak{b} = 3\,261459^t,206$. Das Hauptinteresse dieser beiden Untersuchungen besteht wohl in dem negativen Resultate, dass dadurch nichts wesentlich Besseres erreicht wurde als durch das Bessel'sche Rotationsellipsoid. — Zum Schlusse mag endlich noch auf die Arbeiten „Edgar **Rehm**, Tafeln der Krümmungshalbmesser des Bessel'schen Erdsphäroides für die Breiten von 40° 0' — 51° 30' (Mitth. des k. k. milit. geogr. Inst. III von 1883), — A. **Delporte** (Tournai 1844 — Manyanga au Congo 1891; belg. Stabsoffizier), Notice sur les travaux nécessaires pour compléter le réseau géodésique belge. Bruxelles 1884 in 8., — Th. **Wittstein**, Vier Briefe aus Samoa. Hannover 1889 in 8., — etc.", hingewiesen werden.

429. Die frühern Rechnungen unter Voraussetzung der Kugelgestalt. — Während bei der jetzigen Ausbildung der sphärischen Trigonometrie die Lösung der meisten Aufgaben der sog. mathematischen Geographie unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde keine erheblichen Schwierigkeiten darbietet, so z. B. die von jeher beliebte Aufgabe, aus den Längen $\lambda_1\ \lambda_2$ und den Breiten $\varphi_1\ \varphi_2$ zweier Orte ihre Distanz x zu finden, durch die einfache Formel

$$\mathrm{Co}\, x = \mathrm{Si}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Si}\, \varphi_2 + \mathrm{Co}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Co}\, \varphi_2 \cdot \mathrm{Co}\, (\lambda_1 - \lambda_2) \qquad \mathbf{1}$$

absolviert wird, so erforderte früher die Lösung jeder solchen Aufgabe eine eigene Behandlung und einen gewissen Aufwand von Scharfsinn, an dem wir uns jetzt noch erfreuen ^{a}. — Anhangsweise ist hier noch der auf derselben Voraussetzung beruhenden Vorschriften für die trigonometrische Höhenbestimmung zu gedenken [b], — ferner an einem Beispiele zu zeigen, wie man unter ihr bei Berechnung eines Dreiecksnetzes vorzugehen hat [c].

Zu 429: *a.* Nach der durch Joh. **Werner** ausgegebenen Schrift „De his, quæ geographiæ debent adesse Georgi Amirucii constantinopolitani Opusculum. In idem Joannis Verneri Appendices. Norimbergæ 1514 in fol.“ wusste schon der Grieche Georg **Amirucius** (Trapezunt 1430? — Konstantinopel 1490?) die Distanz x in der Weise zu berechnen, dass er $ae = ad$ und $ab = ac$ auftrug, sodann die Sehnen de, dc, bc und die Senkrechten df, eg zog. Man kennt nun, wenn man den Radius der Hauptkreise als Einheit wählt, also die Radien von de und bc mit $\mathrm{Co}\,\varphi_2$ und $\mathrm{Co}\,\varphi_1$ einführt, und $\lambda_1 - \lambda_2 = \alpha$ setzt,



$$\mathrm{Ch}\cdot bd = 2\,\mathrm{Si}\,\tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad \mathrm{Ch}\,de = 2\,\mathrm{Co}\,\varphi_2\cdot\mathrm{Si}\,\tfrac{1}{2}\alpha \qquad \mathrm{Ch}\,bc = 2\cdot\mathrm{Co}\,\varphi_1\cdot\mathrm{Si}\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

also auch successive

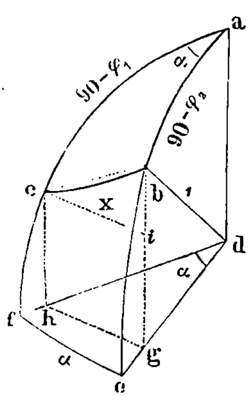
$$bf = \tfrac{1}{2}(bc - de) = (\mathrm{Co}\,\varphi_1 - \mathrm{Co}\,\varphi_2)\cdot\mathrm{Si}\,\tfrac{1}{2}\alpha \qquad cf = \tfrac{1}{2}(bc + de) = (\mathrm{Co}\,\varphi_1 + \mathrm{Co}\,\varphi_2)\cdot\mathrm{Si}\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$dc^2 = bd^2 - bf^2 + fc^2 = 2(1 - \mathrm{Si}\,\varphi_1\cdot\mathrm{Si}\,\varphi_2 - \mathrm{Co}\,\varphi_1\cdot\mathrm{Co}\,\varphi_2\cdot\mathrm{Co}\,\alpha)$$

und kann somit x nach der mit 1 übereinstimmenden Formel

$$\mathrm{Co}\,x = 1 - 2\cdot\mathrm{Si}^2\,\tfrac{1}{2}x = 1 - \tfrac{1}{2}dc^2 = \mathrm{Si}\,\varphi_1\cdot\mathrm{Si}\,\varphi_2 + \mathrm{Co}\,\varphi_1\cdot\mathrm{Co}\,\varphi_2\cdot\mathrm{Co}\,\alpha \qquad \mathbf{2}$$

berechnen, wobei freilich zu bemerken ist, dass **Amirucius** diese Schlussformel nicht aufstellte, sondern denselben Weg in jedem einzelnen Falle Schritt für Schritt zurücklegte, — immerhin aber damit ein ganz hübsches Verfahren andeutete, um ohne Zerfällen in rechtwinklige Dreiecke die Hauptformel der sphärischen Trigonometrie abzuleiten. — Für eine ebenfalls sehr nette Auflösung derselben Aufgabe mit Hilfe des ptolemäischen Lehrsatzes auf Blatt 119 der mehrerwähnten Geometrie von **Pühler** verweisend, füge ich dagegen noch bei, dass **Werner** in seinem Appendix die umgekehrte Aufgabe, α aus x zu berechnen, dadurch löste, dass er ab und ac je zu einem Quadranten ergänzte, sodann die Senkrechten bg und ch, sowie $ci \parallel hg$ zog. Da nämlich $bg = \mathrm{Si}\,\varphi_1$, $ch = \mathrm{Si}\,\varphi_2$, $dg = \mathrm{Co}\,\varphi_1$, $dh = \mathrm{Co}\,\varphi_2$ und $\mathrm{Ch}\,bc = 2\,\mathrm{Si}\,\tfrac{1}{2}x$, so hat man einerseits



$$hg^2 = cb^2 - bi^2 = 4\,\mathrm{Si}^2\,\tfrac{1}{2}x - (\mathrm{Si}\,\varphi_1 - \mathrm{Si}\,\varphi_2)^2$$

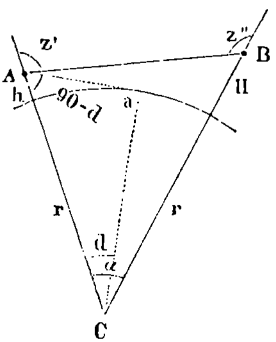
während anderseits aus $\triangle hdg$

$$hg^2 = \mathrm{Co}^2\,\varphi_1 + \mathrm{Co}^2\,\varphi_2 - 2\,\mathrm{Co}\,\varphi_1\cdot\mathrm{Co}\,\varphi_2\cdot\mathrm{Co}\,\alpha$$

folgt, und erhält nun durch Vergleichung beider Werte

$$\mathrm{Co}\,\alpha = (\mathrm{Co}\,x - \mathrm{Si}\,\varphi_1\cdot\mathrm{Si}\,\varphi_2) : (\mathrm{Co}\,\varphi_1\cdot\mathrm{Co}\,\varphi_2) \qquad \mathbf{3}$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst und neuerdings jene Grundformel abgeleitet ist. — *b.* Misst man von zwei Punkten A und B aus, deren geodätisch



bestimmte Distanz gleich a ist, und deren annähernd bekannte Höhen h und H sind, die gegenseitigen Zenitdistanzen z' und z'', so kann man daraus ihre Höhendifferenz berechnen, da nach 65 : 4

$$(h + H + 2r) : (H - h) = \\ = \mathrm{Tg}\,(180 - {}^1\!/_2\,(z'' + z')) : \mathrm{Tg}\,{}^1\!/_2\,(z'' - z')$$

folgt, während anderseits $z' + z'' = 180^0 + \alpha$ und $a \fallingdotseq 2r \cdot \mathrm{Tg}\,{}^1\!/_2\,\alpha$, somit

$$H - h \fallingdotseq a\,[1 + (h + H) : 2r] \cdot \mathrm{Tg}\,{}^1\!/_2\,(z'' - z') \qquad \mathbf{4}$$

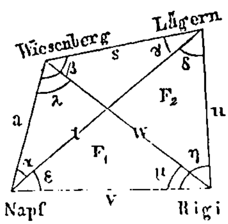
ist. Es muss hervorgehoben werden, dass diese in den meisten Fällen hinlänglich genaue Formel nur die von der terrestrischen Refraktion (vgl. 455) nahe freie Differenz $(z'' - z')$ enthält. Ferner ist beizufügen, dass die auf dem Meere statt der Zenitdistanzen gemessenen Höhen in der Regel Distanzen von dem scheinbaren Meereshorizonte sind, also um die Depression d dieses letztern, die sog. **Kimmtiefe** (dip of the horizon) vermindert werden müssen, welche sich unter der Annahme, dass die Höhe h des Beobachters über dem Meere in Metern gegeben und (219) $r = 6366\,{}^1\!/_3{}^{\mathrm{km}}$ sei, nach

$$\frac{r}{r + h} = \mathrm{Co}\,d = 1 - \frac{d^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,1''}{1 \cdot 2} + \ldots \qquad \text{oder} \qquad \frac{d^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,1''}{2} \fallingdotseq \frac{h}{r}$$

also nach

$$d \fallingdotseq \sqrt{\frac{2h}{r}} \cdot \mathrm{Si}\,1'' = 115'',6 \cdot \sqrt{h} \qquad \mathbf{5}$$

leicht berechnen lässt. Für die Vorschläge von F. **Wollaston**, die Kimmtiefe direkt zu messen und ein von ihm unter dem Namen **Dipsector** dafür konstruiertes Instrument vgl. dessen Abhandlung in Ph. Tr. 1803 und den Artikel von **Horner** in Gehlers Wörterbuch (II 558—61). — *c.* Als Beispiel für die Berechnung wähle ich das Viereck: Napf-Wiesenberg-Lägern-Rigi, in welchem nach „Johannes **Eschmann** (Wädensweil 1808 — Zürich 1852; Ingenieur; vgl. Biogr. II und Gesch. d. Verm.), Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz. Zürich 1840 in 4." die aus der Aarberger-Basis abgeleitete Seite $a = \overline{4,6488992}^{\mathrm{m}} = 44555,29^{\mathrm{m}}$ ist, und die ersten Werte der beigesetzten 9 Winkel durch unmittelbare Messung bekannt sind, während die zweiten aus



1)	$\alpha + \varepsilon$ =	87°	20'	55'',1		55'',8
2)	ε =	48	35	11,0		9,4
3)	$\beta - \lambda$ =	52	41	57,3		58,1
4)	λ =	44	27	36,0		34,6
5)	γ =	44	4	46,8		45,4
6)	δ =	41	12	29,4		30,3
7)	$\gamma + \delta$ =	85	17	15,1		15,7
8)	μ =	48	11	33,5		34,2
9)	$\eta - \mu$ =	42	0	51,6		51,0

der nachfolgenden Rechnung hervorgehen werden. — **Früher** leitete man nun einfach aus den gemessenen Winkeln durch Kombination die Dreieckswinkel ab, bildete die Summe, und brachte an jedem Winkel $^1\!/_3$ des Überschusses über 180° in Abrechnung, wobei eine allfällig notwendige ungleiche Korrektion auch dem ungleichsten Winkel zufiel, und es ist das folgende Schema nach dieser Regel ausgefüllt:

$\triangle$ N W L			$\triangle$ N W R			$\triangle$ N R L		
$\alpha =$	38° 45′ 44″,1	42″,7	$\alpha + \varepsilon =$	87° 20′ 55″,1	53″,5	$\varepsilon =$	48° 35′ 11″,0	9″,2
$\beta =$	97 9 33,3	31,9	$\lambda =$	44 27 36,0	34,5	$\delta =$	41 12 29,4	27,6
$\gamma =$	44 4 46,8	45,4	$\mu =$	48 11 33,5	32,0	$\eta =$	90 12 25,1	23,2
	180 0 4,2	0,0		180 0 4,6	0,0		180 0 5,5	0,0

Mit den in dieser Weise modifizierten Winkeln rechnete man sodann nach den gewöhnlichen Formeln der ebenen Trigonometrie, und ich erhielt, in dieser Weise vorgehend, im vorliegenden Falle:

$s = a \cdot Si\,\alpha \cdot Cs\,\gamma = \overline{4{,}603\,1398}$ $\quad t_1 = a \cdot Si\,\beta \cdot Cs\,\gamma = \overline{4{,}803\,1077}$

$v = a \cdot Si\,\lambda \cdot Cs\,\mu = 4{,}621\,8684$ $\quad w = a \cdot Si\,(\alpha + \varepsilon)\,Cs\,\mu = 4{,}776\,0499$ **6**

$u = v \cdot Si\,\varepsilon \cdot Cs\,\delta = 4{,}678\,1535$ $\quad t_2 = v \cdot Si\,\eta \cdot Cs\,\delta = 4{,}803\,1185$

ferner

$F_1 = \frac{1}{2}\,a \cdot v \cdot Si\,(\alpha + \varepsilon) = 93166{,}83^{\text{ha}}$ $\quad F_3 = \frac{1}{2}\,a \cdot s \cdot Si\,\beta = 88636{,}02^{\text{ha}}$

$F_2 = \frac{1}{2}\,s \cdot u \cdot Si\,(\gamma + \delta) = \underline{95233{,}86}$ $\quad F_4 = \frac{1}{2}\,v \cdot u \cdot Si\,\eta = \underline{99767{,}27}$ **7**

$\qquad 188400{,}69 \qquad\qquad 188403{,}29$

also bei den zwei sich ergebenden Proben keine üble Übereinstimmung. Da t_1 nur auf Einem Dreiecke beruht, während für t_2 zwei Dreiecke benutzt sind, so erscheint es angezeigt, t_1 das doppelte Gewicht von t_2 zu geben, somit schliesslich $t = \overline{4{,}803\,1113} = 63549^{\text{m}},39$ zu setzen. — **Jetzt** wird dieser, immerhin etwas willkürlichen Ausgleichung der frühern Zeit, in allen Fällen, wo, wie in unserm Beispiele, mehr als die absolut notwendige Anzahl von Grössen gemessen ist, eine den Principien der Methode der kleinsten Quadrate entsprechende strenge Ausgleichung substituiert, wobei vor allem drei Arten von sog. **Bedingungsgleichungen** aufzustellen sind: **Eine erste Art** bezieht sich auf Bedingungen, welche die an einer einzelnen Station gemessenen Winkel einzugehen haben, wenn z. B. ausser gewissen derselben auch ihre Summen oder Differenzen vorliegen, vielleicht sogar ein vollständiger „Tour de l'horizon" gemacht wurde. So sind in dem vorliegenden Beispiele nicht nur γ und δ, sondern es ist auch $\gamma + \delta$ gemessen, und man hat daher, wenn die Korrektion eines Winkels mit seiner in Klammern geschlossenen Nummer bezeichnet wird, die Bedingungsgleichung

$$44^{\circ}\,4'\,46'',8 + (5) + 41^{\circ}\,12'\,29'',4 + (6) = 85^{\circ}\,17'\,15'',1 + (7)$$ **8**

oder

$$-\,1'',1 = (5) + (6) - (7)$$

Eine zweite Art beruht darauf, dass in einem sphärischen Dreiecke die Winkelsumme $180^{\circ} + 2e$ betragen soll, wo (86), wenn e in Sekunden, die Dreieckfläche F in Hektaren ausgedrückt und entsprechend (219) $r^2 \cdot Si\,1'' = \overline{4{,}2934}$ gesetzt wird,

$$2e = F : r^2 \cdot Si\,1'' = Num\,(Lg\,F - 4{,}2934)$$ **9**

ist. Hienach ergiebt sich aber nach 7 für $\triangle$ W N R der Excess $2e = 4'',7$, also die Bedingungsgleichung

$$1 + (1) + 4 + (4) + 8 + (8) = 180^{\circ} + 4'',7 \quad \text{oder} \quad 0'',1 = (1) + (4) + (8)$$ **10**

für $\triangle$ W R L der Excess 4″,8 und die Bedingungsgleichung

$$0'',8 = (3) + (7) + (9)$$ **11**

und endlich, wenn als drittes unabhängiges Dreieck noch $\triangle$ N W L mit dem Excesse 4″,5 gewählt wird,

$$0'',3 = (1) - (2) + (3) + (4) + (5)$$ **12**

Die dritte Art aber beruht auf Doppeltberechnung derselben Seiten aus verschiedenen Kombinationen von Dreiecken, wie z. B. nach 6

$$t_1 = a \cdot \mathrm{Si}\,\beta : \mathrm{Si}\,\gamma \qquad \text{und} \qquad t_2 = v \cdot \mathrm{Si}\,\eta : \mathrm{Si}\,\delta = a \cdot \mathrm{Si}\,\lambda \cdot \mathrm{Si}\,\eta : (\mathrm{Si}\,\mu \cdot \mathrm{Si}\,\delta) \qquad \mathbf{13}$$

Da nun für richtige Winkel $t_1 = t_2$ sein soll, so muss somit die Gleichung

$$\mathrm{Si}\,[\beta + (3) + (4)] \cdot \mathrm{Si}\,[\delta + (6)] \cdot \mathrm{Si}\,[\mu + (8)] =$$
$$= \mathrm{Si}\,[\lambda + (4)] \cdot \mathrm{Si}\,[\gamma + (5)] \cdot \mathrm{Si}\,[\eta + (8) + (9)]$$

bestehen. Logarithmieren wir dieselbe und bedenken, dass, sobald $\triangle x$ klein ist, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\mathrm{Lsi}\,(x + \triangle x) = \mathrm{Lsi}\,x + M \cdot \mathrm{Ct}\,x \cdot \triangle x \cdot \mathrm{Si}\,1''$$

gesetzt werden kann, wo $M = 0{,}4342945$ den Modulus der gemeinen Logarithmen bezeichnet, so ergiebt sich

$$\mathrm{Lg}\,\frac{\mathrm{Si}\,\lambda \cdot \mathrm{Si}\,\gamma \cdot \mathrm{Si}\,\eta}{\mathrm{Si}\,\beta \cdot \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,\mu} = M \cdot \mathrm{Si}\,1'' \begin{bmatrix} (3) \cdot \mathrm{Ct}\,\beta + (4) \cdot (\mathrm{Ct}\,\beta - \mathrm{Ct}\,\lambda) - (5) \cdot \mathrm{Ct}\,\gamma + \\ (6) \cdot \mathrm{Ct}\,\delta + (8) \cdot (\mathrm{Ct}\,\mu - \mathrm{Ct}\,\eta) - (9) \cdot \mathrm{Ct}\,\eta \end{bmatrix}$$

oder, wenn die Werte eingesetzt und beide Seiten mit 1000000 multipliziert werden, noch die neue Bedingungsgleichung

$$98 = -3 \cdot (3) - 24 \cdot (4) - 22 \cdot (5) + 24 \cdot (6) + 29 \cdot (8) - 0 \cdot (9) \qquad \mathbf{14}$$

Die so erhaltenen fünf Bedingungsgleichungen 8, 10, 11, 12, 14 haben nun alle die Form

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + \ldots\ldots = m \qquad \mathbf{15}$$

und können daher nach den in 52 entwickelten Grundsätzen zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der x, y, z, ... benutzt werden; jedoch lässt sich die Rechnung in unserm Falle, wo die Anzahl der Unbekannten grösser als die der Bedingungsgleichungen ist, durch Benutzung eines von **Gauss** angelegten Fussweges bedeutend abkürzen: Da nämlich die x, y, z, ... Fehler sind, also $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots$ einen Minimalwert annehmen soll, so hat man

$$x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz + \ldots = 0 \qquad \mathbf{16}$$

während nach 15

$$a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz + \ldots = 0 \qquad \mathbf{17}$$

Multipliziert man nun jede der Gleichungen 17 mit einem unbestimmten Faktor k und addiert die Produkte, so erhält man mit Hilfe von 16 die Gleichung

$$\Sigma\, ak \cdot dx + \Sigma\, bk \cdot dy + \Sigma\, ck \cdot dz + \ldots = x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz + \ldots$$

welche für jeden Wert der dx, dy, dz, ... bestehen muss, also die Gleichheiten

$$x = \Sigma\, ak \qquad y = \Sigma\, bk \qquad z = \Sigma\, ck \ \ldots \qquad \mathbf{18}$$

bedingt. Substituiert man diese Werte in die 15, so erhält man ebensoviele Gleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} (a_1^2 + b_1^2 + \ldots)\,k_1 + (a_1 a_2 + b_1 b_2 + ..)\,k_2 + (a_1 a_3 + b_1 b_3 + ..)\,k_3 + \ldots = m_1 \\ (a_2 a_1 + b_2 b_1 + ..)\,k_1 + (a_2^2 + b_2^2 + \ldots)\,k_2 + (a_2 a_3 + b_2 b_3 + ..)\,k_3 + \ldots = m_2 \end{aligned}\right\} \mathbf{19}$$

etc., als Bedingungsgleichungen, oder also auch als k vorhanden sind, — kann somit aus diesen die k oder die sog. **Correlaten** von Gauss, — und sodann endlich aus den 18 die eigentlichen Unbekannten x, y, z, ... berechnen. So ergeben sich unter Benutzung des zur leichtern Übersicht aus den 8, 10, 11, 12, 14 zusammengestellten Tableaus

k	a (1)	b (2)	c (3)	d (4)	e (5)	f (6)	g (7)	h (8)	i (9)	m
1	—	—	—	—	1	1	— 1	—	—	— 1,1
2	1	—	—	1	—	—	—	1	—	0,1
3	—	—	1	—	—	—	1	—	1	0,8
4	1	— 1	1	1	1	—	—	—	—	0,3
5	—	—	— 3	— 24	— 22	24	—	19	—	98

in unserm Beispiele die den 18 entsprechenden Gleichungen

$$\begin{array}{lll} (1) = k_2 + k_4 & (2) = -k_4 & (3) = k_3 + k_4 - 3\,k_5 \\ (4) = k_2 + k_4 - 24\,k_5 & (5) = k_1 + k_4 - 22\,k_5 & (6) = k_1 + 24\,k_5 \\ (7) = -k_1 + k_3 & (8) = k_2 + 19\,k_5 & (9) = k3 \end{array} \qquad \mathbf{20}$$

und die den 19 entsprechenden Gleichungen

$$\begin{array}{rl} -1{,}1 = & 3\,k_1 - k_3 + k_4 + 2\,k_5 \\ 0{,}1 = & 3\,k_2 + 2\,k_4 - 5\,k_5 \\ -0{,}8 = & k_1 - 3\,k_3 - k_4 + 3\,k_5 \\ 0{,}3 = & k_1 + 2\,k_2 + k_3 + 5\,k_4 - 49\,k_5 \\ 98{,}0 = & 2\,k_1 - 5\,k_2 - 3\,k_3 - 49\,k_4 + 2006\,k_5 \end{array} \qquad \mathbf{21}$$

Aus letztern fünf Gleichungen erhält man aber

$$k_1 = -1{,}145 \quad k_2 = -0{,}891 \quad k_3 = -0{,}563 \quad k_4 = 1{,}601 \quad k_5 = 0{,}086$$

und damit nach 20 die Korrektionen

$$\begin{array}{c} (1) = 0'',710 \quad (2) = -1'',601 \quad (3) = 0'',780 \quad (4) = -1'',354 \quad (5) = -1'',436 \\ (6) = 0'',919 \quad (7) = 0'',582 \quad (8) = 0'',743 \quad (9) = -0'',563 \end{array} \qquad \mathbf{22}$$

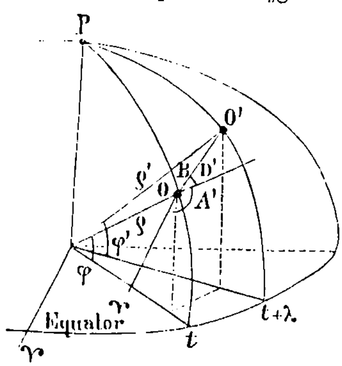
welche in der That einerseits in den richtigen Grenzen bleiben, indem noch der benutzte Mittelwert des meist gemessenen Winkels $\eta - \mu$ die Unsicherheit $\pm$ 1'',10 besitzt, und anderseits den fünf Bedingungsgleichungen vollständig genügen. Legt man nun diese Korrektionen den gemessenen Winkeln bei, so erhält man die in dem frühern Tableau den Winkeln bereits beigesetzten Sekunden, und mit Hilfe von diesen geht das bei der ersten Berechnung benutzte Schema, wenn man überdies nach dem Legendre'schen Satze (91) die Excesse auf die einzelnen Winkel verteilt, in

△ N W L			△ N W R			△ N R L		
$\alpha =$	38° 45′ 46″,4	44″,9	$\alpha + \varepsilon =$	87° 20′ 55″,8	54″,2	$\varepsilon =$	48° 35′ 9″,4	7″,8
$\beta =$	97 9 32,7	31,2	$\lambda =$	44 27 34,6	33,1	$\delta =$	41 12 30,3	28,7
$\gamma =$	44 4 45,4	43,9	$\mu =$	48 11 34,2	32,7	$\eta =$	90 12 25,2	23,5
	180 0 4,5	0,0		180 0 4,6	0,0		180 0 4,9	0,0

über. Nach den 13 ergeben sich nun mit diesen ausgeglichenen Winkeln die übereinstimmenden Werte Lg t_1 = 4,803 1112 und Lg t_2 = 4,803 1111, so dass wirklich die Ausgleichung einen nicht unerheblichen Gewinn abwirft; aber dabei ist auch der relativ grosse Zeitaufwand nicht zu übersehen, welcher nur bei sehr scharf bestimmten Winkeln gerechtfertigt ist, da man durch Ausgleichung schlechte Winkel nicht zu guten machen, sondern höchstens illusorische Resultate erhalten kann, — ferner das Faktum, dass das Schlussresultat bei beiden Rechnungsmethoden übereinstimmt, was zwar allerdings nicht immer in solchem Masse zutreffen dürfte. — Dass dieselben zwei Methoden sich auch auf grössere Dreiecksnetze ausdehnen lassen, ist wohl selbstverständlich; dagegen bleibt noch beizufügen, dass, wenn man in einem in Beziehung auf die Winkel ausgeglichenen Netze die Seiten b vorläufig in einer beliebig angenommenen Einheit berechnet hat und sodann aus einer Basis für eine dieser Seiten den Wert $B = b\,(1 + x)$ und somit (39 : 8) $M \cdot x = Lg\,B - Lg\,b$ findet, die Logarithmen aller übrigen Seiten um eben diese Grösse $M \cdot x$ vermehrt werden müssen; sind mehrere Grundlinien mit wesentlich gleicher Genauigkeit gemessen worden, so erhält man für $M \cdot x$ ebensoviele Werte und wird nun am besten thun, einfach deren Mittel zu benutzen und sich aller weitern Künsteleien zu enthalten.

430. Die seit Euler auf der sphäroidischen Erde unternommenen Rechnungen. — Der Begriff der auf dem Sphäroide an Stelle der Hauptkreise tretenden sog. **geodätischen Linien** ist schon früher (99) gegeben und eine Haupteigenschaft derselben abgeleitet worden; jedoch wäre noch gar vieles über die durch die **Euler**, **Legendre** und ihre Nachfolger in dieser Richtung unternommenen Rechnungen nachzutragen, wenn mich nicht der enge und für die Geodäsie bereits fast unverhältnismässig stark in Anspruch genommene Raum zwingen würde, hiefür zunächst auf die Speciallitteratur zu verweisen [a] und mich darauf zu beschränken, hier einige für das folgende brauchbare Beziehungen aufzustellen [b] und unter der folgenden Nummer eine für die Astronomie ganz besonders wichtige Aufgabe kurz zu behandeln.

Zu 430: *a.* Abgesehen von den bereits früher (99) erwähnten Specialarbeiten und den später (434) anzuführenden allgemeinern Werken, dürfte hier einerseits hervorzuheben sein, dass auch **Laplace** in seiner Abhandlung „De la figure d'un sphéroide très-peu différent d'une sphère et recouvert d'une couche de fluide en équilibre (Méc. cél. II 63—154)" eine Reihe von Grundformeln für die höhere Geodäsie aufstellte, — und anderseits, dass für betreffende Untersuchungen überdies die Schriften „Johann Peter Wilhelm **Stein** (Trier 1795 — ebenda 1831; franz. Ingénieur-géographe, dann Oberlehrer zu Trier), Geographische Trigonometrie. Mainz 1825 in 4., — **Grunert**, Sphäroidische Trigonometrie. Berlin 1833 in 4., — Paul **Gordan** (1837 geb.; Prof. math. Erlangen), De linea geodetica. Berolini 1862 in 4., — **Baeyer**, Über die Berechnung sphäroidischer Dreiecke und den Lauf der geodätischen Linie (A. N. 1699—1700 von 1868), — Elwin Bruno **Christoffel** (Montjoie 1829 geb.; folgeweise Prof. math. Zürich, Berlin und Strassburg), Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Berlin 1869 in 4., — G. **Fleischer**, Über die geodätischen Linien auf centralen Oberflächen 2. Ordnung. St. Gallen 1877 in 4., — P. **Haupt**, Die Ausgleichung grosser geodätischer Dreiecke (A. N. 2549—50 von 1883), — etc.", konsultiert werden können, wobei noch bemerkt werden mag, dass Haupt unter „grossen geodätischen Dreiecken" solche versteht, „deren Winkel nicht mehr unmittelbar, sondern nur noch durch Ketten von Dreiecken gemessen werden, und deren Seiten nicht mehr aus Einem Dreiecke, sondern aus einer ganzen Kette von Dreiecken hervorgehen". — *b.* Bezeichnen ϱ, φ, t und ϱ', φ', $(t+\lambda)$ die geocentrischen Coordinaten zweier Punkte O und O' der Längendifferenz λ zur Sternzeit t des ersten Punktes, und legt man durch O ein Parallelsystem, so sind die Coordinaten B D' A' von O' in Beziehung auf letzteres nach 93 : 15 durch die Gleichungen



$$\mathrm{B \cdot Co\,D' \cdot Co\,A'} = \varrho' \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(\mathrm{t} + \lambda) - \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co\,t}$$
$$\mathrm{B \cdot Co\,D' \cdot Si\,A'} = \varrho' \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(\mathrm{t} + \lambda) - \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Si\,t} \qquad \mathbf{1}$$
$$\mathrm{B \cdot Si\,D'} = \varrho' \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi$$

bestimmt, — oder bequemer, wenn man statt A' die von der Zeit unabhängige, ein Analogon des Stundenwinkels darstellende Grösse

$$\mathrm{S = t - A'} \qquad \text{so dass} \qquad \mathrm{A' = t - S} \qquad \mathbf{2}$$

einführt, ferner ϱ und ϱ' durch den der Breite $^1/_2\,(\varphi + \varphi')$ entsprechenden mittlern Radius vector ϱ ersetzt, und endlich statt 1' und 1'' die aus $1' \cdot \mathrm{Si}\,(\mathrm{t} + {^1/_2}\,\lambda) - 1'' \cdot \mathrm{Co}\,(\mathrm{t} + {^1/_2}\,\lambda)$ und $1' \cdot \mathrm{Co}\,(\mathrm{t} + {^1/_2}\,\lambda) + 1'' \cdot \mathrm{Si}\,(\mathrm{t} + {^1/_2}\,\lambda)$ resultierenden Gleichungen benutzt, durch

$$\mathrm{B \cdot Co\,D' \cdot Si}\,(\mathrm{S} + {^1/_2}\,\lambda) = -\,2\,\varrho \cdot \mathrm{Si}\,{^1/_2}\,\lambda \cdot \mathrm{Co}\,{^1/_2}\,(\varphi' + \varphi) \cdot \mathrm{Co}\,{^1/_2}\,(\varphi' - \varphi)$$
$$\mathrm{B \cdot Co\,D' \cdot Co}\,(\mathrm{S} + {^1/_2}\,\lambda) = -\,2\,\varrho \cdot \mathrm{Co}\,{^1/_2}\,\lambda \cdot \mathrm{Si}\,{^1/_2}\,(\varphi' + \varphi) \cdot \mathrm{Si}\,{^1/_2}\,(\varphi' - \varphi) \qquad \mathbf{3}$$
$$\mathrm{B \cdot Si\,D'} = \quad 2\,\varrho \cdot \mathrm{Co}\,{^1/_2}\,(\varphi' + \varphi) \cdot \mathrm{Si}\,{^1/_2}\,(\varphi' - \varphi)$$

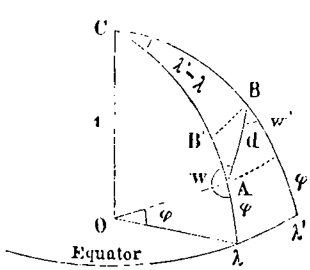
für deren Anwendung z. B. Abh. **Weiss** in 564 zu vergleichen ist.

431. Die geodätische Übertragung der Coordinaten. — Kennt man die geographischen Coordinaten φ und λ eines Punktes A, so kann man, unter Voraussetzung, dass den Erdmeridianen die Excentricität e zukomme, auch diejenigen eines von ihm unter dem Azimute w in der Bogendistanz δ befindlichen Punktes B, sowie das auf diesen letztern bezügliche Azimut des Punktes A nach den Formeln

$$\varphi' = \varphi - \delta \cdot [\mathrm{Co\,w} + {^1/_2}\,\delta \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si^2\,w \cdot Si\,1''}] \cdot (1 + \mathrm{e^2\,Co^2}\,\varphi) \qquad \mathbf{1}$$
$$\lambda' = \lambda - \delta \cdot \mathrm{Si\,w} \cdot [1 - \delta \cdot \mathrm{Co\,w \cdot Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si\,1''}] \cdot \mathrm{Se}\,\varphi \qquad \mathbf{2}$$
$$\mathrm{w' = w} - 180^0 - \delta \cdot [\mathrm{Si\,w \cdot Tg}\,\varphi - {^1/_4}\,\delta \cdot \mathrm{Si\,2\,w}\,(1 + 2\,\mathrm{Tg^2}\,\varphi)\,\mathrm{Si\,1''}] \qquad \mathbf{3}$$

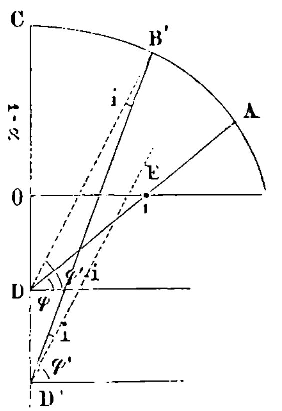
sehr angenähert berechnen [a].

Zu 431: *a.* Bezeichnet D die in mittlern Erdradien, d die in Sekunden ausgedrückte Distanz der Punkte A und B, so dass $\mathrm{D = d \cdot Si\,1''}$ ist, so erhält man (91 : 7, 9, 10)



$$\varphi' = \varphi - \mathrm{d \cdot Co\,w} - {^1/_2}\,\mathrm{d^2 \cdot Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si^2\,w \cdot Si\,1''} + .. \qquad \mathbf{4}$$
$$\lambda' = \lambda - \mathrm{d \cdot Si\,w \cdot Se}\,\varphi\,(1 - \mathrm{d \cdot Co\,w \cdot Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si\,1''}) + .. \qquad \mathbf{5}$$
$$\mathrm{w' = w} - 180^0 - \mathrm{d \cdot Si\,w \cdot Tg}\,\varphi + {}$$
$$+\,{^1/_4}\,\mathrm{d^2 \cdot Si\,2\,w}\,(1 + 2\,\mathrm{Tg^2}\,\varphi) \cdot \mathrm{Si\,1''} + .. \qquad \mathbf{6}$$

womit das Problem unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde vollständig gelöst ist. Nimmt man den Erdradius zu $859\,^1/_2$ Meilen an und ist $\mathrm{AB} = \alpha$ Meilen, so wird $\mathrm{D} = 0{,}00126 \cdot \alpha$, $\mathrm{d} = 239'',98 \cdot \alpha$ und $\mathrm{d^2 \cdot Si\,1''} = 0'',27921 \cdot \alpha^2$, so dass man für kleinere Werte von α oder für Überschlagsrechnungen in obigen Formeln schon die Glieder mit $\mathrm{d^2}$ vernachlässigen kann. — Betrachtet man aber die Erde als ein Sphäroid, dessen Meridianellipse die Excentricität e hat, und sind AD und B'D' die Conormalen in A und B', so hat man (74 : 2, 7), wenn α die Abplattung bezeichnet, i die aus der Figur hervorgehende Bedeutung hat, und



die vierten Potenzen von e vernachlässigt werden,

$$e^2 = 2\alpha, \quad AD = 1 + \alpha \cdot Si^2\varphi, \quad B'D' = 1 + \alpha\, Si^2\varphi'$$

$$AE = (1 - e^2) \cdot AD \qquad OD = AD \cdot e^2\, Si\, \varphi$$

$$OD' = B'D' \cdot e^2\, Si\, \varphi'$$

$$AD : B'D' = 1 + \alpha\, (Si^2\varphi - Si^2\varphi')$$

$$BD' : B'D' = e^2\, (Si\, \varphi' - Si\, \varphi)$$

somit aus Dreieck B'DD'

$$e^2\, (Si\, \varphi' - Si\, \varphi) = Si\, i : Co\, (\varphi' - i) =$$
$$= Tg\, i : (Co\, \varphi' + Si\, \varphi' \cdot Tg\, i)$$

oder

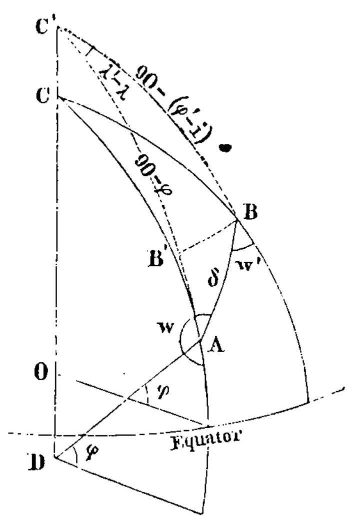
$$Tg\, i = 2\, e^2\, Si\, {}^1\!/_2\, (\varphi' - \varphi) \cdot Co\, {}^1\!/_2\, (\varphi' + \varphi) \cdot Co\, \varphi \qquad 7$$

und

$$i \fallingdotseq e^2\, (\varphi' - \varphi) \cdot Co^2\, \varphi$$

während sich überdies mit Hilfe des Vorstehenden

$$DB' = DD' \cdot Co\, \varphi' : Si\, i \fallingdotseq DA\, [1 + {}^1\!/_4\, e^2\, (\varphi' - \varphi)\, Si\, 2\varphi \cdot Si\, 1''] \quad \text{oder} \quad DB' \fallingdotseq DA$$



ergiebt. Denkt man sich nun aus D mit der Conormale $AD = 1 + \alpha \cdot Si^2\, \varphi > 1 - \alpha$ als Radius eine Kugel beschrieben, so wird diese wegen $DB = DB' \fallingdotseq DA$ auch nahe durch B gehen, der A und B verbindende grösste Kreis nach Länge und Richtung nahezu die geodätische Linie AB darstellen und den Bogenwert $\delta = d : DA = d\, (1 - \alpha\, Si^2\, \varphi)$ besitzen, endlich das durch die beiden Meridianebenen bestimmte neue Kugeldreieck AC'B mit dem frühern in Beziehung auf die Seite AC' und den Winkel bei C' ganz, in Beziehung auf die Winkel bei A und B wenigstens nahezu übereinstimmen, während allerdings nunmehr die Seite BC' in $90^0 - (\varphi' - i)$ übergeht. Man erhält somit statt 4

$$\varphi' - i = \varphi - \delta \cdot Co\, w -$$
$$- {}^1\!/_2\, \delta^2 \cdot Tg\, \varphi \cdot Si^2\, w \cdot Si\, 1'' + \ldots$$

oder mit Benutzung von 7 unsere 1, während die 5 und 6 einfach in unsere 2 und 3 übergehen. — Ich füge dieser Ableitung noch die hist.-litt. Notizen bei, dass, nachdem sich schon **Clairaut** (Mém. Par. 1733 und 1739) und **Duséjour** (Mém. Par. 1778) mit ähnlichen Problemen befasst hatten, **Legendre** in seinem bereits mehrfach erwähnten Mémoire von 1787 die oben behandelte Aufgabe in wesentlich entsprechender Weise löste, wie es durch unsere 1—3 geschieht, ohne jedoch den Detail seiner Rechnung beizufügen, — und dass sein Verfahren von den französischen Geodäten lange festgehalten wurde, während dagegen die englischen sich meistens damit begnügten, für die Azimutalübertragung die von Isaac **Dalby** in seinen „Remarks on W. Roy's account (Ph. Tr. 1790)“ gegebene, durch einfache Anwendung einer Neper'schen Analogie auf Dreieck ABC (vgl. unsere erste Figur), unter Annahme, dass $\alpha = 180^0 - (w' - w)$ sei, folgende Formel

$$Tg\, {}^1\!/_2\, \alpha = Si\, {}^1\!/_2\, (\varphi + \varphi') \cdot Se\, {}^1\!/_2\, (\varphi - \varphi') \cdot Tg\, {}^1\!/_2\, (\lambda' - \lambda) \qquad 8$$

zu benutzen, welche in der That (vgl. Anger in A. N. 212 von 1831) für Messungen von geringerer Ausdehnung überraschend gute Resultate giebt. Für weitern Detail, sowie für die in neuerer Zeit durch die **Soldner, Gauss, Schreiber,** etc., gegebenen Methoden, Formeln und Tafeln muss ich mich leider des Raumes wegen begnügen, auf die bereits gegebene und noch in 434 zu vervollständigende Fachlitteratur, wie namentlich auf die umfangreichen Werke von **Puissant, Helmert, Jordan,** etc., zu verweisen.

432. Die Bestimmungen der Länge des Sekundenpendels und der Satz von Clairaut. — Nachdem schon **Picard** in Verbindung mit seiner Gradmessung (418) die Pendellänge gemessen und die betreffende Ermittlung von **Richer** in dem Streite über die Gestalt der Erde eine hervorragende Rolle gespielt hatte, wurde die Messung der Länge l des Sekundenpendels, oder der mit ihr (nach 120 : 3) durch

$$g = l \cdot \pi^2 \qquad \mathbf{1}$$

zusammenhängenden Beschleunigung g der Schwere, auch auf die Programme der Arbeiten in Peru und Lappland gesetzt [a], und ist seit dieser Zeit an den verschiedensten Punkten der Erde, bald als Kontrole anderer Ergebnisse, bald um ihrer selbst willen, ausgeführt worden [b]. — Für die später zu diesem Zwecke benutzten Apparate und Verfahren auf das (121) bereits Gesagte verweisend, bleibt hier zu erwähnen, dass, wenn g_φ und l_φ Schwere und Pendellänge unter der Breite φ, g_0 und l_0 aber dieselben Grössen am Equator bezeichnen und e die Excentricität der Meridianellipse ist, die Beziehung

$$g_\varphi : g_0 = 1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi = l_\varphi : l_0 \qquad \mathbf{2}$$

besteht [c], und sich aus zahlreichen Messungen die Formeln

$$\begin{aligned} g_\varphi &= 9^m{,}781027 + 0^m{,}0500547 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi \\ l_\varphi &= 0^m{,}991026 + 0^m{,}0050719 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi \end{aligned} \qquad \mathbf{3}$$

ergeben haben [d], — sowie dass **Clairaut** durch den nach ihm benannten Satz, es sei, wie auch die Lagerung der Schichten im Innern der Erde beschaffen sein möge, **die Summe der Abplattung und der Zunahme der Schwere vom Equator bis zu den Polen dritthalb mal so gross als die Fliehkraft unter dem Equator** [e], die Möglichkeit verschaffte, die aus Gradmessungen abgeleitete Abplattung durch Pendelmessungen zu kontrolieren [f]. Für einige verwandte Untersuchungen muss auf die Speciallitteratur verwiesen werden [g].

Zu 432: *a.* In Peru benutzte **Bouguer** (vgl. seine Abhandlung „Sur la longueur du pendule dans la zone torride" in Mém. Par. 1736) bei der Messung, welche er auf dem etwa 2435ᵗ hohen Pichincha ausführte, als Pendel einen Doppelkonus von Kupfer, der an einem in eine Pincette eingeklemmten „fil de pitte (Manillahanf)" aufgehängt war, und konnte somit die 36″ 7‴,015, welche er durch Vermehrung der Fadenlänge um die halbe Axe seines Doppelkonus erhielt, als Länge desselben betrachten. Er liess dasselbe, unter Beobachtung der Coincidenzen, vor seiner astronomischen Pendeluhr, welche in einem Tage gegen mittlere Zeit um 306^s retardierte, schwingen, und fand dabei, dass es in $1^h\ 49\frac{1}{2}^m = 6570^s$ Uhrzeit volle 21 Schwingungen mehr mache als das Uhrpendel. Bezeichnet daher x oder y die Anzahl der Schwingungen, welche Bouguers Hilfspendel der Länge l oder ein wirkliches Sekundenpendel L in 86400 Uhrsekunden machen würde, so verhält sich

$$x : 86400 = (6570 + 21) : 6570 \qquad \text{so dass} \qquad x = 86675$$
$$y : 86400 = 86400 : (86400 - 306) \qquad\qquad y = 86707$$

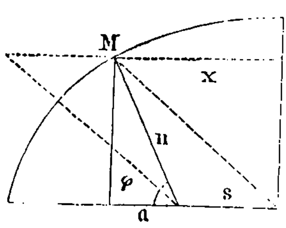
und man erhält somit, da sich (119) an demselben Orte die Pendellängen wie die Quadrate der Schwingungszeiten oder umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen in derselben Zeit verhalten,

$$l : L = y^2 : x^2 \qquad \text{oder} \qquad L = l \cdot x^2 : y^2 = 36''\ 6''',695 \qquad \mathbf{4}$$

d. h. beinahe 2''' weniger als die 36'' 8''',58, welche **Bouguer** dem Sekundenpendel in Paris gab. Er fügte noch bei: „La force de la pesanteur était non seulement plus faible dans ce poste, parceque nous étions presque sur l'Equateur; mais encore parceque nous étions à une très grande hauteur au-dessus de la surface de la terre; deux causes considérables de ralentissement dans les oscillations, et qui devaient rendre le pendule à secondes le plus court qu'il ne sera jamais possible de l'observer". — Für den Detail der 1736 in Lappland, namentlich durch **Outhier** und **Camus**, gemachten, aber zu keinen sichern Resultaten führenden Versuche in Bestimmung von L mag es genügen, auf die in 422 erwähnten Schriften zu verweisen. — ***b.*** Für die Bestimmungen von **Lacaille** verweise ich auf den ausführlichen Bericht, welcher Delambre's Geschichte (VI 477 u. f.) einverleibt ist, — für seitherige Arbeiten ausser bereits angeführtem auf „**Boscovich,** De determinatione longitudinis penduli oscillantis ad singula secunda temporis medii (Opera V), — Friedrich **Mallet** (Stockholm 1728 — Upsala 1797; Prof. math. Upsala), Nogaste uträkning pa jordens rätta figur, genom pendel-försöks jemförelser (Acad. Stockh. 1767; deutsch von Kästner), — H. **Kater,** Experiments for determining the length of the pendulum in the latitude of London. London 1818 in 4., — E. **Sabine,** Account of experiments to determine the figure of the Earth, by means of the pendulum. London 1825 in 4., — etc." — ***c.*** Aus der für das mathematische Pendel (nach 120) bestehenden Annäherungsformel $t = \pi \cdot \sqrt{l : g}$ folgt, dass die Länge des Sekundenpendels unter der Breite φ

$$l_\varphi = g_\varphi : \pi^2 \qquad \mathbf{5}$$

ist, wo g_φ die nach der Normale wirkende Resultierende aus der Anziehung nach dem Mittelpunkte und der durch die Rotation der Erde erzeugten Centrifugalkraft f_φ ist, so dass man offenbar



$$g_\varphi : f_\varphi = n : s \qquad \mathbf{6}$$

setzen kann. Nun ist (111), wenn T die Rotationszeit der Erde bezeichnet,

$$f_\varphi = 4\pi^2 \cdot x : T^2 \qquad f_0 = 4\pi^2 \cdot a : T^2 \qquad \mathbf{7}$$

und (74), wenn e das Verhältnis der Excentricität und $p = a(1 - e^2)$ der Parameter ist,

$$s = e^2 \cdot x \qquad \text{und} \qquad n = p : \sqrt{1 - e^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi} = p\,(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi) \qquad \mathbf{8}$$

also hat man nach 6

$$g_\varphi = \frac{4\pi^2 p}{e^2 \cdot T^2 \cdot \sqrt{1 - e^2 \operatorname{Si}^2 \varphi}} \risingdotseq \frac{4\pi^2 p}{e^2 \cdot T^2} (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi) \qquad \mathbf{9}$$

woraus

$$g_{90} : g_0 = a : b \qquad g_\varphi = g_0 (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi) \qquad l_\varphi = l_0 (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi) \qquad \mathbf{10}$$

folgen. — *d.* Setzt man in 10 nach **Sabine** für Spitzbergen ($\varphi = 79^0\,49'\,58''$) $l_\varphi = 39'',21460 \cdot E.$ und für St. Thomas ($\varphi = 0^0\,24'\,41''$) $l_\varphi = 39'',02074 \cdot E.$ ein, so erhält man in englischen Zollen

$$l_\varphi = 39'',0234 + 0'',2001 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi \qquad \text{und} \qquad g_\varphi = 385'',1450 + 1'',9750 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi$$

während **Pouillet** (vgl. das seiner Physik beigegebene „Tableau des observations du pendule“) aus 87 Messungen unsere 3 ableitete. — *e.* Der nach **Clairaut** benannte Satz, der sich, wenn $\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} \risingdotseq \tfrac{1}{2} e^2$ die Abplattung bezeichnet, durch

$$\alpha + (g_{90} - g_0) : g_0 = \tfrac{5}{2} \cdot f_0 : g_0 \qquad \mathbf{11}$$

oder auch, da nach 10, 7, 5 die Näherungswerte

$$\frac{g_{90} - g_0}{g_0} = \frac{a}{b} - 1 = (1 - e^2)^{-1/2} - 1 \risingdotseq \tfrac{1}{2} e^2 \qquad \frac{f_0}{g_0} = \frac{4a}{l_0 \cdot T^2}$$

bestehen, durch

$$\alpha = \tfrac{5}{2} q - \tfrac{1}{2} e^2 \qquad \text{wo} \qquad q = 4a : (l_0 \cdot T^2) \qquad \mathbf{12}$$

geben lässt, wurde von ihm bereits in seiner „Inquiry concerning the figure of such planets as revolve about an axis, supposing the density continually to vary from the centre towards the surface (Phil. Trans. 1738)“ und dann noch erweitert in seiner klassischen „Théorie de la figure de la terre. Paris 1743 in 8. (2 éd. 1808)“ ausgesprochen und erwiesen. Seither wurde er vielfach behandelt, so z. B. in „**Legendre**, Recherches sur la figure des planètes (Mém. Par. 1789)“, von **Laplace** in Bd. 2 der „Mécanique céleste“, von Ed. **Schmidt** in seinem 428 citierten Werke, von Adolf **Frölich** in seiner Dissertation „Beweis des Theorems von Clairaut, betreffend die Abplattung der Erde. Jena 1872 in 4.“, von **Helmert** im 2. Bde. seiner „Höhern Geodäsie“, in „A. **Giesen**, Über eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten vorkommen (Z. f. M. u. Ph. 21 von 1876)“, etc., ja lässt sich für ein homogenes Ellipsoid zur Not schon aus 282 : 17 ableiten. Er bedingt, dass $q \risingdotseq \tfrac{2}{5} e^2$ oder, wenn entsprechend der in 419 nach **Newton** geführten Rechnung $e^2 \risingdotseq \tfrac{1}{115}$ gesetzt wird, $q \risingdotseq \tfrac{2}{577}$, was in der That mit dem daselbst für ein analoges Verhältnis erhaltenen Werte $\tfrac{2}{578}$ so nahe übereinstimmt, dass man versucht sein könnte, den Clairaut'schen Satz schon bei seinem grossen Vorgänger finden zu wollen. — *f.* Führt man den aus 12 folgenden Wert von $\tfrac{1}{2} e^2$ in 10''' ein, so erhält man die von **Faye** in seinem „Cours d'astronomie (I 204)“ für Bestimmung der Abplattung aus Pendelmessungen gewählte Beziehung

$$l_\varphi = l_0 + l_0 \cdot (\tfrac{5}{2} q - \alpha) \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi \qquad \mathbf{13}$$

und setzt man in derselben mit ihm

$$l_0 = 991^{mm} + x \qquad l_0 \cdot (\tfrac{5}{2} q - \alpha) = y \qquad \mathbf{14}$$

so korrespondieren folgende 9 Messungsergebnisse und Bedingungsgleichungen:

Ort	φ	$l\varphi$	$l_\varphi - 991 = x + y \cdot Si^2\,\varphi$	Δl
	° ′	mm		
Spitzbergen . .	79 50	996,13	5,13 = x + 0,969 · y	— 0,02
Petersburg . .	59 57	4,97	3,97 . . . 749	— 0,01
New-York . . .	40 43	3,24	2,24 . . . 426	0,04
Jamaika . . .	17 56	1,56	0,56 . . . 095	0,00
Insel St. Thomas	0 25	1,19	0,19 . . . 000	— 0,12
Rio Janeiro . .	— 22 55	1,77	0,77 . . . 152	0,09
Montevideo . .	— 34 54	2,70	1,70 . . . 327	0,07
Cap Horn . . .	— 55 51	4,62	3,62 . . . 685	0,01
New-Shetland .	— 62 56	5,23	4,23 . . . 793	— 0,04

Aus den letztern ergeben sich aber die Normalgleichungen

$$22{,}41 = 9\,x + 4{,}196\,y \qquad 15{,}45 = 4{,}196\,x + 2{,}917\,y$$

und aus diesen folgen

$$x = 0^{mm}{,}066 \qquad y = 5^{mm}{,}200 \quad \text{d. h.} \quad l_0 = 991^{mm}{,}066 \qquad l_{90} = 996^{mm}{,}266$$

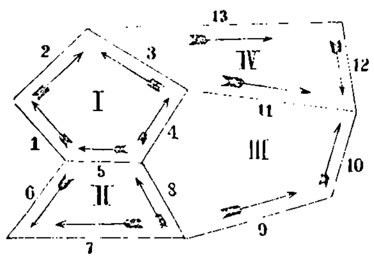
Mit **Faye** den in 429 erhaltenen Newton'schen Wert $q = {}^1/_{289}$ einführend, worin allerdings ein mit Recht gerügter wunder Punkt dieser Methode liegt, hat man somit nach 14″

$$991{,}066\,({}^5/_2 \cdot {}^1/_{289} - \alpha) = 5{,}200 \quad \text{d. h.} \quad \alpha = {}^1/_{294}$$

während die 9 Gleichungen $\Delta l = 991 + x + y \cdot Si^2\,\varphi - l_\varphi$ die bereits in die Tafel eingetragenen Werte ergeben, aus welchen man, da auf 9 Bestimmungen 2 Unbekannte kommen, den mittlern Fehler $E = \sqrt{(\Sigma \Delta l^2) : 7} = \pm\, 0^{mm}{,}067$ findet. — *g.* Anhangsweise ist noch mitzuteilen, dass Bernhard **Wüllerstorf** (Triest 1816 — Botzen 1883; 1836 7 mein Mitschüler bei Littrow, 1857/9 Chef der Weltumseglung der Novara, später Contreadmiral und Handelsminister) 1869 der Wiener Akademie eine Abhandlung „Zur wissenschaftlichen Verwerthung des Aneroides. Wien 1871 in 4." vorlegte, in welcher er nachwies, dass ein unter einer bestimmten Breite mit einem Barometer ausgeglichenes Aneroid unter einer andern Breite einen Unterschied erzeigt, welcher sich zu dem Barometerstande nahe so verhält wie die Differenz der Schwere unter diesen Breiten zu der Schwere unter der ersten Breite. Die Zunahme der Schwere vom Equator nach dem Pole mit F bezeichnend und die Schwere unter dem Equator als Einheit wählend, fand er unter dieser Annahme aus 248 Beobachtungen im atlantischen Oceane F = 0,005161 und aus 161 Beobachtungen im indischen Oceane F = 0,005133, während unsere obigen Bestimmungen $F = (g_{90} - g_0) : g_0 = (l_{90} - l_0) : l_0 = y : l_0 = 0{,}005247$ ergeben und **Airy** ebenfalls aus Pendelbeobachtungen noch übereinstimmender F = 0,005133 erhielt.

433. Die sog. Präcisions-Nivellements. — Die neuere Zeit hat mehr und mehr erkannt, dass eine genauere Untersuchung der Erdgestalt auch die Höhenlage der astronomisch bestimmten und trigonometrisch mit einander verbundenen Punkte berücksichtigen muss, und dass diese am besten durch eigentliche Nivellements (322) ermittelt wird, welche von diesen Punkten bis an das Meer fortgeführt werden [a]. Es sind denn auch bereits in vielen Staaten zu diesem Zwecke mit der durch ihn bedingten grossen Sorgfalt ausgeführte und in ihrer Anlage alle wünschbaren Kontrolen enthaltende Nivellements angeordnet und grossenteils beendigt worden [b], so dass fast nur noch eine endgiltige Vereinbarung über den zu wählenden Nullpunkt aussteht, um mit grosser Zuverlässigkeit die erforderlichen absoluten Höhen aller Punkte über dem Meere zu besitzen [c].

Zu 433: *a.* Schon 1864 fasste die damalige „mitteleuropäische“ Gradmessungs-Konferenz (vgl. 434) den Beschluss: „Das Höhennetz jedes Landes ist auf einen einzigen, solid versicherten Nullpunkt zu beziehen. Alle diese Nullpunkte sollen durch Nivellements erster Ordnung miteinander verbunden werden. Die mittlern Höhen der verschiedenen Meere sollen in einer möglichst grossen Anzahl von Häfen und wo es angeht mittelst registrierender Apparate, sog. **Marcographen**, bestimmt werden; die Nullpunkte dieser **Pegel** (Wasserstands-Zeiger) sind in das Höhennetz erster Ordnung einzubeziehen. Je nach dem Resultate dieser Messungen wird später der für ganz Europa giltige Nullpunkt der absoluten Höhen bestimmt werden“. — *b.* Hat man in mehreren zusammenhängenden Polygonen (wie z. B. in I—IV) alle Strecken (wie hier 1—13, wo die Pfeile je nach dem höhern Punkte gerichtet sind) nivelliert, und bezeichnet man den Schlussfehler jedes Polygones mit $\triangle$ und dessen Nummer, den Fehler jeder Strecke aber mit δ und deren Nummer, so bestehen offenbar die Gleichheiten



$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 + \delta_5 &= \triangle_{\mathrm{I}} \\ \delta_5 + \delta_6 - \delta_7 + \delta_8 &= \triangle_{\mathrm{II}} \\ \delta_9 + \delta_{10} - \delta_{11} - \delta_4 - \delta_8 &= \triangle_{\mathrm{III}} \\ \delta_4 + \delta_{13} + \delta_{12} - \delta_{11} &= \triangle_{\mathrm{IV}} \end{aligned}$$

aus welchen man in entsprechender Weise, wie es (429) für die Winkelfehler eines Netzes gehalten wurde, die δ bestimmen kann. — *c.* Über den Fortgang der betreffenden Arbeiten und Besprechungen kann man sich am besten aus den seit 1863 regelmässig erschienenen Verhandlungen und Generalberichten der internationalen Gradmessungs-Kommission belehren.

434. Das sog. Geoid und die internationale Erdmessung. — Schon **Bessel** erkannte, dass das von ihm (428) berechnete und seinen Namen tragende Erdellipsoid nicht die eigentliche mathematische, auf allen Schwererichtungen senkrecht stehende Erdform, das sog. **Geoid,** sondern nur eine sich diesem letztern möglichst anschliessende regelmässige Fläche ist [a], und es hat sich denn auch die Geodäsie seither zur Hauptaufgabe gemacht, die Abweichungen des Geoids von jenem Ellipsoide zu ermitteln [b], ja es ist 1862 durch **Baeyer** wesentlich zu diesem Zwecke eine Vereinigung gegründet worden, welche sich aus bescheidenen Anfängen nach und nach zu einer internationalen aufgeschwungen hat und wohl nicht ruhen wird, bis jene Aufgabe gelöst ist [c].

Zu 434: *a.* **Bessel** definierte in seiner Schrift von 1838 (vgl. 427) die bei astronomisch-geodätischen Arbeiten in Betracht kommende Figur der Erde als „diejenige Fläche, in welcher sich die Oberfläche des Wassers eines mit dem Meere zusammenhängenden, die Erde bedeckenden Netzes von Kanälen befinden würde“, — sagte wohl auch, dass sich sein Ellipsoid zur wirklichen Gestalt der Erde „wie der ruhige Spiegel eines Sees zu dessen schwach bewegter Oberfläche“ verhalte. — Den Namen **Geoid** soll zuerst **Listing** in seiner Abhandlung von 1873 (vgl. c) vorgeschlagen haben. — *b.* Ich beschränke mich darauf, anzuführen, dass sich namentlich auch Ph. **Fischer** und J. H. **Pratt** (vgl. ihre Schriften in c) grosse Verdienste um diese neuere Entwicklung der Geodäsie erwarben, und verweise im übrigen auf die unten (am Schlusse von c) noch zu vervollständigende Fachlitteratur. — *c.* Schon im März 1833 sagte **Bessel** (vgl. pag. 59 seiner „Vorlesungen“): „Während man früher glaubte durch Vermehrung der Genauigkeit der Messung kleinerer Bögen alles Erforderliche leisten zu können, hat man jetzt erkannt, dass man nur von weit ausgedehnten Unternehmungen erheblichen Nutzen ziehen kann, — von so weit ausgedehnten, dass die Unregelmässigkeiten der Figur gegen die Grösse der Erdfläche, welche von der Messung bedeckt wird, verschwinden. **Dieses erfordert weniger neue Gradmessungen als eine Verbindung der schon vorhandenen untereinander.** Es fehlt nur noch wenig und man wird Messungen besitzen, welche, ohne Unterbrechung, von den Balearischen Inseln bis nach Lappland, und von dem nördlichen Teile von Schottland bis nach Dalmatien gehen“. In weiterer Ausführung dieses Gedankens wurde sodann einige Decennien später durch Bessels langjährigen Mitarbeiter **Baeyer** verschiedenen Staaten 1861 ein „Entwurf zu einer mittel-europäischen Gradmessung“ unterbreitet, und dieser wurde so beifällig aufgenommen, dass nicht nur alsbald die gewünschten Ergänzungsarbeiten angeordnet wurden und für deren einheitliche Durchführung Abgeordnete der sämtlichen Länder zu einer internationalen Kommission zusammentraten, sondern sogar der ursprüngliche Plan noch bedeutend ausgedehnt werden konnte: Abgesehen davon, dass durch den Beitritt anderer Länder die „mitteleuropäische“ schon 1867 in eine „europäische“ und 1886 sogar in eine „internationale Erdmessung“ überging, sind zu der anfänglich in Aussicht genommenen Aufgabe, eine Kette von Punkten zu erhalten, welche sowohl astronomisch durch Länge und Breite gut bekannt, als geodätisch durch Polarcoordinaten sicher aufeinander bezogen seien, noch Pendelmessungen (432) und Nivellements (433) hinzugekommen, während überdies durch Gründung eines „Bureau international des poids et mesures“ die nötigen Garantien geboten wurden, dass die in den verschiedenen Ländern angewandten Längeneinheiten miteinander übereinstimmen. Es unterliegt gegenwärtig wohl keinem Zweifel mehr, dass die erst von **Baeyer** und seit seinem Tode von **Ibannez** mit ebensoviel Liebe als Einsicht geleitete Arbeit binnen kurzem die wichtigsten Aufschlüsse geben und für den Erstgenannten das schönste Denkmal bilden wird. — Zum Schlusse führe ich zur Ergänzung der geodätischen Litteratur noch folgende Schriften auf: „Louis **Puissant** (La Ferme in Seine-et-Marne 1769 — Paris 1843; Prof. geod. und Akad. Paris; vgl. „Eloge“ durch Elie de Beaumont 1870), Traité de géodésie. Paris 1805 in 4. (3 éd. 1842 in 2 Vol.), — **Francoeur**, Géodésie. Paris 1835 in 8. (6 éd. 1878), — Alexei Pawlowitch **Bolotof** (Russland 1803 — Frankreich 1853; Cursus der Geodäsie. Petersburg 1836—37, 2 Bde. in 8. (russisch; 2. A. 1845—49), — **Gauss**, Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Göttingen 1844—47 in 4., — Philipp **Fischer** (Darmstadt

1818 — ebenda 1887; Prof. math. Darmstadt), Lehrbuch der höhern Geodäsie. Darmstadt 1845—46, 2 Bde. in 8., und: Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868 in 8., — George Gabriel **Stokes** (Skreen in Irland 1819 geb.; Prof. math. Cambridge), On the variation of gravity at the surface of the earth (Trans. Cambr. 1849; vgl. auch spätere Abh.), — J. H. **Pratt**, A treatise on attractions, Laplace's functions and the figure of the earth. London 1860 in 8. (4. ed. 1871), — **Baeyer**, Denkschrift über die Grösse und Figur der Erde. Berlin 1861 in 8., und: Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Centralbureaus der europäischen Gradmessung (als Manuskript gedruckt), 3 Hefte in 4., — R. **Wolf**, Über die Bedeutung der sog. mittel-europäischen Gradmessung für die Kenntnis der Erde im Allgemeinen und für die Schweiz ins Besondere. Zürich 1862 in 8., — **Hansen**, Geodätische Untersuchungen. Leipzig 1865 in 8., — Carl Christopher Georg **Andrae** (Hjertebjerg auf Alphen 1812 geb.; Geh. Konferenzrat in Kopenhagen), Den Danske Gradmaaling. Kjöbenhavn 1867—84 in 4., und: Problèmes de la haute géodésie. Copenhague 1881—83, 3 Cah. in 4., — **Bremiker**, Studien über höhere Geodäsie. Berlin 1869 in 8., — **Listing**, Über unsere jetzige Kenntnis der Grösse und Gestalt der Erde (Gött. Nachr. 1873), — Aimé **Laussedat** (Moulins in Allier 1819 geb.; Oberst und Dir. Cons. des arts et métiers Paris), Sur l'emploi des signaux lumineux dans les opérations géodésiques (Compt. rend. 1874), — Anton **Kautzner** (Aussee in Steiermark 1838 geb.; Prof. math. Graz), Über Geschichte und Bedeutung alter und neuer Gradmessungen. Graz 1876 in 8., — W. **Jordan**, Handbuch der Vermessungskunde. Stuttgart 1877—78, 2 Bde. in 8. (2. A. 1888), — Georg Carl Christian **Zachariae** (Kopenhagen 1835 geb.; Oberst und Dir. Gradmessung in Aarhus), Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten. Deutsche Ausgabe von E. Lamp. Berlin 1878 in 8., — Heinrich **Bruns** (Berlin 1848 geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Leipzig), Die Figur der Erde. Berlin 1878 in 4., — **Helmert**, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höhern Geodäsie. Leipzig 1880—84, 2 Bde. in 8., — **Bauernfeind**, Das bayerische Präcisionsnivellement und seine Beziehungen zur europäischen Gradmessung. München 1880 in 8., — A. R. **Clarke**, Geodesy. Oxford 1880 in 8., — Enrico **Pucci**, Fondamenti di Geodesia. Milano 1883—87, 2 Vol. in 8., — Ignaz **Bischoff**, Über das Geoid. München 1889 in 8. (Vgl. A. N. 2844 von 1888), — Otto **Börsch** (Marburg 1817 — Berlin 1890; Sektionschef im k. preuss. geod. Inst.), Geodätische Literatur. Berlin 1889 in 4., — J. Howard **Gore**, A Bibliography of Geodesy. Washington 1889 in 4., — René **Benoit** (Montpellier 1844 geb.; Dir. Bur. internat. des poids et mes. Paris), Rapport sur la construction, les comparaisons et les autres opérations ayant servi à déterminer les équations des nouveaux prototypes métriques. Paris 1889 in 4., — Friedrich **Ris** (Bern 1841 geb.; Gymnasiall. und Dir. eidg. Eichstätte Bern), Zur Geschichte des internat. Mass- und Gewichtbüreaus und der neuen Prototype des Meters und des Kilogramms. Bern 1890 in 8., — Willy **Hergesell**, Über die Formel von G. G. Stokes zur Berechnung regionaler Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid. Strassburg 1891 in 4., — etc.".

XVII. Einfluss und Bestimmung von Parallaxe und Refraktion.

Il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout, que de savoir tout d'une chose.

(Pascal.)

435. Einfluss der Parallaxe auf die Coordinaten. — Aus dem schon früher (231) gegebenen Begriffe der täglichen Parallaxe eines Gestirnes lässt sich ihr Einfluss auf die Coordinaten desselben mit Hilfe der allgemeinen Formeln für die Transformation von Polarcoordinaten (93 : 15) auf ein Parallelsystem sehr leicht bestimmen [a]. So erhält man z. B., wenn a, d, R, r und a', d', R', r' wahre und scheinbare Rektascension, Deklination, Distanz und Radius des Gestirnes, ϱ, φ', t aber die geocentrischen Coordinaten des Beobachters bezeichnen, und π die Parallaxe des Gestirnes ist, die bequemen Näherungsformeln

$$a' - a = A \cdot \mathrm{Si}\,(a - t) \cdot \mathrm{Se}\,d \qquad d' - d = D \cdot \mathrm{Si}\,(d - n) \cdot \mathrm{Cs}\,n$$
$$R' - R = -\varrho \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \qquad r' - r = r \cdot \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad \mathbf{1}$$

wo die Hilfsgrössen A, D, n, Co γ nach

$$A = \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \qquad \mathrm{Tg}\,n = \mathrm{Tg}\,\varphi' \cdot \mathrm{Se}\,(a - t)$$
$$D = \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' \qquad \mathrm{Co}\,\gamma = \mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' + \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(a - t) \qquad \mathbf{2}$$

zu berechnen sind [b]. — Für weitern Detail vgl. die Speciallitteratur [c].

Zu 435: *a.* Ersetzt man nämlich in 93 : 15 die Willkürliche n durch w, R durch die in der Einheit des Equatorradius gegebene Distanz ϱ des Beobachters vom Erdcentrum, r (nach 231) durch $^1/\mathrm{Si}\,\pi$, und bezeichnet mit $\triangle$ das Verhältnis der Distanzen des Gestirnes von Oberfläche und Centrum, so erhält man die Beziehungen

$$\triangle \cdot \mathrm{Co}\,v' \cdot \mathrm{Co}\,(w' - w) = \mathrm{Co}\,v - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Co}\,(w - W)$$
$$\triangle \cdot \mathrm{Co}\,v' \cdot \mathrm{Si}\,(w' - w) = \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Si}\,(w - W) \qquad \mathbf{3}$$
$$\triangle \cdot \mathrm{Si}\,v' = \mathrm{Si}\,v - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Si}\,V$$

welche das Problem vollständig lösen, aber sich allerdings für die Anwendung in folgender Weise noch bequemer arrangieren lassen: Zunächst erhält man aus den zwei ersten 3

$$\mathrm{Tg}\,(w' - w) = \frac{\varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Si}\,(w - W)}{\mathrm{Co}\,v - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Co}\,(w - W)} \qquad \mathbf{4}$$

woraus sich (40 : 23, 24) sofort die Reihe

$$w' = w + \frac{\varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,V}{\mathrm{Co}\,v \cdot \mathrm{Si}\,1''} \cdot \mathrm{Si}\,(w - W) + \frac{\varrho^2\,\mathrm{Si}^2\,\pi \cdot \mathrm{Co}^2\,V}{2 \cdot \mathrm{Co}^2\,v \cdot \mathrm{Si}\,1''} \cdot \mathrm{Si}^2\,(w - W) + \ldots \qquad \mathbf{5}$$

ergiebt, von welcher in der Regel nur das erste Korrektionsglied zu berücksichtigen ist. Da ferner $\mathrm{Co}\,x = 1 - 2\,\mathrm{Si}^2\,{}^1/_2\,x$, so erhält man aus der ersten 3 mit Hilfe der zweiten

$$\begin{aligned}\triangle \cdot \mathrm{Co}\,v' &= \mathrm{Co}\,v - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Co}\,(w - W) + 2\,\triangle\,\mathrm{Co}\,v' \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1/_2\,(w' - w) = \\ &= \mathrm{Co}\,v - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Co}\,[{}^1/_2\,(w' + w) - W] \cdot \mathrm{Se}\,{}^1/_2\,(w' - w)\end{aligned}$$

Setzt man nun

$$m \cdot \mathrm{Si}\,n = \mathrm{Si}\,V \qquad m \cdot \mathrm{Co}\,n = \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Co}\,[{}^1/_2\,(w' + w) - W] \cdot \mathrm{Se}\,{}^1/_2\,(w' - w) \qquad \mathbf{6}$$

so geht diese letztere Beziehung und die dritte 3 in

$$\triangle \cdot \mathrm{Co}\,v' = \mathrm{Co}\,v - \varrho \cdot m \cdot \mathrm{Co}\,n \cdot \mathrm{Si}\,\pi \quad \mathbf{7} \qquad \triangle \cdot \mathrm{Si}\,v' = \mathrm{Si}\,v - \varrho \cdot m \cdot \mathrm{Si}\,n \cdot \mathrm{Si}\,\pi \quad \mathbf{8}$$

über und hieraus folgt, wenn man $8 \cdot \mathrm{Co}\,v - 7 \cdot \mathrm{Si}\,v$ durch $8 \cdot \mathrm{Si}\,v + 7 \cdot \mathrm{Co}\,v$ dividiert,

$$\mathrm{Tg}\,(v' - v) = \frac{\varrho \cdot m \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Si}\,(v - n)}{1 - \varrho \cdot m \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,(v - n)} \qquad \mathbf{9}$$

woraus sich entsprechend wie oben die Reihe

$$v' = v + \frac{\varrho \cdot m \cdot \mathrm{Si}\,\pi}{\mathrm{Si}\,1''} \cdot \mathrm{Si}\,(v - n) + \frac{\varrho^2 \cdot m^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\pi}{2 \cdot \mathrm{Si}\,1''} \cdot \mathrm{Si}\,2\,(v - n) + \ldots \qquad \mathbf{10}$$

ergiebt. Endlich erhält man aus $8 \cdot \mathrm{Co}\,n - 7 \cdot \mathrm{Si}\,n$

$$\triangle \cdot \mathrm{Si}\,(v' - n) = \mathrm{Si}\,(v - n) \quad \mathbf{11} \quad \text{und somit} \quad r' : r = 1 : \triangle = \mathrm{Si}\,(v' - n) : \mathrm{Si}\,(v - n) \quad \mathbf{12}$$

Um diese Formeln auf die gewöhnlichen drei Coordinatensysteme anzuwenden, hat man einfach

die Grössen . . .	w	v	w'	v'	W	V
für den Horizont mit	w	$90^0 - z$	w'	$90^0 - z'$	0	$90^0 - \triangle\varphi$
- den Equator -	— a	d	— a'	d'	— t	φ'
- die Ekliptik -	— l	b	— l'	b'	— L	B

zu vertauschen, wo φ' und t geocentrische Breite und Sternzeit, B und L aber ihre nach 197 vom Equator auf die Ekliptik transformierten Werte bezeichnen, und endlich $\triangle\varphi$ der Überschuss der geographischen über die geocentrische Breite ist. — *b.* Nach oben erhält man z. B. für den Equator aus 5, 6 und 10, wenn man $\mathrm{Si}\,\pi$ durch $\pi \cdot \mathrm{Si}\,1''$ ersetzt und die spätern Glieder vernachlässigt,

$$a' = a + \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot \mathrm{Si}\,(a - t) \qquad d' = d + \varrho \cdot m \cdot \pi \cdot \mathrm{Si}\,(d - n) \qquad \mathbf{13}$$

wo $m \cdot \mathrm{Si}\,n = \mathrm{Si}\,\varphi' \qquad m \cdot \mathrm{Co}\,n = \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,[{}^1/_2\,(a' + a) - t] \cdot \mathrm{Se}\,{}^1/_2\,(a' - a)$ **14**

Ferner ergiebt sich, wenn man die drei 3 quadriert und addiert

$$\triangle^2 = 1 + \varrho^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\pi - 2\,\varrho\,\mathrm{Si}\,\pi\,\mathrm{Co}\,\gamma \quad \text{wo} \quad \mathrm{Co}\,\gamma = \mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' + \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(a - t) \quad \mathbf{15}$$

woraus $\triangle \risingdotseq 1 - \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 1 : \triangle \risingdotseq 1 + \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \cdot \mathrm{Si}\,1''$ **16**

folgt. Mit Hilfe des letztern Wertes erhält man aber nach 12

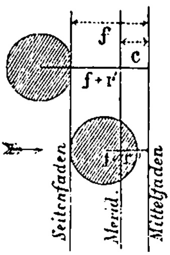
$$r' \risingdotseq r\,(1 + \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \cdot \mathrm{Si}\,1'') \qquad \mathbf{17}$$

und mit Hilfe des erstern Wertes

$$R' - R = (\triangle - 1) \cdot R = (\triangle - 1) : \pi \cdot \mathrm{Si}\,1'' = -\,\varrho \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \qquad \mathbf{18}$$

Mit 13, 14, 17, 18 stimmen aber die 1 und 2 vollständig überein, sobald man sich noch die Annäherung erlaubt, in 14 für ${}^1/_2\,(a' + a)$ einfach a einzuführen. —

c. Die Formeln 13 und 17 gab schon **Lagrange** in seinem „Mémoire sur le passage de Vénus du 3 juin 1769 (Mém. Berl. 1766)", während sie erst **Oppolzer** in seinem „Lehrbuch der Bahnbestimmung (2. A. I 35)" auf die, wenn einmal für einen bestimmten Ort $\mathrm{Lg}\,(\varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi')$ und mit einem Argumente x eine Tafel für $\mathrm{Lg}\,(\varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,x)$ berechnet ist, bequemere Form 1 gebracht zu haben scheint. Vgl. auch „Tob. **Mayer**, Inquisitio in parallaxin lunæ ejusdemque a terra distantiam (Comm. Gott. 1752), — **Euler**, De la parallaxe de la lune dans l'hypothèse de la terre sphéroïdique (Mém. Berl. 1749; lat. Comm. Petrop. 1779; deutsch Berl. Jahrb. 1783), — Joh. Friedrich **Wurm** (Nürtingen 1760 — Stuttgart 1833; erst Präceptor Nürtingen, dann Pfarrer Gruibingen, später Prof. math. Blaubeuren und Stuttgart), Praktische Anleitung zur Parallaxenrechnung samt neuberechneten Tafeln des Nonagesimus (Berl. Jahrb. 1808 und 1811), — J. J. **Littrow**, Beiträge zur Parallaxenrechnung (Berl. Jahrb. 1812), und: On Parallaxes (Mem. A. S. 1835), — etc." — Zum Schlusse mag noch zu Gunsten von 408 folgende Entwicklung nachgetragen werden: Bei Beobachtung des Antrittes eines Gestirnes des scheinbaren Radius r' an einen Seitenfaden des Passageninstruments hat man offenbar, wenn aus der Sternzeit t derselben auf die Durchgangszeit des Mittelpunktes durch den Meridian geschlossen werden soll, in 380 : 2', wo für unsere gegenwärtige Bezeichnung ohnehin δ in d' und τ in t — a' übergehen, die Grösse c, je nachdem man den vorgehenden oder nachfolgenden Rand beobachtet, durch $c - f \mp r'$ zu ersetzen, d. h. es ist



$$\mathrm{Si}\,(c - f \mp r') = \mathrm{Si}\,n \cdot \mathrm{Si}\,d' + \mathrm{Co}\,n \cdot \mathrm{Co}\,d' \cdot \mathrm{Si}\,(t - a' + m) \qquad \mathbf{19}$$

Bedenkt man aber, dass c, f, r', n, $t - a' + m$ kleine Grössen sind, so erhält man

$$(t - a')\,\mathrm{Co}\,d' = c - f \mp r' - m \cdot \mathrm{Co}\,d' - n \cdot \mathrm{Si}\,d' \qquad \mathbf{20}$$

oder, da aus 3', 3''' und $3' \cdot \mathrm{Si}\,(w - W) + 3'' \cdot \mathrm{Co}\,(w - W)$ in unserm Falle

$$\triangle \cdot \mathrm{Co}\,d' \fallingdotseq \mathrm{Co}\,d - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \qquad \triangle \cdot \mathrm{Si}\,d' = \mathrm{Si}\,d - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Si}\,\varphi'$$

$$\triangle \cdot \mathrm{Co}\,d' \cdot \mathrm{Si}\,(t - a') = \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Si}\,(t - a) \quad \text{oder} \quad \triangle \cdot (t - a') \cdot \mathrm{Co}\,d' \fallingdotseq (t - a) \cdot \mathrm{Co}\,d$$

folgen, wo nach 16

$$\triangle = 1 - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \fallingdotseq 1 - \varrho\,\mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,(\varphi' - d)$$

ist,

$$a = t - (c - f \mp r)\,\mathrm{Se}\,d + m + n \cdot \mathrm{Tg}\,d +$$
$$+ \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Se}\,d\,[(c - f)\,\mathrm{Co}\,(\varphi' - d) - m \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' - n \cdot \mathrm{Si}\,\varphi'] \qquad \mathbf{21}$$

Schreibt man nun diese Gleichung für jeden der n Faden auf, — nimmt aus sämtlichen Gleichungen das Mittel, — ersetzt $^1/_n \sum t$ durch das um die Uhrkorrektion $\triangle t$ vermehrte Fadenmittel t, und $^1/_n \sum f$ durch die Fadenkorrektion f, — und dividiert endlich, da sich die Zeiten, in welchen ein Interval durchlaufen wird, umgekehrt wie die Geschwindigkeiten verhalten, die ganze Korrektion von $t + \triangle t$ mit der Geschwindigkeit $(1 - \lambda)$ des Gestirnes, so erhält man

$$a = t + \triangle t - (\mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III} - \mathrm{IV}) : (1 - \lambda) \qquad \mathbf{22}$$

wo

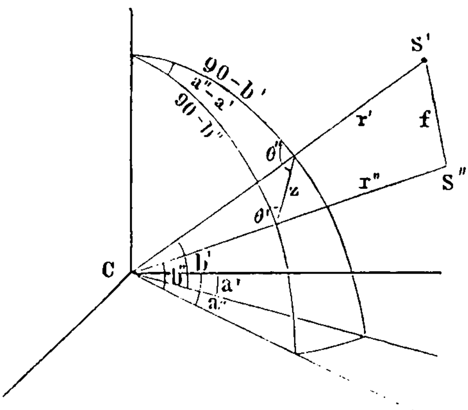
$$\mathrm{I} = c \cdot \mathrm{Se}\,d - n\,\mathrm{Tg}\,d - m \qquad \mathrm{II} = f \cdot \mathrm{Se}\,d \qquad \mathrm{III} = \pm\, r \cdot \mathrm{Se}\,d \qquad \mathbf{23}$$

$$\mathrm{IV} = \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot [(c - f)\,\mathrm{Co}\,(\varphi' - d) - m \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' - n \cdot \mathrm{Si}\,\varphi'] \qquad \mathbf{24}$$

ist, d. h. die 23 die gewöhnlichen, die 24 die von der Parallaxe beeinflussten Korrektionen geben.

436. Die sog. Parallaxen der Distanz und Zeit. — Auch der Einfluss der Parallaxe auf die Distanz zweier Gestirne und die Zeit, zu welcher letztere eine bestimmte Grösse erreicht, lässt sich leicht bestimmen, und es zeigt sich dabei, wie spätestens **Delisle** erkannte und sodann namentlich **Lagrange** scharf nachwies [a], dass es gewissermassen **Pole der Parallaxe** giebt, d. h. dass alle Punkte der Erde, für welche in demselben Momente die beiden Gestirne dieselbe Distanz voneinander zu haben scheinen, somit bei Durchgängen (446 u. f.) oder Bedeckungen (468 u. f.) dieselbe Phase gesehen wird, — und ebenso alle Punkte, für welche der Zeitunterschied zweier entsprechender Phasen dieselbe Grösse erreicht, je in einem Kreise liegen [b].

Zu 436: *a.* Vgl. 449 für die betreffenden Arbeiten von Jos. **Delisle**, — für diejenigen von **Lagrange** aber, dessen Entwicklungen wir hier zunächst folgen werden, dessen bereits (435 : c) erwähnte Abhandlung, — sowie endlich 447 für einen seither durch **Chauvenet** eingeschlagenen Weg, auf welchem eines der Hauptresultate noch rascher und allgemeiner erhalten wird. —



b. Bezeichnen a' b' r' und a'' b'' r'' die Coordinaten zweier in der Distanz f voneinander stehender Gestirne S' und S'' der Parallaxen π' und π'' in Beziehung auf ein durch den Erdmittelpunkt C gelegtes Coordinatensystem, — $\alpha'\ \beta'\ \varrho'$ und $\alpha''\ \beta''\ \varrho''$ aber ihre Coordinaten in Beziehung auf ein durch den Punkt ABR der Erdoberfläche gelegtes Parallelsystem, so hat man (435 : 5, 6, 10), wenn man die höhern Potenzen von π und in den Korrektionsgliedern den Unterschied von a und α vernachlässigt,

$$\alpha' = a' + \pi' \cdot x' \qquad \alpha'' = a'' + \pi'' \cdot x'' \qquad \beta' = b' + \pi' \cdot y' \qquad \beta'' = b'' + \pi'' \cdot y'' \qquad \mathbf{1}$$

wo

$$\begin{aligned} x' &= R \cdot Co\,B \cdot Si(a' - A) \cdot Se\,b' & y' &= R\,[Si\,b' \cdot Co\,B \cdot Co(a' - A) - Co\,b' \cdot Si\,B] \\ x'' &= R \cdot Co\,B \cdot Si(a'' - A) \cdot Se\,b'' & y'' &= R\,[Si\,b'' \cdot Co\,B \cdot Co(a'' - A) - Co\,b'' \cdot Si\,B] \end{aligned} \qquad \mathbf{2}$$

Bezeichnen ferner z und ζ die von C aus gesehene geocentrische und die von dem Punkte an der Erdoberfläche gesehene scheinbare Distanz der beiden Gestirne, so ist (s. Fig.)

$$Co\,z = Si\,b'' \cdot Si\,b' + Co\,b'' \cdot Co\,b' \cdot Co\,(a'' - a') \qquad \mathbf{3}$$

und analog

$$Co\,\zeta = Si\,\beta'' \cdot Si\,\beta' + Co\,\beta'' \cdot Co\,\beta' \cdot Co\,(\alpha'' - \alpha') \qquad \mathbf{4}$$

Substituiert man aber in 4 die aus 1 folgenden Werte

$$\begin{aligned} Si\,\beta'' &= Si\,b'' + \pi'' \cdot y'' \cdot Co\,b'' \cdot Si\,1'' & Si\,\beta' &= Si\,b' + \pi' \cdot y' \cdot Co\,b' \cdot Si\,1'' \\ Co\,\beta'' &= Co\,b'' - \pi'' \cdot y'' \cdot Si\,b'' \cdot Si\,1'' & Co\,\beta' &= Co\,b' - \pi' \cdot y' \cdot Si\,b' \cdot Si\,1'' \end{aligned}$$

$$Co\,(\alpha'' - \alpha') = Co\,(a'' - a') - (\pi'' \cdot x'' - \pi' \cdot x') \cdot Si\,(a'' - a') \cdot Si\,1''$$

so erhält man unter Benutzung von 3 und der unmittelbar aus der Figur folgenden Beziehungen

$$\mathrm{Co}\, b'' : \mathrm{Si}\, \theta'' = \mathrm{Si}\, z : \mathrm{Si}\, (a'' - a') = \mathrm{Co}\, b' : \mathrm{Si}\, \theta'$$

$$\mathrm{Si}\, z \cdot \mathrm{Co}\, \theta' = \mathrm{Co}\, b'' \cdot \mathrm{Si}\, b' - \mathrm{Si}\, b'' \cdot \mathrm{Co}\, b' \cdot \mathrm{Co}\, (a'' - a') \qquad \mathbf{5}$$

$$\mathrm{Si}\, z \cdot \mathrm{Co}\, \theta'' = \mathrm{Si}\, b'' \cdot \mathrm{Co}\, b' - \mathrm{Co}\, b'' \cdot \mathrm{Si}\, b' \cdot \mathrm{Co}\, (a'' - a')$$

sofort

$$\mathrm{Co}\, \zeta = \mathrm{Co}\, z + \begin{bmatrix} y'' \cdot \pi'' \cdot \mathrm{Co}\, \theta' + x' \cdot \pi' \cdot \mathrm{Co}\, b' \cdot \mathrm{Si}\, \theta'' + \\ y' \cdot \pi' \cdot \mathrm{Co}\, \theta'' - x'' \cdot \pi'' \cdot \mathrm{Co}\, b'' \cdot \mathrm{Si}\, \theta' \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Si}\, z \cdot \mathrm{Si}\, 1'' \qquad \mathbf{6}$$

und setzt man daher einerseits

$$\pi'' = k \cdot \pi' \qquad \text{oder} \qquad k = \pi'' : \pi' = r' : r'' \qquad \mathbf{7}$$

sowie anderseits

$$\zeta = z - \pi' \cdot \triangle z \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Co}\, \zeta = \mathrm{Co}\, z + \pi' \cdot \mathrm{Si}\, z \cdot \triangle z \cdot \mathrm{Si}\, 1'' \qquad \mathbf{8}$$

so erhält man sofort

$$\triangle z = y' \cdot \mathrm{Co}\, \theta'' + k \cdot y'' \cdot \mathrm{Co}\, \theta' + x' \cdot \mathrm{Co}\, b' \cdot \mathrm{Si}\, \theta'' - k \cdot x'' \cdot \mathrm{Co}\, b'' \cdot \mathrm{Si}\, \theta' \qquad \mathbf{9}$$

Ersetzt man aber in 9 die x und y durch ihre Werte aus 2, dabei (wie es für ein blosses Korrektionsglied ganz gut angeht) zur Vereinfachung $R = 1$ setzend, und führt, erst die drei Hilfsgrössen L, M, N durch

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{Si}\, b' \cdot \mathrm{Co}\, a' \cdot \mathrm{Co}\, \theta'' + \mathrm{Si}\, a' \cdot \mathrm{Si}\, \theta'' + k\, [\mathrm{Si}\, b'' \cdot \mathrm{Co}\, a'' \cdot \mathrm{Co}\, \theta' - \mathrm{Si}\, a'' \cdot \mathrm{Si}\, \theta'] \\ M &= \mathrm{Si}\, b' \cdot \mathrm{Si}\, a' \cdot \mathrm{Co}\, \theta'' - \mathrm{Co}\, a' \cdot \mathrm{Si}\, \theta'' + k\, [\mathrm{Si}\, b'' \cdot \mathrm{Si}\, a'' \cdot \mathrm{Co}\, \theta' + \mathrm{Co}\, a'' \cdot \mathrm{Si}\, \theta'] \qquad \mathbf{10} \\ N &= -\mathrm{Co}\, b' \cdot \mathrm{Co}\, \theta'' - k \cdot \mathrm{Co}\, b'' \cdot \mathrm{Co}\, \theta' \end{aligned}$$

und sodann die drei Hilfsgrössen α, β, γ durch

$$\gamma \cdot \mathrm{Co}\, \alpha \cdot \mathrm{Co}\, \beta = L \qquad \gamma \cdot \mathrm{Si}\, \alpha \cdot \mathrm{Co}\, \beta = M \qquad \gamma \cdot \mathrm{Si}\, \beta = N \qquad \mathbf{11}$$

ein, so wird

$$\triangle z = \gamma\, [\mathrm{Co}\, B \cdot \mathrm{Co}\, \beta \cdot \mathrm{Co}\, (\alpha - A) + \mathrm{Si}\, B \cdot \mathrm{Si}\, \beta] \qquad \mathbf{12}$$

Durch Quadrieren und Addieren der 11 erhält man, unter Benutzung der 10 und der aus der Figur folgenden Beziehungen,

$$\gamma^2 = L^2 + M^2 + N^2 = 1 - 2k \cdot \mathrm{Co}\, z + k^2 \qquad \mathbf{13}$$

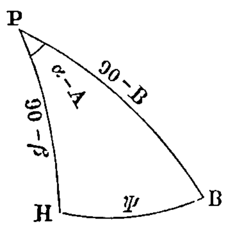
während aus dem ebenen Dreiecke S' C S''

$$f^2 = r'^2 + r''^2 - 2 \cdot r' \cdot r'' \cdot \mathrm{Co}\, z \qquad \mathbf{14}$$

folgt. Es muss also wegen 7

$$f^2 = r''^2 \cdot \gamma^2 \qquad \text{oder} \qquad \gamma = f : r'' \qquad \mathbf{15}$$

sein. Anderseits folgt, wenn H die Coordinaten α und β hat und ψ seinen vom Erdcentrum aus gesehenen Winkelabstand vom Beobachter B bezeichnet,

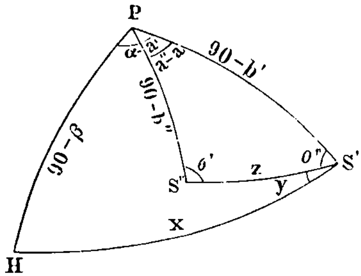


$$\mathrm{Co}\, \psi = \mathrm{Si}\, B \cdot \mathrm{Si}\, \beta + \mathrm{Co}\, B \cdot \mathrm{Co}\, \beta \cdot \mathrm{Co}\, (\alpha - A) \qquad \mathbf{16}$$

also hat man nach 8' und 12 die Beziehung

$$\zeta = z - \pi' \cdot \gamma \cdot \mathrm{Co}\, \psi \qquad \mathbf{17}$$

welche die sog. **Parallaxe der Distanz** mit Hilfe der durch 15 und 16 definierten Grössen γ und ψ in einfachster Weise ausdrückt, und überdies zeigt, dass diese Parallaxe für alle Punkte, welche von H gleich weit abstehen, auch gleich gross ist, — oder also dass, wenn man von H, dem sog. **Pol der Parallaxe**, irgend einen Kreis beschreibt, für alle unter diesem Kreise befindlichen Punkte der Erde die beiden Gestirne in demselben Momente auch denselben scheinbaren Abstand voneinander besitzen. — Ein merkwürdiges Resultat ergiebt sich ferner, wenn man den Pol H der Parallaxe seiner Lage nach mit den beiden Gestirnen S' und S'' vergleicht: Bezeichnet nämlich x die Distanz von H und



S', so folgt aus beistehender Figur

$$\mathrm{Co}\, x = \mathrm{Si}\, b' \cdot \mathrm{Si}\, \beta + \mathrm{Co}\, b' \cdot \mathrm{Co}\, \beta \cdot \mathrm{Co}(\alpha - a') \qquad \mathbf{18}$$

während

$$\mathrm{Si}\,(\theta'' + y) = \mathrm{Si}\,(\alpha - a') \cdot \mathrm{Co}\, \beta : \mathrm{Si}\, x \qquad \mathbf{19}$$

$$\mathrm{Si}\, \beta = \mathrm{Co}\, x \cdot \mathrm{Si}\, b' + \mathrm{Si}\, x \cdot \mathrm{Co}\, b' \cdot \mathrm{Co}(\theta'' + y) \qquad \mathbf{20}$$

ist. Mit Benutzung von 11, 10 und 5 erhält man aber aus 18

$$\mathrm{Co}\, x = -\, k \cdot \mathrm{Si}\, z : \gamma \qquad \mathbf{21}$$

und somit unter Benutzung von 13

$$\mathrm{Si}\, x = \sqrt{1 - \mathrm{Co}^2 x} = (k \cdot \mathrm{Co}\, z - 1) : \gamma \qquad \mathbf{22}$$

Ferner erhält man aus 19 mit Hilfe von 11, 10, 5 und 22

$$\mathrm{Si}\,(\theta'' + y) = \frac{M \cdot \mathrm{Co}\, a' - L \cdot \mathrm{Si}\, a'}{\gamma \cdot \mathrm{Si}\, x} = \frac{\mathrm{Si}\, \theta''}{\gamma \cdot \mathrm{Si}\, x} (k \cdot \mathrm{Co}\, z - 1) = \mathrm{Si}\, \theta''$$

also $y = 0$ und man hat daher, um H zu erhalten, nur x von S' über S'' hinaus aufzutragen. — Bezeichnen t_1 und t_2 die Zeiten, wo vom Erdmittelpunkte aus zwei Wandelsterne (z. B. Sonne und Mond, Sonne und Venus, etc.) bei ihrer Annäherung aneinander, und dann wieder bei ihrem Auseinandergehen, eine bestimmte Distanz z zu haben scheinen, — T_1 und T_2 aber die Zeiten, zu welchen sie ein Beobachter in dieser Distanz zu sehen glaubt, — θ_1 und θ_2 endlich die stündlichen Bewegungen in Distanz bei Annäherung und Entfernung, so hat man, da nach 17 für den Beobachter den Zeiten t_1 und t_2 die Distanzen

$$\zeta_1 = z - \pi' \cdot \gamma_1 \cdot \mathrm{Co}\, \psi_1 \qquad \zeta_2 = z - \pi' \cdot \gamma_2 \cdot \mathrm{Co}\, \psi_2 \qquad \mathbf{23}$$

entsprechen, also für ihn bei der Annäherung die Distanz z schon $\pi' \cdot \gamma_1 \cdot \mathrm{Co}\, \psi_1 : \theta_1$ Stunden vorüber ist, und bei der Entfernung erst in $\pi' \cdot \gamma_2 \cdot \mathrm{Co}\, \psi_2 : \theta_2$ Stunden folgt,

$$T_1 = t_1 - \pi' \cdot \gamma_1 \cdot \mathrm{Co}\, \psi_1 : \theta_1 \qquad T_2 = t_2 + \pi' \cdot \gamma_2 \cdot \mathrm{Co}\, \psi_2 : \theta_2 \qquad \mathbf{24}$$

Es ist also für den Beobachter die Zwischenzeit der beiden gleichen Phasen

$$T_2 - T_1 = t_2 - t_1 + \pi' (\gamma_1\, \mathrm{Co}\, \psi_1 : \theta_1 + \gamma_2\, \mathrm{Co}\, \psi_2 : \theta_2) \qquad \mathbf{25}$$

oder es ist die sog. **Zeitparallaxe**

$$\tau = \pi' (w_1 \cdot \mathrm{Co}\, \psi_1 + w_2 \cdot \mathrm{Co}\, \psi_2) \qquad \mathbf{26} \qquad \text{wo} \qquad w_1 = \gamma_1 : \theta_1 \qquad w_2 = \gamma_2 : \theta_2 \qquad \mathbf{27}$$

oder also, wenn man für ψ_1 und ψ_2 nach 16 substituiert und die Hilfsgrössen Γ, A, B und Ψ durch

$$\begin{aligned} \Gamma \cdot \mathrm{Co}\, A \cdot \mathrm{Co}\, B &= w_1 \cdot \mathrm{Co}\, \beta_1 \cdot \mathrm{Co}\, \alpha_1 + w_2 \cdot \mathrm{Co}\, \beta_2 \cdot \mathrm{Co}\, \alpha_2 \\ \Gamma \cdot \mathrm{Si}\, A \cdot \mathrm{Co}\, B &= w_1 \cdot \mathrm{Co}\, \beta_1 \cdot \mathrm{Si}\, \alpha_1 + w_2 \cdot \mathrm{Co}\, \beta_2 \cdot \mathrm{Si}\, \alpha_2 \qquad \mathbf{28} \\ \Gamma \cdot \mathrm{Si}\, B &= w_1 \cdot \mathrm{Si}\, \beta_1 \cdot + w_2 \cdot \mathrm{Si}\, \beta_2 \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Co}\, \Psi = \mathrm{Si}\, \mathrm{B} \cdot \mathrm{Si}\, B + \mathrm{Co}\, \mathrm{B} \cdot \mathrm{Co}\, B \cdot \mathrm{Co}\,(\mathrm{A} - A) \qquad \mathbf{29}$$

einführt,

$$\tau = \pi' \cdot \Gamma \cdot \mathrm{Co}\, \Psi \qquad \mathbf{30}$$

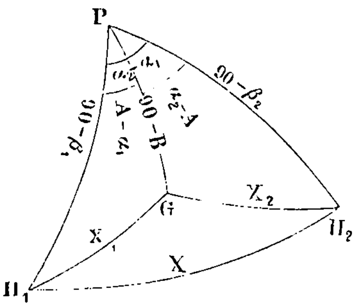
Da laut 29 die Hilfsgrösse Ψ offenbar die Distanz eines Punktes G der Coordinaten A und B von dem Beobachter vorstellt, und durch Quadrieren und Addieren der 28

$$\Gamma^2 = w_1{}^2 + w_2{}^2 + 2\, w_1 \cdot w_2 \cdot \mathrm{Co}\, X \qquad \mathbf{31}$$

folgt, wo

$$\mathrm{Co}\, X = \mathrm{Si}\, \beta_1 \cdot \mathrm{Si}\, \beta_2 + \mathrm{Co}\, \beta_1 \cdot \mathrm{Co}\, \beta_2 \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad \mathbf{32}$$

ist, so dass X mit der vom Beobachter unabhängigen Distanz der den Zeiten t_1 und t_2 entsprechenden Pole H_1 und H_2 der Distanzparallaxe übereinkömmt, so kann man aus 30 schliessen, dass auch die Zeitparallaxe für alle Beobachter,



welche von G dieselbe Distanz haben, gleich gross ist, oder dass also G in diesem Sinne ebenfalls eine Art **Pol der Parallaxe** vorstellt. Sind nun entsprechend X_1 und X_2 die Distanzen von G zu H_1 und H_2, so hat man mit Hilfe von 28 und 32

$$\begin{aligned} \mathrm{Co}\,X_1 &= \mathrm{Si}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Si}\,B + \mathrm{Co}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Co}\,B \cdot \mathrm{Co}(A-\alpha_1) = \\ &= (w_1 + w_2 \cdot \mathrm{Co}\,X) : \Gamma \\ \mathrm{Co}\,X_2 &= \mathrm{Si}\,\beta_2 \cdot \mathrm{Si}\,B + \mathrm{Co}\,\beta_2 \cdot \mathrm{Co}\,B \cdot \mathrm{Co}(A-\alpha_2) = \\ &= (w_2 + w_1 \cdot \mathrm{Co}\,X) : \Gamma \end{aligned} \qquad \mathbf{33}$$

und hieraus

$$\mathrm{Si}\,X_1 = w_2 \cdot \mathrm{Si}\,X : \Gamma \qquad \mathrm{Si}\,X_2 = w_1 \cdot \mathrm{Si}\,X : \Gamma \qquad \mathbf{34}$$

Aus 33 und 34 erhält man aber $X_1 + X_2 = X$, also fällt G in $H_1 H_2$, und zwar, wenn $w_1 = w_2$ ist, offenbar in die Mitte. Ist dagegen $w_2 = w_1 + \Delta w$, wo aber (27, 15) Δw als kleine Grösse betrachtet werden darf, so erhält man nach 31 nahe

$$\Gamma = 2\,w_1 \sqrt{1 + \Delta w : w_1} \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,X = 2\,w_1\,\mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,X : (1 - {}^1\!/_2\,\Delta w : w_1) \qquad \mathbf{35}$$

und somit nach 33, wenn

$$\Delta w' = \Delta w \cdot \mathrm{Tg}\,{}^1\!/_2\,X : (2\,w_1 \cdot \mathrm{Si}\,1'') \qquad \mathbf{36}$$

gesetzt wird,

$$\mathrm{Co}\,X_1 = \frac{w_1(1 + \mathrm{Co}\,X) + \Delta w \cdot \mathrm{Co}\,X}{2\,w_1 \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,X} \times \left(1 - \frac{\Delta w}{2\,w_1}\right) = \mathrm{Co}\left(\frac{X}{2} + \Delta w'\right)$$

oder $X_1 = {}^1\!/_2\,X + \Delta w'$, so dass man auch in diesem Falle G durch Berechnung von $\Delta w'$ leicht finden kann. — Anhangsweise ist noch hervorzuheben, dass für zwei Gestirne, die eine kleine geocentrische Distanz z haben, auch nahe $\gamma = 1 - k$ ist, wo (7) $k = \pi'' : \pi'$, also nach 17 auch nahe

$$\zeta = z \pm (\pi' - \pi'') \cdot \mathrm{Co}\,\psi \qquad \mathbf{37}$$

wo sich das obere Zeichen auf Annäherung, das untere auf Entfernung der beiden Gestirne bezieht. Bezeichnet nun T' die Pariserzeit, zu welcher ein Beobachter die geocentrisch zur Pariserzeit T vor sich gehende äussere oder innere Berührung der beiden Gestirne der Halbmesser s' und s'' sieht, so muss nach 37

$$s'' \pm s' = [s'' \pm s' + (T' - T) \cdot dz : dt] \pm (\pi' - \pi'') \cdot \mathrm{Co}\,\psi$$

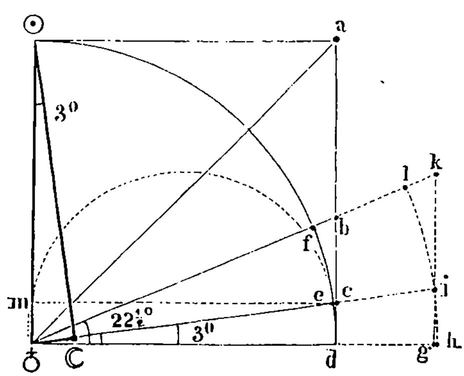
sein, sofern $dz : dt$ die Veränderung von z in einer Zeiteinheit bezeichnet, welche nach 3 mit Hilfe der Tafeln berechnet werden kann, also einen bestimmten Wert α hat. Es muss also

$$T' = T \mp (\pi' - \pi'') \cdot \mathrm{Co}\,\psi : \alpha \qquad \mathbf{38}$$

sein, wo das obere Zeichen für den Eintritt, das untere Zeichen für den Austritt gilt und das zweite Glied die sog. **Zeitparallaxe** darstellt.

437. Die Bestimmungen von Aristarch. — Die ältesten Ansichten über die Distanzen der Gestirne sind schon früher (230) besprochen worden und es wurde schon damals hervorgehoben, welch' ungemeiner Fortschritt es war, als es **Aristarch** gelang, eine erste geometrische Methode zu ihrer Bestimmung aufzufinden [a]. Diese Methode bestand darin, dass er, gestützt auf die richtige Überlegung, dass zur Zeit der Viertel oder einer sog. **Dichotomie**[b], Sonne, Mond und Erde ein am Monde rechtwinkliges Dreieck bilden müssen, in einer dem damaligen Bestande der Geometrie angemessenen Weise zeigte[c], wie man aus dem scheinbaren, von ihm zu 87° angenommenen Abstande, welchen Mond und Sonne zu jener Zeit besitzen, das Verhältnis ihrer Distanzen von der Erde ableiten könne[d]. Wenn nun auch das praktische Ergebnis seiner Bestimmung, dass nämlich jenes Verhältnis zwischen $^1/_{18}$ und $^1/_{20}$ liegen werde, noch viel zu wünschen übrig liess[e], so wurden durch dasselbe dennoch die Anschauungen über das Weltgebäude bereits wesentlich berichtigt[f], und es ist zu bedauern, dass ein Lapsus[g] den genialen Mann, trotz allem angewandten Scharfsinne, nicht wenigstens auch zu einer entsprechend guten Ermittlung der absoluten Distanzen und Grössen gelangen liess[h].

Zu 437: *a.* Die betreffende, von **Aristarch** unter dem Titel „Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης (De magnitudinibus et distantiis Solis et Lunæ)" verfasste Schrift wurde „Venetiis 1498 in fol." durch Georg **Valla** und „Pisauri 1571 in 4." durch F. **Commandino** in lateinischer Sprache herausgegeben; ferner griechisch 1688 zu Oxford durch **Wallis**, — französisch 1821 zu Paris durch Joseph **Fortia d'Urban** (Avignon 1756 — Paris 1843; früher Offizier, dann Privatgel. Paris), — deutsch 1854 zu Freiburg durch **Nokk**, — etc. Sie beginnt mit den sechs Thesen: „1) Der Mond erhält sein Licht von der Sonne. 2) Die Erde kann als ein Punkt im Centrum der Mondbahn betrachtet werden. 3) Wenn uns der Mond halbiert erscheint, so befinden wir uns in der Ebene, welche den erleuchteten von dem dunkeln Teile trennt. 4) Zu dieser Zeit steht der Mond um $^1/_{30}$ des Quadranten weniger als ein Quadrant von der Sonne ab. 5) Die Breite des Erdschattens in der Distanz des Mondes ist gleich zwei Monden. 6) Der vom Mond am Himmel eingenommene Bogen ist gleich $^1/_{15}$ eines Zeichens", und diesen folgen 19 Propositionen, von welchen die wichtigsten unten ebenfalls wörtlich folgen werden. — *b.* Für die Ableitung des Wortes **Dichotomie** vgl. 208. — *c.* Die von **Aristarch** als Nro. 8 aufgestellte Proposition besagt: „Die Distanz, in welcher die Sonne sich von der Erde befindet, ist mehr als 18 mal und weniger als 20 mal so gross als diejenige, in welcher der Mond steht", wie dies für uns in der That unmittelbar aus den Thesen 3 und 4 hervorgeht, da nach denselben Dreieck ⊙ ☾ ♁ die Winkel ☾ $= 90^0$ und ♁ $= 87^0$ besitzt, und wir wissen, dass $\text{Co}\ 87^0 \doteq {}^1/_{19}$ ist. Die Zeit von **Aristarch** hatte dagegen von solchen Verhältnissen noch keinen Hochschein, und es war daher eine wissenschaftliche That, einen ersten Weg zu ihrer annähernden Bestimmung aufzufinden. — *d.* Der



von **Aristarch** eingeschlagene Weg ist folgender: Beschreiben wir über der Hypotenuse des Dreieckes ☉ ☾ ♁ ein Quadrat mit Diagonale und Quadrant, — halbieren ∠ a ♁ d durch ♁ b, — verlängern ♁ ☾ über c hinaus bis zu einem beliebigen Punkte i, — ziehen durch diesen g k ⊥ ♁ d und von ♁ aus den Kreisbogen l h, — ferner e m ∥ ♁ d, — und endlich über ♁ e einen Halbkreis, der notwendig auch durch m geht, so kann man nach damals bereits bekannten Sätzen folgende Reihe von Schlüssen machen: Zunächst ist

$$\frac{bd}{cd} = 1 + \frac{bc}{cd} = 1 + \frac{ki}{ig} = 1 + \frac{\triangle ki\text{♁}}{\triangle gi\text{♁}} > 1 + \frac{\text{Sect. } li\text{♁}}{\text{Sect. } hi\text{♁}} =$$

$$= \frac{\text{Sect. } lh\text{♁}}{\text{Sect. } hi\text{♁}} = \frac{22^1/_2}{3} = \frac{15}{2} \qquad \text{also} \qquad \frac{bd}{cd} > \frac{15}{2} \qquad \mathbf{1}$$

$$\frac{ad}{bd} = 1 + \frac{ab}{bd} = 1 + \frac{a\text{♁}}{d\text{♁}} = 1 + \sqrt{2} > 1 + \sqrt{49:25} =$$

$$= 1 + \frac{7}{5} = \frac{12}{5} \qquad \text{also} \qquad \frac{ad}{bd} > \frac{12}{5} \qquad \mathbf{2}$$

woraus

$$\frac{ad}{cd} = \frac{bd}{cd} \cdot \frac{ad}{bd} > 18 \qquad \mathbf{3}$$

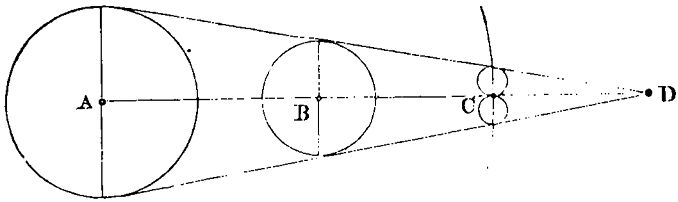
und somit

$$\frac{\text{♁}\odot}{\text{♁☾}} = \frac{\text{♁}e}{\text{♁}m} > \frac{ad}{cd} > 18 \qquad \text{also} \qquad \frac{\text{♁}\odot}{\text{♁☾}} > 18 \qquad \mathbf{4}$$

folgt, also die in Proposition 8 aufgestellte untere Grenze als richtig erwiesen ist. Die obere Grenze aber ergiebt sich aus dem Umstande, dass dem Bogen ♁ m des Hilfskreises ein Winkel von 3^0 als Peripheriewinkel entspricht, dass er also $6^0 = {}^1/_{10} \cdot 60^0$ hält, somit die Sehne ♁ m = ♁ ☾ grösser als $^1/_{10}$ der dem Radius $^1/_2$ ♁ e gleichen Sehne von 60^0, folglich

$$\frac{\text{♁}\odot}{\text{♁☾}} = \frac{\text{♁}e}{\text{♁}m} < \frac{\text{♁}e}{^1/_{10} \cdot {}^1/_2 \text{♁}e} = 20 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\text{♁}\odot}{\text{♁☾}} < 20 \qquad \mathbf{5}$$

sein muss. — *c.* Vgl. 439. — *f.* Die Propositionen 9, 10 und 11 **Aristarchs** lauten der Reihe nach: „Wenn die Sonne ganz verfinstert ist, so umfasst ein bestimmter Kegel, der seine Spitze an unserm Auge hat, zugleich Sonne und Mond. — Der Durchmesser der Sonne ist mehr als 18 mal und weniger als 20 mal so gross als derjenige des Mondes. — Das Verhältnis der Sonne zum Monde liegt zwischen 5832 : 1 und 8000 : 1“. Die erste derselben geht unmittelbar aus dem Faktum hervor, dass eine totale Sonnenfinsternis immer nur ganz kurze Zeit andauert, — und die zwei folgenden resultieren aus ihrer Verbindung mit Proposition 8. — *g.* Da aus Proposition 9 hervorgeht, dass der scheinbare Durchmesser des Mondes nahe gleich dem der Sonne ist, und **Aristarch** letztern nahe richtig zu $^1/_{720}$ des Umkreises oder $^1/_{60}$ eines Zeichens annahm, wie (205) aus dem Zeugnisse von Archimedes mit aller Sicherheit folgt, so kann man kaum begreifen, wie er dazu kam, dem Monddurchmesser in These 6 den vierfachen Wert desjenigen der Sonne beizulegen, — dagegen allerdings nur zu gut, dass die auf dieser falschen Grundlage aufgebaute Proposition 12: „Der Durchmesser des Mondes enthält weniger als $^2/_{45}$ und mehr als $^1/_{30}$ seiner Distanz von der Erde“ trotz dem dafür gegebenen (auf zwei mit $\text{Tg } 1^0 < {}^1/_{45} \cdot \text{Tg } 45^0$ und $\text{Ch } 2^0 > {}^1/_{30} \text{ Ch } 60^0$ übereinstimmenden Sätzen beruhenden) Beweise ebenfalls total unrichtig ist. — *h.* Die von **Aristarch** aufgestellten Propositionen 16 und 18: „Das Verhältnis des Durchmessers der Sonne zum Durchmesser der Erde ist grösser als $^{19}/_3$ und kleiner als $^{43}/_6$, — und: Das Verhältnis des Durchmessers des Mondes zum Durchmesser der Erde ist grösser als $^{19}/_{60}$ und kleiner als $^{43}/_{108}$“ wurden von ihm in folgender Weise bewiesen. Sind A, B, C die Mittelpunkte von Sonne, Erde und Mond zur Zeit einer centralen Mondfinsternis und ist D die Spitze des



Schattenkegels, so hat man mit Hilfe von Proposition 8 successive

$$18 < \frac{AB}{BC} < 20 \qquad 19 < \frac{AC}{BC} < 21 \qquad \frac{1}{19} > \frac{BC}{AC} > \frac{1}{21} \quad \text{also} \quad \frac{18}{19} < \frac{AB}{AC} < \frac{20}{21} \qquad 6$$

Anderseits hat man, da die Breite des Erdschattens in der Distanz des Mondes nach These 5 gleich zwei Monden, somit nach Proposition 10 kleiner als $^1/_9$ und grösser als $^1/_{10}$ des Sonnendurchmessers ist,

$$\frac{1}{9} > \frac{CD}{AD} > \frac{1}{10} \qquad \text{also} \qquad \frac{8}{9} < \frac{AC}{AD} < \frac{9}{10} \qquad 7$$

folglich durch Multiplikation von 6 und 7

$$\frac{16}{19} < \frac{AB}{AD} < \frac{18}{21} \qquad \text{oder} \qquad \frac{3}{19} > \frac{BD}{AD} > \frac{3}{21} \qquad 8$$

Bezeichnet man daher die Durchmesser von Sonne, Erde und Mond mit s, e und m, so folgt wegen

$$\frac{s}{e} = \frac{AD}{BD} \qquad \text{nach 8 sofort} \qquad \frac{19}{3} < \frac{s}{e} < \frac{42}{6} \qquad 9$$

und, da nach 4 und 5

$$\frac{1}{20} < \frac{m}{s} < \frac{1}{18} \qquad \text{ist, wegen 9} \qquad \frac{19}{60} < \frac{m}{e} < \frac{42}{108} \qquad 10$$

womit die vorstehenden Propositionen bewiesen sind, da dieselben von den 9 und 10 nur darin abweichen, dass **Aristarch** die Zahl 42 infolge einer hier zu übergehenden Düftelei schliesslich durch 43 ersetzen zu müssen glaubte. — Die Propositionen 17 und 19 endlich gehen aus den 16 und 18 einfach hervor, indem man die in letztern gegebenen Verhältnisse durch kubieren auf die Kugeln überträgt. — Anhangsweise mag noch beigefügt werden, dass, wenn M die Distanz des Mondes von der Erde bezeichnet, nach der allerdings numerisch unrichtigen Proposition 12

$$\frac{45}{2} < \frac{M}{m} < 30 \qquad \text{und somit nach 10} \qquad \frac{57}{8} < \frac{M}{e} < \frac{105}{9} \qquad 11$$

oder eine erste absolute Distanzbestimmung des Mondes folgt, und man sich zu verwundern hat, dass **Aristarch** seine Schrift nicht mit einer entsprechenden Proposition 20 abschloss. Warum er dies verabsäumte, wissen wir ebensowenig als ob er seinen Lapsus später erkannte und seine Rechnungen revidierte.

438. Die Bestimmungen von Hipparch. — Als der ausgezeichnete **Hipparch** den glücklichen Gedanken hatte, die uns (246) bereits bekannten Verhältnisse beizuziehen, welche bei einer Mondfinsternis statthaben, gelang es ihm mit Hilfe des von **Aristarch**

übernommenen Verhältnisses $^1/_{10}$ in leichter Weise, für die Parallaxen von Sonne und Mond die Näherungswerte 3′ und 57′ zu ermitteln [a], und sodann unter Anwendung der von ihm eingeführten Sehnenrechnung (61) auch die seinem Vorgänger höchstens in viel unvollkommnerer Weise gelungenen Bestimmungen der absoluten Distanzen und Grössen der beiden Gestirne in Erdradien zu erhalten [b].

Zu 438: *a.* Führt man in die, unter Weglassung des erst einer spätern Zeit angehörenden Erfahrungsfaktors, aus 246 : 1 hervorgehende Relation

$$\odot + ☾ = r + \varphi \qquad 1$$

entsprechend der Aristarch'schen Bestimmung (437) $☾ = 19 \cdot \odot$ ein, — ferner (205) $r = 15'$, — und nimmt überdies an, die Dauer einer totalen Mondfinsternis betrage etwa $2^1/_2{}^h$, die tägliche Verspätung des Mondes aber $51^m = 765'$, so erhält man offenbar $\varphi \fallingdotseq {}^1/_{24} \cdot 765 \cdot 1^1/_4 = 40'$, und somit

$$20 \cdot \odot \fallingdotseq 55' \qquad \text{oder} \qquad \odot \fallingdotseq 3' \qquad ☾ \fallingdotseq 57' \qquad 2$$

— *b.* Bezeichnet man sodann mit D und R Distanz und Radius der Sonne, mit Δ und ϱ Distanz und Radius des Mondes, und mit r′ den Erdradius, so erhält man sofort

$$D = \frac{r'}{\mathrm{Si}\,\odot} = \frac{2\,r'}{\mathrm{Ch}\cdot 2\,\odot} = 1200 \cdot r' \qquad R = D \cdot \mathrm{Si}\, r = \frac{D}{2} \cdot \mathrm{Ch}\, 2\,r = 5^1/_2\, r' \qquad 3$$

$$\Delta = \frac{r'}{\mathrm{Si}\,☾} = \frac{2\,r'}{\mathrm{Ch}\cdot 2\,☾} = 59 \cdot r' \qquad \varrho = \Delta \cdot \mathrm{Si}\, r = \frac{\Delta}{2} \cdot \mathrm{Ch}\, 2\,r = {}^1/_3\, r' \qquad 4$$

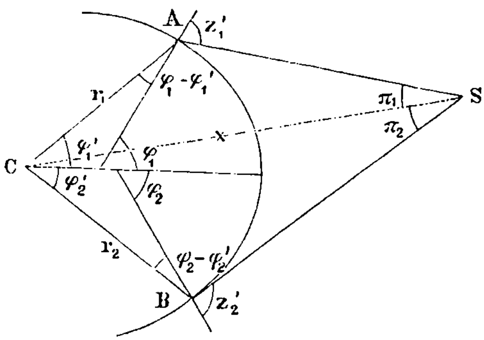
Diese Zahlen, welche mit den von **Hipparch** selbst ermittelten vollständig übereinstimmen, sind nun zwar, insoweit sie die Sonne betreffen, infolge der von **Aristarch** übernommenen 19, noch sehr unrichtig, — dagegen, insoweit sie den Mond betreffen, da sich für diesen der Haupteinfluss jener Zahl eliminiert, schon recht hübsche Annäherungen.

439. Die Revision der Hipparch'schen Werte. — Abgesehen von einigen kaum auf wirklichen Messungen beruhenden andern Angaben [a] und einigen einschlagenden, aber zu keinen sichern Resultaten führenden Versuchen von **Ptolemäus** [b], blieb man bis gegen Ende des 16. Jahrhunderts bei den von **Hipparch** erhaltenen Werten stehen, ja es waren erst die beiden Freunde **Kepler** und **Remus** [c], welche dessen grosse Sonnenparallaxe ernstlich beanstandeten [d]. Als sodann um die Mitte des 17. Jahrhunderts, und wahrscheinlich infolge eines von **Kepler** in seinen Ephemeriden auf 1619 ausgesprochenen Wunsches, Gottfried **Wendelin** [e] je zur Zeit des ersten Viertels wiederholt den scheinbaren Abstand von Sonne und Mond bestimmte, fand er im Mittel für denselben $89^0\, 45' \fallingdotseq \mathrm{Aco}\, {}^1/_{220}$ und hieraus ergiebt sich dann in der That, unter Benutzung der übrigen Daten Hipparchs, dass die Sonnenparallaxe von 3′ auf 14″ herabzusetzen ist, während die Mondparallaxe aus dem (438) angegebenen Grunde von dieser Veränderung nur unmerklich berührt wird [f].

Zu 439: *a.* Wie **Posidonius** bald nach der Zeit von Hipparch dazu kam, anzunehmen, es betrage die Distanz des Mondes $52^1/_8$, diejenige der Sonne aber 13095 Erdradien, weiss man absolut nicht und kann somit auch nicht entscheiden, ob die entsprechenden Parallaxen 65',9 und 15'',6, von welchen erstere gegenüber Hipparch einen erheblichen Rückschritt, die zweite dagegen einen enormen Fortschritt konstatieren würde, als wirkliche Messungsresultate angesehen werden dürfen. So weit man jedoch die damaligen Instrumente und Verfahren kennt, muss man letzteres wenigstens in Beziehung auf die Sonnenparallaxe entschieden bezweifeln und geht kaum irre, wenn man sie als Ergebnisse einer blossen Spekulation betrachtet und mit **Ptolemäus** ignoriert. Und wenn wir in der etwa aus dem Ende des 13. Jahrhunderts stammenden Kosmographie des Syriers **Dimashqui** (1254? — 1327) Zahlen finden, welche mit $☾ = 16^1/_6{}'$ und $\odot = 9'',9$ übereinstimmen, so haben wir es noch augenscheinlicher mit illusorischen Bestimmungen zu thun, zumal auch da wieder die leichter zu ermittelnde Grösse fehlerhafter geworden ist. — *b.* **Ptolemäus** versuchte namentlich die Mondparallaxe aus ihrem Einflusse auf die Sonnenfinsternisse und auf die Zenitdistanzen genauer zu bestimmen, — hatte jedoch wegen Mangel zureichender Beobachtungsmittel nicht den gewünschten Erfolg. — *c.* Johannes Rudrauff genannt **Remus** (Herda in Thüringen 1588? — Ruffach im Elsass 1632?) lebte längere Zeit als Leibarzt und Mathematicus des Kaisers Matthias in Wien, wurde auch auf einer Reise nach Italien mit Galilei persönlich bekannt. — *d.* **Kepler** kam beim Studium der Beobachtungen Tychos zur Überzeugung, dass die Parallaxe des Mars selbst bei dessen Opposition für die damaligen Beobachtungsmittel unmerklich sei, dass also dies für die Sonne noch in vermehrtem Masse der Fall sein müsse, und die Sonnenparallaxe somit jedenfalls nicht mehr als 1' betragen könne, — und **Remus** wurde (vgl. seinen 1628 aus Ruffach geschriebenen Brief in Epist. Kepl.) durch ähnliche Betrachtungen veranlasst, die Sonnenparallaxe sogar mindestens auf 17'' herunterzusetzen oder die Distanz der Sonne wenigstens auf 12300 Erdradien zu erhöhen. Letzteres kam dann allerdings **Kepler** etwas zu stark vor und er schrieb (vgl. „Franz Dvorsky, Neues über Kepler. Prag 1880 in 8."), bei Übersendung eines von Remus angefertigten Prognostikons, 1629 II 24 aus Sagan an Albrecht v. Waldstein: „**Hipparchus** hat die Sonne 1200 Erdboden hoch in Himmel hinauff gesetzt. **Ich** habe 3400 Erdboden höch daraus gemacht. **Remus** aber setzt noch 10000 Erdboden darzue, das Ihrer 14000 werden. Das muss ich nun leiden und den Nachkommen das Urtheil überlassen, welcher es besser gemachet". — *e.* Gottfried **Wendelin** (Herken bei Lüttich 1580 — Renaix 1667) war erst Korrektor in Lyon, dann Advokat in Paris, Pfarrer in den Niederlanden, und zuletzt Canonicus in Renaix. — *f.* **Wendelin** machte seine Beobachtungen 1650 unter Anwendung des Fernrohrs während einem Aufenthalte auf Majorka. — Den 14'' entsprechen die Werte $D = 14733 \cdot r'$ und $R = 64^1/_4 \cdot r'$, deren ersterer zu Gunsten von **Remus** entscheidet.

440. Die Parallaxenbestimmung aus zwei Ständen. — Ein grösserer Fortschritt in der Parallaxenbestimmung wurde allerdings erst erzielt, als vor etwas mehr als zwei Jahrhunderten den Methoden von **Aristarch** und **Hipparch,** welche wir als Bestimmungen aus **Einem Stande** zusammenfassen können, solche aus **Zwei Ständen** substituiert wurden, d. h. als man anfing, nach Analogie der in der praktischen Geometrie bei Ermittlung der Distanz eines unzugänglichen Punktes gebräuchlichen Weise zu progredieren. Allerdings erfordert auch diese Methode, welche schon früher (232) vorläufig erörtert wurde, hier dagegen ohne die damals angenommenen vereinfachenden Voraussetzungen durchgeführt werden soll [a], wie noch die folgenden Nummern belegen werden, die äusserste Sorgfalt und lässt sich, abgesehen vom Monde, direkt nur auf die Planeten Venus oder Mars zur Zeit ihrer in unterer Konjunktion oder Opposition stattfindenden Erdnähe anwenden, verschafft aber mit Hilfe des dritten Kepler'schen Gesetzes nichts destoweniger auch die Parallaxen der Sonne und der übrigen Planeten [b].

Zu 440: *a.* Sind nämlich A und B zwei auf demselben Erdmeridiane, aber unter wesentlich verschiedenen Polhöhen φ_1 und φ_2 gelegene Beobachtungspunkte, φ_1' und φ_2' deren geocentrische Breiten, r_1 und r_2 ihre Distanzen vom Erdcentrum, und endlich z_1' und z_2' die im Momente der Culmination eines Wandelsternes S gemessenen und für die Refraktion verbesserten Zenitdistanzen dieses letztern, so hat man, wenn π_1 und π_2 die parallaktischen Winkel an S bezeichnen, aus dem Viereck ACBS die Beziehungen



$$\pi_1 + \pi_2 = \\ = z_1' + z_2' - (\varphi_1 + \varphi_2) \tag{1}$$

$$x = \frac{r_1 \cdot \mathrm{Si}(z_1' - \Delta\varphi_1)}{\mathrm{Si}\,\pi_1} = \frac{r_2 \cdot \mathrm{Si}(z_2' - \Delta\varphi_2)}{\mathrm{Si}\,\pi_2} \quad \text{wo} \quad \Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_1', \quad \Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_2' \tag{2}$$

Führt man daher α durch

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Si}\,\pi_1}{\mathrm{Si}\,\pi_2} = \frac{r_1 \cdot \mathrm{Si}(z_1' - \Delta\varphi_1)}{r_2 \cdot \mathrm{Si}(z_2' - \Delta\varphi_2)} \tag{3}$$

ein, so dass α eine bekannte Grösse ist, so hat man nach goniometrischen Beziehungen

$$\mathrm{Tg}\,\frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = \frac{\mathrm{Si}\,\pi_1 - \mathrm{Si}\,\pi_2}{\mathrm{Si}\,\pi_1 + \mathrm{Si}\,\pi_2} \cdot \mathrm{Tg}\,\frac{\pi_1 + \pi_2}{2} = \mathrm{Tg}(\alpha - 45^0) \cdot \mathrm{Tg}\,\frac{\pi_1 + \pi_2}{2} \tag{4}$$

kann somit successive nach 1 und 4 die halbe Summe und halbe Differenz der beiden π, folglich auch diese selbst, sodann nach 2 die Distanz x, und mit Hilfe dieser, wenn a den Radius des Equators bezeichnet, nach

$$\mathrm{Si}\,\Pi = a : x \qquad \text{oder} \qquad \Pi = a : (x \cdot \mathrm{Si}\,1'') \tag{5}$$

auch die Equatoreal-Horizontal-Parallaxe von S berechnen. — Die dieser Rechnung zu Grunde liegende Voraussetzung, dass beide Beobachter genau unter demselben Meridiane stehen, also für sie die Culmination gleichzeitig eintrete, lässt sich nun allerdings höchst selten realisieren; dagegen kann man leicht die Beobachtung des Einen, unter Voraussetzung bekannter Längendifferenz und der Zeit proportionaler Veränderung der Deklination des Wandelsternes, durch Rechnung in den Punkt verlegen, wo sein Parallel den Meridian des Andern schneidet, sobald derselbe die Zenitdistanz bei zwei successiven Culminationen gemessen und somit deren stündliche Veränderung bestimmt hat. — *b.* Ist S ein Planet, so kennt man aus den Tafeln seine in Beziehung auf die mittlere Distanz Sonne-Erde als Einheit gegebene Distanz $\triangle$ von der Erde, und kann daher aus seiner Parallaxe auch die der Distanz 1 entsprechende Parallaxe $\pi = \Pi \cdot \triangle$, d. h. die Sonnenparallaxe, berechnen. — Anhangsweise mag noch hervorgehoben werden, dass man zur Bestimmung der Parallaxe auch folgende, die Gleichzeitigkeit der Beobachtungen gar nicht erfordernde Methode anwenden kann: Bezeichnen d_1 und d_2 die geocentrischen Deklinationen des Wandelsternes zu den beiden Beobachtungszeiten, so sind die geocentrischen Zenitdistanzen

$$z_1 = \varphi_1 - d_1 \qquad z_2 = \varphi_2 - d_2 \qquad \mathbf{6}$$

und dagegen die scheinbaren Zenitdistanzen entsprechend 435 : 13, da für die Culmination $n = \varphi'$ wird und in den Korrektionsgliedern die z_1 und z_2 durch z_1' und z_2' ersetzt werden dürfen,

$$z_1' = z_1 + r_1 \cdot \pi_1 \cdot \mathrm{Si}\,(z_1' - \triangle\varphi_1) \qquad z_2' = z_2 + r_2 \cdot \pi_2 \cdot \mathrm{Si}\,(z_2' - \triangle\varphi_2) \qquad \mathbf{7}$$

wo, wenn $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die geocentrischen Distanzen von S sind, und π wie oben die Sonnenparallaxe bezeichnet,

$$\pi_1 = \pi : \triangle_1 \qquad \pi_2 = \pi : \triangle_2 \qquad \mathbf{8}$$

ist. Aus 6, 7 und 8 folgt aber, wenn man die aus den Beobachtungen und Tafeln bekannten Grössen

$$z_1' - z_2' - (\varphi_1 - \varphi_2) + d_1 - d_2 = \alpha, \quad \mathrm{Si}(z_1' - \triangle\varphi_1) \cdot r_1 : \triangle_1 - \mathrm{Si}(z_2' - \triangle\varphi_2) \cdot r_2 : \triangle_2 = \beta \quad \mathbf{9}$$

setzt,

$$\pi = \alpha : \beta \qquad \mathbf{10}$$

womit offenbar die Aufgabe vollständig gelöst ist. Aber allerdings wird die Grösse α im Verhältnis zu ihrem Betrage von der Unsicherheit der Refraktionsbestimmung, der Einstellung und Ablesung, etc., etwas stark beeinflusst, so dass es höchst zweckmässig ist, die absoluten Messungen durch Differentialbestimmungen zu ersetzen, in welchen sich ein grosser Teil dieser Fehler eliminiert, — d. h. den Wandelstern auf beiden Stationen mit demselben Fixsterne zu vergleichen: Ist D die Deklination dieses letztern und bezeichnen $\triangle d_1$ und $\triangle d_2$ die an den beiden Stationen bestimmten Höhendifferenzen, so hat man

$$D + \triangle d_1 = \varphi_1 - z_1' \qquad D + \triangle d_2 = \varphi_2 - z_2' \qquad \triangle d_1 - \triangle d_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) - (z_1' - z_2')$$

folglich statt 9

$$\alpha = d_1 - d_2 - (\triangle d_1 - \triangle d_2), \quad \beta = \mathrm{Si}(\varphi_1' - D - \triangle d_1) \cdot r_1 : \triangle_1 - \mathrm{Si}(\varphi_2' - D - \triangle d_2) \cdot r_2 : \triangle_2 \quad \mathbf{11}$$

Hat man aber eine Reihe solcher Bestimmungen, so kann man für jede derselben nach 10 die Gleichung $\alpha = \beta \cdot \pi$ aufschreiben, welche die Normalgleichung

$$\Sigma\,(\alpha \cdot \beta) = \pi \cdot \Sigma\,\beta^2 \qquad \text{und somit} \qquad \pi = \Sigma\,(\alpha \cdot \beta) : \Sigma\,\beta^2 \qquad \mathbf{12}$$

ergeben. — Vgl. auch 442 : c.

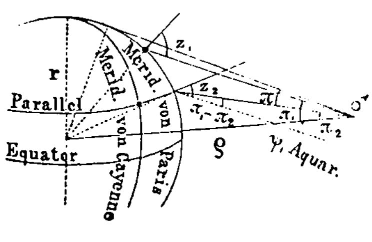
441. Die Expedition nach Cayenne. — Die erste Anwendung der neuen Methode hatte bei Anlass der Mars-Opposition des Jahres 1672 statt. Die Pariser Akademie sandte nämlich damals ihren Adjunkten Jean **Richer** nach Cayenne, um daselbst wiederholt die Culminationshöhen des Mars mit denjenigen benachbarter Sterne zu vergleichen, während Dom. **Cassini** in Paris korrespondierende

Beobachtungen machen sollte [a], und es hatte diese Expedition, durch welche die Wissenschaft gewissermassen Besitz von der neuen Welt nahm, sowie auch Kenntnis von einer früher (419) erwähnten wichtigen Thatsache erhielt, für die genauere Kenntnis der Sonnenparallaxe wirklich guten Erfolg, indem sie aus Kombination der zuverlässigsten Serien den für die damalige Zeit ganz vorzüglichen Wert von $9^1/_2''$ ergab [b].

Zu 441: *a.* **Richer** schiffte sich 1672 II 8 zu La Rochelle mit einem Gehilfen, Namens Meurisse, ein, — langte IV 27 in Cayenne an, — liess sich von den Wilden ein kleines Observatorium bauen, welches Wandungen aus Baumrinde und ein Dach von Palmenblättern hatte, — stellte in demselben eine in Paris sorgfältig regulierte, aber nunmehr (vgl. 419) eine Retardation von vollen 2^m zeigende Pendeluhr, sowie einen 6-füssigen Oktanten auf, dessen kupferner Limbus direkt 1′ und mittelst Transversalen 10″ gab, — begann V 12 mit Eifer die ihm durch die Picard'sche Instruktion vorgeschriebenen Beobachtungen, welche er ein volles Jahr fortsetzte, — sich dann wieder einschiffte und gegen Ende des Jahres 1673 glücklich nach Paris zurückkehrte, wo er (vgl. Hist. de l'Acad. 1673) zum Ärger des eifersüchtigen **Cassini** wie ein Sieger empfangen wurde. — *b.* Unter den vielfachen Beobachtungen von **Richer**, für welche seine „Observations astronomiques et physiques faites en l'Isle de Cayenne. Paris 1679 in fol." zu vergleichen sind, kommen hier zunächst die zahlreichen Meridianhöhen in Betracht, welche er von 1672 VII 28 bis XI 19 von Mars und benachbarten Sternen bestimmte, so z. B. folgende, zu welchen **Cassini** in Paris korrespondierende erhielt:

1872	Gegenstand	Höhe in Cayenne beob.	Höhe in Cayenne red. auf Paris		Höhe in Paris		Differ. d. Diff.
		° ′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	″
IX 8	♂ ob. Rand	74 31 45					
- 9	dito	74 28 10	74 28 43	−16 3	30 35 35	−15 50	+13
- --	ψ′ Aquarii	74 12 40	74 12 40		30 19 45		
- 23	♂ ob. Rand	73 57 25					15″
- 24	dito	73 57 10	73 57 12	+15 28	30 4 0	+15 45	+17
- —	ψ′ Aquarii	74 12 40	74 12 40		30 19 45		

Die gegenseitige Lage von Paris und dem nach Richers Beobachtungen etwa $3^h\ 38^m = {}^{11}/_{72}{}^d$ westlich davon und 4° 56′ nördlich vom Equator gelegenen Observatorium auf Cayenne ist durch beistehende Figur angedeutet, welche überdies die von mir gewählten Bezeichnungen enthält. Die Beobachtungen von IX 8 und 9 ergaben nun für die Höhe von Mars eine tägliche Abnahme von 3′ 35″; setzt man also die Veränderung der Zeit proportional, so hat man für den Moment, wo Mars IX 9 im Parallel von Cayenne durch den Pariser Meridian ging, seine Höhe um ${}^{11}/_{72} \cdot 3'\,35'' = 33''$



grösser als die in Cayenne wirklich beobachtete anzunehmen; diese reduzierte Höhe ist dann auch in vorstehende Tafel eingetragen, und für IX 24 entsprechend verfahren worden. Der übrige Eintrag bedarf wohl keiner weitern Erläuterung und es erzeigt sich, dass in Paris nahe in der Mitte zwischen IX 9 und 24 Mars in der Höhe von ψ' Aquarii, dagegen in Cayenne gleichzeitig um 15″ höher stand, dass also für jene Zeit $\pi_1 - \pi_2 = 15''$ gesetzt werden darf, — ferner $z_1 = 90^0 - 30^0\,19'\,45''$ und $z_2 = 90^0 - (74^0\,12'\,40'' + 15'')$. Nun hat man aber aus der Figur sehr nahe

$$\pi_1 = \frac{r}{\varrho \cdot \mathrm{Si}\, 1''} \cdot \mathrm{Si}\, z_1 \qquad \pi_2 = \frac{r}{\varrho \cdot \mathrm{Si}\, 1''} \cdot \mathrm{Si}\, z_2 \qquad \pi = \frac{r}{\varrho \cdot \mathrm{Si}\, 1''} \qquad 1$$

also

$$\pi_1 - \pi_2 = \pi\,(\mathrm{Si}\, z_1 - \mathrm{Si}\, z_2) \quad \text{oder} \quad \pi = \frac{\pi_1 - \pi_2}{2\,\mathrm{Si}\, \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \cdot \mathrm{Co}\, \frac{1}{2}(z_1 + z_2)} \qquad 2$$

und hieraus folgt mit obigen Daten $\pi = 25\frac{1}{3}''$, oder, da damals Mars nahe seinen kleinsten Abstand 0,372 von der Erde hatte, dass die Parallaxe in der Distanz 1 oder die Sonnenparallaxe

$$\Pi = 0{,}372 \times 25\tfrac{1}{3} = 9\tfrac{1}{2}''$$

sei. Wenn aus andern, weniger günstig situierten Beobachtungen kleinere oder grössere Werte hervorgingen, ja sogar die Parallaxe Null nicht ausgeschlossen blieb, so darf man sich für jene Zeit darüber gar nicht verwundern, kam ja noch weit später Ähnliches vor.

442. Die Kontrol-Methode von Cassini. — Während wir jetzt die Ergebnisse der Expedition nach Cayenne durch Vergleichung mit neuern Bestimmungen prüfen können, so musste damals die wünschbare Kontrole in anderer Weise angestrebt werden, und in der That suchte **Cassini** eine solche in der Weise zu erhalten, dass er (436) die Parallaxe auch aus ihrem Einflusse auf die Distanz des Planeten von einem benachbarten Sterne bestimmte [a], dabei zur Vereinfachung der Distanz die Rektascensionsdifferenz substituierend, und je zwei Beobachtungen kombinierend, bei welchen der Planet vor und nach der Culmination gleichen Stundenwinkel besass [b]. Da er nun in dieser Weise mehrere Bestimmungen erhielt, welche mit den aus Cayenne-Paris abgeleiteten befriedigend übereinstimmten, so waren damit jede Zweifel an letztern vollständig beseitigt [c].

Zu 442: ***a.*** Sind nämlich a′, d′ die geocentrischen Equatorealcoordinaten eines Wandelsternes der Parallaxe π' zur Sternzeit t und a″, d″ die entsprechenden Coordinaten eines Fixsternes ($\pi'' = 0$), — ist ferner φ' die geocentrische Breite des Beobachters, und bezeichnen ζ und z die scheinbare und geocentrische Distanz der beiden Gestirne, so hat man nach 436 : 8, 12, da in diesem Falle $k = 0$ und (nach 13) $\gamma = 1$ werden, A und B aber durch $-t$ und φ' zu ersetzen sind,

$$\zeta = z - \pi' \cdot [\mathrm{Si}\,\beta \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' + \mathrm{Co}\,\beta \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha + t)] \qquad 1$$

während (vgl. dortige Fig.) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\beta &= \mathrm{Si}\,d' \cdot \mathrm{Co}\,a' \cdot \mathrm{Co}\,\theta'' - \mathrm{Si}\,a' \cdot \mathrm{Si}\,\theta'' \\ \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\beta &= \mathrm{Si}\,d' \cdot \mathrm{Si}\,a' \cdot \mathrm{Co}\,\theta'' - \mathrm{Co}\,a' \cdot \mathrm{Si}\,\theta'' \\ \mathrm{Si}\,z \cdot \mathrm{Co}\,\theta'' &= \mathrm{Si}\,d' \cdot \mathrm{Co}\,d'' - \mathrm{Co}\,d' \cdot \mathrm{Si}\,d'' \cdot \mathrm{Co}\,(a'' - a') \\ \mathrm{Co}\,z &= \mathrm{Si}\,d' \cdot \mathrm{Si}\,d'' + \mathrm{Co}\,d' \cdot \mathrm{Co}\,d'' \cdot \mathrm{Co}\,(a'' - a') \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Si}\,\beta &= -\mathrm{Co}\,d' \cdot \mathrm{Co}\,\theta'' \\ \mathrm{Si}\,z \cdot \mathrm{Si}\,\theta'' &= \\ &= \mathrm{Co}\,d'' \cdot \mathrm{Si}\,(a'' - a') \end{aligned} \qquad 2$$

bestehen. Da nun für jede Sternzeit t, zu welcher man ζ gemessen hat, nach 2 successive z, θ'', α und β berechnet werden können, so lässt sich π' aus jeder solchen Messung nach 1 bestimmen und aus den verschiedenen Werten ein ordentlicher Mittelwert für die Parallaxe erhalten, — zumal wenn man einen Stern in der Nähe des Wandelsternes wählt, um den störenden Einfluss der Refraktion auf ein Minimum zu reduzieren. — Vernachlässigt man die Veränderung der geocentrischen Coordinaten des Wandelsternes in der Zwischenzeit zwischen zwei unter gleichen Stundenwinkeln s **vor** und **nach** der Culmination gemessenen Distanzen ζ_1 und ζ_2, so behalten z, θ'', α, β für beide Beobachtungen dieselben Werte, während die entsprechenden Sternzeiten

$$t_1 = a' - s \qquad t_2 = a' + s \tag{3}$$

sind, und wenn man daher 1 für beide Beobachtungen aufschreibt, so erhält man durch Subtraktion

$$\zeta_1 - \zeta_2 = -2\pi' \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \,\mathrm{Co}\,\beta \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha + a') \cdot \mathrm{Si}\, s$$

oder mit Benutzung der 2, aus denen $\mathrm{Co}\,\beta \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha + a') = -\mathrm{Si}\,\theta''$ folgt,

$$\pi' = A \cdot \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} \qquad \text{wo} \qquad A = \frac{\mathrm{Si}\, z \cdot \mathrm{Se}\,\varphi' \cdot \mathrm{Se}\, d''}{\mathrm{Si}\,(a'' - a') \cdot \mathrm{Si}\, s} \tag{4}$$

woraus sich unter Zuziehung der 2 die Parallaxe in sehr einfacher Weise berechnen lässt, — am einfachsten allerdings, wenn Beobachter und Gestirne im Equator stehen, und bei Auf- und Untergang beobachtet wird, da diesem Falle $A = 1$ entspricht. — ***b.*** Natürlich lässt sich die Methode, die Parallaxe aus korrespondierenden Distanzmessungen zu bestimmen, auch ohne die für Aufstellung von 4 gemachten Annahmen durchführen, ja sie wird sogar, wenn man nicht der Eleganz der Formel die wertvollere Genauigkeit opfern will, ohne sie durchgeführt werden müssen. Ferner kann man, anstatt wie oben die Parallaxe aus der Parallaxe der Distanz zu bestimmen, dieselbe auch aus dem Einflusse auf die Rektascensionsdifferenz ableiten, besonders wenn der Vergleichstern im Parallel des Wandelsternes gewählt wird. — ***c.*** In letzterer Richtung ging nun **Cassini** vor, und fand so z. B. am 9. September 1672 unter Anwendung von $s = 4^h$ für Mars die ziemlich richtige Parallaxe von $24^3/_4{}''$, — am 17. September dagegen $27^1/_2{}''$, bei Aufführung letzterer Bestimmung jedoch in seinen „Elémens de l'astronomie vérifiez. Paris 1684 in fol." selbst bemerkend: „Elle devoit estre plûtot un peu plus petite que la précédente ($24^3/_4$), puisque Mars estait un peu plus éloigné de la terre; mais elle résulte un peu plus grande à cause de la difficulté extrême de déterminer ces différences avec la dernière précision", leider aber keine Angaben über die angewandten Instrumente und Rechnungsmethoden beifügend, sondern dafür auf seinen „Traité de la Comète de l'an 1680" verweisend, dessen ich bis jetzt nicht habhaft werden konnte. Es macht ihm diese Methode und deren für damalige Zeit gut gelungene Anwendung jedenfalls grosse Ehre, und trägt wohl auch mit Recht seinen Namen, obschon sich (vgl. Kästner IV 248) erste Spuren derselben schon bei **Tycho** und **Kepler** nachweisen lassen und wenig später auch **Flamsteed** (vgl. Ph. Tr. 1673) von derselben Gebrauch machte. — Zum Schlusse füge ich noch zur Ergänzung von 440 bei, dass das dort gelehrte Verfahren, die Parallaxe aus Differentialbeobachtungen im Meridiane zu bestimmen, sich mit geringen Abänderungen auch auf den Fall anwenden lässt, wo an zwei Stationen mit dem Mikrometerapparat eines parallaktisch montierten Fernrohrs ausserhalb des Meridianes Deklinationsdifferenzen zwischen dem Planeten und einem benachbarten Sterne gemessen worden sind: Bezeichnen nämlich wie damals $\triangle d_1$ und $\triangle d_2$ die gemessenen und für Refraktion bereits verbesserten Deklinationsdifferenzen, so besteht zwar die Beziehung

440 : 11'
$$\alpha = d_1 - d_2 - (\triangle d_1 - \triangle d_2) \qquad \mathbf{5}$$

noch ganz unverändert, aber es erleidet die durch 11'' eingeführte β für Bestimmungen ausser dem Meridiane eine wesentliche Abänderung, da man in diesem Falle (bei Vernachlässigung der Parallaxe in Rektascension in den Korrektionsgliedern) nach 435 : 13, 14

$$r_1 \pi_1 m_1 \cdot Si\,(d_1 - n_1) = \pi r_1 m_1 \cdot Si\,(d_1 - n_1) : \triangle_1$$
$$r_2 \pi_2 m_2 \cdot Si\,(d_2 - n_2) = \pi r_2 m_2 \cdot Si\,(d_2 - n_2) : \triangle_2$$

hat, wo

$$m_1 \cdot Si\, n_1 = Si\, \varphi_1' \qquad m_1 \cdot Co\, n_1 = Co\, \varphi_1' \cdot Co\,(a_1 - t_1)$$
$$m_2 \cdot Si\, n_2 = Si\, \varphi_2' \qquad m_2 \cdot Co\, n_2 = Co\, \varphi_2' \cdot Co\,(a_2 - t_2)$$

sind, und somit, wenn γ_1 und γ_2 durch

$$Tg\,\gamma_1 = Tg\,\varphi_1' \cdot Se\,(a_1 - t_1) \qquad Tg\,\gamma_2 = Tg\,\varphi_2' \cdot Se\,(a_2 - t_2) \qquad \mathbf{6}$$

eingeführt werden, nunmehr

$$\beta = \frac{r_1}{\triangle_1} \cdot \frac{Si\,\varphi_1' \cdot Si\,(\gamma_1 - d_1)}{Si\,\gamma_1} - \frac{r_2}{\triangle_2} \cdot \frac{Si\,\varphi_2' \cdot Si\,(\gamma_2 - d_2)}{Si\,\gamma_2} \qquad \mathbf{7}$$

hat, mit welchem neuen β die Parallaxe nach

$$\pi = \alpha : \beta \qquad \mathbf{8}$$

zu berechnen ist. Der Vorteil besteht eben darin, dass man die Messung an jedem Tage beliebig oft wiederholen, z. B. am ersten Orte m_1 und am zweiten Orte m_2 Daten erhalten, und sodann die Mittelergebnisse beider Serien in folgender Weise vergleichen kann: Man ermittelt für jede der erhaltenen Bestimmungen mit Hilfe von 6 die Grösse

$$c = \frac{r}{\triangle} \cdot \frac{Si\,\varphi' \cdot Si\,(\gamma - d)}{Si\,\gamma} \quad \mathbf{9} \qquad \text{und alsdann} \qquad d = D + \triangle d + c \cdot \pi \quad \mathbf{10}$$

erhält somit für die beiden Stationen die Tagesmittel

$$d_1 = D + \frac{1}{m_1} \cdot \Sigma \triangle d_1 + \frac{\pi}{m_1} \cdot \Sigma c_1 \qquad d_2 = D + \frac{1}{m_2} \cdot \Sigma \triangle d_2 + \frac{\pi}{m_2} \cdot \Sigma c_2 \quad \mathbf{11}$$

setzt nunmehr

$$\alpha = d_1 - d_2 - \left(\frac{\Sigma \triangle d_1}{m_1} - \frac{\Sigma \triangle d_2}{m_2}\right) \qquad \beta = \frac{\Sigma c_1}{m_1} - \frac{\Sigma c_2}{m_2} \quad \mathbf{12}$$

und berechnet schliesslich mit diesen Werten nach 8 den Wert der Parallaxe für den betreffenden Tag.

443. Die Bemühungen von Krosigk. — Eine neue Expedition, durch welche namentlich eine genauere Bestimmung der Mondparallaxe erhalten werden sollte, liess ein Liebhaber der Astronomie, der reiche Baron **Krosigk** [a], im Anfange des 18. Jahrhunderts auf seine Kosten unternehmen: Ein gewisser Peter **Kolb** sollte am Kap der guten Hoffnung während längerer Zeit die Culminationshöhen des Mondes bestimmen, während Wilhelm **Wagner** die correspondierenden Beobachtungen in Berlin zugeteilt wurden [b]. Da jedoch **Kolb** das auf ihn gesetzte Vertrauen in keiner Weise rechtfertigte, so brachte leider die Munificenz von **Krosigk** der Astronomie keinen irgendwie erheblichen Nutzen [c].

Zu 443: *a.* Bernhard Friedrich v. **Krosigk** (Magdeburg 1660? — Herxen in Holland 1714) lebte erst in Wolfenbüttel, dann in Berlin als Oberst und Geheimer Rat, liess sich 1705 an letzterm Orte unter Leitung von Gottfried Kirch eine Privat-Sternwarte bauen, und zog sich 1713 auf die ihm zugehörende Herrschaft Herxen zurück. — *b.* Peter **Kolb** (Dorflas bei Wunsiedel 1675 — Neustadt an der Aisch 1726; damals Hauslehrer bei Krosigk, später Rektor zu Neustadt) und Joh. Wilhelm **Wagner** (Heldburg in Franken 1681 — Berlin 1745; damals von Krosigk für seine Sternwarte berufen, später Akad. Berlin und Christfried Kirchs Nachfolger) waren Schüler von Georg Christoph Eimmart (vgl. 235), der als vorzüglicher Beobachter galt. — *c.* Als Hauptresultat ergab sich für die Perigeums-Parallaxe des Mondes der bei 6' zu grosse Wert von 67½', also eine schon für damals unverantwortlich schlechte Bestimmung, und es ist zu begreifen, dass der fleissige und an diesem Misserfolge unschuldige **Wagner** sich nur schwer und erst 1740 entschloss, in die Misc. Berol. eine „Brevis narratio de ratione ac methodo observationum astronomicarum auspiciis D. de Krosigk, Berolini et simul in Capite Bonæ Spei, per aliquot annos olim institutarum“ einzurücken. In dem dickleibigen Werke, das **Kolb** unter dem Titel „Caput bonæ spei hodiernum, d. i. Vollständige Beschreibung des Afrikanischen Vorgebürges der Guten Hoffnung. Nürnberg 1719 in fol. (holländ. Amsterdam 1727) ausgehen liess, findet sich (wohl aus guten Gründen) kein gehöriger Aufschluss über die eigentliche Mission, und auch was der Verfasser nach siebenjährigem Aufenthalt über Land und Leute beizubringen wusste, war begreiflicherweise unerheblich, da Lacaille, auf Grund an Ort und Stelle eingezogener Erkundigungen, erklärt: „Quoiqu'il en dise, il n'a fait aucun voyage dans l'intérieur du pays“.

444. Die Expedition von Lacaille. — Ganz anders gestaltete sich die Sache, als ein halbes Jahrhundert später **Lacaille** die Rolle am Kap und der junge **Lalande** diejenige in Berlin übernahm [a]. Nicht nur wurde die Mondparallaxe mit der grössten Sorgfalt ermittelt [b], sondern auch die Sonnenparallaxe unter Benutzung verschiedener europäischer Beobachtungsserien mehrfach bestimmt [c], ja der unermüdliche **Lacaille** fand noch Zeit, die bereits (424) besprochene Gradmessung auszuführen, die ebenfalls (186) schon erwähnte Durchmusterung des südlichen Himmels vorzunehmen, die, seinen alsbald (457) auseinander zu setzenden Arbeiten über die Refraktion zu Grunde liegenden Beobachtungen zu absolvieren, und überhaupt seine Expedition zu einer der fruchtbarsten aller Zeiten zu machen [d].

Zu 444: *a.* Als der treffliche **Lacaille** 1750 der Pariser Akademie die Wünschbarkeit einer Kap-Expedition für Revision des südlichen Himmels, genauere Parallaxenbestimmungen, etc., auseinandersetzte, erhielt er ihren vollen Beifall und bald auch von der Regierung die Zusage der ihm nötigen Unterstützung. Er forderte hierauf in seinem „Avis aux astronomes par M. de La Caille, à l'occasion des observations qu'il va faire, par ordre du roi, dans l'hémisphère austral. Paris 1750 in 4.“ die Astronomen zu den erforderlichen korrespondierenden Beobachtungen auf, — führte sodann von 1750 X 21 bis 1751 IV 19 die damals noch äusserst mühsame und für ihn wegen heftiger

Seekrankheit doppelt beschwerliche Reise nach dem Kap aus, — und liess sich dort sofort ein Lokal herrichten, um seine Sternuhr und einen dreifüssigen Quadranten, dem ein Hilfsfernrohr mit Rautenmikrometer (392) beigegeben war, aufstellen, d. h. seine Beobachtungen beginnen zu können. — Unterdessen reiste auch im Auftrage der Akademie der von seinem Lehrer **Lemonnier** zum europäischen Sekundanten Lacailles vorgeschlagene und mit dessen fünffüssigen Mauerquadranten, einem von 1742 datierenden Meisterstücke Jonathan **Sissons,** ausgerüstete, damals erst 18jährige Jérôme **Le Français**, seinem Namen ohne weitere Begründung und wahrscheinlich nur, um bessere Figur zu machen, „de **La Lande**" beifügend, nach Berlin ab, um nach dem von Lacaille entworfenen Programme zu beobachten, — wurde dort von Johannes **Kies** (Tübingen 1713 — ebenda 1781; damals Prof. math. und Dir. Obs. Berlin, später Prof. math. et phys. Tübingen) freundlich aufgenommen und in seiner Arbeit unterstützt, — durch **Euler** in der höhern Mathematik unterrichtet, — und durch **Maupertuis** in die bekannten Zirkel Friedrich des Grossen eingeführt. — Ferner ist beizufügen, dass der erwähnte „Avis" zur Folge hatte, dass auch Laurent **Béraud** (Lyon 1702 — ebenda 1777; Jesuit; Prof. math. Lyon und als solcher Lehrer von Lalande, Montucla, Bossut, etc.) in Lyon, — Jam. **Bradley** in Greenwich, — C. F. **Cassini** de Thury in Paris, — Augustin **Darquier** (Toulouse 1718 — ebenda 1802; reicher Privat-Astronom) und François-Philippe-Auguste **Garipuy** (Toulouse 1711 — ebenda 1782; Staatsbeamter und Besitzer einer Sternwarte) in Toulouse, — Augustin Nathanael **Grischow** (Berlin 1726 — Petersburg 1760; damals Prof. math. Berlin, später Prof. astr. Petersburg) auf der nahe im Meridiane des Kaps gelegenen livländischen Insel Oesel, — Pehr Vilhelm **Wargentin** (Sunne Prestgard auf Jemtland 1717 — Stockholm 1783; Sekr. Akad. Stockholm) in Stockholm, — und Eustachio **Zanotti** (Bologna 1709 — ebenda 1782; Prof. astr. Bologna) in Bologna, korrespondierende Beobachtungen anstellten. — *b.* Zur Berechnung benutzte **Lacaille** teils die im Eingange von 440 entwickelte Methode, welche ihm **Clairaut** empfohlen, aber wohl schon vor diesem **Tob. Mayer** aufgestellt hatte, — teils ein selbst ausgedachtes, dem ebenfalls in 440 gegebenen ähnliches Verfahren, welches ihn von der Voraussetzung gleichzeitiger Beobachtungen dispensierte, — und erhielt so im Mittel von 40 Einzelresultaten für die Polarparallaxe den Wert 56′ 56″, sowie daraus, unter der allerdings nicht sehr glücklichen Annahme von $1/200$ als Abplattung der Erde, für die Equatorealparallaxe den Wert 57′ 13″,1, welchen später Christian Friis Rottböll **Olufsen** (Kopenhagen 1802 — ebenda 1855; Prof. astr. und Dir. Obs. Kopenhagen), vgl. dessen „Untersuchungen über den Wert der Monds-Parallaxe, die aus den in der Mitte des vorigen Jahrhunderts angestellten korrespondierenden Beobachtungen abgeleitet werden kann (A. N. 326 von 1837)" durch Neuberechnung auf 57′ 2″,60 ± 0″,45 heruntersetzte. Das Verhältnis zwischen Radius und Polarparallaxe des Mondes bestimmte **Lacaille** zu

$$15' \; 0'' : 54' \; 41'' = 1 : 3{,}646 = 0{,}2743 : 1$$

während er den grössten Radius gleich 1010″ setzte. — *c.* Aus den im Herbst 1751 während der Opposition des Mars gemachten Vergleichungen desselben mit λ Aquarii erhielt **Lacaille** mit Benutzung von Stockholm im Mittel aus 27 Bestimmungen eine Sonnenparallaxe von 10″,20, und da ihm 4 Vergleichungen von b Aquarii mit der in unterer Konjunktion stehenden Venus, zu welchen er aus Greenwich korrespondierende Beobachtungen erhielt, den nur wenig grössern Wert 10″,38, dagegen einige am Kap und in Paris gelungene direkte

Vergleichungen der Sonne mit Arktur den etwas kleinern Wert 9",94 ergaben, so hielt er sich begreiflich zu dem Schlusse berechtigt, dass die Sonnenparallaxe kaum um ¼" von 10",20 abweichen werde. — *d.* Für weitern Detail auf die Schriften „**Lacaille**, Observations faites au Cap pour déterminer la parallaxe de la Lune, de Mars et de Vénus (Mém. Par. 1748, ausg. 1753), ferner: Sur la parallaxe de la Lune (Mém. Par. 1761), und: Journal historique du voyage fait au Cap de Bonne-Espérance. Paris 1763 in 12., — **Lalande**, Sur la détermination de la parallaxe de la Lune et de la courbure de la Terre entreprise au Cap de Bonne-Espérance et à Berlin (Mém. Berl. 1750, ausg. 1752), ferner: Sur la parallaxe de la Lune (Mém. Par. 1751 u. f.), und: De observationibus berolinensibus ad parallaxin Lunæ definiendem Epistola (Acta Erud. 1752), — **Bradley**, Observations à Greenwich correspondantes à celles de La Caille au Cap (Mém. Par. 1752), — **Garipuy**, Parallaxes de la Lune, de Mars et de Vénus (Mém. Toulouse 1754), — **Grischow**, Sermo de parallaxi coelestium corporum. Petropoli 1755 in 4., — **Wargentin**, Försök at determinera Solens parallaxis, genom correspondenta observationer pa planeten Mars hälne Ar 1751 vid Caput Bonae Spei af De la Caille och i Stockholm (Stockh. Hdl. 1756, 60), — E. **Zanotti**, Observationes in bononiensi specula habitæ A. 1751/2 ad investigandas Lunæ, Martis et Veneris parallaxes (Comm. Bon. 1757), — etc." verweisend, füge ich zum Schlusse noch bei, dass **Lacaille** seinen Aufenthalt am Kap auch zu verschiedenen grössern Exkursionen benutzte, um Land und Leute kennen zu lernen, — dass er sich 1753 neun Monate auf Mauritius aufhielt, um infolge erhaltener Ordre eine Karte dieser Insel aufzunehmen, — und dass er endlich 1754 VI 28 wohlbehalten wieder in Paris eintraf, um nun sofort an die Bearbeitung des gesammelten Materiales zu gehen.

445. Neuere verwandte Bestimmungen. — In der neuern Zeit wurden wiederholt günstige Mars-Oppositionen, sowohl in der ursprünglichen Weise (440—41) als nach der Methode von Cassini (442), mit bestem Erfolge zur Neubestimmung der Sonnenparallaxe benutzt [a], und ein ebensolcher war 1873 zu verzeichnen, als nach dem Vorschlage von **Galle** versucht wurde, Mars durch einen der kleinen Planeten zu ersetzen [b]. Eine in den Jahren 1849—52 unternommene amerikanische Expedition nach Chili, um dieselbe Grösse nach dem von **Gerling** entworfenen Plane aus Beobachtung von Venus-Stillständen zu erhalten, misslang dagegen wegen ungenügenden korrespondierenden Beobachtungen [c].

Zu 445: *a.* Unter einer „günstigen" Mars-Opposition versteht man natürlich eine solche, bei der Mars ($a' = 1{,}5237$, $e' = 0{,}0933$) zugleich nahe im Perihel, die Erde ($a = 1$, $e = 0{,}0168$) nahe im Aphel steht, also die Distanz Erde-Mars ihrem bei Vernachlässigung der Neigung der Marsbahn $a'(1 - e') - (1 + e) = 0{,}365$ betragenden Minimum nahe ist, während dieselbe bei andern Oppositionen bis auf $a'(1 + e') - (1 - e) = 0{,}673$ ansteigen kann. Eine solche wurde z. B. 1862 in Pulkowa (P), Greenwich (G), Williamstown in Australien (W) und am Kap (K) beobachtet, wobei sich nach den Rechnungen von Theodor **Winnecke** (Gross-Heere in Hannover 1835 geb.; damals Obs. Pulkowa, später bis zu seiner Erkrankung Dir. Strassburg) und E. J. **Stone** (vgl. A. N. 1409 von 1863 und Mem. Astr. Soc. Vol. 33) die Werte

P. K. 8″,964 ± 0,038 G. K. 8″,918 ± 0,014 G. W. 8″,930 ± 0,041

ergaben, deren Mittel 8″,937 sehr nahe mit dem (452) durch die theoretischen Untersuchungen geforderten Werte übereinstimmt. — *b.* **Galle** hatte nämlich die Genugthuung, dass nach seinem Vorschlage (A. N. 1879 von 1872) schon im Herbst 1873 während der perihelischen Opposition der Flora teils am Kap, in Cordoba und Melbourne, — teils in Clinton, Bothkamp, Leipzig, etc., zahlreiche Vergleichungen zwischen derselben und einem benachbarten Sterne gemacht wurden, aus welchen er (vgl. A. N. 2033 von 1875 und seine Specialschrift „Über eine Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen der Flora. Breslau 1875 in 8.“) den guten Wert $\pi = 8'',879 \pm 0'',040$ ableiten konnte, und es ist auch wirklich diese Methode darum sehr vorteilhaft, weil sich die kleinen Planeten sozusagen als Punkte präsentieren, und so eine ganze Reihe der bei Mars-Beobachtungen vorkommenden systematischen Fehler wegfällt. Man durfte somit wohl annehmen, dass der sich aus 8,937 und 8,879 ergebende Mittelwert

$$\pi = 8'',908$$

der Wahrheit sehr nahe kommen werde. — *c.* Wenn aus angegebenen Gründen die von James **Gilliss** (Georgetown in Columbia 1811 — Washington 1865; erster Superintendent des durch seine Bemühung entstandenen Naval Observatory in Washington) geleitete Expedition nach Chili für den Hauptzweck, die von **Gerling** (A. N. 599 von 1847) vorgeschlagene neue Methode zu prüfen und auszunutzen, so ziemlich resultatlos verlief, so verdankt man ihr wenigstens, wie die Publikation „The U. S. Naval astronomical expedition in the southern hemisphere during the years 1849—52. Washington 1855—59, 4 Vol. (1—3 und 6; 4 und 5, welche speciell die astronomischen Bestimmungen enthalten sollten, sind nie erschienen) in 4.“ zeigt, in anderer Richtung manche wertvolle Belehrung.

446. Die Durchgänge der untern Planeten. — In der neuern Zeit spielte ferner die Methode, aus partiellen Bedeckungen der Sonne durch einen der untern Planeten (voraus Venus) die Parallaxe der erstern zu bestimmen, eine so hervorragende Rolle, dass wir sowohl diesen Ereignissen, als ihrer Vorausbestimmung (447) und Verwerthung (448—51) auch hier einlässlich zu gedenken haben. — Vorerst ist zu erinnern, dass, wenn einer der untern Planeten zur Zeit seiner untern Konjunktion (276) nahe genug an einem seiner beiden Knoten in der Ekliptik steht, derselbe sich von der Erde aus gesehen als eine kleine dunkle Scheibe über die Sonne zu bewegen scheint oder ein sog. **Durchgang** dieses Planeten statt hat [a]. Bei Merkur sind nun solche Durchgänge ziemlich häufig und so auch seit 1631 vielfach beobachtet worden [b]; die Durchgänge der Venus sind dagegen selten, so dass seit 1639, wo ein erster gesehen wurde, bis auf die Gegenwart nur vier vorkamen und sich erst zu Anfang des neuen Jahrtausends wieder ein solcher ereignen wird [c].

Zu 446: *a.* Die Gesetze, nach welchen sich die Durchgänge folgen, hängen offenbar zunächst von dem Verhältnisse des siderischen Umlaufes zu dem synodischen Umlaufe ab, d. h. bei Merkur, wo dieselben 0,2408 und 0,3172 Jahre betragen, von

$$\frac{2408}{3172} = 1:[1, 3, 6, 1, 1, 2, \ldots] \rightleftharpoons \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{19}{25}, \frac{22}{29}, \frac{41}{54}, \frac{104}{137}, \ldots$$

bei Venus dagegen, wo sie 0,6152 und 1,5987 Jahre halten, von

$$\frac{6152}{15987} = 1:[2, 1, 1, 2, 29, 1, \ldots] \rightleftharpoons \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \frac{147}{382}, \frac{152}{395}, \ldots$$

ab, und es kehren daher die für Durchgänge in der Nähe desselben Knotens günstigen Bedingungen, da

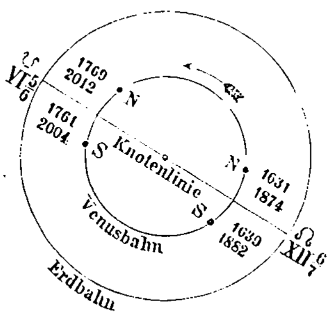
$0{,}2408 \times$	$29 =$	$6^{a},9832$	und	$0{,}3172 \times$	$22 =$	$6^{a},9806$
	54	13,0032			41	13,0052
	137	32,9896			104	32,9888

ist, bei Merkur schon nahe in 7, genauer in 13 oder 33 Jahren zurück, — bei Venus dagegen, weil

$0{,}6152 \times$	$13 =$	$7^{a},9976$	und	$1{,}5987 \times$	$5 =$	$7^{a},9935$
	382	235,0064			147	235,0089
	395	243,0040			152	243,0024

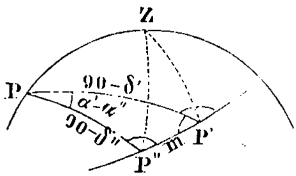
in 8., genauer in 235 oder 243 Jahren. Jedoch hängt das wirkliche Zustandekommen und der nähere Verlauf solcher Durchgänge auch von verschiedenen andern Umständen ab, welche bei jedem der beiden Planeten etwas verschieden sind, und so einzeln ins Auge gefasst werden müssen, wie dies unten für Venus kurz geschehen soll, während für den weniger wichtigen Merkur nur einige historische Nachrichten folgen werden. — *b.* Von den Durchgängen Merkurs, die natürlich jeweilen nur um den 9. November oder 7. Mai statthaben können, wo die Erde die Länge seines auf- oder absteigenden Knotens erreicht, und deren Wahrnehmung erst die Erfindung des Fernrohrs ermöglichte, so dass man eine Stelle in „Raffaele **Gualterotti** (Firenze 1543 — ebenda 1639; Philos. und Poet), Discorso sopra l'apparizione della nuova stella. Firenze 1605 in 4." wohl mit Unrecht auf eine solche beziehen wollte, wurde der erste, wie schon oben bemerkt, im Jahre 1631 wirklich gesehen: **Kepler** hatte, gestützt auf seine neuen Tafeln, in seiner „Admonitio ad astronomos rerumque coelestium studiosos de miris rarisque A. 1631 phænomenis, Veneris putà et Mercurii in Solem incursu. Lipsiæ 1629 in 4." denselben für den 7. November avisiert, und dem entsprechend wurde er dann auch von **Cysat** in Insbruck, von **Remus** zu Ruffach im Elsass, und von **Gassendi** in Paris beobachtet, ja letzterer widmete ihm eine eigene Schrift „Mercurius in Sole visus et Venus invisa A. 1631. Parisiis 1632 in 4." Seither wurde diese Konstellation, welche sich nach den Rechnungen von **Delambre** durchschnittlich in einem Jahrhundert 13 mal wiederholt, sehr häufig beobachtet, so z. B. 1677 XI 7 durch **Halley** auf St. Helena, wobei ihm (vgl. 448) der fruchtbare Gedanke auftauchte, dass solche Durchgänge zur genauern Bestimmung der Sonnenparallaxe verwendbar sein dürften, wie dies schon eingangs angedeutet wurde. — *c.* Auch die Durchgänge der Venus sind entsprechend an den 6./7. Dezember oder 5./6. Juni gebunden, wo die Erde die Länge ihres auf- oder absteigenden Knotens erreicht; dagegen können sie unter besonders günstigen Umständen von freiem Auge bemerkt werden und es ist daher die Angabe, es sei aus Bruchstücken assyrischer Schreibtäfelchen darauf zu schliessen, dass man schon im 16. Jahrhundert v. Chr. in Babylonien einen Venusdurchgang beobachtet habe, trotz aller (vgl. 272) in solcher Richtung vorgekommenen Täuschungen, nicht von vorneherein zu

verwerfen, zumal sich aus den unten zu entwickelnden Verhältnissen ergiebt, dass sich um 1528 und 1520 v. Chr. wirklich solche Durchgänge ereignet haben werden. Immerhin fällt die erste sichere Konstatierung einer betreffenden Konstellation, wie schon oben bemerkt, nicht vor das Jahr 1639 n. Chr.: Zwar hatte **Kepler** in seiner „Admonitio" bereits auf den 6. Dezember 1631 einen Venusdurchgang avisiert; aber derselbe gieng, wie schon der Titel der Gassendischen Schrift andeutet, ungesehen vorüber, da er, wie **Lalande** später nachwies, für Europa während der Nacht erfolgte, — und beinahe wäre auch derjenige vom 4. Dezember 1639 unbeachtet geblieben, denn es war nur ein glücklicher Zufall, dass Jeremias **Horrox** (Toxteth in Lancastershire 1619 — Hool bei Liverpool 1641; vgl. Opera posthuma, London 1678 in 4., und: Whatton, Memoir, London 1875 in 8.) auf diesen durch Kepler übersehenen Durchgang durch eigene, sich auf die Lansberg'schen Tafeln stützende Rechnung, noch rechtzeitig genug aufmerksam wurde, um ihn mit seinem Freunde William **Crabtree** (Brougthon bei Manchester 1620? — ebenda 1652) beobachten und diesen Vorgang in der Schrift „Venus in Sole visa (als Anhang zu „Hevel, Mercurius in Sole visus A. 1661. Gedani 1662 in fol." abgedruckt)" beschreiben zu können. Seither haben sich, wie schon oben bemerkt, noch vier solche Durchgänge ereignet, auf deren Beobachtung und Benutzung wir unter den nächstfolgenden Nummern einlässlich einzutreten haben werden, während hier noch der gerade durch sie repräsentierte eigentümliche Cyklus ins Auge gefasst werden soll, der sich mit Hilfe der oben entwickelten Zahlenverhältnisse in folgender Weise leicht ergiebt: Kommt nämlich Venus (wie dies 1631 der Fall war) kurz nach dem Durchgange durch den aufsteigenden Knoten in Konjunktion mit der Sonne, so wird sie auf derselben eine nördliche, — sodann (da $7^a,9935$ etwa um $2^1/_2{}^d$ kleiner als 8^a ist) nicht volle 8 Jahre später (wie es 1639 geschah) etwas vor dem Durchgange durch denselben (da die Breite der Venus sich in der Nähe des Knotens in $2^1/_2{}^d$ etwa um $^3/_4$ des Sonnendurchmessers verändert) eine südliche Sehne beschreiben, — in circa weitern 8 Jahren dagegen bei der Konjunktion noch zu tief stehen, um sich auf die Sonne projizieren zu können, — etc. Am Ende werden sich die Verspätungen der Konjunktion so anhäufen, dass dieselbe erst kurz nach dem Eintritte in den absteigenden Knoten statt hat, und zwar, da der unbestimmten Gleichung $a \cdot 395 = (b + {}^1/_2) \cdot 152$ als kleinste Werte in ganzen Zahlen $a = 76$ und $b = 197$ entsprechen und $76 \times 1,5987 = 121^1/_2 = 197^1/_2 \times 0,6152$ ist, nach $121^1/_2$ Jahren, so dass nun (wie 1761) wieder ein Durchgang mit südlicher Sehne statt hat, dem sodann (wie 1769) in 8 Jahren ein solcher mit nördlicher Sehne folgt. Hiemit sind aber von den 243^a, welche sich oben für den grossen Cyklus ergeben haben, bereits $8 + 121^1/_2 + 8 = 137^1/_2{}^a$ verflossen; es bleiben also noch $105^1/_2{}^a$ übrig, nach deren Ablauf (wie 1874) eine neue Folge beginnt, — etc.



447. Die Vorausberechnung der Durchgänge. — Die Vorausberechnung der bei dem Durchgange eines der untern Planeten zunächst in Betracht fallenden Zeiten und Stellen des Ein- und Austrittes lässt sich für einen im Erdcentrum gedachten Beobachter verhältnismässig leicht durchführen [a], und sodann ist es auch möglich, die Korrektionen zu finden, welcher jene Ergebnisse bedürfen, um sie auf einen wirklichen Beobachter von gegebener geographischer Lage überzutragen [b].

Zu 447: *a.* Bezeichnet m die der Zeit T entsprechende geocentrische Distanz zweier Gestirne P' und P'' der Rektascensionen α' und α'' und der Deklinationen δ' und δ'', und bilden ihre Deklinationskreise mit m die Winkel P' und P'', so hat man, wenn $P' + P'' = 2P$ und $\delta' + \delta'' = 2\delta$ gesetzt wird, nach den sog. Gauss'schen Formeln die Beziehungen



$$\begin{aligned} \operatorname{Si} \tfrac{1}{2} m \cdot \operatorname{Si} P &= \operatorname{Si} \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha'') \cdot \operatorname{Co} \delta \\ \operatorname{Si} \tfrac{1}{2} m \cdot \operatorname{Co} P &= \operatorname{Co} \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha'') \cdot \operatorname{Si} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'') \end{aligned} \qquad \mathbf{1}$$

in welchen aber in unserm Falle, wo es sich um den Durchgang eines der untern Planeten (P') durch die Sonne (P'') handelt, die m, $(\alpha' - \alpha'')$ und $(\delta' - \delta'')$ so klein sind, dass man jene Beziehungen füglich durch

$$m \cdot \operatorname{Si} P = (\alpha' - \alpha'') \cdot \operatorname{Co} \delta \qquad m \cdot \operatorname{Co} P = \delta' - \delta'' \qquad \mathbf{2}$$

ersetzen darf, und so z. B. für eine der Konjunktion nahe Zeit T_0, wenn die dieser Zeit entsprechenden Grössen ebenfalls mit dem Zeiger 0 versehen werden,

$$m_0 \cdot \operatorname{Si} P_0 = (\alpha_0' - \alpha_0'') \cdot \operatorname{Co} \delta_0 \qquad m_0 \cdot \operatorname{Co} P_0 = \delta_0' - \delta_0'' \qquad \mathbf{3}$$

hat. Ist nun $T = T_0 + \tau$, wo τ in Stunden ausgedrückt sein soll, die irgend einer Phase des Durchganges entsprechende Zeit, und sind a und d die Differenzen der stündlichen Änderungen der Æ und D der beiden Gestirne, so dass

$$\alpha' - \alpha'' = \alpha_0' - \alpha_0'' + a \cdot \tau \qquad \delta' - \delta'' = \delta_0' - \delta_0'' + d \cdot \tau \qquad \mathbf{4}$$

sind ferner s' und s'' die scheinbaren Halbmesser in Beziehung auf das Erdcentrum, so dass für die äussere oder innere Berührung $m = s'' \pm s'$ wird, so hat man nach 2 für diese Berührungen unter Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen $\operatorname{Co} \delta$ und $\operatorname{Co} \delta_0$

$$(s'' \pm s') \cdot \operatorname{Si} P = (\alpha_0' - \alpha_0'' + a \cdot \tau) \cdot \operatorname{Co} \delta_0 \qquad (s'' \pm s') \cdot \operatorname{Co} P = \delta_0' - \delta_0'' + d \cdot \tau$$

oder, wenn man

$$n \cdot \operatorname{Si} N = a \cdot \operatorname{Co} \delta_0 \qquad n \cdot \operatorname{Co} N = d \qquad \mathbf{5}$$

setzt, und 3 benutzt

$$(s'' \pm s') \cdot \operatorname{Si} P = m_0 \cdot \operatorname{Si} P_0 + n \cdot \operatorname{Si} N \cdot \tau \qquad (s'' \pm s') \cdot \operatorname{Co} P = m_0 \cdot \operatorname{Co} P_0 + n \cdot \operatorname{Co} N \cdot \tau \qquad \mathbf{6}$$

oder endlich, wenn man $6' \cdot \operatorname{Co} N - 6'' \cdot \operatorname{Si} N$ und $6' \cdot \operatorname{Si} N + 6'' \cdot \operatorname{Co} N$ bildet,

$$(s'' \pm s') \cdot \operatorname{Si}(P - N) = m_0 \cdot \operatorname{Si}(P_0 - N) \qquad (s'' \pm s') \cdot \operatorname{Co}(P - N) = m_0 \cdot \operatorname{Co}(P_0 - N) + n \cdot \tau \qquad \mathbf{7}$$

Setzt man daher

$$\operatorname{Si} \psi_1 = m_0 \cdot \operatorname{Si}(P_0 - N) : (s'' + s') \qquad \operatorname{Si} \psi_2 = m_0 \cdot \operatorname{Si}(P_0 - N) : (s'' - s') \qquad \mathbf{8}$$

so hat man nach 7''

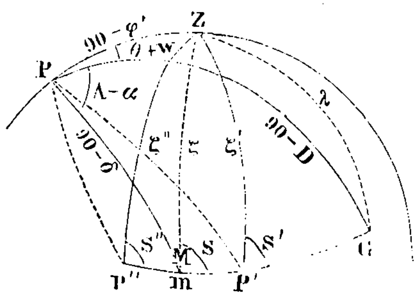
$$\tau = \frac{s'' \pm s'}{n} \cdot \operatorname{Co}(P - N) - \frac{m_0}{n} \cdot \operatorname{Co}(P_0 - N) \qquad \mathbf{9}$$

wo in beiden Fällen (wegen der Zweideutigkeit des Sinus) P − N nach 7' entweder gleich ψ oder gleich $180^0 - \psi$ ist. Da der zweite dieser Werte das erste Glied von τ negativ macht, so entspricht er offenbar dem Eintritte, der erste dagegen dem Austritte, so dass für die 4 Berührungen, nämlich die

erste äussere	$T = T_0' - (s'' + s') \cdot Co\, \psi_1 : n$		$P = N + 180^0 - \psi_1$	
erste innere	$- (s'' - s') \cdot Co\, \psi_2 : n$	**10**	$+ 180^0 - \psi_2$	**11**
letzte innere	$+ (s'' - s') \cdot Co\, \psi_2 : n$		$+ \psi_2$	
letzte äussere	$+ (s'' + s') \cdot Co\, \psi_1 : n$		$+ \psi_1$	

wird, wo $$T_0' = T_0 - m_0 \cdot Co\,(P_0 - N) : n \qquad \mathbf{12}$$

die Zeit der Mitte des Durchganges oder der kürzesten Distanz der Mittelpunkte der beiden Gestirne bezeichnet, und der Positionswinkel P vom Nordpunkte der Sonnenscheibe nach Osten zu zählen ist. — *b.* Um die Durchgangserscheinungen für einen Punkt an der Erdoberfläche vorauszubestimmen, seien φ und w dessen geographische Breite und Länge, φ' und ϱ dessen geocentrische Coordinaten, während m' die Distanz bezeichne, welche an ihm die beiden Gestirne P' und P'' zu derselben Zeit zeigen, wo sie die geocentrische Distanz m besitzen. Haben nun zu dieser Zeit T die beiden Gestirne die geocentrischen Zenitdistanzen ζ' und ζ'', so sind nach 435, wenn π' und π'' die Parallaxen bezeichnen und je im Korrektionsgliede der Unterschied $\varphi - \varphi'$ vernachlässigt wird, die entsprechenden scheinbaren Zenitdistanzen gleich $\zeta' + \varrho \cdot \pi' \cdot Si\, \zeta'$ und $\zeta'' + \varrho \cdot \pi'' \cdot Si\, \zeta''$, und man hat daher, wenn $m' = m + dm$ ist, nach der Fehlergleichung 92 : 1, bei Vernachlässigung des minimen Einflusses der Parallaxe auf den die Differenz der Azimute darstellenden Winkel P' Z P'',



$$m' - m = dm = Co\,S'' \cdot d(ZP'') - Co\,S' \cdot d(ZP') = \varrho\,[\pi'' \cdot Si\,\zeta'' \cdot Co\,S'' - \pi' \cdot Si\,\zeta' \cdot Co\,S'] \qquad \mathbf{13}$$

Nun folgen aber (90 : 3), wenn M die Mitte zwischen P' und P'' bezeichnet, aus den Dreiecken Z M P' und Z M P''

$$Si\,\zeta' \cdot Co\,S' = Si\,\zeta \cdot Co\,{}^1\!/_2\,m \cdot Co\,S - Co\,\zeta \cdot Si\,{}^1\!/_2\,m$$
$$Si\,\zeta'' \cdot Co\,S'' = Si\,\zeta \cdot Co\,{}^1\!/_2\,m \cdot Co\,S + Co\,\zeta \cdot Si\,{}^1\!/_2\,m$$

also nach 13, wenn g und γ durch

$$g \cdot Si\,\gamma = (\pi' + \pi'') \cdot Si\,{}^1\!/_2\,m \quad g \cdot Co\,\gamma = (\pi' - \pi'') \cdot Co\,{}^1\!/_2\,m \quad \text{so dass } g > \pi' - \pi'' \qquad \mathbf{14}$$

eingeführt werden,

$$\begin{aligned} m' - m &= \varrho\,[(\pi' + \pi'') \cdot Si\,{}^1\!/_2\,m\,Co\,\zeta - (\pi' - \pi'') \cdot Co\,{}^1\!/_2\,m \cdot Si\,\zeta \cdot Co\,S] \\ &= g \cdot \varrho \cdot [Si\,\gamma\,Co\,\zeta - Co\,\gamma \cdot Si\,\zeta \cdot Co\,S] \end{aligned} \qquad \mathbf{15}$$

Verlängert man aber P'' P' bis G, wo $MG = 90^0 + \gamma$ sein soll, so folgt aus dem dadurch bestimmten Dreiecke M Z G

$$Co\,\lambda = Co\,\gamma \cdot Si\,\zeta \cdot Co\,S - Si\,\gamma \cdot Co\,\zeta \qquad \mathbf{16}$$

und man hat daher statt 15 die einfache Beziehung

$$m' = m - g \cdot \varrho \cdot Co\,\lambda \qquad \mathbf{17}$$

welche **Chauvenet** (Astr. I 595) auf diese hübsche Weise, dagegen allerdings (vgl. 436 : 17) schon **Lagrange** für $\varrho = 1$ abgeleitet hat. Sie zeigt, dass, abgesehen von der kleinen Verschiedenheit wegen ϱ, die sog. **Parallaxe der**

Distanz $m' - m$ für alle Punkte der Erde, deren Zenit von G denselben Abstand besitzt, auch den gleichen Betrag hat. — Bezeichnen A und D Rektascension und Deklination dieses merkwürdigen Punktes G, so erhält man, da M sehr nahe die Coordinaten $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha'')$ und $\delta = \frac{1}{2}(\delta' + \delta'')$, sowie $\angle$ P M G sehr nahe den Wert $P = \frac{1}{2}(P' + P'')$ hat, aus Dreieck P M G

$$\begin{aligned} &\mathrm{Co\,D} \cdot \mathrm{Si}\,(A - \alpha) = \mathrm{Co}\,\gamma \cdot \mathrm{Si\,P} && \text{wo} \quad f \cdot \mathrm{Si\,F} = \mathrm{Si}\,\gamma \\ &\mathrm{Co\,D} \cdot \mathrm{Co}\,(A - \alpha) = -f \cdot \mathrm{Si}\,(F + \delta) && \phantom{\text{wo}} \quad f \cdot \mathrm{Co\,F} = \mathrm{Co}\,\gamma \cdot \mathrm{Co\,P} \\ &\mathrm{Si\,D} = f \cdot \mathrm{Co}\,(F + \delta) && \end{aligned} \qquad \mathbf{18}$$

so dass A und D sehr leicht berechnet werden können. Ist ferner μ die der Zeit T am Ephemeridenort entsprechende Sternzeit, und setzt man $\theta = \mu - A$, so ist $\angle$ G P Z (da die Sternzeit für unsern Ort gleich $\mu + w$ ist) als Ortsstundenwinkel von G gleich $\mu + w - A = \theta + w$, also folgt, da $PZ = 90^0 - \varphi'$ ist, aus Dreieck P Z G

$$\mathrm{Co}\,\lambda = \mathrm{Si}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si\,D} + \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co\,D} \cdot \mathrm{Co}\,(\theta + w) \qquad \mathbf{19}$$

wonach nun λ, folglich nach 17 auch m' wirklich berechnet werden kann. — Bezeichnet T' die Zeit, zu welcher an unserm Orte dieselbe Phase statt hat, welche geocentrisch zur Zeit T eintritt, so ist also z. B., wenn der Zeit T die geocentrische Distanz $m = s'' \pm s'$ entspricht, zur Zeit T' die scheinbare Distanz (abgesehen von der zu vernachlässigenden Veränderung der Radien) ebenfalls $m' = s'' \pm s'$. Ist somit $dm : dt$ die Veränderung von m in einer Zeiteinheit, so ist die geocentrische Distanz zur Zeit T' offenbar $m = m' + (T' - T) \cdot dm : dt$, also muss nach 17

$$(T' - T)\, dm : dt = g \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\lambda \qquad \mathbf{20}$$

sein. Aus 2 folgen aber durch Differentiation mit Hilfe von 5

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} \cdot \mathrm{Si\,P} + \frac{dP}{dt} \cdot m \cdot \mathrm{Co\,P} &= \frac{d\,(\alpha' - \alpha'')}{dt} \cdot \mathrm{Co}\,\delta = a \cdot \mathrm{Co}\,\delta_0 = n \cdot \mathrm{Si\,N} \\ \frac{dm}{dt} \cdot \mathrm{Co\,P} - \frac{dP}{dt} \cdot m \cdot \mathrm{Si\,P} &= \frac{d\,(\delta' - \delta'')}{dt} \phantom{\cdot \mathrm{Co}\,\delta} = d \phantom{\cdot \mathrm{Co}\,\delta_0} = n \cdot \mathrm{Co\,N} \end{aligned}$$

oder, indem man die erstere dieser Gleichheiten mit Si P, die zweite mit Co P multipliziert, und dann beide addiert, sowie schliesslich die aus 7' und 8' gezogenen Schlüsse benutzt,

$$dm : dt = n \cdot \mathrm{Co}\,(P - N) = \mp n \cdot \mathrm{Co}\,\psi \qquad \mathbf{21}$$

wo das obere Zeichen für den Eintritt, das untere für den Austritt gilt. Man hat also nach 20, 14 und 19

$$T' = T \mp \frac{g \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\lambda}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} = T \mp \mathbf{A} \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' \mp \mathbf{B} \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(\theta + w) \qquad \mathbf{22}$$

wo

$$\mathbf{A} = \frac{\pi' - \pi''}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \cdot \mathrm{Si\,D} \qquad \mathbf{B} = \frac{\pi' - \pi''}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \cdot \mathrm{Co\,D} \qquad \mathbf{23}$$

Nach diesen, in der Reihenfolge 3, 5, 8, 12, 10, 11 für die geocentrischen, und 14, 18, 23, 22 für die lokalen Erscheinungen zu benutzenden Formeln, erhielt ich seiner Zeit für den Venusdurchgang von 1882 XII 6, unter Benutzung der Angaben des Naut. Alm., für die vier Hauptphasen die Schlussformeln

$$\left.\begin{aligned} T' &= 1^h\, 55^m\, 55^s + 2{,}54701^s \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' - 2{,}48164 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(w - 88^0\, 25') \\ &= 2\ \ 16\ \ 15 + 2{,}59455 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' - 2{,}47983 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(w - 86\ \ 25) \\ &= 7\ \ 51\ \ 41 - 2{,}31298 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' + 2{,}63665 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(w - 138\ \ 25) \\ &= 8\ \ 12\ \ \ 1 - 2{,}23951 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' + 2{,}63468 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(w - 134\ \ 46) \end{aligned}\right\} \mathbf{24}$$

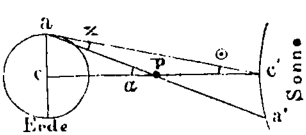
und nach diesen z. B. für Zürich ($\varrho = \overline{9{,}99921}$, $\varphi' = 47^0\ 11'\ 12''$, $w = 0^h\ 24^m\ 51^s + 9^m\ 22^s = 8^0\ 33'\ 15''$)

$T' = 1^h\ 59^m\ 37^s$	$2^h\ 20^m\ 20^s$	$7^h\ 46^m\ 7^s$	$8^h\ 7^m\ 1^s$	Gr.
$= 2\ \ 33\ \ 50$	$2\ \ 54\ \ 33$	$8\ \ 20\ \ 20$	$8\ \ 41\ \ 14$	Z.

wobei aber im günstigsten Falle nur die zwei ersten zu sehen gewesen wären, da die Sonne schon lange vor dem Austritte unterging, — in Wirklichkeit aber wegen bedecktem Himmel ebenfalls nicht beobachtet werden konnten: Venus wurde von mir nur zwei Mal je einen Moment vor der Sonne gesehen, — etwas vor dem vollständigen Eintritte und wieder etwas nach demselben, doch immerhin so, dass die Vorausberechnung richtig zu sein schien.

448. Die Methoden von Halley und Delisle. — Bei Anlass eines 1677 von **Halley** während seines zur Revision des südlichen Himmels bestimmten Aufenthaltes auf St. Helena beobachteten Merkurdurchganges kam derselbe auf den Gedanken, dass man durch Vergleichung der beobachteten Verweilung des Planeten auf der Sonne mit der aus den Tafeln für das Erdcentrum berechneten oder noch besser mit der an einem andern Orte ebenfalls beobachteten Verweilung die Sonnenparallaxe berechnen könnte [a], — und bei weiterer Ueberlegung zeigte sich ihm, dass bei Anwendung der Venus [b], und bei richtiger Auswahl der Stationen [c], sogar auf diese Weise eine sehr gute Bestimmung erhalten werden dürfte, so dass er schon 1691 und dann namentlich 1716 den spätern Geschlechtern dringend empfahl, die bevorstehenden Venusdurchgänge in dieser Weise auszunutzen [d]. Später wurde sodann diese Methode durch Joseph-Nicolas **Delisle** [e] noch wesentlich vervollständigt, indem derselbe zeigte, dass auch vereinzelte Beobachtungen einer bestimmten Phase des Durchganges brauchbar seien, sobald sie an wenigstens zwei Orten gelingen [f].

Zu 448: *a.* Die Grundidee der mutmasslich schon **Kepler** bei Abfassung seiner „Admonitio" vorschwebenden, jedenfalls spätestens durch Jam. **Gregory** in seiner „Optica promota. London 1663 in 4." angedeuteten, aber doch erst durch **Halley** in lebensfähige Form gebrachten neuen Methode der Parallaxenbestimmung ist folgende: Wenn einer der untern Planeten bei P zwischen Sonne und Erde steht, so wird er sich von c aus in c', von a aus aber in a' auf die Sonne projizieren, so dass die Relationen

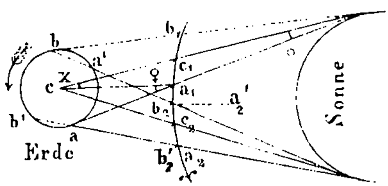


$$x = \alpha - \odot \qquad x : \alpha = Pc' : cc' \qquad x : \odot = Pc' : Pc$$ 1

bestehen, — also, wenn aus der Theorie das Verhältnis von Pc' zu cc' oder Pc bekannt ist, durch Bestimmung von x wirklich α und $\odot$ erhalten werden können. Dabei wird x, das offenbar dem scheinbaren Abstande der durch P beim Vorübergange für a und c beschriebenen Sonnen-Sehnen entspricht, sich in der Weise finden lassen, dass man in a die Ein- und Austrittszeit von P beobachtet, für c dagegen diese Zeiten mit Hilfe der Tafeln berechnet, und analog wie beim Kreismikrometer (395) aus den in Zeitdifferenzen liegenden Massen der Sehnen auf ihren Abstand schliesst. — *b.* So fand **Halley**, wie er selbst in einem Anhange zu seinem „Catalogus stellarum australium (616)" erzählt, dass der von ihm 1677 X 28 a. St. beobachtete Merkurdurchgang $5^h\, 14^m\, 20^s$ in Anspruch genommen habe, und schloss daraus unter Benutzung der von Th. **Streete** in seiner „Astronomia carolina (10)" gegebenen, aber allerdings noch sehr unvollkommenen Tafeln, dass $x = 21''$ und $\odot = 45''$ sein müsse, — ein Ergebnis, das allerdings viel zu wünschen übrig liess, aber wohl beträchtlich besser ausgefallen sein würde, wenn ihm korrespondierende Beobachtungen zur Verfügung gestanden hätten, geschweige wenn statt eines Merkurdurchganges ein Venusdurchgang vorgelegen wäre. Da nämlich für Merkur $Pc' \fallingdotseq 0{,}387 \cdot cc'$, für Venus dagegen $Pc' \fallingdotseq 0{,}723 \cdot cc'$ ist, so hat man nach 1, wenn sich x' auf ☿, x" auf ♀ bezieht,

$$\odot = \frac{613}{387} \cdot x' \fallingdotseq \frac{8}{5}\, x' \qquad \odot = \frac{277}{723} \cdot x'' \fallingdotseq \frac{5}{13}\, x''$$

und es ist daher ♀ für diese Bestimmung nahe $^8/_5 : {}^5/_{13} \fallingdotseq 4$ mal günstiger als ☿, was auch **Halley** einsah und darum schon damals die Astronomen auf den Venusdurchgang von 1761 vertröstete. — *c.* Ebenso sah **Halley** ganz gut ein, dass für korrespondierende Beobachtungen die Auswahl der Beobachtungsorte sehr wichtig sei, indem man dadurch die eine Verweilung erheblich verkürzen, dagegen die andere verlängern, und so den Einfluss der Parallaxe stärker hervortreten lassen könne: Von c aus sieht man nämlich die Venus in die Sonne eintreten, wenn sie in den Punkt c_1 ihrer Bahn gekommen ist, und austreten in c_2, — von a und b aus bei ruhender Erde eintreten in a_1 und b_1, austreten in a_2 und b_2, so dass die Bogen $a_1 a_2 \fallingdotseq c_1 c_2 \fallingdotseq b_1 b_2$; kömmt aber während dem Durchgange, infolge der Rotation der Erde, a nach a' und b nach b',



so scheint für a' die Venus **schon** in a_2', für b' aber **erst** in b_2' auszutreten, und es ist sehr merklich $b_1 b_2' > a_1 a_2'$. Während somit z. B. für einen dem Equator nahen Punkt durch die Erdrotation die Verweilung verkürzt wird, so nimmt sie dagegen für einen Punkt auf der Mitternachtsseite des beleuchteten Poles (wo man den Eintritt Abends vor Sonnenuntergang und den Austritt Morgens nach Sonnenaufgang beobachten kann) infolge derselben zu. — *d.* Vgl. **Halleys** Abhandlungen „De visibili conjunctione inferiorum planetarum cum Sole (Ph. Tr. No. 193 for 1691 III—VI, jedoch Bestandteil des erst 1694 vollständig erschienenen Vol. 17 for 1693, und so oft falsch citirt), und: Methodus singularis quæ Solis parallaxis, ope Veneris intra Solem conspiciendæ, tuto determinari poterit (Ph. Tr. 1716)". — *e.* Joseph Nicolas **Delisle** (Paris 1688 — ebenda 1768) war Akad. Paris, brachte aber die Jahre 1725—47 in Petersburg zu, wohin ihn sein jüngerer Bruder Louis (Paris 1690? — Awatscha in Kamtschatka 1741) begleitete, um von dort aus die nördlichsten Teile Russlands behufs Ortsbestimmungen zu bereisen. Für einen ältern Bruder vgl. 218 : d. — *f.* Bezeichnen T_1 und T_2 die auf den Anfangsmeridian bezüglichen Zeiten, zu welchen geocentrisch dieselbe Phase beim Ein- und Austritte statt hat, T_1', T_1'', T_2', T_2'' aber die Ortszeiten, zu welchen sie von zwei Beobachtern unter den Längen w' und w" gesehen wird, so hat man nach 447 : 22'

$$T_1' - w' = T_1 - (\pi' - \pi'') \cdot \frac{\varrho' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_1'}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \qquad T_2' - w' = T_2 + (\pi' - \pi'') \cdot \frac{\varrho' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_2'}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi}$$
$$T_1'' - w'' = T_1 - (\pi' - \pi'') \cdot \frac{\varrho'' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_1''}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \qquad T_2'' - w'' = T_2 + (\pi' - \pi'') \cdot \frac{\varrho'' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_2''}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \qquad \mathbf{2}$$

Kann man nun aus den erhaltenen Beobachtungen nach der **Vorschrift von Halley** die Differenz k' der Verweilungen oder nach der **Annahme von Delisle** wenigstens die Differenz k'' zweier entsprechenden Phasenzeiten bestimmen, so hat man nach 2

$$k' = T_2'' - T_1'' - (T_2' - T_1') = m' \cdot (\pi' - \pi'')$$
$$k'' = T'' - T' = w'' - w' - m'' \cdot (\pi' - \pi'') \qquad \mathbf{3}$$

wo $$m' = \frac{\varrho''(\mathrm{Co}\,\lambda_1'' + \mathrm{Co}\,\lambda_2'') - \varrho'(\mathrm{Co}\,\lambda_1' + \mathrm{Co}\,\lambda_2')}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi}, \quad m'' = \frac{\varrho'' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda'' - \varrho' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda'}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \qquad \mathbf{4}$$

bekannte Grössen sind, — kann daher in beiden Fällen $\pi' - \pi''$, folglich auch, da aus der Theorie das den Distanzen reciproke Verhältnis $\pi' : \pi$ bereits bekannt ist, jede der beiden Parallaxen selbst berechnen, — und sodann schliesslich aus der einen oder andern von ihnen auch die der Distanz 1 entsprechende Sonnenparallaxe π ableiten. Die Halley'sche Methode hat vor der Delisle'schen den namentlich im vorigen Jahrhundert nicht zu übersehenden Vorzug, eine genaue Kenntnis der Längendifferenz der beiden Stationen nicht voraussetzen zu müssen.

449. Die Venusdurchgänge von 1761 und 1769. — Der Mahnruf von **Halley** wurde nicht vergessen, sondern man unternahm, als der erste der beiden auf 1761 und 1769 angesagten Durchgänge herannahte, ernstliche Vorbereitungen zu seiner Beobachtung [a], ja präparirte, weil man nicht überall alle Phasen zu sehen hoffen konnte und die besten Kombinationen ermöglichen wollte, mehrere Expeditionen in ferne Erdgegenden [b]. Trotzdem entsprach der Erfolg keineswegs den von **Halley** gehegten Erwartungen [c], indem man sich sogar eingestehen musste, nach 1761 über den Betrag der Sonnenparallaxe weniger zu wissen als man vorher zu wissen glaubte [d], und es ist als ein Glück im Unglücke zu betrachten, dass man sich durch diesen Misserfolg nicht entmutigen liess, sondern gegenteils alle Kräfte anspannte, um 1769 das erwünschte Ziel zu erreichen [e]. Es gelang dies dann auch wirklich in befriedigender Weise, indem sich im Mittel aus den (450) damals nach den verschiedensten Kombinationen und Rechnungsmethoden erhaltenen Werten die Sonnenparallaxe

$$\pi = 8'',681 + 0'',052$$

ergiebt, welche sich (452) unzweifelhaft der Wahrheit sehr nahe anschliesst [f].

Zu 449: *a.* Namentlich war **Delisle** in dieser Richtung unermüdlich und gab schon in seinem „Avertissement aux astronomes sur le passage de Mercure au devant du Soleil, qui doit arriver le 6 mai 1753. Avec une Mappemonde. Paris 1753 (24 p.) in 4.“, wo sich zum ersten Mal die in 436 besprochenen Kreise angewandt finden, — ganz besonders aber in seinem „Mémoire présenté au Roi le 27 avril 1760 pour servir d'explication à la Mappemonde présentée en même tems à sa Majesté au sujet du passage de Vénus sur le Soleil, que l'on attend le 6 juin 1761. Paris 1760 (8 p. in 4.)", wo er auch die oben (448) besprochene Möglichkeit hervorhob, korrespondierende Beobachtungen einzelner Phasen nutzbar zu machen, wertvolle Andeutungen über die zweckmässigste Auswahl der Stationen und das bei der Beobachtung einzuschlagende Verfahren gab. Ferner wird auf die betreffenden Abhandlungen der **Lalande** (Mém. Paris 1757), **Chabert** (dito), **Boscovich** (Ph. Tr. 1760), etc., verwiesen. — ***b.*** So reiste Joseph-Guillaume **Legentil** (Coutances in Normandie 1725 — Paris 1792; Akad. Paris; vgl. p. 358—72 der „Mémoires" von J. D. Cassini) schon 1759 nach Pondichery ab, wo er dann aber, infolge unglücklicher politischer Verhältnisse, nichts destoweniger erst nach dem Durchgange von 1761 landen konnte, und auch denjenigen von 1769 (wegen Wolken) vergeblich abwartete (vgl. „Voyage dans les mers de l'Inde. Paris 1778—81, 2 Vol. in 4."), — etwas später **Pingré** nach der östlich von Madagaskar gelegenen Insel Rodriguez (Mém. Par. 1761 und 1763), — **Maskelyne** nach St. Helena (Ph. Tr. 1761), — Anders **Planmann** (Hattula Socken 1724 — Pemar Prestgard 1803; Prof. phys. Abo) nach Cajaneburg in Nordschweden (Schwed. Abh. 1761), — **Chappe** d'Auteroche nach Tobolsk (vgl. „Voyage en Sibérie. Paris 1763, 3 Vol. in 4."), — Stephan **Rumovski** (Gouv. Wladimir 1734 — Petersburg 1812; Schüler von Euler; Prof. math. Petersburg) nach Selengisk an der Grenze der Mongolei (Nov. Comm. Petr. 11), — etc., und da im centralen Europa ebenfalls fast überall beobachtet wurde, so waren schliesslich, wenn auch durch Witterung und Zufälle aller Art manche Beobachtungen vereitelt wurden, immerhin 72 Stationen vorhanden, von welchen brauchbare Ergebnisse vorlagen. — ***c.*** Da aus 448 : f die Proportion $d\pi : \pi = dk' : k'$ folgt, — ferner k' bis auf mindestens 1500" gesteigert werden kann, — dagegen zur Zeit von **Halley** alle die kleinen störenden Einflüsse unbekannt waren, also von ihm angenommen werden durfte, dass die Unsicherheit dk' höchstens einige Sekunden betragen könne, — so war er nämlich zu der Hoffnung berechtigt, dass sich nach seiner Methode die Sonnenparallaxe mindestens bis auf $^1/_{100}$" genau bestimmen lassen werde. — ***d.*** Auch mit Ausschluss einzelner Daten, welche die Sonnenparallaxe verschwinden liessen oder bis auf 30" brachten, ergab die Berechnung gar nicht die gehoffte Übereinstimmung, indem z. B. **Pingré** (Mém. Par. 1761) $\pi = 10^1/_2$", **Short** (Ph. Tr. 1762) $\pi = 8^1/_2$", **Hornsby** (Ph. Tr. 1763) $\pi = 9^3/_4$", etc., erhielt. — ***e.*** Unter den auf diesen zweiten Durchgang vorbereitenden Publikationen hebe ich, ausser der mehrerwähnten Abhandlung **Lagranges** von 1766, teils die schon 1764 von **Lalande** nebst einer „Explication (26 p. in 4.)" ausgegebene, derjenigen von Delisle für 1761 entsprechende „Figure du passage de Vénus sur le disque du Soleil qu'on observera le 3 juin 1769", hervor, welche eine rasche Übersicht über den Verlauf der Erscheinung darbietet, — teils die von **Maskelyne** gegebenen „Instructions relative to the observations of the ensuing transit of Venus. London 1768 in 8.", in welchen unter anderm der bemerkenswerte Vorschlag gemacht wurde, ausser den Hauptphasen auch die kürzeste Distanz der Mittelpunkte und möglichst viele relative Venusörter zu bestimmen. — Von den für die Beobachtung selbst arrangierten Expeditionen erwähne ich diejenige, welche James **Cook** (Marton in Yorkshire 1728 — Owaihi 1779; britt. Marine-Kapitän) im Begleite von Ch. Green und D. Solander nach Otaheiti machte (Ph. Tr. 1771), — ferner diejenigen von **Pingré** nach St. Domingo (Mém. Par. 1770), von **Chappe** nach Kalifornien (vgl. die von J. D. Cassini aus dessen

Nachlass herausgegebene „Voyage en Californie. Paris 1772 in 4.“), von **Rittenhouse** nach Norriton (Amer. Tr. I), von **Planmann** nach Cajaneborg (Vetensk. Acad. Handl. 1769), von **Hell** im Begleite von Saynovizs und Borgreeving nach Wardoehuus in Norwegen (vgl. für dessen von Manchen als gefälscht, von Andern als berechtigt korrigiert betrachteten Beobachtungen, seine „Observatio transitus Veneris. Havniæ 1770 in 4.“, ferner „K. Littrow, Hell's Reise nach Wardoe. Wien 1835 in 8.“, etc.), — etc., wozu noch eine Reihe von Beobachtungsstellen aus Westeuropa, und dann namentlich ein in Russland durch **Euler** und seine Schule organisiertes grosses Beobachtungsnetz hinzukam (vgl. die „Collectio omnium observationum, quæ occasione transitus Veneris per Solem A. 1769 per Imperium russicum institutæ fuerunt. Petropoli 1770 in 4., — und: Christ. Mayer, Expositio de transitu Veneris. Petropoli 1769 in 4.“), so dass im ganzen, obschon auch da viele Beobachtungen durch die Witterung vereitelt wurden, bei 77 Stationen mit brauchbaren Ergebnissen vorlagen. — *f.* Das oben mitgeteilte Ergebnis von 1769 ist das Mittel aus den sofort von **Planmann**, **Lalande**, **Lexell**, **Hell**, **Maskelyne**, **Hornsby**, **Pingré** und **Duséjour** nach den verschiedensten Kombinationen und Methoden erhaltenen 8 Werten

8″,43 8″,50 8″,68 8″,70 8″,72 8″,78 8″,80 8″,84

(vgl. Ph. Tr., Mém. Par., Comm. Petr., Vet. Acad. Handl. und Eph. Vind. aus den Jahren 1769—74), deren Übereinstimmung damals als sehr befriedigend bezeichnet werden durfte.

450. Die Berechnung der Beobachtungen. — Anstatt in analoger Weise, wie es oben (448) gelehrt, ja auch unmittelbar nach Beobachtung der Venusdurchgänge von 1761 und 1769 fast ausschliesslich praktiziert wurde, die Stationen in geeigneter Art paarweise zusammenzustellen, aus jedem Paare nach den entwickelten Regeln die Sonnenparallaxe zu bestimmen, und schliesslich aus den erhaltenen Einzelwerten einfach (wie in 449) das Mittel zu ziehen, wurde schon von **Euler** und seiner Schule beliebt, solche Einzelrechnungen höchstens zur vorläufigen Orientierung auszuführen, dagegen für die definitive Bestimmung die zwischen den gegebenen, beobachteten und gesuchten Grössen bestehenden Beziehungen für jede einzelne Beobachtung aufzuschreiben, und sodann erst aus der Gesamtheit der so erhaltenen Bedingungsgleichungen die zur Bestimmung der Unbekannten nötige Anzahl sog. Normalgleichungen zu erstellen“. Die neuere Zeit hat dann allerdings diese Methode, namentlich in Beziehung auf die früher etwas willkürliche Bildung der Normalgleichungen, nach den Principien der Ausgleichungsrechnung (52) noch wesentlich verbessert, und es hat sich **Encke** das Verdienst erworben, die Gesamtheit der 1761 und 1769 erhaltenen Daten in dieser Weise nochmals zu bearbeiten, wobei sich der mit dem oben (449) gegebenen nahe zusammenstimmende, aber dennoch, wie wir jetzt (452) wissen, trotz dem grossen Rechnungsapparate etwas weniger gute Wert

$$\pi = 8'',578 \pm 0'',077$$

und damit zugleich ein neues Belege dafür ergab, dass man solche feinere Methoden in der Regel nur da mit Vorteil anwendet, wo auch entsprechend vollkommene und namentlich für eine richtige Gewichtsbestimmung genügende Daten vorliegen [b].

Zu 450: *a.* Für den Detail der Rechnung auf die bereits erwähnte „Collectio" von 1770 verweisend, füge ich bei, dass damals aus 17 Bedingungsgleichungen für die Sonnenparallaxe der mutmassliche, mit dem (449) aus den Einzelwerten gezogenen Mittel fast ganz übereinstimmende Wert $\pi = 8'',66$ erhalten wurde. — *b.* Für die **Encke** zu verdankenden Zusammenstellungen und Rechnungen auf dessen Schriften „Die Entfernung der Sonne von der Erde aus dem Venusdurchgange von 1761 hergeleitet. Gotha 1822 in 8., — und: Der Venusdurchgang von 1769. Gotha 1824 in 8." verweisend, bleibt beizufügen, dass der seither erschienenen Arbeit „Karl Rudolf **Powalky** (Neu-Dietendorf bei Gotha 1817 — Washington 1881; astr. Rechner in Berlin und Washington), Neue Untersuchung des Venusdurchganges von 1769. Kiel 1864 in 8." ebenfalls ein gewisses Verdienst nicht abzusprechen ist, zumal ihr Schlussresultat sich mit $\pi = 8'',832$ den neuesten Bestimmungen ganz vorzüglich anschliesst; aber da dieses Resultat nicht nur Folge der Anwendung neuer Tafeln und Ortsbestimmungen, sondern namentlich auch eines teilweise etwas willkürlichen Ausschlusses von Beobachtungen ist, so gewährt es doch auch nicht volle Befriedigung. Eine in der neuesten Zeit durch S. **Newcomb** unternommene ähnliche Arbeit soll als wahrscheinlichstes Resultat der beiden Durchgänge von 1761 und 1769 den Wert $\pi = 8'',79 \pm 0'',05$ ergeben haben.

451. Die Venusdurchgänge von 1874 und 1882. — Auch für die Beobachtung der Durchgänge von 1874 und 1882 fehlte es weder an Vorarbeiten und Besprechungen aller Art, noch an Ausrüstung zahlreicher Expeditionen in die entlegensten Gegenden, und man durfte hoffen, unter Benutzung der frühern Erfahrungen, Anwendung der vollkommensten Instrumente, Ausdehnung der Beobachtungen auf die ganze Zeit des Vorüberganges und Beiziehung der Photographie, wieder einen bedeutenden Fortschritt in der Kenntnis der Sonnenparallaxe zu machen [a]. Diese Hoffnung ging jedoch nur bis zu einem gewissen Grade in Erfüllung, indem sich sowohl in der Auffassung der Erscheinungen als bei den mikrometrischen Bestimmungen immer noch unerwartete Abweichungen zeigten, und auch die den photographischen Aufnahmen entnommenen Daten lange nicht die vermuthete Sicherheit besassen. Immerhin darf man annehmen, dass, wenn einmal das gewonnene grosse Beobachtungsmaterial einheitlich bearbeitet sein wird, ein ziemlich sicheres, mutmasslich sich von dem aus einer Reihe von Einzelbestimmungen erhaltenen Mittelwerte

$$\pi = 8'',885 \pm 0'',021$$

wenig entfernendes Schlussresultat erlangt werden kann".

Zu 451: *a.* Obgleich man zum voraus wusste, dass der im Dezember 1874 zu erwartende Venusdurchgang unter nicht sehr günstigen Verhältnissen verlaufen, in Europa mit Ausnahme von Unter-Italien und Griechenland gar nicht zu sehen sein werde, und man nur in Asien etwas lange, in Australien und den Südseeinseln etwas kurze Verweilungen erwarten könne, so wurden doch von Staats wegen bei 60 Expeditionen zu seiner Beobachtung ausgerüstet, um wenigstens über die Leistungsfähigkeit der neuern Beobachtungsmittel Erfahrungen sammeln, und diese sodann bei dem ohnehin weit günstigern und zugleich für unser Jahrtausend letzten Durchgange im Dezember 1882 verwerten zu können. Dank dieser grossen Anstrengung wurden dann auch, trotz der namentlich auf den sibirischen Stationen ungünstigen Witterung, zahlreiche Beobachtungen und viele, wenn auch grossenteils nicht sehr erfreuliche, Erfahrungen gesammelt wie z. B. die, dass an demselben Orte zwei mit wesentlich gleichen Instrumenten bewaffnete Beobachter den Zeitmoment derselben Phase bis auf 10 und mehr Zeitsekunden verschieden angaben, — oder wieder, dass die aufgenommenen Photographien lange nicht den auf sie gesetzten Hoffnungen entsprechen, indem nach **Hilfiker** (Bull. Neuch. 1882) der wahrscheinliche Fehler der aus einer Photographie bestimmten Distanz der Centra von ♀ und ⊙ bei fünf mal grösser ist als der aus einer mikrometrischen Messung gezogene, — ja **Tupman** bei Abnahme einer Anzahl englischer Photographien sogar zu der verzweifelten Ansicht gelangt sein soll, dass man die Anwendung der Photographie zu solchem Zwecke am besten geradezu verbieten würde. — Um die Ergebnisse von 1874 für 1882 möglichst nutzbar zu machen, versammelte sich im Oktober 1881 in Paris eine internationale Kommission, welche sich alsbald darüber einigte, dass es vor allem aus sehr wünschbar wäre, wenn sich, im Gegensatze zu 1874, die verschiedenen Staaten sowohl über die Auswahl der Stationen und Instrumente, als über die für die Beobachtungen und deren Bearbeitung zu erteilenden Instruktionen verständigen könnten. Speciell brach sich die Ansicht Bahn, dass die photographischen Aufnahmen in den Hintergrund zu treten haben, — dass für die während der ganzen Dauer des Durchganges vorzunehmenden Distanzbestimmungen die Fadenmikrometer mit den Doppelbildmikrometern nicht konkurrieren können und namentlich Heliometer zu empfehlen seien, — dass es wünschbar wäre, wenn die Ein- und Austritte wenigstens an einzelnen Stationen nach dem schon früher durch **Secchi** (vgl. Brief an Gautier von 1874 X 14 in Notiz 396) gemachten Vorschlage mit Hilfe des Spektroskopes beobachtet würden, — und dass für die gewöhnliche Beobachtung der Kontakte überall möglichst gleichartige Instrumente benutzt werden sollten. In Beziehung auf die schon von **Delisle**, gestützt auf Erfahrungen bei Merkurdurchgängen, in seinem „Avertissement" von 1753 angedeutete, und bei den bisherigen Venusdurchgängen vielfach Unsicherheiten in den Zeitangaben bewirkende, aber noch gegenwärtig weder durch Diffraktion noch sonst ganz genügend erklärte Erscheinung, dass der Planet in der Regel noch **nach** der ersten innern, und schon **vor** der zweiten innern Berührung wie durch eine, erst mehrere Sekunden später plötzlich reissende oder einige Sekunden zuvor plötzlich entstehende Brücke (ligament noir), einen sog. **Tropfen** (goutte), mit dem Sonnenrande verbunden erscheint, wurde endlich die Anweisung erteilt: „S'il se produit une goutte noire ou un ligament, les instants à noter sont **à l'entrée** celui de la rupture définitive, **à la sortie** celui de la première apparition du ligament“. — Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Besprechungen einen sehr günstigen Einfluss auf die Beobachtungen von 1882 ausübten, für welche, ausser zahlreichen europäischen und amerikanischen Sternwarten, nicht weniger als 38, meistenteils nach den nördlichsten und südlichsten Teilen Amerikas bestimmte Expeditionen in Aussicht genommen waren, obschon sich Russland, infolge der schlechten Rendite der 1874 für dasselbe weit über eine Million betragenden Unkosten, nicht an letztern beteiligte. Der Erfolg war dann auch, wie schon oben angedeutet wurde, ein ziemlich befriedigender. — *b.* In Beziehung auf den Durchgang von 1874 füge ich noch bei, dass vorläufig die Franzosen aus ihren damaligen Beobachtungen den Durchschnittswert $\pi = 8'',97$ erhielten, die Engländer $\pi = 8'',83$, die Deutschen $\pi = 8'',89$ und die Amerikaner $\pi = 8'',88$, was im Mittel $\pi = 8'',892 \pm 0'',029$ ergiebt, d. h. eine mit der oben als vorläufiges Resultat des Durchganges von 1882 über Erwarten gut übereinstimmende Zahl. — Die sichere Hoffnung aussprechend, dass der kürzlich S. **Newcomb** für die „Discussion of contact observations of Venus during its transits in 1874 and 1882“ zugesprochene Anteil an der grossartigen, von Miss **Bruce** zur Förderung astronomischer Untersuchungen gemachten Vergabung, wertvolle Aufschlüsse veranlassen werde, verweise ich zum Schlusse für weitern Detail auf „Victor-Alexandre **Puiseux** (Argenteuil in Seine-et-Oise 1820 — Frontenay im Dép. du Jura 1883; Prof. astr. und Akad. Paris), Note sur la détermination de la parallaxe du Soleil par l'observation du passage de Vénus en 1874 (Compt. r. 1869 und Conn. d. t. 1871, wo noch später mehrere betreffende Arbeiten von ihm folgten), — **Hansen**, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge. Leipzig 1870 in 4., — Edm. **Dubois**, Les passages de Vénus sur le disque solaire. Paris 1873 in 8., — F. **Schorr**, Der Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe am 9. Dezember 1874. Braunschweig 1873 in 8., — **Tacchini**, Il passagio di Venere sul Sole dall' 8/9 dicembre 1874 osservato a Muddapur nel Bengala. Palermo 1875 in 4., — **Airy**, Report on the telescopic observations of the transit of Venus 1874. London 1877 in 4., und: Account of observations of the transit of Venus 1874 XII 8 made under the authority of the british governement. London 1881 in 4., — Recueil de mémoires, rapports et documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil. Paris 1877—87, 3 Vol. in 4., — G. L. **Tupman**, On the photographs of the transit of Venus (Monthly Not. 38 von 1878), — L. **Weinek**, Die Photographie in der messenden Astronomie, insbesondere bei Venusvorübergängen. Halle 1879 in 4., — S. **Newcomb**, Observations of the transit of Venus 1874 XII 8/9 made and reduced under the direction of the commission created by congress. Washington 1880 in 4., — Conférence internationale du passage de Vénus: Procès-verbaux. Paris 1881 in fol., — C. F. **Pechüle**, Expédition danoise pour l'observation du passage de Vénus 1882. Copenhague 1883 in 8., — etc., etc.“

452. Andere Bestimmungen und letzte Resultate. — Auf einige untergeordnete Vorschläge zur Bestimmung der Sonnenparallaxe nicht näher eintretend [a], bleibt an die Beziehung zwischen derselben und der Erdmasse zu erinnern, welche schon **Newton** zur

Ermittlung dieser letztern benutzte, und sodann **Laplace** in für seine Zeit ganz berechtigter Weise umgekehrt anwandte, um erstere zu berechnen [b], — ferner an diejenige zwischen Sonnenparallaxe und Geschwindigkeit des Lichtes, welche, nachdem letztere, wie wir alsbald (467) hören werden, auf physikalischem Wege mit genügender Sicherheit ermittelt werden konnte, mit $\pi = 8'',788$ für erstere eine vorzügliche Kontrolbestimmung ergeben hat [c]. — Stellen wir zum Schlusse die erhaltenen neuern Bestimmungen der Sonnenparallaxe zusammen, so ergiebt sich aus

Oppositionen (445)	8″,908
Durchgängen (451)	885
Lichtgeschwindigkeit	788

so dass die Unhaltbarkeit des während vielen Decennien vorzugsweise benutzten Encke'schen Wertes erwiesen, sowie der frühere Widerspruch zwischen Bestimmungen aus Durchgängen und Oppositionen gehoben ist, und an den früher (271) mitgeteilten Werten von Sonnenparallaxe, Sonnendistanz und Sonnendurchmesser ohne Bedenken festgehalten werden kann [d].

Zu 452: ***a.*** Ich erwähne beispielsweise den (vgl. „Halley, Synopsis; éd. Lemonnier p. 67") von Nic. **Fatio** geäusserten Gedanken, es würde ein Komet, dessen Knoten nahe an die Erdbahn fällt, wenn zur Zeit seines Durchganges durch denselben die Erde gerade an der richtigen Stelle ihrer Bahn stehen würde, ein vortreffliches Mittel abgeben, um aus Bestimmung seiner Parallaxe die Sonnenparallaxe zu erhalten, — und verweise anderseits auf den von C. **Lagrange** in seiner Note „Détermination de la parallaxe solaire par les passages de la Terre sur le Soleil (Ciel et terre 1882)" gemachten originellen Vorschlag. — ***b.*** Bezeichnet m die Erdmasse in Teilen der Sonnenmasse, und $R = 1 : (\pi \cdot \mathrm{Si}\ 1'')$ die Entfernung der Sonne in Erdradien, so erhält man nach 270 : 4

$$\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{r \cdot \pi\ \mathrm{Si}\ 1''}\right)^3 : \left(\frac{T}{t}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \pi = \frac{1}{r \cdot \mathrm{Si}\ 1''} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{2/3} \cdot \sqrt[3]{m} \qquad \mathbf{1}$$

wo r die Distanz des Mondes in Erdradien bezeichnet, t und T aber die siderischen Umlaufszeiten von Mond und Erde sind, — und hieraus, für $r = 51805 : 859{,}43 = 60{,}278$, $t = 27{,}322$ und $T = 365{,}256$,

$$\pi = 607{,}48 \cdot \sqrt[3]{m} = \overline{2{,}783532} \cdot \sqrt[3]{m} \qquad \mathbf{2}$$

Setzt man hier, wie es zur Zeit von Newton (wo das Verhältnis von Erd- und Sonnen-Masse noch total unbekannt war, dagegen nach Richer (441) $\pi = 9^1/_2{}''$ angenommen werden konnte) gemacht werden musste, diesen letztern Wert ein, so erhält man $m = {}^1/_{261471}$, — während **Newton** selbst (der für r, t, T etwas andere Daten besass und Richers Bestimmung nicht kannte) erst, $\pi = 20''$ annehmend, $m = {}^1/_{28700}$, und später, $\pi = 10^1/_2{}''$ annehmend, $m = {}^1/_{169282}$ fand. Setzt man dagegen mit **Laplace**, der (vgl. Mém. Par. 1789) aus Pendelmessungen die Erdmasse ziemlich sicher bestimmt zu haben glaubte, während ihm die damaligen Annahmen für die Sonnenparallaxe noch etwas zweifelhaft erschienen, $m = {}^1/_{328266}$, so erhält man nach 2 den vorzüglichen Wert $\pi = 8'',81$, — während umgekehrt jetzt 2 für $\pi = 8'',9$ den Wert $m = {}^1/_{317998}$ ergiebt. — *c.* In der neuesten Zeit, wo sowohl (264) die Aberrationskonstante k, als (466—67) die Geschwindigkeit v des Lichtes, und (428) der Radius ϱ des Erdequators mit grosser Sicherheit bekannt sind, ist die Methode, die Sonnenparallaxe $\odot$ aus diesen Grössen zu bestimmen, sehr wertvoll: Bezeichnet nämlich u die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, $R = \varrho \cdot Ct\odot$ den Radius der Letztern und T die in mittlern Zeitsekunden ausgedrückte Länge des siderischen Jahres, so ist (264)

$$\operatorname{Tg} k = \frac{u}{v} = \frac{2 R \pi}{v \cdot T} = \frac{2 \pi \varrho}{v \cdot T \cdot \operatorname{Tg}\odot} \quad \text{oder} \quad \operatorname{Tg}\odot = \frac{2 \pi \varrho}{v \cdot T \cdot \operatorname{Tg} k} \qquad \mathbf{3}$$

und setzt man $\varrho = 6378{,}233^{km}$, $k = 20'',492$, $v = 300\,000^{km}$ und $T = 365{,}2564 \times 86400^s$, so erhält man nach 3 den schon oben mitgeteilten Wert $\odot = 8'',788$ für die Sonnenparallaxe. — *d.* Immerhin behält das, einen Auszug aus „J. B. **Listing**, Einige Bemerkungen die Parallaxe der Sonne betreffend (A. N. 2232 von 1878)“ bildende, jedoch wegen dem Encke'schen Werte rückwärts bis auf 8'',50 verlängerte Täfelchen

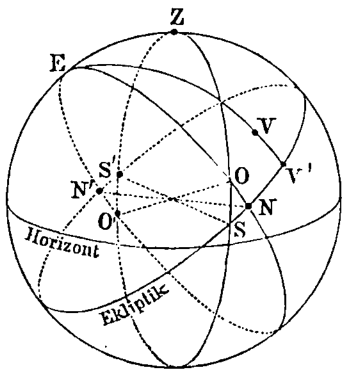
$\odot$	Mittl. Sonnendistanz in geogr. Meilen	Kilometern
8'',50	20 855475	154 756281
60	20 612970	152 956790
70	20 376030	151 198600
80	20 144490	149 480500
90	19 918150	147 801000
9,00	19 696840	146 158700

einen gewissen Wert, da sich an dasselbe gar manche Betrachtungen anknüpfen lassen. — Zum Schlusse mögen zur Ergänzung der betreffenden Litteratur noch die Schriften „J. D. **Cassini**, Histoire abrégée de la parallaxe du Soleil (Anhang zu „Chappe, Voyage“), — Jak. **Hilfiker**, Über die Bestimmung der Constante der Sonnenparallaxe, mit besonderer Berücksichtigung der Oppositionsbeobachtungen. Bern 1878 in 8., — F. **Tisserand**, Résumé des tentatives faites jusqu'ici pour déterminer la parallaxe du Soleil (Annal. de l'Observ. de Paris, Mém. 16 von 1882), — W. **Harkness**, The Solar Parallax and its related Constants. Washington 1891 in 4. (Auch Washington Observ. 1885 App. III), — etc.“ namhaft gemacht werden.

453. Die Vorgeschichte der Refraktionstheorie. — Die Existenz der astronomischen Strahlenbrechung soll schon **Archimedes** vermutet haben und ganz sicher ist, dass **Kleomedes**, der (135) überhaupt betreffende Einsichten besass, die Möglichkeit der sog. horizontalen Mondfinsternisse (463) auf dieselbe zurückführte, sowie dass **Ptolemäus**, dem wir ja auch (135) die ersten Brechungsversuche verdanken, bereits eine richtige Methode zu ihrer Bestimmung veröffentlichte, die jedoch mutmasslich erst durch **Alhazen** zur Anwendung gebracht wurde [a]. Nachdem sodann die Refraktion lange wieder fast unbeachtet geblieben war und nur **Walther** gegen das Ende des 15. Jahrhunderts durch einen Versuch, die störenden

Wirkungen derselben zu eliminieren, eine rühmliche Ausnahme gemacht hatte [b], ergab sich jedoch, als in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts die praktische Astronomie in Kassel und auf Hveen einen neuen Aufschwung nahm, die unabweisbare Notwendigkeit, derselben Rechnung zu tragen, ja es bemühten sich damals **Wilhelm** und **Tycho** in anerkennenswerter Weise, betreffende Hilfstafeln zu erstellen, wenn auch noch ohne grossen Erfolg, da ihnen das richtige Verständnis der Erscheinung fehlte [c].

Zu 453: *a.* Die auf **Archimedes** bezügliche Notiz soll in Theons Kommentar zur Optik des Ptolemäus (Ed. Halma I 28) vorkommen; jedoch dürfte es mit dieser Kenntnis nach dem damaligen Zustande der Dioptrik nicht weit her gewesen sein, — erwähnte ja noch ein Jahrhundert später der grosse **Hipparch** die astronomische Strahlenbrechung nicht einmal, geschweige, dass er sie berücksichtigte. Dagegen warf **Kleomedes** um die Mitte des ersten Jahrhunderts in seiner „Cyclica consideratio meteorum" (vgl. 4)" bei Erwähnung einer sog. horizontalen Mondfinsternis die seine betreffende Einsicht erweisende Frage auf: „Ist es nicht möglich, dass der Strahl, der vom Auge ausgeht, indem er eine feuchte, nebelichte Luftschichte durchschneidet, sich krümmt, und die Sonne über dem Horizonte erscheinen lässt? Dann würde das Phänomen dasselbe sein als das, wodurch man einen Ring am Boden eines Gefässes, der direkt nicht gesehen werden kann, durch hineingegossenes Wasser sichtbar macht". — Etwas mehr als ein Jahrhundert später schloss sodann **Ptolemäus** aus dem Umstande, dass man die Poldistanz eines Gestirnes bei seinem Auf- und Untergange merklich kleiner als bei seiner Culmination finde, ganz richtig auf die Existenz einer merklichen **Refraktion** des Lichtes durch die Atmosphäre, und lehrte, dass dieselbe vom Zenite, wo sie verschwinde, nach dem Horizonte hin beständig zunehme, wie man durch Vergleichung gemessener und berechneter Zenitdistanzen eines Gestirnes leicht konstatieren könne; jedoch sprach er hievon nur in seiner Optik und nicht im Almagest, — erwähnte auch keine Versuche wirklicher Bestimmung. — *b.* Bernh. **Walther** bemerkte, wie aus fol. 56 der „Scripta Regiomontani (389)" hervorgeht, bei seinen Beobachtungen wiederholt, dass die Gestirne schon etwas früher über dem Horizonte erscheinen als sie nach der Rechnung aufgehen sollten, und als er sodann später mit der Schrift von Alhazen bekannt wurde, ersah er nicht nur den Grund dieses Faktums, sondern auch die Notwendigkeit, **entweder** bei den Beobachtungen die Nähe des Horizontes zu vermeiden, **oder,** wo dies nicht angehe, die Wirkung der Refraktion bestmöglich zu eliminieren. Für letzteres ging er am 7. März 1489, wo er eine fundamentale Bestimmung der Länge des Regulus zu machen wünschte und dafür (372) kurz vor Sonnenuntergang mit einem ptolemäischen Astrolabium (386) den Längenunterschied von Sonne und Venus bestimmen wollte, in folgender Weise vor: Nachdem er sein Diopter auf die durch die Refraktion nach O gehobene Sonne S ge-



richtet hatte, fing er mit einem Lotfaden den nach O' gelangenden Sonnenstrahl auf, — bestimmte dann den senkrecht über O' liegenden Punkt S' der Ekliptik, — drehte nunmehr den Breitenkreis von N' nach S', also auch nach S, — und verglich schliesslich diese neue Lage mit der durch die Venus V führenden, wodurch er in der That, wenigstens innerhalb der durch die Operationsfehler bedingten Grenzen, den Einfluss der Refraktion eliminiert hatte. — *c.* Landgraf **Wilhelm** und **Tycho** konferierten wiederholt miteinander über die Refraktion, und gelangten Beide auf empirischem Wege dazu, erste Refraktionstafeln zu erstellen, welche allerdings noch sehr unvollkommen waren, wie das nebenstehende Specimen zeigt, in welchem zur Vergleichung die jetzt acceptierten Werte beigefügt sind. — Über die Kasseler Bestimmungen sagte **Rothmann** (vgl. Mitth. 45): „Wir haben aus vielen Beobachtungen gefunden, die Refraktion reiche bei heller Witterung nur bis zum 30. Grad, bei nebliger und russiger Luft (Höhenrauch) aber darüber hinaus, und **sie ändere mit dem Zustande der Atmosphäre.** Um aber ihren Betrag in den einzelnen Höhengraden zu finden, beobachteten wir nicht nur Fixsterne, sondern auch die Sonne. Wir berechneten für bestimmte Azimute mit Berücksichtigung der Parallaxe (⊙ = 3' nach Hipparch setzend) und der Änderung der Deklination die Höhen der Sonne (wegen ⊙ zu klein), und verglichen diese mit den beobachteten, woraus sich die Refraktion (also zu gross) ergab. Hierauf prüften wir die Sache an den Fixsternen durch Distanzbeobachtungen mit dem Sextanten in verschiedenen Höhen, etc.“ Obschon aber somit in Kassel eine richtige Methode befolgt wurde, waren die erhaltenen Werte noch so mangelhaft, dass sie nicht einmal die falsche Annahme für ⊙ deutlich erkennen liessen. — **Tycho** war auf den Einfluss der Refraktion zunächst dadurch aufmerksam geworden, dass er aus den beiden Culminationen des Polarsternes immer eine bei 4' grössere Polhöhe als aus den beiden Solstitialhöhen der Sonne fand, wie dies wirklich ohne Berücksichtigung derselben erfolgen musste. Zur Bestimmung wandte er (vgl. seine Progymnasmata) teils ebenfalls die in Kassel befolgte Methode an, teils verfolgte er die Gestirne mit einem 10-füssigen, um die Weltaxe drehbaren Kreise, von der Culmination bis zum Untergange, und erhielt etwas bessere Resultate als seine Kollegen in Kassel, während dagegen auch bei ihm noch keine gesunden Ansichten über das Wesen der Refraktion zum Durchbruche gelangten und ihn die erhaltenen Differenzen auf Rechnung der verschiedenen Natur der Gestirne setzen liessen.

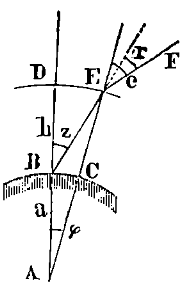
Höhe	Sonne		Mond	Sterne		Wirkliche Refraktion
	Wilhelm	Tycho	Tycho	Wilhelm	Tycho	
0°	—	34' 0"	33' 0"	—	30' 0"	34' 54"
5	9' 35"	14 30	14 20	9' 35"	10 0	9 46
10	4 5	10 0	10 45	3 50	5 30	5 16
15	2 0	7 30	8 0	1 35	3 0	3 32
20	1 0	4 30	5 30	0 45	0 0	2 37
25	0 35	2 30	3 20	0 20		2 3
30	0 10	1 25	1 40	0 0		1 40
45	0 0	0 5	0 0			0 58

454. Die Refraktionstafel Keplers. — Der erste Neuere, welcher für die Refraktion ein wirkliches Verständnis besass, war **Kepler**, und es gehört zu den ausgezeichnetsten Leistungen dieses genialen Mannes, dass er, obschon es ihm (135) nicht gelang, das hiefür absolut notwendig erscheinende Brechungsgesetz zu ermitteln, dennoch Mittel und Wege fand, eine ganz brauchbare Refraktionstafel zu berechnen [a].

Zu 454: *a.* Als **Kepler** die Refraktion in Kap. 4 seiner Schrift „Ad Vitellionem Paralipomena, quibus Astronomiæ pars optica traditur. Francofurti 1604 in 4." in Behandlung nahm, ging er von der Ansicht aus, dass dieselbe eine einfache Folge der Brechung des Lichtes in der Atmosphäre sei, behauptete so natürlich im Gegensatze zu Wilhelm und Tycho, dass weder Entfernung noch Glanz des Gestirnes Einfluss auf ihren Betrag haben werde, somit eine und dieselbe Tafel für alle Gestirne Geltung haben müsse, auch bis zum Zenit auszudehnen sei. Unter der vereinfachenden Annahme, dass die Atmosphäre überall gleich dicht und somit der Weg des Lichtes durch dieselbe eine Gerade sein werde, machte er zunächst verschiedene Versuche, ein einfaches Gesetz zu finden, welches die ihm bekannten Angaben über den Betrag der Refraktion in verschiedenen Höhen darstelle, — blieb endlich bei der Annahme stehen, dass, wenn e der Einfallswinkel, r die Refraktion und c eine Constante bezeichne,

$$r = c \cdot e \cdot \mathrm{Se}\,(e - r) \qquad \text{oder} \qquad c = r \cdot \mathrm{Co}\,(e - r) : e \qquad \mathbf{1}$$

sei, — und ging nun in folgender Weise vor: Ist F E B der Weg des Lichtes, a der Erdradius und h die Höhe der Atmosphäre, so folgt aus $\triangle$ A B E



$$\mathrm{Si}\,(e - r) = a \cdot \mathrm{Si}\,z : (a + h) \qquad \mathbf{2}$$

wo $a = 859$ M. und (223) $h = 12$ M. $= 0{,}01397 \cdot a$ zu setzen ist. Hieraus ergiebt sich aber für $z = 90^0$ der nach allen Erfahrungen viel zu kleine Wert $e - r = 80^0\ 29'$, und es muss somit geschlossen werden, dass für die Refraktion nur eine viel niedrigere Schichte der Atmosphäre wirksam ist. In der That erhielt **Kepler** erst nachdem er versuchsweise deren Höhe auf $h = 0{,}00095 \cdot a$ herabsetzte, den etwas plausibeln Wert $e - r = 87^0\ 30'$. — Zur genauern Untersuchung benutzte **Kepler** folgende zwei von Tycho 1587 I 16 aus Sonnenbeobachtungen erhaltene Werte-Paare

$$z_1 = 86^0\ 10' \qquad r_1 = 14'\ 22'' \qquad \text{und} \qquad z_2 = 89^0\ 25' \qquad r_2 = 31'\ 10''$$

und zwar machte er, da $e - r = z - \varphi$ folglich ganz bestimmt $e - r < z$, die **Hypothese I**, es sei $e_2 - r_2 = 87^0\ 30'$ oder $e_2 = 88^0\ 1'\ 10''$, — fand damit nach 1 und 2 aus der zweiten Beobachtung $c = 0{,}00025743$ und $a + h = 1{,}000905 \cdot a$, — sodann mit Hilfe dieser Werte nach 2 und 1 aus der ersten Beobachtung successive $e_1 - r_1 = 85^0\ 27'\ 42''$, $e_1 = 85^0\ 42'\ 4''$, $c = 0{,}00022107$, — liess sich durch die geringe Übereinstimmung der beiden c veranlassen, als **Hypothese II** die neue Annahme $e_2 - r_2 = 89^0\ 0'$ oder $e_2 = 89^0\ 31'\ 10''$ zu machen, — und fand nun bei Wiederholung der frühern Rechnung der Reihe nach die Werte $c = 0{,}00010127$, $a + h = 1{,}000100 \cdot a$, $e_1 - r_1 = 86^0\ 5'\ 0''$, $e_1 = 86^0\ 19'\ 22''$, $c = 0{,}00018947$, — also wieder nicht die gewünschte Übereinstimmung der beiden c, aber nun doch eine Abweichung in entgegengesetztem Sinne, so dass der richtige Wert zwischen seinen beiden Hypothesen liegen musste. In der That nahm nun Kepler als **Hypothese III** den zwischenliegenden Wert $e_2 - r_2 = 88^0\ 0'$ an, — berechnete nach der zweiten Beobachtung in früherer Weise die neuen Werte $c = 0{,}00020370$ und $a + h = 1{,}000578 \cdot a$, sowie zur Probe mit denselben die der Zenitdistanz der ersten Beobachtung entsprechende Refraktion r_1, wie dies z. B. nach den für $c - r = x$ in

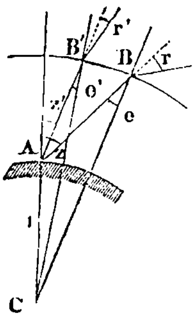
$$\mathrm{Si}\,x = \frac{a \cdot \mathrm{Si}\,z}{a + h} \quad \text{und} \quad r = \frac{c\,(r + x)}{\mathrm{Co}\,x} \quad \text{oder} \quad r = \frac{c \cdot x}{\mathrm{Co}\,x - c} \qquad 3$$

übergehenden Formeln 2 und 1 wirklich leicht geschehen kann, — fand so $r_1 = 14' \, 49''$, was ihm mit der beobachteten Refraktion $r_1 = 14' \, 22''$ hinlänglich übereinzustimmen schien, um jene Werte als brauchbar betrachten zu können, — und bestimmte schliesslich in derselben Weise (also z. B. wieder nach 3) für eine Folge von z die zugehörenden r, welche er sodann auf pag. 125 seiner Schrift in der mit „Composita" überschriebenen Rubrik den als „in æthere liberorum inclinatio" bezeichneten Zenitdistanzen gegenüberstellte. Das beistehende Specimen dieser Tafel, dem zur Vergleichung die wirklichen Werte der Refraktion beigegeben sind, zeigt uns, dass es **Kepler** wirklich gelungen ist, eine **erste**, für seine Zeit bis auf mehr als 75° Zenitdistanz ganz brauchbare und mit Recht einen seiner Ehrentitel bildende Refraktionstafel zu erstellen. — Neben den Keplerschen Arbeiten sind auch diejenigen, welche sein Zeitgenosse Chr. **Scheiner** in seinen drei Schriften „Sol ellipticus. Aug. Vind. 1615 in 4., — Refractiones coelestes. Ingolstadii 1617 in 4., — und: Oculus sive fundamentum opticum. Oeniponti 1619 in 4. (auch Friburgi 1621 und London 1652)" niedergelegt hat, nicht zu übersehen; denn wenn sie auch die Lehre von der Refraktion nicht in ebenso hervorragender Weise gefördert haben, so enthalten sie doch manche feine Bemerkungen und wertvolle Beobachtungen und geben viele Anhaltspunkte für die Geschichte der Optik.

z	Refraktion Kepler	Refraktion wirkl.
0°	0″	0″
15	11	15
30	25	33
45	47	58
60	1′ 28	1′ 40
65	1 53	2 3
70	2 31	2 37
75	3 32	3 32
80	5 36	5 16
85	11 30	9 46
90	61 30	34 54

455. Cassini und die Pariser Akademie. — Als das Brechungsgesetz (136) nach dem ersten Drittel des 17. Jahrhunderts allgemein bekannt geworden war, lag offenbar die Aufgabe vor, dasselbe für Erstellung einer neuen Refraktionstafel nutzbar zu machen, und es ist nicht eines der mindesten Verdienste von Dom. **Cassini**, dass er dieselbe mit grossem Geschick an die Hand nahm und sodann wirklich eine wesentlich bessere und mit Recht sehr beifällig aufgenommene Tafel berechnete [a]. Als sich dann allerdings bald darauf im Schosse der Pariser Akademie die Ansicht Geltung verschaffte, dass die **Refraktion** nicht nur mit der Zenitdistanz, sondern auch mit der Dichte der Luft, d. h. **bei Abnahme der Temperatur und bei Zunahme des Luftdruckes**, grösser werde, sah auch **Cassini** ein, dass auf dem von ihm eingeschlagenen Wege nur eine, einem mittlern Luftzustande entsprechende, gewissermassen **astronomische** Tafel erhalten werden könne, und dieser noch eine den Variationen von Temperatur und Barometerstand Rechnung tragende oder **physikalische** Korrektionstafel beigefügt werden sollte, überliess es jedoch der Folgezeit, eine solche zu erstellen [b].

Zu 455: *a*. Es ist schwer zu begreifen, dass nachmals die Lansberg, Riccioli, Hevel, etc. versäumten, das Brechungsgesetz für die astronomische Refraktion zu verwerten, ja fast blindlings auf dem Tychonischen Standpunkte verblieben und sich kaum erlaubten, an der Refraktionstafel des berühmten Dänen, welche in Praxi von der Kepler'schen keineswegs verdrängt worden war, einige geringfügige Abänderungen vorzunehmen; aber es ist Thatsache, dass Dom. **Cassini** der Erste war, der dies unternahm. Er ging dabei noch wie Kepler, obschon er (vgl. die „Eléments" seines Sohnes) ganz wohl einsah, dass dies keineswegs strenge richtig sein werde, von der vereinfachenden Annahme aus, es besitze der für die Refraktion wirksame Teil der Atmosphäre eine konstante Dichte, so dass nur an seiner obern Grenze eine einmalige Brechung statt habe, — und führte sodann für zwei in B und B' nach A abgelenkte Strahlen folgende Rechnung durch: Bezeichnet x die in Teilen des Erdradius ausgedrückte Höhe des wirksamen Teiles der Atmosphäre und setzt man



$$1 : (1 + x) = \mathrm{Co}\, u \qquad \text{oder} \qquad x = \mathrm{Se}\, u - 1 \qquad 1$$

so folgt aus den Dreiecken ABC und AB'C

$$\mathrm{Si}\, e : \mathrm{Si}\, z = \mathrm{Co}\, u \qquad \text{und auch} \qquad \mathrm{Si}\, e' : \mathrm{Si}\, z' = \mathrm{Co}\, u \qquad 2$$

während dem Brechungsgesetze, wenn n den Brechungsexponenten beim Eintritte bezeichnet, die Beziehungen

$$n = \mathrm{Si}\,(e + r) : \mathrm{Si}\, e = \mathrm{Co}\, r + \mathrm{Si}\, r \cdot \mathrm{Ct}\, e \qquad n = \mathrm{Co}\, r' + \mathrm{Si}\, r' \cdot \mathrm{Ct}\, e' \qquad 3$$

entsprechen. Nun erhält man aber aus 2

$$\mathrm{Ct}\, e = \sqrt{1 - \mathrm{Si}^2 e} : \mathrm{Si}\, e = \sqrt{\mathrm{Tg}^2 u + \mathrm{Co}^2 z} : \mathrm{Si}\, z \qquad \mathrm{Ct}\, e' = \sqrt{\mathrm{Tg}^2 u + \mathrm{Co}^2 z'} : \mathrm{Si}\, z' \qquad 4$$

und mit Hilfe hievon aus 3 die Gleichung

$$\frac{\mathrm{Co}\, r - \mathrm{Co}\, r'}{\mathrm{Si}\, r} = \frac{\mathrm{Si}\, r'}{\mathrm{Si}\, r \cdot \mathrm{Si}\, z'} \cdot \sqrt{\mathrm{Tg}^2 u + \mathrm{Co}^2 z'} - \frac{1}{\mathrm{Si}\, z} \cdot \sqrt{\mathrm{Tg}^2 u + \mathrm{Co}^2 z} \qquad 5$$

welche bei bekannten Wertepaaren z, r und z', r' zur Bestimmung von u, folglich nach 1 auch zur Bestimmung von x hinreicht. Ist nämlich $z = 90^0$, also r die von **Cassini** aus eigenen Beobachtungen zu $\varrho = 32' \, 20''$ bestimmte Horizontalrefraktion, und setzt man

$$A = (\mathrm{Co}\, \varrho - \mathrm{Co}\, r') \cdot \mathrm{Si}\, z' : \mathrm{Si}\, r' \qquad B = \mathrm{Si}\, \varrho \cdot \mathrm{Si}\, z' : \mathrm{Si}\, r' \qquad 6$$

so erhält man aus 5

$$A + B \cdot \mathrm{Tg}\, u = \sqrt{\mathrm{Tg}^2 u + \mathrm{Co}^2 z'} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Tg}\, u = \frac{A \cdot B \pm \sqrt{A^2 - (1 - B^2)\, \mathrm{Co}^2 z'}}{1 - B^2} \qquad 7$$

wo vom Doppelzeichen jeweilen dasjenige gewählt werden muss, das für u einen positiven Wert liefert. Ist aber $z' = 80^0$, so hat man nach Cassinis Beobachtungen $r' = 5' \, 28''$, und hiefür ergeben sich nach 6, 7 und 1 sofort $u = 2^0 \, 0' \, 12''$ und $x = 0{,}000\,6115$ (oder, wenn man den Erdradius zu $3\,271\,600^t$ annimmt, $x = 2000^t$), so dass sich nach 2 die Werte $z = 90^0$ und $e = 87^0 \, 59' \, 48''$ entsprechen, also nach 3 der Brechungsexponent $n = 1{,}000\,285$ sein muss. Da sich nun aus 3 und 2 strenge

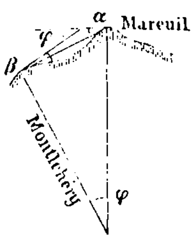
$$r = (e + r) - e = \mathrm{Asi}\, \frac{n \cdot \mathrm{Si}\, z}{1 + x} - \mathrm{Asi}\, \frac{\mathrm{Si}\, z}{1 + x} \qquad 8$$

oder auch aus 3 und 4 angenähert

$$r = \frac{n - 1}{\mathrm{Si}\, 1''} \cdot \mathrm{Tg}\, e = \frac{(n - 1) \cdot \mathrm{Co}\, m}{\mathrm{Si}\, 1''} \cdot \mathrm{Tg}\, z \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Tg}\, m = \frac{\mathrm{Tg}\, u}{\mathrm{Co}\, z} \qquad 9$$

z	Refraktion Cassini	wirkl.
0°	0″	0″
15	16	15
30	34	33
45	59	58
60	1′ 42	1′ 40
65	2 6	2 3
70	2 39	2 37
75	3 38	3 32
80	5 28	5 16
85	10 32	9 46
90	32 20	34 54

ergiebt, so kann man leicht, wie dies **Cassini**, vgl. die „Ephemerides novissimæ motuum coelestium Marchionis Cornelii Malvasiæ ab A. 1661 ad A. 1666. Additis Ephemeridibus Solis et Tabulis refractionum ex nov. hypothesibus J. D. Cassini. Mutinæ 1662 in fol.“, spätestens 1662 auch wirklich ausführte, eine ganze Refraktionstafel berechnen. Seine Tafel, von welcher das nebenstehende Specimen unter Beifügung der wirklichen Werte eine Probe giebt, wurde, wie sie es in der That verdiente, sehr beifällig aufgenommen, später in vielen Jahrgängen der „Connaissance des temps“ abgedruckt und noch von Jacques **Cassini** als Nro. 74 den Tafeln beigegeben, mit welchen er 1740 seine „Elements“ begleitete. — *b.* Die (vgl. 453 : c) schon von **Rothmann** erkannte sekundäre Abhängigkeit der Refraktion von dem Luftzustande wurde später von **Morin** in seiner „Longitudinum scientia“ ebenfalls hervorgehoben, und es machte hierauf **Riccioli** den Vorschlag, derselben dadurch Rechnung zu tragen, dass man drei verschiedene Refraktionstafeln erstelle: Eine für den Sommer, — eine zweite für die beiden Zeiten der Equinoktien, — und eine dritte für den Winter. Dieser letztere Weg wurde dann anfänglich auch durch **Cassini** eingeschlagen, aber infolge der erwähnten Besprechungen, unter alleiniger Beibehaltung der frühern Sommertafel, bald wieder verlassen; jedoch standen damals der Konstruktion der verlangten Hilfstafel noch grosse Schwierigkeiten entgegen, weil die zu berücksichtigenden Variationen sich mit fast ebensogrossen anderweitigen Unsicherheiten bei Höhenbestimmungen vermischten, und die betreffenden Beobachtungen, welche **Richer** 1672/3 im Auftrage der Akademie in Cayenne machte, gaben ebenfalls nicht die gewünschten Aufschlüsse. Noch im Anfange des 18. Jahrhunderts bemühte sich (vgl. Hist. de l'Acad. 1710, p. 110) Antoine-François **Laval** (Lyon 1664 — Toulon 1728; Jesuit und Prof. Hydrogr. Marseille und Toulon) vergeblich, diese Sache zu einem gewissen Abschlusse zu bringen; dagegen bleibt nachzutragen, dass **Picard** bei einschlagenden Studien aus seinen trigonometrischen Messungen nachweisen konnte, dass es auch eine merkliche **terrestrische Refraktion** gebe: Als er nämlich aus den im Sommer 1669 an den zwei Stationen Montlehéry und Mareuil (vgl. 418) gemessenen Depressionswinkeln $\alpha = 13' 40''$ und $\beta = 8' 20''$ den Winkel am Erdmittelpunkte $\varphi' = \alpha + \beta = 22' 0''$, dagegen später aus der trigonometrisch bestimmten Distanz 25643ᵗ jener Punkte in Vergleichung mit seinem Grade von 57060ᵗ für denselben Winkel den Wert $\varphi'' = 26' 58''$ erhielt, erklärte er sich den $4' 58''$ betragenden Unterschied als eine Refraktionswirkung, — und in der That ergiebt sich aus seinen Zahlen ein Refraktionskoeffizient $4' 58'' : 26' 58'' = 0{,}18$, welcher mit dem später von Tobias **Mayer** (vgl. dessen Abhandlung „De refractionibus objectorum terrestrium. Gott. 1751 in 4.“) erhaltenen Werte 0,12, und dem jetzt gewöhnlich nach **Gauss** (vgl. Berl. Jahrb. 1826) angenommenen Mittelwerte 0,13 nahe, mit dem von **Sabler** (vgl. die „Beschreibung der zur Ermittlung des Höhenunterschiedes zwischen dem



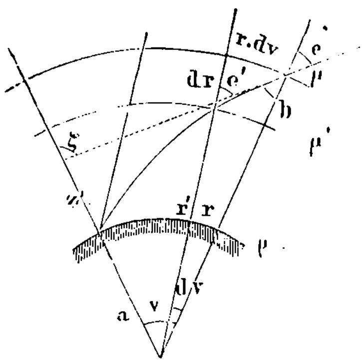
Schwarzen und Kaspischen Meere ausgeführten Messungen. St. Petersburg 1849 in 4.") gegebenen Werte 0,18 sogar ganz übereinstimmt. Ausserdem existiert eine seitliche oder sog. **Lateral-Refraktion**, welche nach „**Günther**, Historische Notizen (Erlanger Sitzungsb. 1874)" zuerst von **Eimmart** bemerkt worden zu sein scheint und wahrscheinlich damit zusammenhängt, dass die geometrischen Örter gleich dichter Luft nicht wirklich konzentrische Luft-Kugelschalen sind, und so der Weg des Lichtstrahles strenge genommen eine Kurve von doppelter Krümmung ist. — Vgl. „Georg **Sabler** (Halljall in Esthland 1810 — Wilna 1865; Obs. Pulkowa, dann Dir. Obs. Wilna), Betrachtungen über die irdische Strahlenbrechung und über die Gesetze der Veränderungen derselben. Dorpat 1839 in 4., — H. **Hartl**, Über den Zusammenhang zwischen der terrestrischen Strahlenbrechung mit den meteorologischen Elementen (Östr. met. Zeitschr. 1881), — „**Bauernfeind**, Neue Untersuchungen über terrestrische Refraktion (Anh. VII d. Verh. d. geod. Konf. Rom 1883)" und „Ferd. **Lingg**, Über die bei Kimmbeobachtungen am Starnberger See wahrgenommenen Refraktionserscheinungen (Nova Acta Leop. Car. 55)".

456. Die Arbeiten von Newton, Simpson und Bradley. — Es ist ganz sicher, dass schon **Newton** einen Weg auffand, um ohne die frühern, zwar die Rechnung vereinfachenden, aber dennoch etwas willkürlichen Annahmen zu benutzen, einen Ausdruck für das Element der Refraktion zu erhalten [a], — dann aber allerdings, um die Integration ausführen zu können, eine Voraussetzung über den damals vollständig und noch jetzt so ziemlich unbekannten Zusammenhang zwischen Höhe und Luftdichte zu machen hatte, sowie zur Konstantenbestimmung gewisse Beobachtungsdaten beiziehen musste; aber da sich nur seine Tafel, nicht auch der Detail seiner Rechnung erhalten hat [b], so bleibt man über manchen Punkt des von ihm eingeschlagenen Ganges etwas unsicher, und ich ziehe daher vor, auf die entsprechende und vollständig vorliegende Arbeit des wenig spätern **Simpson** etwas näher einzutreten und die durch **Bradley** darauf gestützte, auch bereits die Temperatur- und Druckverhältnisse berücksichtigende Formel

$$\zeta = \frac{b}{29{,}6} \cdot \frac{400}{350+t} \cdot 57'' \cdot \mathrm{Tg}(z'-3\zeta) = \frac{\beta}{760} \cdot \frac{222}{210+\tau} \cdot 57'',6 \cdot \mathrm{Tg}(z'-3\zeta) \quad \mathbf{1}$$

zu geben, in welcher ζ die Refraktion in der scheinbaren Zenitdistanz z' bezeichnet, b und β aber die Barometerstände in englischen Zollen und Millimetern, t und τ die Lufttemperaturen nach Fahrenheit und Celsius sind [c]. Es ist diese aus dem Zusammenwirken von **Simpson** und **Bradley** entstandene und somit unrichtiger Weise nur nach letzterm benannte Formel mit Recht noch jetzt sehr beliebt, da sie mit allfälligen kleinen Modifikationen in den Konstanten für den praktischen Gebrauch vollständig genügt [d].

Zu 456: *a.* Einen solchen Ausdruck kann man z. B. auf folgende einfache Weise erhalten: Unter Annahme, dass die Atmosphäre aus Schichten



von ganz kleiner Höhe d r bestehe, hat man nämlich entsprechend 168

$$r \cdot \mu \cdot \mathrm{Si}\, e = \gamma = a \cdot \mu_0 \cdot \mathrm{Si}\, z' \qquad 2$$

wo γ eine Konstante ist, und anderseits aus der beistehenden Figur sehr nahe

$$\mathrm{Tg}\, e = \frac{r \cdot dv}{dr} \quad \text{oder} \quad dv = \frac{dr}{r} \cdot \mathrm{Tg}\, e \qquad 3$$

$$\zeta = v + e \qquad d\zeta = dv + de$$

Aus 2 folgt nun durch Logarithmieren und Differentieren

$$\frac{dr}{r} + \frac{d\mu}{\mu} + \mathrm{Ct}\, e \cdot de = 0 \qquad 4$$

also, wenn aus 3 und 4 die Grösse d e eliminiert, sowie 3 und 4 benutzt, ferner $a : r = \varrho$ gesetzt wird, successive

$$d\zeta = dv - \left(\frac{dr}{r} + \frac{d\mu}{\mu}\right) \mathrm{Tg}\, e = -\frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{\mathrm{Si}\, e}{\sqrt{1 - \mathrm{Si}^2 e}} = -\frac{\varrho \cdot \mu_0 \cdot \mathrm{Si}\, z' \cdot d\mu}{\mu \sqrt{\mu^2 - \varrho^2 \cdot \mu_0{}^2 \cdot \mathrm{Si}^2 z'}} \qquad 5$$

womit das Verlangte bereits geleistet ist, aber natürlich eine Integration nur möglich wird, wenn man für die Beziehung zwischen ϱ und μ eine bestimmte Annahme macht. — Wählt man a als Einheit und nimmt (223) den Dämmerungsbogen gleich 18^0 an, so ist $r < \mathrm{Se}\, 9^0 = 1\frac{1}{80}$ und man darf daher $r = 1 + m$ oder $\varrho = 1 : (1 + m)$ setzen, wo $m < \frac{1}{80}$ ist. Man erhält somit, wenn noch $u = \mu_0 : \mu$ oder $d\mu = -(\mu_0 : u^2) \cdot du$ eingeführt wird, nach 5

$$d\zeta = \frac{\mathrm{Si}\, z' \cdot du}{\sqrt{(1 + m)^2 - u^2 \cdot \mathrm{Si}^2 z'}} \qquad 6$$

Macht man nun die Annahme, es sei m konstant, so wird $d\zeta = dx : \sqrt{1 - x^2}$, wo $x = u \cdot \mathrm{Si}\, z' : (1 + m)$ ist, und man erhält somit durch Integration, wenn C eine Konstante ist,

$$\zeta + C = \mathrm{Asi}\, x = \mathrm{Asi}\, \frac{u \cdot \mathrm{Si}\, z'}{1 + m}$$

und hieraus, da sich $\zeta = 0$ und $u = 1$ entsprechen müssen,

$$C = \mathrm{Asi}\, \frac{\mathrm{Si}\, z'}{1 + m} \qquad \text{also} \qquad \zeta = \mathrm{Asi}\, \frac{u \cdot \mathrm{Si}\, z'}{1 + m} - \mathrm{Asi}\, \frac{\mathrm{Si}\, z'}{1 + m} \qquad 7$$

d. h. eine Formel, welche, abgesehen von der Bezeichnung, genau mit 455:8 übereinstimmt, so dass man nun weiss, unter welcher Voraussetzung jene Cassini'sche Formel richtig ist. — *b.* Die durch **Newton** berechnete Tafel, von der unten ein Specimen folgen soll, wurde zuerst durch **Halley** in seiner Note „Some remarks of the allowances to be made in astronomical observations for the refraction of the air. With accurate table of refraction (Ph. Tr. 1721)" publiziert; denn wenn er auch den Urheber der Tafel nicht ausdrücklich nennt, so sagt er im Eingange seiner Note „our worthy President made the first accurate Table there of", und am Ende derselben, dass er die erwähnte Tafel beifüge „such as J long since received it from its Great Author", so dass dennoch niemand darüber im Zweifel sein konnte, wem die Tafel zu verdanken sei, während man dagegen allerdings über die Art ihrer Entstehung gar nichts erfuhr. Erst als 1835 Fr. **Baily** in seinem „Account of Flamsteed" auch dessen Briefwechsel mit Newton publizierte, und **Biot** im folgenden Jahre im Journal des Savants einer eingehenden Anzeige eine „Analyse des tables de réfraction construites par Newton, avec l'indication des procédés numériques par lesquels il a pu les calculer" beifügte, ist man auch darüber so ziemlich aufgeklärt worden: Es hat nämlich **Newton** offenbar, in ähnlicher Weise wie es oben geschah, eine Differentialgleichung aufgestellt, — dieselbe unter Annahme, dass die Dichte in der Luftsäule überall dem Drucke proportional angenommen werden dürfe, nach einer in den Principien erläuterten Methode integriert, — und nach der erhaltenen Formel unter Beiziehung einiger von **Flamsteed** bezogenen Daten die erwähnte Tafel berechnet, — ja es wäre ihm wahrscheinlich gelungen, auch jene „physikalische" Hilfstafel zu erstellen, wenn ihm Flamsteed bereitwilliger und einsichtiger an die Hand gegangen wäre, speciell Newtons ausdrücklichen Wunsch erfüllt hätte, bei Höhenbestimmungen auch jeweilen den Stand von Barometer und Thermometer zu notieren. — *c.* Macht man die Annahme, es sei m nicht konstant, sondern es sei etwa

$$1 + m = u^{n+1} \qquad \textbf{8}$$

wo n eine Konstante bezeichnet, so geht 6 in

$$d\zeta = \frac{\text{Si } z' \cdot du}{\sqrt{u^{2n+2} - u^2 \cdot \text{Si}^2 z'}} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{d\,(u^{-n} \cdot \text{Si } z')}{\sqrt{1 - (u^{-n} \cdot \text{Si } z')^2}}$$

über, und man erhält somit durch Integration, wenn für Bestimmung der Integrationskonstante wie bei Ableitung von 7 vorgegangen wird,

$$\zeta = {}^1/_n \cdot [z' - \text{Asi}\,(u^{-n} \cdot \text{Si } z')] \qquad \text{oder} \qquad \text{Si}\,(z' - n \cdot \zeta) = u^{-n} \cdot \text{Si } z' \qquad \textbf{9}$$

Bezeichnet somit Z die Horizontalrefraktion, so geht 9 für $z' = 90^0$ in $\text{Si}\,(90^0 - n \cdot Z) = u^{-n}$ über, so dass die 9 durch

$$\zeta = {}^1/_n \cdot [z' - \text{Asi}\,(\text{Si } z' \cdot \text{Co } n Z)] \qquad \text{oder} \qquad \text{Si}\,(z' - n \cdot \zeta) = \text{Si } z' \cdot \text{Co } n Z \qquad \textbf{10}$$

ersetzt werden können, von welchen die erstere genau mit der von **Simpson** in seinen „Mathematical Dissertations. London 1743 in 4." gegebenen, wenn auch in etwas mühsamerer Weise abgeleiteten Refraktionsformel übereinstimmt. Derselbe hatte nun durch John **Bevis** (Oldsarum in Wiltshire 1695 — London 1771; Arzt in London und Freund von Halley) erfahren, dass $Z = 33'$ sei, sowie dass sich die Werte $z' = 60^0$ und $\zeta = 1'\ 30'',5$ entsprechen, — konnte also die 10' zweimal aufschreiben, — daraus durch Näherung $n = {}^{11}/_2$ und $n Z = 3^0\ 1',5$ finden, — somit 10' auf die Form

$$\zeta = {}^2/_{11} \cdot (z' - x) \qquad \text{wo} \qquad 1 : \text{Si } 86^0\ 58',5 = \text{Si } z' : \text{Si } x \qquad \textbf{11}$$

bringen, — und so schliesslich nach damaliger Übung seinen Fund in die Analogie einkleiden: „Der Radius verhält sich zum Sinus von $86^0\ 58',5$ wie der Sinus der Zenitdistanz zum Sinus eines andern Bogens, dessen Differenz von der Zenitdistanz, wenn man sie mit ${}^2/_{11}$ multipliziert, dem Betrage der Refraktion gleichkömmt". — Aus 10" ergiebt sich

$$\text{Si}\,(z' - n\zeta) = c \cdot \text{Si } z' \qquad \text{wo} \qquad c = \text{Co } n Z$$

folglich

$$\frac{1+c}{1-c} = \frac{\text{Si } z' + \text{Si}\,(z' - n\zeta)}{\text{Si } z' - \text{Si}\,(z' - n\zeta)} = \frac{\text{Tg}\,(z' - {}^1/_2\, n\zeta)}{{}^1/_2\, n\zeta \cdot \text{Si } 1''}$$

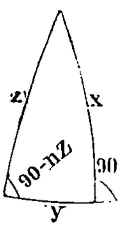
oder endlich

$$\zeta = \frac{2\,(1-c)}{n\,(1+c)\,\text{Si } 1''} \cdot \text{Tg}\,(z' - {}^1/_2\, n\zeta) = 53'',3 \cdot \text{Tg}\,(z' - 2,75 \cdot \zeta) \qquad \textbf{12}$$

und es ist letztere, äusserst einfache und bequeme Formel, welche durch **Bradley** vielfach mit seinen Beobachtungen verglichen und von ihm nach kleinen Abänderungen der Konstanten, namentlich aber als er nach dem Vorgange von Tob. Mayer (vgl. 457 : b) zweckdienlich scheinende Faktoren zur Berück-

z'	Refraktion Newton	Bradley	wirkl.
0°	0″	0″	0″
15	14	15	15
30	30	33	33
45	53	57	58
60	1′ 31	1′ 38	1′ 40
65	1 53	2 2	2 3
70	2 25	2 36	2 37
75	3 16	3 30	3 32
80	4 53	5 15	5 16
85	9 13	9 53	9 46
90	33 20	33 0	34 54

sichtigung der Variationen in Barometerstand und Lufttemperatur beifügte, sehr zutreffend gefunden wurde. Nach dieser oben als 1 gegebenen Formel berechnete sich sodann **Bradley** für die mittlern Werte $b = 29'',6$ und $t = 50^0$ zu eigenem Gebrauche eine Refraktionstafel, welche nachmals in die Einleitung zu Bd. 1 der „Astronomical observations at the R. Observatory at Greenwich. Oxford 1798 bis 1805, 2 Vol. in fol.“ aufgenommen wurde, und von der beistehend ein Specimen gegeben ist, dem zur Vergleichung die Newton'schen und wirklichen Werte beigegeben wurden. — *d.* Die Mehrzahl der spätern praktischen Astronomen hielt an Bradleys Formel fest, — ja noch in der lebhaften Diskussion, welche vor einigen Decennien in der Pariser Akademie über die für die Anwendung empfehlenswertesten Refraktionsformeln statt hatte, standen **Laugier** und **Faye** für dieselbe ein, nur wollte ersterer den Bradley'schen Faktor auf 3,77 erhöhen, letzterer dagegen nur auf 3,26 gehen, noch lieber ihn für jeden Abend direkt aus Beobachtungen abgeleitet wissen, wodurch die Korrektionsfaktoren überflüssig wurden. — Anhangsweise mag noch einer ganz hübschen Transformation der Bradley-Simpson'schen Hauptformel gedacht werden, welche zuerst **Delambre** „Astronomie I 303“ andeutete, und sodann Christian **Bruhns** (Ploen in Holstein 1830 — Leipzig 1881; Dir. Obs. Leipzig; vgl. Förster in Astr. Viert. 18 von 1883) in seiner von mir überhaupt vielfach benutzten Preisschrift „Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung. Leipzig 1861 in 8.“ in folgender Weise durchführte: Trägt man auf den einen Schenkel des sphärischen Winkels $(90 - n \cdot Z)$ die Grösse z' ab, und fällt vom Endpunkte eine Senkrechte x auf den andern Schenkel, so schneidet sie von demselben ein Stück y ab, so dass mit Benutzung von 10



$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\ x &= \mathrm{Si}\ z' \cdot \mathrm{Co}\, n Z = \mathrm{Si}\,(z' - n\zeta) \qquad \text{oder} \qquad x = z' - n\zeta \\ \mathrm{Tg}\ y &= \mathrm{Tg}\ z' \cdot \mathrm{Si}\, n Z\,, \quad \mathrm{Co}\ z' = \mathrm{Co}\ y \cdot \mathrm{Co}\ x = \mathrm{Co}\ y \cdot \mathrm{Co}\,(z' - n\zeta) \end{aligned} \qquad \mathbf{13}$$

folglich

$$\mathrm{Tg}\,(z' - \tfrac{1}{2} n\zeta) \cdot \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2} n\zeta = \frac{\mathrm{Co}\,(z' - n\zeta) - \mathrm{Co}\ z'}{\mathrm{Co}\,(z' - n\zeta) + \mathrm{Co}\ z'} = \frac{1 - \mathrm{Co}\ y}{1 + \mathrm{Co}\ y} = \mathrm{Tg}^2\ \tfrac{1}{2}\, y$$

während

$$\mathrm{Ct}\,(z' - \tfrac{1}{2} n\zeta) \cdot \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2} n\zeta = \frac{1 - c}{1 + c} = \frac{1 - \mathrm{Co}\, n Z}{1 + \mathrm{Co}\, n Z} = \mathrm{Tg}^2\ \tfrac{1}{2}\, n Z$$

war. Hieraus erhält man aber durch Multiplikation

$$\mathrm{Tg}^2\ \tfrac{1}{2} n\zeta = \mathrm{Tg}^2\ \tfrac{1}{2} n Z \cdot \mathrm{Tg}^2\ \tfrac{1}{2}\, y \qquad \text{oder} \qquad \zeta = Z \cdot \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\, y \qquad \mathbf{14}$$

und kann somit in bequemster Weise y nach 13 und sodann ζ nach 14 berechnen, anstatt bei Anwendung von 12 jeweilen das gefundene ζ noch einmal verbessern zu müssen.

457. Die Arbeiten von Mayer, Lacaille und Lambert. — Es würde zu weit führen, auch alle übrigen Arbeiten jener ältern Zeit im Detail zu behandeln[a], und ich muss mich darauf beschränken, noch diejenigen der in der Überschrift genannten Männer hervorzuheben: Tob. **Mayer** erwarb sich das Verdienst, nicht nur eine der Simpson-Bradley'schen verwandte Formel aufzustellen und eine ihr entsprechende Tafel der mittlern Refraktionen zu berechnen, sondern dieser letztern auch die ausser ihr noch notwendige physikalische Tafel in einer mustergiltigen Form beizufügen[b]. — **Lacaille**, der in den bisherigen Refraktionsbestimmungen eine Art „cercle vicieux" zu erkennen glaubte, suchte nach einer höchst originellen Methode diesem durch Kombination von Beobachtungen am Kap und in Paris auszuweichen, und wenn auch schliesslich seine Tafel hinter den bereits vorhandenen zurückstand, so bleibt sein Verfahren dennoch von Interesse[c]. — Ebenso originell ist endlich der von **Lambert** eingeschlagene Weg, um ohne Zuhilfenahme hypothetischer Beziehungen zu einer Integralgleichung zu gelangen, und es liefert überdies seine Formel, sobald man deren Konstanten mit Hilfe etwas sicherer Daten ermittelt, eine bis zur Zenitdistanz von 75° ganz brauchbare Tafel[d].

Zu 457: *a.* Während die unter der vorhergehenden Nummer besprochenen Arbeiten in England ausgeführt wurden, blieb man auch auf dem Kontinente für die genauere Kenntnis der Refraktion nicht unthätig. So gab Ph. de **La Hire** in seinen „Tabulæ astronomicæ. Paris 1702 in 4." eine zur Zeit viel gebrauchte, sich mutmasslich zunächst auf Beobachtungen von Picard stützende Tafel, — so bemühten sich **Jakob Bernoulli** (Opera 1063), **Johannes Bernoulli** (Opera III 516) und Jak. **Hermann** (Acta erud. 1706), wenn auch allerdings mehr aus theoretischem Interesse, unter gewissen Voraussetzungen die Gestalt der Refraktionskurve zu bestimmen, — so entwickelte P. **Bouguer** in seiner Preisschrift „Méthode d'observer sur mer les hauteurs des astres. Paris 1729 in 4." die Reihe

$$\zeta = 64'',6 \cdot \mathrm{Tg}\, z' - 4'',8 \cdot \mathrm{Tg}^3\, z' + \ldots \qquad 1$$

und schrieb noch später zwei Abhandlungen „Sur les réfractions astronomiques dans la zone torride (Mém. Par. 1739 et 1749)", — so berechnete **Daniel Bernoulli** (vgl. pag. 219—22 der Hydrodynamica) eine neue Tafel, welche allerdings auf der nicht sehr glücklichen Annahme beruhte, es sei in der Höhe von x Pariser Fussen die Dichte der Luft $d : 1 = 22000 : (22000 + x)$, — etc. — *b.* Tob. **Mayer** beschäftigte sich, wie die Tab. XIX seines Atlas erweist, schon vor 1745 mit der Refraktion, jedoch entstand seine posthum in den „Tabulæ motuum Solis et Lunæ. Londini 1770 in 4." publizierte Tafel der mittlern Refraktionen, von welcher beistehend ein zugleich die entsprechenden Werte von Lacaille, Lambert und

z'	Refraktion Mayer	Lacaille	Lambert	wirkl.
0°	0''	0''	0''	0''
15	15	18	15	15
30	33	38	33	33
45	57	1' 6	57	58
60	1' 39	1 54	1' 39	1' 40
65	2 2	2 20	2 3	2 3
70	2 36	2 55	2 38	2 37
75	3 31	3 49	3 34	3 32
80	5 16	5 37	5 17	5 16
85	9 49	9 55	—	9 46
90	30 51	—	—	34 54

der Neuzeit enthaltendes Specimen folgt, erst etwa 1754, — jedenfalls, da sie auf seinen Göttinger Beobachtungen beruht, **nach 1751**, aber, da sie Lacaille bei Abfassung seiner demnächst zu besprechenden Abhandlung bereits bekannt war, **vor 1756**. Seine dem mittlern Barometerstande $b = 28''$ P. und der mittlern Lufttemperatur $t = 10^0$ R. entsprechende Tafel berechnete **Mayer** nach der Formel

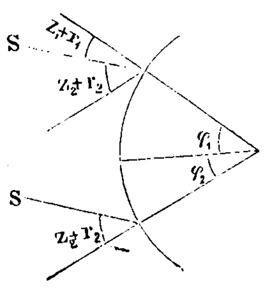
$$\zeta = 70'',71 \cdot b \cdot \mathrm{Si}\, z' \cdot \alpha^{-3} \cdot \mathrm{Tg}\, {}^1\!/_2\, w \qquad \mathbf{2}$$

wo $\alpha = \sqrt{1 + 0{,}0046 \cdot t} \qquad \beta = 16{,}5 \cdot \mathrm{Co}\, z' : \alpha \qquad \mathrm{Tg}\, w = 1 : \beta$

welche er einfach als „deduced by theory" aufführt, so dass man nicht weiss, ob er dieselbe selbständig entwickelte oder bloss, unter Einführung etwas anderer Daten, durch Umgestaltung der Simpson'schen Formel (456: 10 oder 11) erhielt, aus der sie in der That leicht hervorgeht. Das Hauptverdienst von **Mayer** besteht jedenfalls darin, dass er **vor** Bradley, und zwar nach Lacailles Zeugnis überhaupt als der **Erste**, nicht nur beiläufig von dem Einflusse des Luftdruckes und der Temperatur auf den Betrag der Refraktion sprach, sondern denselben in seiner Formel zu berücksichtigen suchte, wobei er **einerseits** von der schon durch **Halley** ausgesprochenen Ansicht ausging, es verhalten sich, wenn sonst alles übrige gleich bleibe, die Refraktionen bei verschiedenen Barometerständen wie diese Stände, und **anderseits** dieselben seien bei verschiedenen Temperaturen umgekehrt den Volumina proportional, welche ein gewisses Luftquantum unter deren Einfluss einnehme, so dass er, den Ausdehnungskoeffizienten der Luft zu 0,0046 annehmend, durch α^2 zu dividieren habe, — einen Divisor, welchen er später in $\alpha^{3/2}$ umänderte, um die Refraktion bei geringen Höhen etwas besser darzustellen. Da (39 : 8) mit genügender Genauigkeit $\mathrm{Ln}\,(1 + 0{,}0046 \cdot t) = 0{,}0046 \cdot t$ gesetzt werden kann, so erhält man durch Logarithmieren und Differentieren der 2

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{db}{b} + (\mathrm{Co}\, w - 3) \cdot 0{,}0023 \cdot dt \qquad \mathbf{3}$$

und nach dieser Formel lässt sich in der That, wie dies **Mayer** ausgeführt hat, leicht eine sog. physikalische Hilfstafel mit den Argumenten b und t berechnen. — ***c.*** Da sich **Lacaille** mit dem bisdahin angewandten Verfahren, theoretisch eine Refraktionsformel aufzustellen und sodann zur Bestimmung ihrer Konstanten die wahre Polhöhe oder einige mit ihrer Hilfe aus Beobachtungen abgeleitete Refraktionen bereits als bekannt vorauszusetzen, nicht befreunden konnte, so ging er nach seinen „Recherches sur les réfractions astronomiques (Mém. Par. 1756, ausgeg. 1761)" in folgender Weise vor: Er hatte **einerseits** im Mittel aus vielen, auf alle Jahreszeiten verteilten, von ihm in Paris (Collège Mazarin) und am Kap angestellten Beobachtungen von Circumpolarsternen, die scheinbaren, d. h. noch mit der mittlern Refraktion behafteten Polhöhen $48^0\ 52'\ 27'',5$ und $33^0\ 56'\ 49'',1$ erhalten, so dass die Summe $82^0\ 49'\ 16'',6$ um die Summe der diesen Höhen entsprechenden mittlern Refraktionen **grösser** als die Distanz der Parallele von Paris und seiner Kap-Station war. **Anderseits** ergaben ihm jede zwei Messungen der scheinbaren Zenitdistanzen eines und desselben Sternes an beiden Punkten nach Reduktion auf die gewählte Epoche 1750 I 1 wegen



$$z_1 + z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - (r_1 + r_2) \qquad \mathbf{4}$$

in ihrer Summe einen um die Summe der Refraktionen **zu kleinen** Wert für jene Distanz. **Lacaille** wählte nun 13 oft beobachtete Sterne aus, welche an beiden Stationen unter nahe gleichen (nur zwischen 38° 50′ und 44° 10′ variierenden) Zenitdistanzen culminierten, — fand, dass das Mittel aus den sämtlichen durch sie bestimmten scheinbaren Distanzen der beiden Parallele 82° 44′ 46″,0 betrage, — und durfte nun, da in dieser Höhe und für so geringe Höhendifferenzen die Refraktionen einer geringen und gleichmässigen Veränderung unterliegen, wirklich annehmen, dass diese mittlere Distanz nahe um die Summe der mittlern Refraktionen zu klein sei, welche in Paris und am Kap der scheinbaren Zenitdistanz 41° 22′ zukommen. Es musste also die Summe der vier mittlern Refraktionen in den Zenitdistanzen 90° — 33° 57′ (Kap), 90° — 48° 52′ (Paris) und 41° 22′ (sowohl Kap als Paris) der Differenz 82° 49′ 16″,6 — 82° 44′ 46″,0 = 270″,6 gleich sein, und es frug sich nur noch, wie letzterer Betrag unter die vier Kontrahenten zu verteilen sei. **Lacaille** besass nun unter seinen beidseitig beobachteten Sternen eine ziemliche Anzahl, von welchen die einen für Paris, die andern für das Kap Zenitalsterne waren, bei welchen daher $z_1 + z_2$ im ersten Falle fast ausschliesslich durch die Refraktion am Kap, im zweiten fast ausschliesslich durch diejenige in Paris influiert wurde. Da ihm nun die Vergleichung beinahe immer (41 auf 47 mal) ergab, dass die Summe im ersten Falle grösser als im zweiten sei, so war er durch 4 genötigt, anzunehmen, dass bei gleicher Höhe die Refraktion am Kap etwas weniger als in Paris betrage, und zwar etwa $^1/_{40}$. Da er ferner wusste, dass (entsprechend 1) die Refraktion in grössern Höhen sehr nahe der Tangente der scheinbaren Zenitdistanz proportional ist, so hatte er, die Refraktionskonstante für Paris gleich α setzend,

$$270{,}6 = (^{39}/_{40} \cdot \mathrm{Tg}\, 56^0\, 3' + \mathrm{Tg}\, 41^0\, 8' + {}^{79}/_{40} \cdot \mathrm{Tg}\, 41^0\, 22') \cdot \alpha$$

oder $\alpha = 66'',64$ und somit für die vier einzelnen Refraktionen der Reihe nach die Beträge 96″,5, 58″,2, 57″,2 und 58″,7, so dass sich

33° 55′ 12″,6 48° 51′ 29″,3 82° 46′ 41″,9

als wahre Werte der Polhöhen vom Kap und Paris und der Distanz ihrer Parallele ergaben, und somit das Problem, welches sich **Lacaille** vorgelegt hatte, seinem Hauptteile nach gelöst war. Für weitern Detail und seine hierauf folgende Bestimmung zahlreicher Refraktionen auf seine Abhandlung verweisend, füge ich noch bei, dass die von ihm aus letztern zusammengestellte empirische Tafel, von welcher oben vorgreiflich ein Specimen gegeben wurde, allerdings nicht sehr befriedigend ausfiel, ja kaum der Kepler'schen ebenbürtig war; aber der von ihm eingeschlagene Weg bleibt deswegen doch höchst interessant und lehrreich. — *d.* Aus 456:5 folgt, wenn

$$\mathrm{P} = \mathrm{a} \cdot \mu_0 : \mu \qquad \text{also} \qquad \mathrm{d\,P} = -\,\mathrm{a} \cdot \mu_0 \cdot \mathrm{d}\,\mu : \mu^2 \qquad \mathbf{5}$$

gesetzt wird, sofort

$$\mathrm{d}\zeta = \frac{\mathrm{Si}\, z'}{\mathrm{r}} \left(1 - \frac{\mathrm{P}^2}{\mathrm{r}^2}\, \mathrm{Si}^2 z'\right)^{-1/2} \cdot \mathrm{d\,P} = \left(\frac{\mathrm{Si}\, z'}{\mathrm{r}} + \frac{\mathrm{P}^2 \cdot \mathrm{Si}^3 z'}{2 \cdot \mathrm{r}^3} + \frac{3\, \mathrm{P}^4 \cdot \mathrm{Si}^5 z'}{8 \cdot \mathrm{r}^5} + ..\right) \mathrm{d\,P} \qquad \mathbf{6}$$

d. h. die von **Lambert** in seiner Schrift „Les propriétés remarquables de la lumière. La Haye 1759 in 8.“, wenn auch in etwas anderer Weise, abgeleitete Reihe, welche durch Integration in

$$\zeta = \mathrm{A} \cdot \mathrm{Si}\, z' + {}^1/_2 \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{Si}^3 z' + {}^3/_8\, \mathrm{C} \cdot \mathrm{Si}^5 z' + \ldots$$

wo

$$\mathrm{A} = \int \frac{\mathrm{d\,P}}{\mathrm{r}} \qquad \mathrm{B} = \int \frac{\mathrm{P}^2 \cdot \mathrm{d\,P}}{\mathrm{r}^3} \qquad \mathrm{C} = \int \frac{\mathrm{P}^4 \cdot \mathrm{d\,P}}{\mathrm{r}^5} \ldots \qquad \mathbf{7}$$

ist, übergeht, oder, wenn man die Si z' mit Hilfe von

$$\mathrm{Si}\, z' = \mathrm{Tg}\, z' \cdot (1 + \mathrm{Tg}^2 z')^{-1/2} = \mathrm{Tg}\, z' - {}^1/_2\, \mathrm{Tg}^3 z' + {}^3/_8\, \mathrm{Tg}^5 z' - \ldots \qquad 8$$

in Tg z' umsetzt, und nach diesen ordnet, in

$$\zeta = A \cdot \mathrm{Tg}\, z' - {}^1/_2 (A - B) \cdot \mathrm{Tg}^3 z' + {}^3/_8 (A - 2B + C) \cdot \mathrm{Tg}^5 z' - \ldots \qquad 9$$

Anstatt nun zur Ermittlung der obigen Integrale irgend eine Annahme über die Beziehung zwischen r und μ (oder P) zu machen, zeigte **Lambert**, dass, da die Höhe der Atmosphäre etwa 0,014 Erdradien und μ_0 etwa 1,003 betrage, also (a : r) nur zwischen 1 und 0,986 und $(\mu_0 : \mu)$ nur zwischen 1 und 1,003 variieren könne, auch $P = (a:r) \cdot (\mu_0 : \mu) \cdot r$ immer nahe gleich r sein werde. Da nun für P = r nach 7 die sämtlichen A, B, C, ... einander genau gleich, also überhaupt nie stark von einander verschieden sein werden, so müssen auch die in 9 auftretenden Koeffizienten der dritten und höhern Potenzen von Tg z' klein sein; man dürfe daher zum mindesten für alle Zenitdistanzen unter 45° die Refraktion der Tangente der Zenitdistanz proportional setzen, und auch noch für wesentlich grössere Distanzen werde die Berücksichtigung des zweiten oder höchstens dritten Gliedes genügen, so dass man 9 durch

$$\zeta = \alpha \cdot \mathrm{Tg}\, z' - \beta \cdot \mathrm{Tg}^3 z' + \gamma \cdot \mathrm{Tg}^5 z' \qquad 10$$

ersetzen, — diese Gleichung für drei Wertepaare von z' und ζ aufschreiben, — daraus die α, β und γ bestimmen, — und so schliesslich eine, von allen Hypothesen freie und brauchbare Refraktionsformel erstellen könne. Leider nahm nun allerdings **Lambert** nach Dan. Bernoulli an, dass den Zenitdistanzen 45, 60 und 80° die Refraktionen 63, 107 und 328" entsprechen, und erhielt so die nicht wohl brauchbare Formel

$$\zeta = 63'',000 \cdot \mathrm{Tg}\, z' - 0'',408 \cdot \mathrm{Tg}^3 z' + 0'',011 \cdot \mathrm{Tg}^5 z' \qquad 11$$

während ihm die von Tob. Mayer für dieselben Zenitdistanzen bestimmten Refraktionen 57, 99 und 316" die Formel

$$\zeta = 56'',909 \cdot \mathrm{Tg}\, z' + 0'',095 \cdot \mathrm{Tg}^3 z' - 0'',004 \cdot \mathrm{Tg}^5 z' \qquad 12$$

ergeben hätten, welche, wie die nach ihr berechneten und für das oben mitgeteilte Specimen benutzten Werte erweisen, bis über 75° hinaus vollständig genügt haben würde.

458. Die Arbeiten von Euler, Lagrange und Oriani. — Die neuere Behandlung der Theorie der astronomischen Refraktion beginnt mit **Eulers** Abhandlung vom Jahre 1754, und die von ihm aufgestellte, dann allerdings 1772 durch **Lagrange** nach Ableitung und Form noch bedeutend vereinfachte Differentialgleichung bildet noch jetzt den Ausgangspunkt derselben [a]. **Lagrange** zeigte dann überdies, in welchen Beziehungen die ältern und neuern Theorien zu einander stehen, und als **Oriani** 1788 dessen Rechnungen in scharfsinniger Weise fortführte, gelangte dieser schliesslich dazu, für die Refraktion eine so rasch konvergierende Reihe zu geben, dass bis auf 70° Zenitdistanz die zwei ersten, von dem Gesetze der Wärmeabnahme mit der Höhe unberührten Glieder genügen, und somit das auffallende Faktum erklärt wird, dass die unter den verschiedensten Annahmen für jenes Gesetz berechneten Tafeln bei nicht allzugrossen Zenitdistanzen so nahe miteinander übereinstimmen [c].

Zu 458: *a.* Unsere Differentialgleichung 456 : 6 stimmt genau mit der von **Lagrange**, wenn auch auf etwas anderem Wege, in seiner Abhandlung „Sur les réfractions astronomiques (Mém. Berl. 1772)" abgeleiteten Grundgleichung überein, und wenn man in derselben $u = \alpha^{(q-k):c}$, also $c \cdot du = Ln\,\alpha \cdot \alpha^{(q-k):c} \cdot dq$, setzt, so erhält man die von **Euler** in der Abhandlung „De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air (Mém. Berl. 1754)", unter der Annahme, es gehe der beim Übergange eines Lichtstrahles aus dem leeren Raume in Luft der Dichte c den Wert $1/\alpha$ besitzende Brechungsexponent bei einer spätern Schichte der Dichte q in $1/\alpha^{q:c}$ über und es sei k die Dichte der Luft an der Erdoberfläche, wenn auch in viel mühsamerer Weise aufgestellte Differentialgleichung, so dass man diese letztere in der That als die Mutter-Form unserer gegenwärtigen Gleichungen zu betrachten hat. Ich glaube aber der nötigen Raumersparnis wegen mich für **Euler** auf diesen Nachweis beschränken zu sollen, da er in seiner zur Ermöglichung der Integration nötigen hypothetischen Annahme über die Beziehung zwischen q und r, und überhaupt in der weitern Entwicklung, nicht sehr glücklich war, ja schliesslich zu einem weitläufigen, praktisch kaum brauchbaren und jedenfalls der Simpson-schen Formel lange nicht beikommenden Ausdrucke gelangte. — *b.* Nachdem **Lagrange**, wie bereits mitgeteilt, unsere 456 : 6 abgeleitet hatte, zeigte er, in entsprechender Weise wie es 456 : a und c geschehen ist, dass aus ihr unter gewissen Annahmen sowohl die Cassini'sche als die Simpson'sche Formel leicht erhalten werden können, und da ihm die auf letztere gegründete Bradley'sche Refraktionstafel für allen wirklichen Bedarf zu genügen schien, so fühlte er sich nicht veranlasst, seine Entwicklung weiter zu führen. — *c.* Eine solche weitere Entwicklung unternahm dagegen Barnaba **Oriani** (Garegnano bei Mailand 1752 — Mailand 1832; Dir. Obs. Mailand; vgl. Korresp. mit Piazzi in Pubbl. VI del Osserv. di Brera) in seiner Abhandlung „De refractionibus astronomicis (Eph. Mediol. 1788)" in folgender Weise: Ersetzt man in 456 : 6 die $1 + m$ durch $(a + x) : a$, so ergiebt sich mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$d\zeta = \frac{Si\,z' \cdot du}{\sqrt{1 - u^2 \cdot Si^2 z'}} \left[1 - \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{1 - u^2 \cdot Si^2 z'} + \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{2 + u^2 \cdot Si^2 z'}{2\,(1 - u^2\,Si^2 z')^2} - \frac{x^3}{a^3} \cdot \frac{2 + 3\,u^2 \cdot Si^2 z'}{2\,(1 - u^2 \cdot Si^2 z')^3} + \ldots \right] \qquad \mathbf{1}$$

oder, wenn man entsprechend dem obigen und mit Benutzung der Exponentialreihe $u = \alpha^{(q-k):c} \doteq 1 + Ln\,\alpha \cdot (q - k) : c$, also $c \cdot du = Ln\,\alpha \cdot dq$, ferner in den mit $x : a$ behafteten Gliedern $u = 1$ setzt, sodann gliedweise integriert und endlich beachtet, dass den Grenzwerten $q = k$ und $q = 0$ die Grenzwerte $u = 1$ und $u = \alpha^{-k:c}$, sowie $x = 0$ und $x = h$ entsprechen,

$$\zeta = Asi(\alpha^{-k:c} \cdot Si\,z') - z' - \frac{Tg\,z' \cdot Ln\,\alpha}{a \cdot c \cdot Co^2 z'} \left[I - \frac{2 + Si^2 z'}{2\,a \cdot Co^2 z'} \cdot II + \frac{2 + 3 \cdot Si^2 z'}{2\,a^2\,Co^4 z'} \cdot III - \ldots \right] \qquad \mathbf{2}$$

wo

$$I = \int_0^h x \cdot dq \qquad II = \int_0^h x^2 \cdot dq \qquad III = \int_0^h x^3 \cdot dq \qquad \mathbf{3}$$

Das erste dieser Integrale gelang es ihm nun leicht unter der Annahme zu bestimmen, dass der von der Erdoberfläche bis an die Grenze der Atmosphäre von b bis 0 abnehmende Barometerstand in der Höhe x einen Betrag y besitze, der sich um eine der Dichte q proportionale Grösse dy vermindere, wenn x um dx zunehme, so dass $dy = -q \cdot dx$ gesetzt werden dürfe; denn in diesem Falle erhält man mit Hilfe von 45 : 4'

$$\mathrm{I} = \Big[x \cdot q - \int q \cdot dx\Big]_0^h = -\int_0^h q \cdot dx = \int_b^0 dy = -b \qquad \mathbf{4}$$

Dagegen beim zweiten Integrale ging es nicht so glatt ab, indem er zwar in entsprechender Weise

$$\mathrm{II} = \Big[x^2 \cdot q - 2\int x \cdot q \cdot dx\Big]_0^h = -2\int_0^h x \cdot q \cdot dx =$$

$$= 2\int_0^h x \cdot dy = 2\Big[x \cdot y - \int y \cdot dx\Big]_{0,\,b}^{h,\,0} = -2\int_0^b y \cdot dx \qquad \mathbf{5}$$

erhielt, aber so nur auf ein neues Integral geführt wurde, zu dessen Erledigung es unumgänglich notwendig wurde, die Beziehung zwischen x und y zu kennen. Er machte nunmehr die plausibeln Annahmen, es verhalte sich, wenn t und τ die Luftwärmen an der Erdoberfläche und in der Höhe x bezeichnen

$$q : k = \frac{y}{\tau} : \frac{b}{t} \qquad \text{und es sei} \qquad \tau = \frac{t}{1 + \gamma \cdot x} \qquad \mathbf{6}$$

wo die Konstante γ durch Beobachtungen bestimmt werden müsse, — man habe daher

$$q = k \cdot y \cdot (1 + \gamma x) : b \qquad \text{oder} \qquad dy : y = -k\,(1 + \gamma x) \cdot dx : b$$

somit durch Integration zwischen den Grenzen 0 und x für x, b und y für y

$$\mathrm{Ln}\, y - \mathrm{Ln}\, b = -k\,(x + {}^1\!/_2\, \gamma x^2) : b \qquad \text{oder} \qquad y = b \cdot e^{-k\,(2x + \gamma x^2) : 2b} \,. \qquad \mathbf{7}$$

Setzt man aber

$$v = (1 + \gamma x) \sqrt{k : 2b\gamma} \qquad \text{also} \qquad dv = \gamma \sqrt{k : 2b\gamma} \cdot dx \qquad \mathbf{8}$$

so erhält man mit Hilfe von 7

$$\int y \cdot dx = \int b \cdot e^{-v^2 + k : 2b\gamma} \cdot \sqrt{2b : k\gamma} \cdot dv = b \sqrt{2b : k\gamma} \cdot e^{k : 2b\gamma} \cdot \int e^{-v^2} \cdot dv \qquad \mathbf{9}$$

und dieses letztere Integral, an welchem sich schon Euler vergeblich versucht hatte, widerstand auch **Oriani.** Er unternahm nun, dasselbe durch Annäherung zu bestimmen, indem er nach 7 unter Annahme, es sei $b = 28''$, $k = {}^1\!/_{10478}$ des Quecksilbers und $\gamma = 0{,}000036$, successive für $x = 0$, 100, 200, … 30500' je die Werte von y, sodann die von jeden zwei sich folgenden y bestimmten Trapeze der Höhe $\Delta x = 100$ berechnete, und schliesslich die Summe aller dieser Trapeze als Wert des Integrales betrachtete. Er erhielt so

$$\int_0^b y \cdot dx = f \cdot b^2 : k \qquad \text{wo} \qquad f = {}^{122}\!/_{137} \qquad \mathbf{10}$$

und sodann nach 5

$$\mathrm{II} = -2f \cdot b^2 : k \qquad \text{ferner analog} \qquad \mathrm{III} = -6b^2\,(1 - f) : k\gamma \quad \text{etc.} \qquad \mathbf{11}$$

Setzt man ferner $\mathrm{Asi}\,(\alpha^{-k:c} \cdot \mathrm{Si}\, z') = z' + \Delta z$, wo Δz eine kleine Grösse sein wird, so hat man mit Hilfe der Exponentialreihe $\mathrm{Si}\, z' + \Delta z \cdot \mathrm{Co}\, z' \fallingdotseq \alpha^{-k:c} \cdot \mathrm{Si}\, z' \fallingdotseq [1 - (k : c) \cdot \mathrm{Ln}\, \alpha] \cdot \mathrm{Si}\, z'$, oder, wenn zugleich der Brechungsexponent $1/\alpha$ durch α' ersetzt wird, $\triangle z = (k : c) \operatorname{Ln} \alpha' \cdot \operatorname{Tg} z'$, und erhält daher schliesslich nach 2

$$\zeta = \frac{k}{c} \operatorname{Ln} \alpha' \cdot \operatorname{Tg} z' \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{b}{k \cdot a} \cdot \frac{1}{\operatorname{Co}^2 z'} + \frac{2 f b^2}{k^2 a^2} \cdot \frac{2 + \operatorname{Si}^2 z'}{2 \operatorname{Co}^2 z'} - \\ - \frac{6 b^2 (1 - f)}{k^2 a^3 \cdot \zeta} \cdot \frac{2 + 3 \operatorname{Si}^2 z'}{2 \operatorname{Co}^4 z'} + \ldots \end{array} \right| \qquad \mathbf{12}$$

und damit die schon oben besprochene Reihe, von der **Oriani** glaubte, dass bis 50^0 ihr erstes Glied genügen dürfte, bis 70^0 zwei Glieder und bis 85^0 drei bis vier Glieder, während es dann allerdings für noch grössere Zenitdistanzen besser sein möchte, die Refraktionen direkt aus Beobachtungen abzuleiten.

459. Die Arbeiten von Bessel und der neuesten Zeit. — Wie auf allen für die praktische Astronomie wichtigen Gebieten arbeitete **Bessel** auch auf demjenigen der Refraktion mit grossem Erfolge und die von ihm berechnete Tafel wird noch immer so ziemlich allgemein als die beste betrachtet und benutzt [a], obschon seither wieder viele betreffende Untersuchungen gemacht worden sind, für welche jedoch hier, um diesen Abschnitt nicht gar zu sehr auszudehnen, auf die bezügliche Speciallitteratur verwiesen werden muss [b].

Zu 459: *a.* Nachdem es sowohl Chr. **Kramp**, vgl. dessen „Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Strasbourg 1799 in 4.", als **Laplace**, der in seiner „Mécanique céleste (IV von 1805)" der Theorie der Refraktion ebenfalls einen eigenen Abschnitt widmete, gelungen war, das durch 458 : 9 geforderte Integral zu bewältigen (vgl. auch 47 : a), beschäftigte sich bald darauf **Bessel** unter Benutzung dieser Arbeiten mit demselben Gebiete und gab 1818 in seinen klassischen „Fundamenta astronomiæ" die oben erwähnte Tafel, welcher bereits die in 453—57 als „wirkliche Refraktionen" eingetragenen Werte entnommen wurden. Da jedoch das unter der vorhergehenden Nummer Gegebene mir genugsam zu zeigen scheint, wie man sich bei Behandlung solcher Probleme durchzuwinden versuchte, so verzichte ich darauf, im Detail nachzuweisen, wie Bessel, nachdem er, entsprechend wie es in 456 : a geschehen ist, die dortige 5 abgeleitet hatte, im weitern vorging, um zu der Schlussformel

$$\zeta = a' \cdot \operatorname{Tg} z' \cdot \left(\frac{b}{B} \cdot \frac{1}{1 + n t}\right)^A \cdot \left(\frac{1}{1 + m \tau}\right)^\lambda = a' \cdot \operatorname{Tg} z' \cdot (B' \cdot T')^A \cdot \gamma^\lambda \qquad \mathbf{1}$$

zu gelangen und in seine Tafel für jede scheinbare Zenitdistanz z' die passenden Werte für $a' \cdot \operatorname{Tg} z'$, $\operatorname{Lg} B'$, $\operatorname{Lg} T'$, A, $\operatorname{Lg} \gamma$ und λ eintragen zu können, und begnüge mich, das zum Verständnis dieser Formel notwendige beizufügen: Die Grösse $a' \cdot \operatorname{Tg} z'$ entspricht der sog. mittlern, d. h. dem von Bessel als normal angenommenen Barometerstande $B = 751{,}5^{mm}$ und der Lufttemperatur $T = 9^0{,}3$ C. zukommenden Refraktion, — der Faktor $(B' \cdot T')^A$ giebt in seinem ersten Teile den Einfluss des momentanen Barometerstandes b, in seinem zweiten Teile dessen der Quecksilbertemperatur t entsprechende Reduktion, — der Faktor γ^λ aber den Einfluss der Lufttemperatur $T + \tau$; die Grösse $n = 0{,}000162$ ist der um die Ausdehnung einer Messingscale verminderte Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers, während $m = 0{,}0035$ der Ausdehnung der

Luft für 1° C. entspricht; die Exponenten A und λ endlich sind empirisch bestimmte Grössen, von welchen A erst gegen den Horizont hin von Bedeutung wird, da es bei 75° noch gleich der Einheit ist, dann aber bis $89\frac{1}{2}$° nach und nach auf 1,0780 ansteigt, — λ dagegen allerdings sich schon nach 40° von der Einheit entfernt und in raschem Wachsen bei $89\frac{1}{2}$° den Wert 1,5789 erreicht, jedoch wegen der Schwierigkeit, die richtige Lufttemperatur einzuführen, praktisch kaum so viel leisten dürfte als manche glauben. — Ist der Barometerstand b bereits auf Null reduziert, wird $A = 1 = \lambda$ angenommen, ferner

$$a' \cdot \mathrm{Tg}\, z' = \alpha \qquad b : B = 1 - \beta \qquad 1 : (1 + m \cdot \tau) = 1 - \gamma \qquad \mathbf{2}$$

gesetzt, und die Refraktion mit r bezeichnet, so geht 1 in

$$r = \alpha \cdot (1 - \beta) \cdot (1 - \gamma) \qquad \text{oder} \qquad r = \alpha (1 - \beta - \gamma) \qquad \mathbf{3}$$

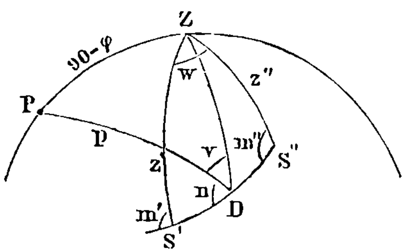
über, und nach dieser Näherungsformel habe ich mit Benutzung der Besselschen Tafel unsere Tab. VI angelegt. — Anhangsweise führe ich an, dass gegen Ende des vorigen Jahrhunderts (vgl. Journ. d. Sav. 1789 IX) die Akademie in Harlem über die Theorie der Refraktion eine Preisfrage ausschrieb, dabei unter anderm die Frage aufwerfend, ob die Feuchtigkeit der Luft einen merklichen Einfluss ausübe. Von eingegangenen Lösungen verlautet nichts; dagegen sprach später **Laplace** die Ansicht aus, dass die Refraktionskonstante mit der Feuchtigkeit etwas zunehmen werde, und in der That fand ich bei einer Studie, welche ich auf die von mir (vgl. 383 : b) von 1874—77 gemessenen zahlreichen Zenitdistanzen gründete, die Formel

$$r = r' \, (1 - 0{,}00230 \cdot \Delta b - 0{,}00406 \cdot \Delta t + 0{,}00028 \cdot \Delta f) \qquad \mathbf{4}$$

wo r die wahre und r' die mittlere Refraktion bezeichnet, $\Delta b = 751{,}5^{mm} - b$, $\Delta t = t - 9°{,}3$ C. und (unter f die relative Feuchtigkeit verstehend) $\Delta f = f - 73$ ist. — *b.* Zur Ergänzung der bereits angeführten Litteratur erwähne ich: „**Brandes**, Beobachtungen und empirische Untersuchungen über die Strahlenbrechung. Oldenburg 1807 in 4., — **Biot**, Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon. Paris 1810 in 4., — Giovanni Antonio Amedeo **Plana** (Voghera 1781 — Turin 1864; Neffe von Lagrange; Prof. astr. und Dir. Obs. Turin; vgl. E. de Beaumont in Mém. Par. 1873), Recherches analytiques sur la densité des couches de l'atmosphère et la théorie des réfractions astronomiques (Mém. Tur. 1822 et 1828; vgl. das offene Geständnis von 1822 XII 22 in Notiz 369), — James **Ivory** (Dundee 1765 — London 1842; folgeweise Lehrer, Industrieller, Prof. Militärkoll. und Privatgelehrter), On the astronomical refraction (Ph. Tr. 1823, 28), — Th. **Young**, A finite and exact expression for the refraction of an atmosphere nearly ressembling that of the earth (Ph. Tr. 1824), — Ed. **Schmidt**, Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Göttingen 1828 in 4. (vgl. Urteil Gauss von 1827 X I in Corresp. Schumacher), — Sir John William **Lubbock** (London 1803 — ebenda 1865; Vizekanzler Univ. London), On astronomical refraction (Mem. Astr. Soc. 1840, 1855), — J. J. **Baeyer**, Über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Petersburg 1860 in 4., — C. M. **Bauernfeind**, Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Constitution der Atmosphäre (A. N. 1478—80 von 1864), und: Die atmosphärische Strahlenbrechung. München 1864—65, 2. Th. in 4., — H. **Gyldèn**, Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. St. Petersburg 1866—68, 2 Th. in 4., — August **Weilenmann** (Knonau 1843 geb.; früher mein Assistent, jetzt Prof. phys. Zürich), Studien über die Refraction (Mitth. 24—25 von 1868), — Victor **Fuss** (Pulkowa 1839 geb.; Enkel von Nikolaus in 55; Dir. Obs. Kronstadt), Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes. St. Petersburg 1872 in 4., — Jul. **Maurer**, Die Extinction des Fixsternlichtes in ihrer Beziehung zur astronomischen Refraction. Zürich 1882 in 8., — R. **Radau**, Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques (Ann. Obs. Par. Mém. 16 von 1882), und: Essai sur les réfractions astronomiques. Paris 1889 in 4., — Paul **Harzer** (Grossenhain in Sachsen 1857 geb.; Dir. Obs. Gotha), Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre (A. N. 2477 von 1882 und 2554—56 von 1883), — Arthur **Kerber**, Die astronomische Refraction als Function der meteorologischen Elemente (A. N. 2494—95 von 1883), — Th. **v. Oppolzer**, Über die astronomische Refraction. Wien 1886 in 4., — Pierre-Ossian **Bonnet** (1819 geb.; Akad. Paris), Théorie de la réfraction astronomique. Paris 1888 in 8., — etc."

460. Der Einfluss der Refraktion auf Distanz, Position und Coordinatendifferenzen. — Sobald zwei Gestirne miteinander verglichen werden, welche in verschiedenen Höhen stehen, so wird sich die ungleiche Einwirkung der Refraktion auf dieselben geltend machen, und man hat daher zwischen dem scheinbaren und wahren Unterschied ihrer Lage zu unterscheiden und die zur Reduktion des einen auf den andern nötigen Formeln zu entwickeln [a].

Zu 460: *a.* Es ist schon bereits in 177 und 397 einiges Betreffende beigebracht worden, aber immerhin wird es zweckmässig sein, hier noch einige allgemeinere Formeln zu entwickeln: Bezeichnen z' und z'' die scheinbaren Zenitdistanzen zweier Gestirne S' und S'', D ihre scheinbare Distanz, und w ihre Azimutaldifferenz, so ergeben die sog. Gauss'schen Formeln, wenn $m = \frac{1}{2}(m' + m'')$ und $z = \frac{1}{2}(z' + z'')$ ist,



$$\mathrm{Co}\, m \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2} D = \mathrm{Co}\, \tfrac{1}{2} w \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2}(z'' - z')$$
$$\mathrm{Si}\, m \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2} D = \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2} w \cdot \mathrm{Si}\, z$$

oder, da für mikrometrische Beobachtungen w, D und $z'' - z'$ immer klein sind, nahe

$$D \cdot \mathrm{Co}\, m = z'' - z' \qquad D \cdot \mathrm{Si}\, m = w \cdot \mathrm{Si}\, z \qquad \mathbf{1}$$

und ebenso hat man, wenn die auf die wahren Örter bezüglichen Grössen mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet werden,

$$\triangle \cdot \mathrm{Co}\, \mu = \zeta'' - \zeta' \qquad \triangle \cdot \mathrm{Si}\, \mu = w \cdot \mathrm{Si}\, \zeta \qquad \mathbf{2}$$

Bezeichnen aber r und ϱ die sog. Refraktionskonstanten, je nachdem die scheinbare oder wahre Zenitdistanz als Argument gewählt wird, so ist

$$\zeta = z + r \cdot \mathrm{Tg}\, z \qquad z = \zeta - \varrho\, \mathrm{Tg}\, \zeta \qquad \text{oder} \qquad r \cdot \mathrm{Tg}\, z = \varrho\, \mathrm{Tg}\, \zeta \qquad \mathbf{3}$$

und man kann daher leicht, wie dies **Bessel** in seiner hier zunächst zu Grunde gelegten Abhandlung „Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen (Untersuchungen I 153—201)" auch wirklich ausgeführt hat, eine Tafel der r in eine der ϱ umsetzen, wobei sich z. B. $z = 45^\circ$, $r = 57'',682$ und $\varrho = 57'',650$ entsprechen. Bezeichnet man durch ϱ das Mittel der den beiden

Gestirnen entsprechenden Werte, so kann man nach 3

$$\frac{\mathrm{Si}\,\zeta}{\mathrm{Si}\,z} = \frac{\mathrm{Si}\,\zeta}{\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,[\zeta' + \zeta'' - \varrho\,(\mathrm{Tg}\,\zeta' + \mathrm{Tg}\,\zeta'')]} = \frac{1}{1 - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,1''} = 1 + \varrho \cdot \mathrm{Si}\,1''$$

setzen, und erhält somit durch Kombination der 1 und 2

$$\begin{aligned} \triangle \cdot \mathrm{Si}\ \mu &= \mathrm{D} \cdot \mathrm{Si\ m} \cdot \mathrm{Si}\,\zeta : \mathrm{Si\,z} = \mathrm{D} \cdot \mathrm{Si\,m} \cdot (1 + \varrho \cdot \mathrm{Si}\,1'') \\ \triangle \cdot \mathrm{Co}\,\mu &= \mathrm{D} \cdot \mathrm{Co\,m} \cdot (\zeta'' - \zeta') : (\mathrm{z}'' - \mathrm{z}') = \mathrm{D} \cdot \mathrm{Co\,m} \cdot \mathrm{d}\zeta : \mathrm{dz} \end{aligned} \qquad 4$$

Bildet man aber $4' \cdot \mathrm{Co\,m} - 4'' \cdot \mathrm{Si\,m}$ und $4' \cdot \mathrm{Si\,m} + 4'' \cdot \mathrm{Co\,m}$, so ergeben sich sehr nahe

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{m} - {}^1\!/_2 \cdot \left[\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{dz}} - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,1'' - 1\right] \cdot \mathrm{Si\,2\,m} \\ \triangle &= \mathrm{D} + \mathrm{D} \cdot \left[\varrho \cdot \mathrm{Si}\,1'' + \left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{dz}} - \varrho\,\mathrm{Si}\,1'' - 1\right) \cdot \mathrm{Co}^2\,\mathrm{m}\right] \end{aligned} \qquad 5$$

oder endlich da, wenn

$$\mathrm{h} = \mathrm{Se}^2\,\zeta\left[\varrho \cdot \mathrm{Si}\,1'' + {}^1\!/_2 \cdot \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\zeta} \cdot \mathrm{Si}\,2\,\zeta\right] \qquad \mathrm{k} = \mathrm{Ct}^2\,\zeta\left[\frac{\mathrm{h}}{1-\mathrm{h}} - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,1''\right] \qquad 6$$

gesetzt wird, durch Differentiation von 3″

$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}\zeta} = 1 - \mathrm{h} \qquad \text{und somit} \qquad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{dz}} - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,1'' - 1 = \mathrm{k} \cdot \mathrm{Tg}^2\,\zeta$$

folgt,

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{m} - {}^1\!/_2\,\mathrm{k} \cdot \mathrm{Tg}^2\,\zeta \cdot \mathrm{Si\,2\,m} \\ \triangle &= \mathrm{D} + \mathrm{D}\,[\varrho \cdot \mathrm{Si}\,1'' + \mathrm{k} \cdot \mathrm{Tg}^2\,\zeta \cdot \mathrm{Co}^2\,\mathrm{m}] \end{aligned} \qquad 7$$

nach welchen Formeln sich die gemessenen Positionen und Distanzen verhältnismässig leicht für die Refraktion korrigieren lassen, besonders wenn man die von **Bessel** für k berechnete Hilfstafel benutzt. Da jedoch deren wirkliche Anwendung die Kenntnis von ζ voraussetzt, das allerdings mit hinlänglicher Annäherung aus der Sternzeit der Beobachtung und genäherten Werten für die Mittel der Rektascensionen und Deklinationen der beiden Gestirne berechnet werden kann, aber also immerhin berechnet werden muss, — da ferner in der Regel die Position nicht auf den Vertikal-, sondern auf den Deklinationskreis bezogen wird, in welchem Falle ν aus n, anstatt μ aus m, erhalten werden soll, wofür noch die ebenfalls von der Refraktion beeinflusste Variation v in Betracht fällt und daher 7′ um ein neues Glied zu vermehren ist, — so will es mir scheinen, dass man schon in diesem Falle, und noch mehr in demjenigen, wo es sich um Korrektion von gemessenen Rektascensions- und Deklinations-Differenzen handelt, ebensogut wegkömmt, wenn man die obigen 7 und die aus ihnen noch abzuleitenden weitern Formeln ganz bei Seite lässt und statt dessen, unter Benutzung der 177 : 7—9, durch eine gewöhnliche Annäherungsrechnung nach und nach das Ziel zu erreichen sucht. Ich verzichte daher darauf, diese weitern Entwicklungen hier ebenfalls durchzuführen und verweise dafür auf die bereits erwähnte Abhandlung von **Bessel**, — auf die hierüber einlässlich eintretenden Lehrbücher von **Brünnow** und **Chauvenet**, — auf die ersteres berichtigende Note von W. H. **Finlay** in den Monthly Notices (1889 IV), — und auf die ebenfalls Hilfstafeln enthaltende Arbeit „Malcolm **Neill**, Logarithmic method of correcting for differential refractions in declination (A. N. 2735 von 1886)“.

XVIII. Die Theorie der Finsternisse und Bedeckungen.

Sage nicht immer was du weisst, aber wisse immer was du sagst. *(Claudius.)*

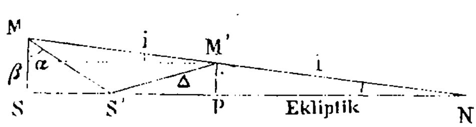
---

461. Die Bedingungen für eine Mondfinsternis. — Dass eine Mondfinsternis nur zur Zeit des Vollmondes und auch da nur in den Fällen eintreten kann, wo unser Begleiter gleichzeitig nahe an einem der Knoten steht, welche seine Bahn in der Ebene der Ekliptik bildet, ist bereits (243 u. f.) hervorgehoben worden. Wenn hier auf diese Verhältnisse nochmals zurückgekommen wird, so geschieht es, um diese Bedingungen genauer zu formulieren als es damals nach dem Plane dieser Schrift geschehen konnte [a].

Zu 461: *a.* Schneidet man den Schattenkegel der Erde durch eine in der Distanz des Mondes zur Kegelaxe senkrechte Ebene, so ist der Halbmesser des Schnittes nach 246 : 1, wenn wir nach dem Vorgange von **Mädler** den dort nach Tob. **Mayer** eingeführten Erfahrungsfaktor $^{61}/_{60}$ durch den, nahe in der Mitte zwischen ihm und den durch **Lambert** beliebten $^{41}/_{40}$, liegenden und ebenfalls bequemen Wert $^{51}/_{50}$ ersetzen,

$$\varphi = {}^{51}/_{50} \cdot (\odot + ☾ - \mathrm{r}) \qquad 1$$

Bezeichnen ferner M und S die Lage von Mond und Sonne zur Zeit der Opposition, M′ und S′ deren Lage zu irgend einer andern der Opposition nahen Zeit, und ist β die Breite des Mondes bei der Opposition, i die Neigung der Mondbahn, λ aber



das Verhältnis der Bewegung des Mondes in Länge zu derjenigen der Sonne, so hat man successive $SS' = \beta \cdot \mathrm{Tg}\, \alpha$, $SP = \lambda \cdot SS'$, $S'P = SP - SS' = \beta(\lambda - 1) \cdot \mathrm{Tg}\, \alpha$, $M'P = \beta - SP \cdot \mathrm{Tg}\, i = \beta(1 - \lambda \cdot \mathrm{Tg}\, \alpha \cdot \mathrm{Tg}\, i)$, und somit

$$\triangle^2 = \beta^2 \cdot [(\lambda - 1)^2 \cdot \mathrm{Tg}^2\, \alpha + (1 - \lambda \cdot \mathrm{Tg}\, \alpha \cdot \mathrm{Tg}\, i)^2] \qquad 2$$

woraus, wenn man nach $\triangle$ und α differenziert,

$$\frac{d\triangle}{d\alpha} = \frac{\beta^2}{\triangle \cdot \mathrm{Co}^2\, \alpha}\,[(\lambda - 1)^2 \cdot \mathrm{Tg}\, \alpha - \lambda(1 - \lambda \cdot \mathrm{Tg}\, \alpha \cdot \mathrm{Tg}\, i)\, \mathrm{Tg}\, i]$$

folgt. Es wird somit $\triangle$ ein Minimum, wenn

$$\frac{d\Delta}{d\alpha} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{Tg}\alpha = \frac{\lambda \cdot \operatorname{Tg} i}{(\lambda-1)^2 + \lambda^2 \cdot \operatorname{Tg}^2 i} \qquad \mathbf{3}$$

ist, und zwar erhält man durch Substitution letztern Wertes in 2 diesen Minimalwert

$$\Delta' = \frac{\beta \cdot (\lambda - 1)}{\sqrt{(\lambda-1)^2 + \lambda^2 \cdot \operatorname{Tg}^2 i}} = \beta \cdot \operatorname{Co} i' \qquad \text{wo} \qquad \operatorname{Tg} i' = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \operatorname{Tg} i \qquad \mathbf{4}$$

Damit aber eine partiale oder totale Finsternis entstehen kann, muss der Minimalwert kleiner als die der äussern oder innern Berührung entsprechende Summe oder Differenz von φ und dem scheinbaren Mondradius ϱ sein, d. h.

$$\beta \cdot \operatorname{Co} i' < \varphi \pm \varrho \qquad \text{oder} \qquad \beta < \varphi \pm \varrho + (\varphi \pm \varrho)(\operatorname{Se} i' - 1)$$

wo der zweite Teil eine kleine und nahe konstante Grösse ist. Man hat nämlich nach den Tafeln für die

Grössen	im Max.	im Min.	im Mittel
i	5° 20′ 6″	4° 57′ 22″	5° 8′ 44″
☾	61 32	52 50	57 11
☉	9,0	8,8	8,9
r	16 18	15 45	16 1,5
ϱ	16 46	14 24	15 35
λ	16,19	10,89	13,54

und somit unter Benutzung von 4 und 1

i′	5° 41′ 2″	5° 27′ 16″	5° 33′ 12″
$\varphi + \varrho$	3773″	3142″	3463″
$\varphi - \varrho$	1761	1414	1593
$(\varphi + \varrho)(\operatorname{Se} i' - 1)$	18″,6	14″,3	16″,3
$(\varphi - \varrho)(\operatorname{Se} i' - 1)$	8,7	6,4	7,5

und kann daher unbedenklich entsprechend den mittlern Werten annehmen, es sei das Entstehen einer partialen oder totalen Mondfinsternis sehr nahe an die Bedingung

$$\beta < \frac{51}{50}(☉ + ☾ - r) \pm \varrho + \begin{Bmatrix} 16'' \\ 7 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{5}$$

geknüpft. Setzt man in 5 die Maximal- oder Minimalwerte von ☉, ☾ und ϱ, sowie die Minimal- oder Maximalwerte von r ein, so findet man für die partiale Finsternis

$$\beta < 63' \, 53'' \qquad \text{und} \qquad \beta < 52' \, 5''$$

für die totale Finsternis dagegen

$$\beta < 32' \, 34'' \qquad \text{und} \qquad \beta < 20' \, 46''$$

als Grenzwerte für das mögliche und sichere Eintreffen. In den zwischenliegenden zweifelhaften Fällen hat man in 5 statt den Grenzwerten die bei der betreffenden Opposition statthabenden Werte selbst einzuführen. — Würde man statt φ den Halbmesser φ' des Halbschattens, der sich offenbar nach der 1 analogen Formel

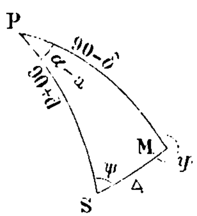
$$\varphi' = {}^{51}\!/_{50} \cdot (☉ + ☾ + r) \qquad \mathbf{6}$$

berechnen lässt, anwenden, so würden sich bei entsprechender Behandlung auch die Grenzen finden lassen, zwischen welche das mögliche und sichere Eintreten des Mondes in den Halbschatten fällt; ich abstrahiere jedoch, des geringen Interesses dieser Erscheinung wegen, davon dies weiter auszuführen.

— Anhangsweise mag noch beigefügt werden, dass für die obigen Mittelwerte von ☾, ⊙ und r sich nach 1 der Zuschlag von $^1/_{50}$ auf 49″,57 beläuft, während J. **Hartmann**, vgl. seine Abhandlung „Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Leipzig 1891 in 8.“, aus 2920 Beobachtungen für den Zuwachs des Schattenhalbmessers bei mittlerer Mondparallaxe den Mittelwert 48″,62 erhielt. Es dürfte somit für praktische Zwecke 1 auch fürderhin noch genügen.

462. Die Vorausberechnung. — Auch für die Vorausbestimmung der Mondfinsternisse und ihrer verschiedenen Phasen ist bereits (246) ein den gewöhnlichen Anforderungen genügendes Verfahren mitgeteilt worden. In manchen Fällen wird es jedoch wünschbar, genauere Daten zu erhalten als sie durch jene graphische Methode gewonnen werden, und es bleibt daher hier zu zeigen übrig, wie man auch zu solchen durch eine leichte Rechnung gelangen kann [a]. Anhangsweise mögen dann noch einige andere betreffende Verhältnisse kurz besprochen werden [b].

Zu 462: *a.* Um die Zeit zu bestimmen, zu welcher eine bestimmte Phase einer Mondfinsternis eintritt, bezeichne a die um 180° vermehrte Rektascension der Sonne und d ihre Deklination; es hat sodann der Mittelpunkt S des Schattens die Coordinaten a und — d, und es bestehen somit, wenn α und δ die Coordinaten des Mondes M sind und P den Pol bezeichnet, für die Polarcoordinaten Δ und ψ des Mondes in Beziehung auf den Schattenmittelpunkt und dessen Deklinationskreis die Beziehungen



$$\text{Si}\,\Delta : \text{Co}\,\delta = \text{Si}\,(\alpha - \text{a}) : \text{Si}\,\psi$$

$$\text{Si}\,\Delta \cdot \text{Co}\,\psi = \text{Si}\,\delta \cdot \text{Co}\,\text{d} + \text{Co}\,\delta \cdot \text{Si}\,\text{d} \cdot \text{Co}\,(\alpha - \text{a}) = \qquad \textbf{1}$$

$$= \text{Si}\,(\delta + \text{d}) - 2\,\text{Co}\,\delta \cdot \text{Si}\,\text{d} \cdot \text{Si}^2\,{}^1/_2\,(\alpha - \text{a})$$

oder, da Δ und $\alpha - \text{a}$ immer kleine Grössen sind und d immer nahe gleich dem Gegensatze von δ ist, mit einer der möglichen Genauigkeit der Beobachtung mehr als entsprechenden Annäherung

$$\Delta \cdot \text{Si}\,\psi = (\alpha - \text{a}) \cdot \text{Co}\,\delta \qquad \Delta \cdot \text{Co}\,\psi = \delta + \text{d} + {}^1/_4\,\text{Si}\,2\delta \cdot (\alpha - \text{a})^2 \cdot \text{Si}\,1'' \qquad \textbf{2}$$

wo nach 461 : 1, 6 für die ersten und letzten Berührungen des Halbschattens und Kernschattens von aussen und innen für Δ successive die Werte

$$^{51}/_{50}\,(\odot + ☾ \pm r) + \varrho \qquad ^{51}/_{50}\,(\odot + ☾ \mp r) - \varrho \qquad \textbf{3}$$

einzuführen sind. Setzt man entsprechend 2

$$\text{x} = (\alpha - \text{a}) \cdot \text{Co}\,\delta \qquad \text{y} = \delta + \text{d} + \varepsilon \qquad \textbf{4}$$

wo
$$\varepsilon = {}^1/_4 \cdot \text{Si}\,2\,\delta \cdot (\alpha - \text{a})^2 \cdot \text{Si}\,1'' \qquad \textbf{5}$$

eine kleine, meist ohne Schaden zu vernachlässigende, noch für $\delta = 30^0$ und $\alpha - \text{a} = 6000''$ nur auf 38″ ansteigende Grösse ist, — und bezeichnet mit x_0 und y_0 die Werte, welche x und y für eine der Opposition nahe Zeit T_0 annehmen, mit x′ und y′ aber ihre stündlichen Zunahmen, so hat man nach 2 für eine andere Zeit $\text{T} = \text{T}_0 + \tau$, wenn τ in Stunden ausgedrückt wird, offenbar

$$\Delta \cdot \text{Si}\,\psi = \text{x}_0 + \text{x}' \cdot \tau \qquad \Delta \cdot \text{Co}\,\psi = \text{y}_0 + \text{y}' \cdot \tau \qquad \textbf{6}$$

d. h. zwei Gleichungen, nach welchen für jedes gegebene τ die entsprechenden

Werte von ψ und $\triangle$, oder für jede durch $\triangle$ bestimmte Phase die entsprechenden Werte von ψ und τ berechnet werden können. Setzt man, um letztere Rechnung bequemer zu absolvieren,

$$m \cdot \mathrm{Si}\, M = x_0 \qquad m \cdot \mathrm{Co}\, M = y_0 \qquad n \cdot \mathrm{Si}\, N = x' \qquad n \cdot \mathrm{Co}\, N = y' \tag{7}$$

so dass M, m, N, n leicht bestimmbare Grössen sind, so gehen die 6 in

$$\triangle \cdot \mathrm{Si}\, \psi = m \cdot \mathrm{Si}\, M + n \cdot \tau \cdot \mathrm{Si}\, N \qquad \triangle\, \mathrm{Co}\, \psi = m \cdot \mathrm{Co}\, M + n \cdot \tau \cdot \mathrm{Co}\, N \tag{8}$$

über. Multipliziert man 8′ mit Co N oder Co ψ, 8″ mit Si N oder Si ψ, so ergeben sich aus den Differenzen die Gleichungen

$$\triangle \cdot \mathrm{Si}\,(\psi - N) = m \cdot \mathrm{Si}\,(M - N) \qquad n \cdot \tau \cdot \mathrm{Si}\,(\psi - N) = m\, \mathrm{Si}\,(M - \psi)$$

und hieraus folgen zur successiven Berechnung von ψ und τ aus $\triangle$

$$\mathrm{Si}\,(\psi - N) = {}^{m}/_{\triangle} \cdot \mathrm{Si}\,(M - N) \qquad \tau = {}^{\triangle}/_{n} \cdot \mathrm{Co}\,(\psi - N) - {}^{m}/_{n} \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \tag{9}$$

so dass die gestellte Aufgabe gelöst ist, indem aus

$$T = T_0 + \tau \qquad \text{und} \qquad \psi' = 180^0 + \psi \tag{10}$$

teils das Eintreten der Phase, teils, indem man vom Nordpunkte des Mondes seinem Rande um ψ' nach Osten folgt, der Punkt gefunden wird, über welchen hinaus das Schattencentrum liegt. — Durch Quadrieren und Addieren der beiden 8 erhält man

$$\triangle^2 = m^2 + n^2 \cdot \tau^2 + 2m \cdot n \cdot \tau \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \tag{11}$$

und hieraus durch Differenzieren nach $\triangle$ und τ, da die übrigen Grössen als konstant angesehen werden dürfen,

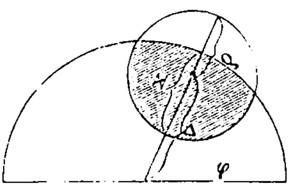
$$\frac{d\triangle}{d\tau} = \frac{n}{\triangle}\,[n \cdot \tau + m \cdot \mathrm{Co}\,(M - N)] \qquad \text{so dass} \qquad \tau' = -\frac{m}{n} \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \tag{12}$$

ein Minimum von $\triangle$ entspricht. Bezeichnet daher T_1 die Zeit der grössten Finsternis, so hat man

$$T_1 = T_0 - \frac{m}{n} \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \tag{13}$$

und zugleich folgt aus Vergleichung von 12 und 9, dass für diesen Fall $\psi - N = 90^0$ sein muss. Bezeichnet man den τ' entsprechenden Wert von $\triangle$ mit $\triangle'$, so erhält man nach 11 durch Substitution aus 12

$$\triangle' = \pm\, m \cdot \mathrm{Si}\,(M - N) \tag{14}$$



wo das Doppelzeichen offenbar so zu verstehen ist, dass man $\triangle'$ immer einen positiven Wert beizulegen hat. Bezeichnet endlich x das $\triangle$ entsprechende Eintauchen des Mondes in den Schatten, so ist offenbar

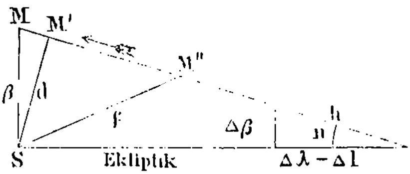
$$\triangle + (x - \varrho) = \varphi \qquad \text{oder} \qquad x = \varphi + \varrho - \triangle$$

und man hat daher, da das Verhältnis des grössten Wertes von x zum Monddurchmesser **Grösse** der Finsternis genannt wird, diese Grösse

$$m' = (\varphi + \varrho - \triangle') : 2\varrho = 12 \cdot (\varphi + \varrho - \triangle') : 2\varrho \text{ Zolle} \tag{15}$$

wo sich letzterer Ausdruck auf die aus alter Zeit stammende Übung bezieht, den scheinbaren Monddurchmesser in 12 sog. **Mondzolle** abzuteilen. — Um schliesslich noch zu ermitteln, auf welchem Teile der Erde eine gewisse Phase der Finsternis, die zur Pariserzeit T eintritt, sichtbar wird, hat man sich nur zu erinnern, dass ein Ort, dessen Pariserlänge $12^h - T$ ist, und dessen Polhöhe mit der betreffenden Deklination δ des Mondes übereinstimmt, zu dieser

Zeit Mitternacht und den in Opposition stehenden Mond im Zenite haben muss: Stellt man daher einen Globus so, dass jener Ort im Zenite steht, so haben alle über dem Horizonte stehenden Punkte der Erde zu jener Zeit den Mond und mit ihm natürlich auch die Phase in Sicht. — *b.* Hält man die Sonne, und damit auch das ihr gegenüberliegende Centrum S des Erdschattens, in dem der Opposition entsprechenden Punkte fest, und bezeichnen M, M' und M'' die relativen Lagen des Mondes zur Zeit T der Opposition, zur Zeit T' seines kürzesten Abstandes d von S, und zur Zeit T'' seines Abstandes f, so ist offenbar



$$T' = T - {}^1/_h\, MM' = T - {}^1/_h\, \beta \cdot \mathrm{Si}\, n, \quad T'' = T - {}^1/_h\, MM'' = T' - {}^1/_h \sqrt{f^2 - d^2} \qquad \mathbf{16}$$

wo n und h, falls $\Delta\beta$, $\Delta\lambda$, Δl die stündlichen Bewegungen des Mondes in Breite, des Mondes und der Sonne in Länge bezeichnen, durch

$$\mathrm{Tg}\, n = \Delta\beta : (\Delta\lambda - \Delta l) \qquad h = \sqrt{\Delta\beta^2 + (\Delta\lambda - \Delta l)^2} = \Delta\beta \cdot \mathrm{Cs}\, n \qquad \mathbf{17}$$

bestimmt sind, und es ist daher, da für den Beginn der partialen oder totalen Finsternis $f = \varphi \pm \varrho$ ist, die Dauer dieser Finsternisse durch

$$2\,(T' - T'') = {}^1/_h \cdot \sqrt{(\varphi \pm \varrho)^2 - d^2} \qquad \mathbf{18}$$

gegeben. Es wird also die Dauer eine grösste werden, wenn die Opposition im Knoten ($d = 0$) statt hat, — wenn zugleich (soweit diese Bedingungen einander nicht widersprechen) die Grössen $(\varphi \pm \varrho)$ grösste, $\Delta\beta$ und $(\Delta\lambda - \Delta l)$ aber kleinste Werte annehmen. Nun haben (461) $\varphi + \varrho$ und $\varphi - \varrho$ die Maximalwerte 3773 und 1761''; ferner nimmt $\Delta\lambda$ in der Nähe des Knotens einen Minimalwert von circa 1767'' an, während dann allerdings $\Delta\beta$ auf etwa 200'' ansteigt; endlich nimmt Δl in der Nähe des Perigeums ein Maximum von etwa 153'' an. Man hat also nach 17 den Minimalwert $h = \sqrt{200^2 + (1767 - 153)^2} = 1628$, und sodann nach 18 für die Dauer die Maximalwerte $2 \cdot 3773 : 1628 = 4^h{,}63$ und $2 \cdot 1761 : 1628 = 2^h{,}16$, welche jedoch kaum je erreicht werden. Mondfinsternisse, welche über 4^h dauern, sind äusserst selten: Die längst andauernde der neuern Zeit war diejenige von 1794 II 14 mit $3^h{,}96$, da die im Berliner Jahrbuche für 1830 III 9 mit $4^h{,}45$ angegebene auf einem Rechnungsfehler beruhte und sich durch Neurechnung auf $3^h{,}90$ reduzierte.

463. Die Verwertung erhaltener Rechnungsresultate und Beobachtungen. — Die während des Verlaufes einer Mondfinsternis zu beachtenden Erscheinungen und namentlich die je beim Eintritte der verschiedenen Phasen zu erhebenden Daten besitzen allerdings für die neuere Zeit keine hervorragende Wichtigkeit mehr, und überdies ist von erstern bereits (247) gesprochen, sowie auch (406) die frühere Hauptverwendung der zweiten erwähnt worden. Immerhin giebt eine Vergleichung der durch Beobachtung und Berechnung für eine und dieselbe Phase erhaltenen Zeiten einige nicht zu unterschätzende Anhaltspunkte für die Kritik der letzterer zu Grunde liegenden Tafeln und Annahmen *a*.

Zu 463: *a.* Namentlich wurden solche Vergleichungen auch zur Bestimmung des Erfahrungsfaktors in 461 : 1 benutzt, wofür noch auf „Legentil, Remarques sur la grandeur du demi-diamètre de l'ombre de la terre dans les éclipses de lune (Mém. Par. 1755), — **Lalande**, Table de ce qu'il faut ajouter, à raison de l'atmosphère, pour avoir le demi diamètre de l'ombre de la terre dans les éclipses de lune (Conn. d. t. 1763), — Th. **Schubert**, Über den Halbmesser des Erdschattens (Berl. Jahrb. 1791), — **Mädler**, Untersuchungen über die Grösse des Erdschattens (A. N. 256, 286 und 338 von 1834—37), — etc." verwiesen werden kann. — Ferner sind solche Vergleichungen beim Eintreten sog. **horizontaler** Finsternisse, wo (vgl. 453) durch Wirkung der Refraktion der verfinsterte Mond vor Untergang der Sonne aufzugehen scheint, wie dies z. B. 1750 VII 19 in Paris und 1862 XII 6 in Greifswalde beobachtet wurde, für das Studium der Refraktion in der Nähe des Horizontes nicht ohne Interesse, — und in früherer Zeit konnten sie auch zur Kritik der Mondtafeln dienen, was jetzt allerdings wegen der jede genaue Beobachtung vereitelnden Vermischung von Kernschatten und Halbschatten kaum mehr der Fall sein dürfte.

464. Die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. — Es ist selbstverständlich, dass die Bedingungen für das Zustandekommen der Verfinsterung eines Jupitersmondes und die Regeln zur Vorausberechnung einer solchen Erscheinung ganz in analoger Weise entwickelt werden können, wie es soeben für den Erdmond geschehen ist, und es kann daher hier genügen, für den eigentlichen Detail auf die betreffenden Specialschriften und Hilfstafeln zu verweisen [a]. — Über die Beobachtung und Ausnutzung solcher Verfinsterungen ist bereits früher (406) Einiges mitgeteilt worden, dem ich hier nur noch beifügen will, dass in der neuesten Zeit für erstere die Photometrie beigezogen worden ist [b], während die wichtigen Ergebnisse der zweiten für die Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes unter den folgenden Nummern besprochen werden sollen.

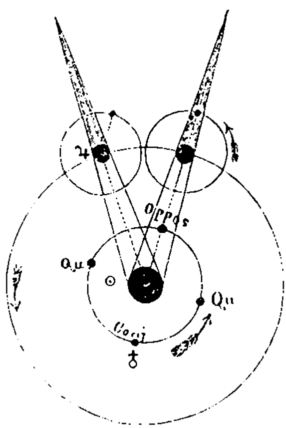
Zu 464: *a.* Wie in 406 erwähnt wurde, fielen die ersten Versuche, auch für die Jupitersmonde Tafeln zu erstellen, nicht sehr befriedigend aus, und es gelang erst Dom. **Cassini**, der sich seit 1652 intensiv mit diesen Monden befasst, sich durch Konstruktion eines, nachmals noch in „Fr. **Weidler**, Explicatio Jovilabii Cassiniani. Wittemb. 1727 in 4." beschriebenen Hilfsapparates die Übersicht erleichtert, und in seinen „Opera astronomica. Romæ 1666 in fol." bereits eine Tafel gegeben hatte, in seinen „Ephemerides Bononienses Mediceorum Siderum. Bononiæ 1668 in fol." eine wirklich brauchbare Tafel zu veröffentlichen und darauf gegründet die eintretenden Konfigurationen in der Form darzustellen, wie sie noch heute gebräuchlich ist. Ein wesentlicher Fortschritt wurde dann namentlich durch **Wargentin** 1741 in seinen Publikationen „De satellitibus Jovis, und: Tabulæ pro eclipsibus satellitum Jovis (Acta Upsal. 1741)" erreicht, welche sodann auch für die neuen Ausgaben der Halley'schen und anderer Tafelwerke benutzt wurden und so ziemlich massgebend blieben, bis die von Marie-Charles Théodor **Damoiseau** (Besançon 1768 — Issy bei Paris 1846; Artillerie-Oberst, Dir. Obs. de l'école milit. und Akad. Paris) berechneten „Tables écliptiques des Satellites de Jupiter. Paris 1836 in 4. (mit Fortsetzung von Todd: Washington 1876)" erschienen, welchen jetzt gewöhnlich, auf die z. B. in „Abel **Souchon**, Traité d'astronomie pratique. Paris 1883 in 8." detailliert auseinander gesetzte Weise, unsere Ephemeriden ihre betreffenden Angaben entnehmen. — *b.* Mit den für Bestimmungen auf der See unentbehrlichen, dagegen allerdings auf dem Lande wo immer möglich durch wirkliche korrespondierende Beobachtungen ihrem Haupteinflusse nach zu eliminierenden Tafeln, vervollkommneten sich auch die Beobachtungsmethoden: Schon **Cassini** hatte vorgeschrieben, dass man bei Immersionen eines Satelliten in den Schatten Jupiters den letzten, bei Emersionen desselben den ersten Moment zu beobachten habe, — später **Hell** (vgl. Eph. Vind. 1764) diese Vorschrift noch dahin ergänzt, dass man die Mittel der sich aus Immersionen oder Emersionen ergebenden Resultate getrennt berechnen, und dann aus diesen Mitteln, um den Einfluss der Fernröhren zu eliminieren, wieder das Mittel nehmen solle, — und noch Adr. **Scherer** (vgl. seinen Brief an Gautier von 1820 IV 14 in Notiz 369) ernstlich davor gewarnt, schwache (jede Immersion zu frühe und jede Emersion zu spät zeigende) und namentlich bei korrespondierenden Beobachtungen zu ungleiche Fernröhren anzuwenden. In der neuern Zeit (1883) suchte sodann **Cornu** die photometrische Beobachtung zu belieben, aus der sich z. B. bei rasch aufeinander folgenden Einstellungen der Moment mit grosser Sicherheit bestimmen lasse, wo der Satellit gerade noch die Hälfte seiner Helligkeit zu besitzen scheine; sein Vorschlag kam bald darauf auf der Pariser Sternwarte zur Ausführung und gab A. **Obrecht** den Stoff für seine These „Etude sur les éclipses des satellites de Jupiter. Paris 1884 in 4.“, welche sodann H. **Seeliger** zu einem betreffenden Exkurse (Astr. Viert. 1885) und Ernst **Anding** zu seinen „Photometrischen Untersuchungen über die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. München 1889 in 4.“ veranlasste. Ganz unabhängig davon beschäftigte sich, und zwar schon vom Juni 1878 hinweg, E. C. **Pickering** auf dem Harvard Observatorium mit entsprechenden photometrischen Aufnahmen.

465. Die ältern Ansichten über die Geschwindigkeit des Lichtes. — Schon im Altertum wurde mehrfach die Ansicht ausgesprochen, dass die Geschwindigkeit des Lichtes zwar sehr gross, aber dennoch endlich sei [a], und auch **Galilei** pflichtete derselben bei, obschon ihm seine Versuche, diese Geschwindigkeit zu messen, kein positives Resultat ergaben [b].

Zu 465: *a.* Während **Plinius** in seiner „Historia naturalis (vgl. 4)“ nur aussprach, dass die Geschwindigkeit des Lichtes grösser als diejenige des Schalles sei, lehrte dagegen schon im 2. Jahrhundert n. Chr. **Maximus Tyrius** in seinen „Dissertationes (z. B. Cantabrigiæ 1703 in 8. ausgegeben)“ ausdrücklich, dass die Geschwindigkeit des Lichtes zwar sehr gross, aber dennoch endlich sei. Mit dieser letztern Ansicht stimmten sodann auch **Alhazen** laut seiner „Optica (vgl. 135)“ und Francis **Baco** (Yorkhouse bei London 1561 — Highate bei London 1626; Rechtsanwalt, dann Lord-Grosskanzler) laut seinem „Novum organum. London 1620 in 4.“ überein, obschon sie dieselbe ebenfalls nur durch Raisonnement zu belegen wussten. — *b.* Einen ersten Versuch, die Geschwindigkeit des Lichtes wirklich zu messen, unternahm **Galilei**, wie wir aus dessen „Discorsi e dimostrazioni. Leidæ 1638 in 4. (p. 43 u. f.)“ wissen, in folgender Weise: Zwei Beobachter, deren Jeder ein Licht hält, stellen sich zuerst in geringer Entfernung voneinander auf und üben sich darauf ein, dass, wenn der Eine sieht, dass der Andere sein Licht abdeckt, er dies ebenfalls ausführt; dann entfernen sie sich um einige Meilen voneinander und führen dieselbe Operation (bei grössern Entfernungen Fernröhren zu Hilfe nehmend) genau in derselben Weise aus. Der Zeitunterschied zwischen dem Abdecken des eigenen und dem Sehen des fremden Lichtes giebt sodann die Zeit, in welcher das Licht die doppelte Distanz zurücklegt, und damit dessen Geschwindigkeit. — Dass **Galilei** bei der benutzten Distanz von einigen Meilen, und etwas später die Accademia del Cimento, auch bei Verdopplung derselben und Einführung eines Schiebers zum Ab- und Zudecken des Lichtes, kein positives Resultat erhalten konnte, ist selbstverständlich; aber die Methode, in welcher man einen Vorläufer der spätern physikalischen Bestimmung (467) erkennt, ist von grossem Interesse, und zugleich ehrt es ihren Erfinder, dass er aus dem Nichterfolge nur den Schluss zog, es sei die Geschwindigkeit des Lichtes zu gross, um auf diesem Wege ermittelt zu werden, nicht aber sich verleiten liess, wie es bald darauf **Descartes** bei ähnlichen Misserfolgen nach andern Methoden sich beikommen liess, daraus auf eine augenblickliche Fortpflanzung (propagation instantanée) zu schliessen, um sodann diesen Unsinn noch philosophisch zu begründen.

466. Die Bestimmungen durch und seit Römer. — Als Olaus **Römer** auf Veranlassung von Picard 1671 nach Paris übergesiedelt war, bethätigte er sich unter anderm an den (464) durch Dom. Cassini seit Jahren regelmässig fortgeführten Beobachtungen der Jupiterstrabanten, — fand alsbald, dass sich durchschnittlich zwei Immersionen des ersten Jupitersmondes rascher folgen als zwei Emersionen, — und schloss nun 1675 aus dem Umstande, dass die Immersionen nur in der Nähe derjenigen Quadratur sichtbar werden, wo sich die Erde Jupiter nähert, die Emersionen aber nur in der Nähe der entgegengesetzten Quadratur, es möchte jene Ungleichheit eine Folge davon sein, dass das Licht eine merkliche Zeit gebrauche, um die dabei in Frage kommenden Distanzenunterschiede zu durchlaufen, — ja konnte schliesslich den Nachweis leisten, dass das Licht etwa $11^m = 660^s$ gebrauche, um den Halbmesser der Erdbahn zu durchlaufen, — somit, unter Annahme einer Sonnenparallaxe von $9'',3$, dessen Geschwindigkeit etwas mehr als 48000 französische Meilen betrage [a]. Nach längern Erörterungen siegte seine Anschauung, und es bleibt so **Römer**, wenn auch seine Zahlwerte später auf $493^s,2$ und circa 40000 deutsche Meilen abgeändert werden mussten, das grosse Verdienst, zuerst die endliche Geschwindigkeit des Lichtes bewiesen und für dieselbe eine bestimmte Zahlangabe ermittelt zu haben [b].

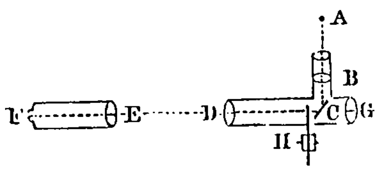
Zu 466: *a.* Die umstehende Figur giebt wohl genügenden Aufschluss über die den verschiedenen Stellungen der Erde zu Sonne-Jupiter entsprechenden Verhältnisse, — und ebenso ist es klar, dass bei endlicher Geschwindigkeit des Lichtes sich kleine positive oder negative Differenzen zwischen den aus einer beobachteten Immersion oder Emersion mit Hilfe der Umlaufszeit des Trabanten berechneten und den aus Beobachtung erhaltenen Zeiten der folgenden Immersionen oder Emersionen ergeben müssen, welche



gegen die Opposition oder Konjunktion hin zu ganz erheblichen Beträgen anwachsen können, — ja dass es möglich sein muss, aus letztern annähernd die Werte zu bestimmen, welche jene Differenzen annehmen würden, wenn man von der Konjunktion oder Opposition selbst ausgehen und sowohl Rechnung als Beobachtung bis zur folgenden Opposition oder Konjunktion ausdehnen könnte. — Hält man an den von **Römer** benutzten 660ˢ und 9″,3 fest, und berücksichtigt, dass derselbe offenbar nicht die geographische (1⁰ = 15), sondern die alte französische Meile (1⁰ = 25) im Auge hatte, so erhält man für die Geschwindigkeit des Lichtes den Wert 180 · 25 : (660 · π · Si 9″,3) = 48135, welchen Römer auf 48000 franz. = circa 29000 geogr. Meilen abrundete. — *b.* Auch **Cassini** pflichtete anfänglich Römers Erwägungen bei und sprach vor der Akademie im Herbst 1675 aus, dass jene Differenz davon herzurühren scheine „que la lumière emploie quelque temps à venir du satellite jusqu'à nous"; später glaubte er dagegen, durch den Widerspruch der Cartesianer und durch den Umstand stutzig gemacht, dass die Beobachtungen der übrigen Satelliten keine entsprechende Ungleichheit zu ergeben schienen, in derselben „une inégalité particulière du mouvement synodique du premier satellite" sehen zu sollen, und vermerkte es übel, dass **Römer** ihm hierin nicht beipflichtete, sondern an seiner Ansicht festhielt, — ja im September 1676 der Akademie anzeigte, es werden die im November zu erwartenden Emersionen des ersten Mondes um volle 10ᵐ später eintreten, als man es nach den im August beobachteten Immersionen erwarten sollte. Eine am 9. November gelungene Beobachtung ergab nun wirklich diesen Unterschied, und hierauf legte **Römer** 1676 XI 22 der Akademie seine berühmte „Démonstration touchant le mouvement de la lumière (Anc. Mém. Par. I und X)" vor, in welcher er den Nachweis leistete, dass die oben mitgeteilten Verhältnisse wirklich bestehen. — Trotz dem so durch **Römer** errungenen Siege setzte sich jedoch der Streit, in welchem die **Huygens** und **Newton** für, die **Cassini** und **Maraldi** gegen ihn kämpften, noch lange fort und erlosch eigentlich erst, als durch **Bradleys** Entdeckung der Aberration des Lichtes (264) die Gegner total aus dem Felde geschlagen wurden. — Dass **Römer** selbst später von seinen 11ᵐ abgegangen sei, scheint unrichtig zu sein, so oft es auch behauptet wurde, — ja sein Schüler **Horrebow** soll dessen 660ˢ sogar auf 847ˢ erhöht haben; dagegen wies allerdings später **Delambre**, der seinen Rechnungen ein volles Tausend beobachteter Verfinsterungen des ersten Mondes zu Grunde legen konnte, in der Conn. d. t. für 1788 nach, dass die 660ˢ Römers auf 493ˢ,2 reduziert werden müssen, womit nun auch in den Zahlenwerten eine befriedigende Übereinstimmung mit der Bradley'schen Aberrationskonstante hergestellt war.

467. Die Kontrolarbeiten auf physikalischem Wege. — Trotz der dem Principe nach unanfechtbaren Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes auf astronomischem Wege war es von höchstem Interesse, dass es 1849 **Fizeau** gelang, auch auf physikalischem Wege zu derselben zu gelangen [a]. Seine Arbeit ist überdies seitdem mehrfach unter verschiedenen Modifikationen wiederholt und eine sozusagen vollkommene Übereinstimmung zwischen den auf so total voneinander abweichenden Wegen erhaltenen Resultaten erzielt worden [b].

Zu 467: *a.* Die der Galilei'schen verwandte Methode, welche Hippolyte-Louis **Fizeau** (Paris 1819 geb.; Akad. Paris) benutzte, bestand, vgl. seine Abhandlung „Sur une expérience relative à la vitesse de propagation de la lumière (Compt. rend. 1849; auch Aragos Astronomie IV, wo der Apparat vollständig abgebildet ist)" wesentlich in folgendem: Er liess bei Nacht das Licht einer starken Lampe A, das durch zwei Linsen B konzentriert wurde, auf die Glasplatte C fallen, welche im Brennpunkte der Linse D stand, so dass die Strahlen letztere parallel verliessen, dann auf eine in der Distanz d befindliche zweite Linse E fielen und von dieser in ihrem Brennpunkte konzentriert wurden, wo ein kleiner Hohlspiegel F des Radius F E stand, der veranlasste, dass die Strahlen auf dem gleichen Wege, auf welchem sie gekommen waren, nach C zurückkehrten und dort einen leuchtenden Punkt bildeten, der mit dem Okulare G betrachtet werden konnte. Bei H befand sich ein Rad mit n Zähnen, welches in das Rohr D G eingriff und durch ein mit Zählapparat versehenes Räderwerk beliebig rasch gedreht werden konnte, z. B. so, dass es m Umdrehungen in der Sekunde machte. In diesem Falle wird, wenn in einem gewissen Momente eine Zahnlücke von H in die Axe fällt, nach der Zeit $\tau = 1 : (2n \cdot m)$ der folgende Zahn an ihrer Stelle stehen, dagegen bei doppelter Geschwindigkeit die folgende Lücke, bei dreifacher der zweitfolgende Zahn, u. s. f. Ist nun die Geschwindigkeit x des Lichtes so gross, dass es den Weg 2 d gerade in dieser Zeit τ durchläuft, d. h. ist



$$x = 2d : \tau = 4n \cdot m \cdot d \qquad \mathbf{1}$$

so wird jeder durch die Lücke abgehende Strahl im 1., 3., ... Fall nach seiner Rückkehr auf einen Zahn treffen, also bei G kein Bild von A gesehen werden, während man im 2., 4., ... Fall einen hell leuchtenden Punkt wahrnimmt, — und umgekehrt wird, wenn man anfänglich das Rad sich langsam drehen lässt dann aber nach und nach die Geschwindigkeit vermehrt bis ein erstes Verschwinden eintritt, und nun das entsprechende m in 1 einführt, x gefunden werden können. **Fizeau** erhielt nun für $d = 8633^m$ und $n = 720$ ein solches erstes Verschwinden bei $m = 12{,}6$ und hiefür giebt 1

$$x = 4 \times 720 \times 12{,}6 \times 8633^m = 313275^{km} \simeq 42200 \text{ g. M.}$$

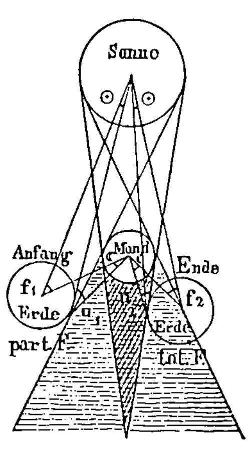
was allerdings, wie sich später zeigte, ein etwas zu grosser Wert ist, aber immerhin der Wahrheit bereits so nahe kömmt, dass man die Freude begreifen kann, welche **Arago** über das Gelingen des von ihm patronisierten Versuches empfand, und welcher er in seiner Astronomie (IV 418) in den, im Hinblicke auf 452 verständlichen Worten „En répétant ces observations on pourra un jour, sans sortir de Paris et de sa banlieue, trouver cette parallaxe du Soleil, qui, vers le milieu du siècle dernier, donna lieu à des voyages si longs, si lointains, si pénibles et à tant de dépenses" Ausdruck gab. — *b.* Die von Arago gewünschte Wiederholung wurde 1874 durch A. **Cornu** mit (zum Teil unter Mitwirkung von Fizeau) noch etwas verfeinerten Apparaten und unter Berücksichtigung aller möglichen Einflüsse vorgenommen, wofür auf sein „Mémoire sur la détermination de la vitesse de la lumière entre l'Observatoire et Montlhéry (Ann. Obs. Par.: Mém. 13 von 1876)" zu verweisen ist, und ergab wirklich den wesentlich kleinern Wert $x = 300400^{km} \risingdotseq 40500$ g. M., welchen **Helmert** durch Neuberechnung sogar auf 299990^{km} reduziert haben soll. Überdies unternahm Léon **Foucault** 1850 (vgl. Compt. rend. 1850 und das 262 : b erwähnte Recueil), den von **Wheatstone** (Ph. Tr. 1834) zur Bestimmung der Dauer des elektrischen Funkens benutzten rotierenden Spiegel zur Konstruktion eines neuen Apparates verwendend, betreffende Messungen, welche ihm $x = 298000^{km}$ ergaben, und zu ähnlichen Resultaten gelangten noch seither, ebenfalls unter Anwendung des „revolving mirror" (vgl. Astr. papers 1880—83), die Amerikaner Alb. **Michelson** in Annapolis und Sim. **Newcomb** in Washington, indem ersterer $x = 299940$ und letzterer $x = 299860^{km}$ erhielt. Man darf also wohl schliesslich im Mittel aus den neuern Bestimmungen

$$x \risingdotseq 300000^{km} \risingdotseq 40000 \text{ g. M.}$$

annehmen. — Vgl. auch die historische Arbeit „Albert **Kuckuck**, Die Geschwindigkeit des Lichtes. Berlin 1867 in 4."

468. Die Bedingungen für eine Sonnenfinsternis. — Dass eine sog. Sonnenfinsternis unter ähnlichen Bedingungen wie eine Mondfinsternis entsteht, jedoch zur Zeit des Neumondes statt hat und der Mond dabei die Rolle eines Lichtschirmes übernimmt, ist bereits früher (248) auseinandergesetzt worden, so dass hier nur die genauere Formulierung der Bedingungen nachzutragen ist ª.

Zu 468: *a.* Die Distanz f, welche die Centren von Sonne und Mond vom Erdmittelpunkte aus zu haben scheinen, nimmt für einen Punkt an der Erdoberfläche infolge der Parallaxe einen andern Wert u an, und zwar hat man für die sämtlichen Berührungen an den beiden Schattenkegeln sehr nahe $f + \odot = u + ☾$, so dass man überhaupt mit genügender Annäherung



$$u = f - (☾ - \odot) \qquad 1$$

setzen kann. Da nun für die kleinste **wahre** Distanz nach 461 : 4

$$f = \beta \cdot \text{Co}\, i' \quad \text{und} \quad \text{Tg}\, i' = [\lambda : (\lambda - 1)] \cdot \text{Tg}\, i \qquad 2$$

sein muss, wo β die Breite des Mondes bei der Konjunktion, i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik und λ das Verhältnis der Bewegungen von Mond und Sonne in Länge bezeichnet, so ist somit die kleinste **scheinbare** Distanz

$$u = \beta \cdot \text{Co}\, i' - (☾ - \odot) \qquad 3$$

und es wird daher eine partiale $(d = \varrho + r)$, totale $(d = \varrho - r)$ oder centrale $(d = 0)$ Bedeckung statt haben, wenn

$$\beta \cdot \mathrm{Co}\,i' < ☾ - ☉ + d \quad \text{oder} \quad \beta < ☾ - ☉ + d + (☾ - ☉ + d)\,(\mathrm{Se}\,i' - 1)$$

ist, wo sich das zweite Glied unter Anwendung der in 461 gegebenen mittlern Werte für die drei Fälle auf $\Delta = 25''$, $16''$ und $16''$ reduziert, so dass mit genügender Annäherung die Bedingung des Zustandekommens durch

$$\beta < ☾ - ☉ + d + \Delta \qquad 4$$

ausgedrückt werden kann. Setzt man hier entsprechend 461 die extremen Werte ein, so findet man, dass für

$\beta < 94' \; 52''$	oder	$\beta < 83' \; 15''$	eine	partiale,
60 40		51 3		totale,
61 39		52 7		centrale

Finsternis statt haben **kann** oder statt haben **muss**, wobei die centrale Finsternis die totale und annulare umfasst. Es sind also die Grenzen für die Sonnenfinsternisse bedeutend weiter als für die Mondfinsternisse, und in der That kommen nach **Delambre** auf eine Saros (245) nur etwa 29 Mondfinsternisse, dagegen bei 40 Sonnenfinsternisse, — wobei sich jedoch letztere Zahl auf die ganze Erde bezieht: Für einen bestimmten Ort trifft durchschnittlich, während fast jedes Jahr eine sichtbare Mondfinsternis liefert, kaum jedes zweite Jahr eine sichtbare Sonnenfinsternis ein, und durchschnittlich nur alle 200 Jahre eine totale Bedeckung, die dann erst noch im Maximum nur etwa 8^m andauert. So wird z. B. Zürich, das 1706 eine totale Finsternis hatte, noch lange auf eine solche warten müssen, zumal dieser Ort die Finsternisse von 1820 (wo ich als kleiner Knabe, vgl. Notiz 360, zum erstenmal eine solche Erscheinung mit ansah) und 1847, bei welchen für diesen Ort zu den Bedingungen einer totalen Finsternis nur eine etwas kleinere Distanz des Mondes fehlte und so statt einer totalen bloss eine annulare Finsternis entstand, als Abschlagszahlungen annehmen musste.

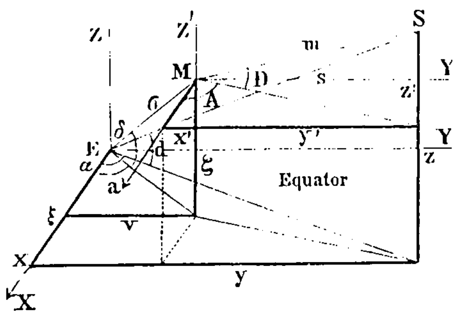
469. Die ältern Methoden der Vorausbestimmung. — Schon im Altertume wurden zur Vorausbestimmung von sog. Sonnenfinsternissen neben der Saros (245) zuweilen auch Methoden angewandt, welche sich auf die Theorien von Sonne und Mond und geometrische Betrachtungen stützten[a], jedoch gelang es erst **Kepler**, in seiner „Projectionsmethode" ein befriedigendes Verfahren aufzufinden, welches sodann allerdings später, namentlich durch **Flamsteed** in konstruktiver und durch **Lacaille** in analytischer Behandlung, noch wesentlich vervollkommnet wurde[b].

Zu 469: *a.* Schon **Hipparch** und **Ptolemäus** suchten nach von der Saros unabhängigen Methoden zur Vorausbestimmung der Finsternisse, und letzterer widmete (256) dieser Aufgabe speciell Buch VI seines Almagests (Ed. Halma I 373—453), — suchte (wie es oben in etwas anderer Weise geschehen ist) die Bedingungen auf, unter welchen Finsternisse und Bedeckungen eintreten können, — konstruierte Tafeln zur Bestimmung der Syzygien überhaupt und (einigermassen unserer VIII[b] entsprechende) der sog. ekliptischen Syzygien insbesondere, — und wandte zur Bestimmung von Moment und Betrag der kleinsten Distanz der Mittelpunkte von Mond und Sonne (resp. Erdschatten), sowie namentlich der mit letzterm zusammenhängenden Grösse der Finsternis geometrische Methoden an. Ich muss jedoch für weitern Detail auf den Almagest selbst oder auf Delambre (II 223—239) verweisen, — und ebenso für andere mutmasslich früher im Orient benutzte Vorschriften auf **Legentil** (Voyage in 449), **Delambre** (Conn. d. t. 1808), **Spottiswoode** (Asiat. Soc. Journ. 1863), etc. — *b.* Die sog. **Projektionsmethode**, welche zuerst bei **Kepler** (vgl. Astronomiæ pars optica, Tabulæ Rudolphinæ, etc.) und dann wieder ein halbes Jahrhundert später bei **Wren** und **Cassini** unabhängig von ihm aufzutreten scheint, beruht wesentlich darauf, dass man sich in Gedanken auf die Sonne versetzt, — dann einerseits den sich von da als Ellipse präsentierenden Parallel verzeichnet, welchen ein beliebiger Punkt auf der Erde infolge der täglichen Bewegung zu beschreiben scheint, sowie anderseits die scheinbare Bahn des Mondes, — und nun gleichzeitig eingenommene Punkte beider Wege aufsucht, welche um die Summe oder Differenz der scheinbaren Halbmesser von Mond und Sonne (Anfang und Ende der partialen oder totalen Finsternis für jenen Punkt) voneinander abstehen, oder eine kleinste Distanz (Mitte der Finsternis) zeigen, etc. Diese ihrer Natur nach zunächst graphische Methode, welche später (475) an einem Beispiele näher erläutert werden soll, wurde in diesem Sinne namentlich durch **Flamsteed** weiter ausgebildet und von ihm, nachdem schon 1668 Moore eine betreffende Zeichnung desselben der Roy. Society vorgelegt hatte, in seiner Schrift „The Doctrine of the Sphere. London 1680 in 4. (auch als Anhang zum ersten Bande von „Moore, A new Systeme of the Mathematicks. London 1681, 2 Vol. in 4.“ ausgegeben)“ in ihrem ganzen Detail auseinandergesetzt, — dann aber auch von **Lacaille** in seiner Abhandlung „Sur le calcul des projections en général et en particulier sur le calcul des projections propres aux éclipses de soleil et aux occultations des étoiles fixes par la lune (Mém. Par. 1744)“ in ein analytisches Verfahren übergeleitet, wobei er sagt: „Les astronomes qui substituent à ces calculs ennuyeux des opérations graphiques sur une projection de la sphère ne peuvent disconvenir que, quelque adresse que l'on emploie à faire ces opérations, et de quelque grandeur que soit le rayon de la figure projetée, il n'est guère possible de s'assurer d'une précision d'une demi-minute de temps. Tout l'avantage est donc du côté du calcul“. Es sind denn auch in der That in der neuern Zeit die konstruktiven Methoden nur noch ausnahmsweise behandelt und in Fällen angewandt worden, wo es sich um rasche Übersicht und nicht um zuverlässige Daten handelt; dagegen wurden die analytischen Methoden, von welchen die folgenden Nummern ebenfalls mehrere Proben enthalten, immer mehr vervollkommnet und auf verschiedenen Principien aufgebaut. — Für weitern Detail als mir hier zu geben erlaubt ist, verweise ich auf die zahlreichen Specialschriften, wie z. B. auf „Nicaise **Grammatico** (Trient 1680? — Regensburg 1736; Jesuit; Lehrer der Astronomie in Freiburg i./Br., Ingolstadt, Madrid, Trient und Regensburg), Methodus nova Solis et Lunæ eclipsium in plano organice delineandarum. Friburgi 1720 in 4., — **Lalande,** Nouvelle méthode pour calculer rigoureusement les éclipses du Soleil (Mém. Par. 1763), — **Duséjour,** Nouvelles méthodes analytiques pour calculer les éclipses de Soleil (Mém. Par. 1764—77; auch in Traité von 1786; deutsch durch Scheibel, Breslau 1793, — durch Rüdiger, Leipzig 1794), — **Lambert,** Neue Art Sonnenfinsternisse zu entwerfen (Berl. Jahrb. 1778), — **Euler,** De eclipsibus solaribus in superficie terræ per projectionem repræsentandis (Comm. Petrop. 1780), — **Lagrange,** Anmerkungen über die Entwerfung der Sonnenfinsternisse etc. (Berl. Jahrb. 1781/2 in Übers. von J. K. Schulze), — **Littrow,** Beiträge zur Berechnung der Finsternisse (Berl.

Jahrb. 1821), — **Hansen**, Über die Verfinsterungen auf der Erde überhaupt (A. N. 339—42 von 1837), — **Bessel**, Analyse der Finsternisse (Astr. Unters. II von 1842), — **Grunert**, Theorie der Sonnenfinsternisse, etc. (Wiener Denkschr. 1854), — Arthur **Cayley** (Richmond in Surrey 1821 geb.; Prof. math. Cambridge), On the graphical construction of a solar eclipse (Mem. Astr. Soc. 39 von 1871), — Calixte **Berry**, Théorie des occultations. Paris 1880 in 4., — etc."

470. Die Bestimmung der Schattenaxe. — Da in jedem Momente die Phase einer Finsternis zunächst von der Lage des Beobachters gegen die gemeinschaftliche Axe der beiden Schattenkegel abhängt, so kann man offenbar für die Vorausberechnung auch den Weg einschlagen, die jeweilige Lage dieser Axe zu bestimmen und den Ort des Beobachters auf dieselbe zu beziehen [a]. Es ergeben sich sodann relativ leicht, wie zum Teil hier und zum Teil unter einer spätern Nummer (472) gezeigt werden soll, sichere Regeln, um alle bei Erwartung einer Finsternis auftauchenden Fragen zu beantworten [b].

Zu 470: *a.* Bezeichnen S und M die Lagen, welche Sonne und Mond zu einer gewissen Zeit gegen die Erde E haben, so bestehen in Beziehung auf ein durch letztere gelegtes Coordinatensystem, dessen Axe der X nach dem Frühlingspunkte gerichtet ist, während die Ebene der XY im Equator liegt, und ein durch den Mond gelegtes Parallelsystem offenbar die Gleichungen



$$
\begin{aligned}
m \cdot \mathrm{Co}\,D \cdot \mathrm{Co}\,A &= s \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,a - \sigma \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \\
m \cdot \mathrm{Co}\,D \cdot \mathrm{Si}\,A &= s \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Si}\,a - \sigma \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \qquad \mathbf{1} \\
m \cdot \mathrm{Si}\,D &= s \cdot \mathrm{Si}\,d - \sigma \cdot \mathrm{Si}\,\delta
\end{aligned}
$$

Setzt man nun

$$m : s = g \qquad \sigma : s = \mathrm{Si}\odot : \mathrm{Si}\,☾ = b \qquad \mathbf{2}$$

und vertauscht 1' und 1'' mit $1'' \cdot \mathrm{Co}\,a - 1' \cdot \mathrm{Si}\,a$ und $1'' \cdot \mathrm{Si}\,a + 1' \cdot \mathrm{Co}\,a$, so erhält man

$$
\begin{aligned}
g \cdot \mathrm{Si}\,(A - a) \cdot \mathrm{Co}\,D &= \phantom{\mathrm{Co}\,d} - b \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - a) \cdot \mathrm{Co}\,\delta \\
g \cdot \mathrm{Co}\,(A - a) \cdot \mathrm{Co}\,D &= \mathrm{Co}\,d - b \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha - a) \cdot \mathrm{Co}\,\delta \qquad \mathbf{3} \\
g \cdot \mathrm{Si}\,D &= \mathrm{Si}\,d - b \cdot \mathrm{Si}\,\delta
\end{aligned}
$$

und aus den zwei ersten derselben folgt

$$\mathrm{Tg}\,(A - a) = \frac{b \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - a)}{1 - b \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha - a)} \qquad \mathbf{4}$$

oder, da b immer klein ist, δ und d zur Zeit einer Sonnenfinsternis nahe gleich sind, und zu dieser Zeit auch $\alpha - a$ (folglich nach 3' ebenso $A - a$) als klein anzusehen ist,

$$A - a \simeq - b \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot (\alpha - a) \qquad \mathbf{5}$$

Ferner hat man mit entsprechender Annäherung nach 3'' und 3'''

$$g \cdot \mathrm{Co}\, D = \mathrm{Co}\, d - b \cdot \mathrm{Co}\, \delta \qquad g \cdot \mathrm{Si}\, D = \mathrm{Si}\, d - b \cdot \mathrm{Si}\, \delta \qquad \mathbf{6}$$

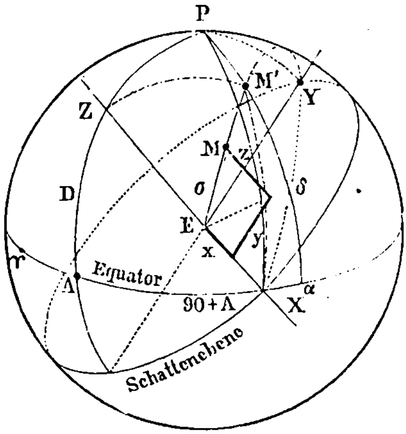
oder, wenn man 6'' · Co d — 6' · Si d und 6'' · Si d + 6' · Co d bildet,

$$g \cdot \mathrm{Si}\,(D - d) = - b \cdot \mathrm{Si}\,(\delta - d) \qquad g \cdot \mathrm{Co}\,(D - d) = 1 - b \cdot \mathrm{Co}\,(\delta - d) \qquad \mathbf{7}$$

woraus

$$\mathrm{Tg}\,(D - d) = - \frac{b \cdot \mathrm{Si}\,(\delta - d)}{1 - b \cdot \mathrm{Co}\,(\delta - d)} \qquad D - d \fallingdotseq - b \cdot (\delta - d) \qquad g \fallingdotseq 1 - b \qquad \mathbf{8}$$

erhalten werden, so dass man A, D, g nach 5, 8 und sodann m nach 2 berechnen, folglich die Lage der **Schattenaxe** MS leicht ermitteln kann. — Um sodann die Lage, welche ein gegebener Ort zu dieser Zeit gegen die Schattenaxe hat, zu bestimmen, wollen wir mit **Chauvenet**, dessen schon früher (14) erwähntem „Manual" diese Ableitung überhaupt in allem wesentlichen entnommen ist, eine durch E zu dieser Schattenaxe gezogene Parallele als Axe der Z, — eine zu dieser durch E senkrecht gelegte Ebene, welche als **Schattenebene** bezeichnet werden mag, als Ebene der XY, und die den Deklinationskreis von Z enthaltende Ebene als diejenige der YZ wählen; als positive Axe der Y soll die in 180° + A, als positive Axe der X die in 90° + A liegende Richtung benutzt werden. Bezeichnen nun x, y, z die Coordinaten des Mondes M in diesem neuen Systeme, so hat man offenbar mit Hilfe der Dreiecke M'PX, M'PY und M'PZ, da PX = 90°, PY = D und PZ = 90° — D ist, sofort



$$x = \sigma \cdot \mathrm{Co}\, M'X = \sigma \cdot \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - A)$$
$$y = \sigma \cdot \mathrm{Co}\, M'Y = \sigma\,[\mathrm{Si}\,(\delta - D) \cdot \mathrm{Co}^2\, {}^1\!/_2\,(\alpha - A) + \mathrm{Si}\,(\delta + D) \cdot \mathrm{Si}^2\, {}^1\!/_2\,(\alpha - A)] \qquad \mathbf{9}$$
$$z = \sigma \cdot \mathrm{Co}\, M'Z = \sigma\,[\mathrm{Co}\,(\delta - D) \cdot \mathrm{Co}^2\, {}^1\!/_2\,(\alpha - A) - \mathrm{Co}\,(\delta + D) \cdot \mathrm{Si}^2\, {}^1\!/_2\,(\alpha - A)]$$

während, wenn der Radius des Erdequators als Einheit gewählt wird,

$$\mathrm{Si}\,☾ = 1 : \sigma \qquad \text{oder} \qquad \sigma = 1 : \mathrm{Si}\,☾ \qquad \mathbf{10}$$

ist. Bezeichnen ferner ξ, v, ζ die Coordinaten eines Punktes auf der Erde in Beziehung auf dasselbe System, φ und φ' seine geographische und geocentrische Breite, ϱ seinen Abstand vom Erdcentrum in der soeben eingeführten Einheit und μ die einem gegebenen Momente an diesem Orte entsprechende, also mit der *R* seines Meridianes in diesem Augenblicke übereinstimmende Sternzeit, so erhält man, indem man in 9 die σ, δ, α durch ϱ, φ', μ ersetzt, und zugleich

$$n \cdot \mathrm{Si}\, N = \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \varphi' \qquad n \cdot \mathrm{Co}\, N = \varrho \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(\mu - A) \qquad \mathbf{11}$$

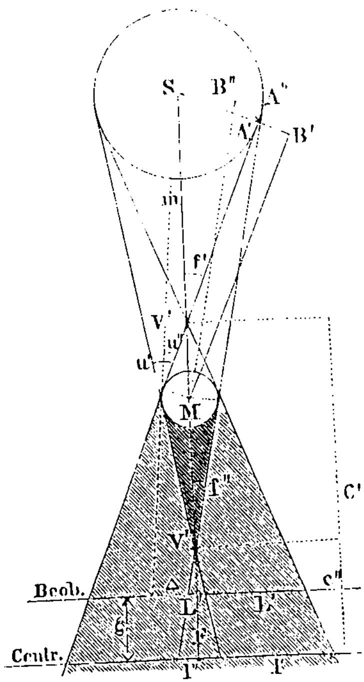
einführt,

$$\xi = \varrho \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(\mu - A)$$
$$v = \varrho\,[\mathrm{Si}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\, D - \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, D \cdot \mathrm{Co}\,(\mu - A)] = n \cdot \mathrm{Si}\,(N - D) \qquad \mathbf{12}$$
$$\zeta = \varrho\,[\mathrm{Si}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, D + \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\, D \cdot \mathrm{Co}\,(\mu - A)] = n \cdot \mathrm{Co}\,(N - D)$$

Hat man aber nach 9 und 12 die zwei Systeme von Coordinaten berechnet, so kann man nunmehr die Distanz $\triangle$ des Ortes von der Schattenaxe finden; denn, da diese letztere laut Konstruktion mit der Applikate z des Mondes zusammenfällt, so ist $\triangle$ offenbar der Distanz der Projektionen von Ort und Mond auf die Schattenebene gleich, und kann daher nach

$$\triangle^2 = (x - \xi)^2 + (y - v)^2 \qquad \mathbf{13}$$

berechnet werden. — *b.* Bezeichnet r_0 den scheinbaren Halbmesser der Sonne in ihrer mittlern Distanz, $\odot_0$ ihre entsprechende Parallaxe, und k das Verhältnis des Mondradius zum Radius des Erdequators, so hat man in Beziehung auf jene mittlere Distanz als Einheit und mit Benutzung von 2



$$\begin{aligned} \text{Erdradius} &= \text{Si}\,\odot_0 \\ \text{Mondradius} &= k \cdot \text{Si}\,\odot_0 \\ \text{Sonnenradius} &= \text{Si}\, r_0 \\ m &= g \cdot s \end{aligned} \qquad \mathbf{14}$$

während

$$\text{Si}\, f = \frac{SA \pm AB}{SM} = \frac{\text{Si}\, r_0 \pm k \cdot \text{Si}\,\odot_0}{g \cdot s} \qquad \mathbf{15}$$

wird, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem man den Halbschatten oder Kernschatten ins Auge fasst, — und wo nach **Bessel** $r_0 = 959'',788$, nach **Encke** $\odot_0 = 8'',5776$ und nach **Burckhardt** $k = 0,27227$, also

$$\text{Lg}\,[\text{Si}\, r_0 + k \cdot \text{Si}\,\odot_0] = 7,6688033$$
$$\text{Lg}\,[\text{Si}\, r_0 - k \cdot \text{Si}\,\odot_0] = 7,6666913$$

zu setzen, aber für jede Zehntelsekunde, um welche $\odot_0$ nach den neuern Bestimmungen zunimmt, um 123 Einheiten der 7. Stelle zu vermehren oder zu vermindern ist. In Beziehung auf den Equatorradius als Einheit haben wir ferner $c = MF \pm MV = z \pm k : \text{Si}\, f$ **16**

wo das Doppelzeichen mit dem in 15 korrespondiert, und somit

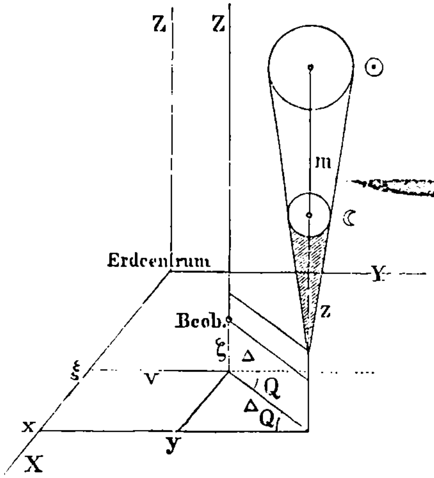
$$l = i \cdot c = z \cdot \text{Tg}\, f \pm k \cdot \text{Se}\, f \qquad L = (c - \zeta) \cdot i = l - i \cdot \zeta \quad \text{wo} \quad i = \text{Tg}\, f \qquad \mathbf{17}$$

Für den Halbschattenkegel ist $c - \zeta$ beständig positiv, also auch L, — für den Kernschatten kann dagegen, wenn der Scheitel des Kegels unter die Schattenebene des Beobachters fällt, $c - \zeta$ und damit auch L negativ werden, und es tritt sodann eine totale Finsternis ein, während ein positives L einer annularen Finsternis entspricht. — Für Anfang oder Ende der Finsternis stimmt offenbar die Distanz $\triangle$ des Ortes von der Schattenaxe mit L überein, also hat man mit Hilfe von 13 und 17

$$(x - \xi)^2 + (y - v)^2 = (l - i \cdot \zeta)^2$$
$$(l - i \cdot \zeta) \cdot \text{Si}\, Q = x - \xi \qquad (l - i \cdot \zeta) \cdot \text{Co}\, Q = y - v \qquad \mathbf{18}$$

wo $\qquad \text{Tg}\, Q = (x - \xi) : (y - v)$

Dieser Hilfswinkel Q hat zugleich noch eine geometrische Bedeutung, indem er offenbar mit dem Winkel identisch ist, welchen die vom Beobachter



auf die Schattenaxe gefällte Senkrechte Δ mit der Axe der Y macht, oder also auch mit dem Winkel, welchen die von ihm aus durch Sonne und Mond gelegte Ebene mit der Ebene der Y Z bildet, so dass durch denselben die Position ersterer Ebene gegen das gewählte Coordinatensystem bestimmt ist. — Die weitere Entwicklung für 472 aufsparend, wollen wir das Vorhergehende auf die 1860 VII 18, $2^h\ 8^m\ 56^s$ m. Z. Greenwich eingetretene Konjunktion in Æ anwenden, für welche wir dem Nautical Alm. die Daten

M. Z. Gr.	α	δ	☾	a	d	Lg s
	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
0^h	116 44 24,30	21 52 20,30	59 45,80	117 59 41,85	20 57 56,20	0,006 9675
1	117 21 59,10	42 32,80	47,13	118 2 12,50	29,42	61
2	59 30,45	32 36,40	48,44	4 43,14	2,60	47
3	118 36 58,35	22 31,20	49,72	7 13,77	56 35,75	33
4	119 14 22,65	12 17,20	50,98	9 44,39	8,86	19
5	51 43,35	1 54,60	52,22	12 15,00	55 41,94	05

entnehmen. Wendet man auf dieselben successive unsere 2, 8, 5, 10, 9, 15, 16 und 17 an, so erhält man die korrespondierenden Werte:

M. Z. Gr.	A	D	x	y	l Halbsch.	l Kernsch.
	° ′ ″	° ′ ″				
0^h	117 59 52,44	20 57 48,50	— 1,171856	0,917040	0,536867	— 0,008960
1	118 2 18,16	23,04	— 0,626559	756742	819	9010
2	4 43,87	56 57,57	— 0,081244	596075	747	9082
3	7 9,58	32,08	0,464044	435056	652	9176
4	9 35,27	6,58	1,009245	273704	533	9293
5	12 0,95	55 41,06	1,554284	112039	391	9434

und sodann, wenn man bei den x, y und l die Differenzreihen bildet und die Interpolationsformeln in 36 anwendet,

$$\Delta x_n = 545302 - 28{,}25 \cdot n - 26{,}25 \cdot n^2 - 2{,}5 \cdot n^3$$
$$\Delta y_n = -160843 - 351{,}83 \cdot n + 9 \cdot n^2 + 0{,}33 \cdot n^3$$
$$\Delta l_n = -83{,}5 - 22{,}5 \cdot n$$

wo die letztere Formel sowohl für Halb- als Kernschatten gebraucht werden kann. Setzt man in diesen letztern Formeln für n successive die Werte — 2, — 1, 0, 1, 2, 3 ein und berechnet überdies aus der Angabe, dass 1860 VII 18 die Sternzeit im mittlern Greenwicher Mittage $7^h\ 46^m\ 4^s,03$ bei einer stündlichen Zunahme von $1^h\ 0^m\ 9^s,86$ gewesen sei, die den einzelnen Stunden entsprechenden Sternzeiten t, sowie die auf den Greenwicher Meridian bezüglichen Stundenwinkel $\mu_1 = t - A$ der Axe Z, so erhält man:

M. Z. Gr.	Δx	Δy	Δl	μ_1
0^h	0,545273	— 0,160106	— 0,000038	358° 31′ 8″,0
1	5306	0483	061	13 31 10,2
2	5301	0843	083	28 31 12,3
3	5244	1186	106	43 31 14,4
4	5120	1508	128	58 31 16,6
5	4913	1808	151	73 31 18,7

woraus unter anderm die mittlere stündliche Veränderung $\Delta\mu_1$ von μ_1 gleich 54002″,15 = $\overline{4{,}732411}$ folgt. Dass für jeden andern Ort die μ_1 erhalten werden, wenn man die obigen Werte um seine westliche Länge w vermindert, ist selbstverständlich, und für die weitere Verfolgung dieses Beispiels wird ebenfalls auf 472 verwiesen.

471. Die ältern Methoden für Bestimmung des Verlaufes auf der Erde. — Während bei den eigentlichen Finsternissen neben der allgemeinen Kenntnis ihres Verlaufes nur noch die Frage auftritt, ob ein bestimmter Beobachter das verfinsterte Gestirn auch wirklich sehen werde, so wünscht man dagegen bei einer Bedeckung, wo gewissermassen ein Schirm vor einem Gestirne vorübergeführt wird, auch zu wissen, was die Gesamtheit der Beobachter in einem gewissen Momente sehen kann, — an welchen Orten eine gewisse Phase überhaupt sichtbar werden wird, — wer eine bestimmte Phase zuerst oder zuletzt beobachten kann, — und dergleichen mehr. Es ist nun auch wirklich schon in älterer Zeit mehrfach mit Erfolg nach Methoden gesucht worden, um Fragen solcher Art ebenfalls beantworten zu können [a].

Zu 471: *a.* Im allgemeinen für diese ältern Methoden auf die in 469 gegebene Litteratur verweisend, beschränke ich mich hier darauf, beispielsweise zu zeigen, wie man berechnen kann, wann die partiale, totale oder centrale Finsternis auf der Erde überhaupt beginnt oder aufhört. — Im vorstehenden Falle bestehen nämlich offenbar die in 462 : b abgeleiteten Näherungsgleichungen

$$d = \beta \cdot \mathrm{Co}\, n \qquad h = \Delta\beta \cdot \mathrm{Cs}\, n \qquad \mathrm{Tg}\, n = \Delta\beta : (\Delta\lambda - \Delta l) \qquad \mathbf{1}$$

$$T' = T - {}^1\!/h \cdot \beta \cdot \mathrm{Si}\, n = T - \beta \cdot \mathrm{Si}^2 n : \Delta\beta \qquad \tau = {}^1\!/h \cdot \sqrt{(f+d)(f-d)} \qquad \mathbf{2}$$

wo T′ die Zeit der Mitte der Finsternis für das Erdcentrum und τ die Zeit bezeichnet, um welche die der Distanz f von Sonne und Mond entsprechende

Phase vor oder nach dieser Mitte eintrifft. Da nun für einen Punkt an der Erdoberfläche die partielle, totale oder centrale Finsternis beginnt oder aufhört, wenn für ihn die scheinbare Distanz u von Sonne und Mond die Werte $(\varrho + r)$, $(\varrho - r)$ oder 0 annimmt, und diesen Distanzen (nach 468) für den zuerst an den Schattenkegel tretenden oder ihn zuletzt verlassenden Punkt die geocentrischen Distanzen $f = (\varrho + r + ☾ - ☉)$, $(\varrho - r + ☾ - ☉)$ und $(☾ - ☉)$ entsprechen, so erlauben die nach 2'' gebildeten Formeln

$$\begin{aligned} \tau_1 &= {}^1/_h \cdot \sqrt{(\varrho + r + ☾ - ☉ + d) \cdot (\varrho + r + ☾ - ☉ - d)} \\ \tau_2 &= {}^1/_h \cdot \sqrt{(\varrho - r + ☾ - ☉ + d) \cdot (\varrho - r + ☾ - ☉ - d)} \qquad \mathbf{3} \\ \tau_3 &= {}^1/_h \cdot \sqrt{(☾ - ☉ + d) \cdot (☾ - ☉ - d)} \end{aligned}$$

die halbe Dauer der partialen, totalen und centralen Finsternis auf der Erde überhaupt zu berechnen, womit unter Hilfe von 2' unsere Aufgabe in der That vollständig gelöst ist. — Für die bis jetzt als Beispiel gewählte Sonnenfinsternis von 1860 VII 18 ergeben sich aber nach diesen Formeln die Werte

$$T' = T + 0^h,09497 \qquad \tau_1 = 2^h,52667 \qquad \tau_2 = 1^h,49073 \qquad \tau_3 = 1^h,47085$$

wo die hiebei in Anwendung kommende Zeit der Konjunktion in Länge $T = 2^h\ 20^m\ 33^s$ m. Z. Gr. ist.

472. Weitere Verfolgung der Schattenaxe. — Die unter der vorhergehenden Nummer aufgezählten neuen Aufgaben lassen sich auch durch weitere Fortführung der (470) an die Lage der Schattenaxe angeknüpften Untersuchungen in hübscher Weise lösen, und es scheint daher am Platze, diese letztern auch hier noch etwas weiter fortzuführen [a].

Zu 472: *a.* Wenn ein Punkt der Erde in einem gegebenen Momente in der Schattenaxe liegen, oder von ihm aus die Finsternis **central** gesehen werden soll, so muss offenbar $\xi = x$, $\upsilon = y$ und $\Delta = 0$ sein, folglich (470 : 12), wenn man $\mu - A$ mit $\mu_1 - w$ vertauscht,

$$\begin{gathered} x = \text{Si}\, V \qquad\qquad y = \text{Co}\, V \cdot \text{Si}\,(W - D) \\ \text{wo} \quad \varrho \cdot \text{Co}\, \varphi' \cdot \text{Si}\,(\mu_1 - w) = \text{Si}\, V \qquad \varrho \cdot \text{Co}\, \varphi' \cdot \text{Co}\,(\mu_1 - w) = \text{Co}\, V \cdot \text{Co}\, W \qquad \mathbf{1} \\ \varrho \cdot \text{Si}\, \varphi' = \text{Co}\, V \cdot \text{Si}\, W \end{gathered}$$

und man kann somit für die einer gewissen Zeit (nach 470) korrespondierenden Werte von x, y, D und μ_1 successive V, W, w, φ' und aus φ' (z. B. mit Hilfe von Tab. VII[d]) auch φ berechnen, womit der Punkt, welcher zu jener Zeit in der Schattenaxe liegt, seiner geographischen Lage nach vollständig bestimmt ist. Man hat dabei offenbar mit Rücksicht auf 1' nur für Zeiten zu rechnen, für welche $x < 1$ ist, somit z. B. in dem früher (470) behandelten Falle für 1, 2 und 3^h, für welche Zeiten sich die korrespondierenden Werte

M. Z. Gr.	1^h	2^h	3^h
V	$-38^0\ 48'$	$-4^0\ 40'$	$27^0\ 39'$
W	97 7	57 41	50 22
w	$112^0\ 17' = 7^h\ 29^m$	$37^0\ 11' = 2^h\ 29^m$	$4^0\ 7' = 0^h\ 16^m$
φ'	$50^0\ 39'$	$57^0\ 23'$	$43^0\ 1'$
φ	50 50	57 33	43 12

ergeben, so dass unter letztern Breiten in der westlichen Länge w von Greenwich die centrale Finsternis um $1^h - w = 17^h\, 31^m$, $2^h - w = 23^h\, 31^m$ und $3^h - w = 2^h\, 44^m$ eintreffen musste. — Die Schattengrenze wird offenbar durch alle Punkte bestimmt, in welchen die Finsternis zu einer gewissen Zeit eben anfängt oder eben aufhört, für welche also nach 470 : 18

$$(1 - i \cdot \zeta) \cdot \mathrm{Si}\, Q = x - \xi \qquad (1 - i \cdot \zeta) \cdot \mathrm{Co}\, Q = y - \upsilon \qquad \mathbf{2}$$

ferner der Ortsstundenwinkel

$$\theta = \mu - A = (t - w) - (t - \mu_1) = \mu_1 - w \qquad \mathbf{3}$$

und endlich nach 470 : 12

$$\xi = \varrho \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, \theta \qquad \upsilon = \varrho \cdot (\mathrm{Si}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\, D - \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, D \cdot \mathrm{Co}\, \theta)$$
$$\zeta = \varrho \cdot (\mathrm{Si}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, D + \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\, D \cdot \mathrm{Co}\, \theta) \qquad \mathbf{4}$$

ist, wo (74) ϱ in Teilen des Equatorradius und φ' durch

$$\varrho \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' = \mathrm{Co}\, \varphi : \sqrt{1 - e^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi} \qquad \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \varphi' = (1 - e^2) \cdot \mathrm{Si}\, \varphi : \sqrt{1 - e^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi} \qquad \mathbf{5}$$

gegeben werden. Die Grössen l, i, x, y, μ, A, D sind nun (470) bereits für jede Zeit t bekannt, — dagegen kennt man ξ, υ, ζ, θ (wegen w), φ, φ', ϱ, Q noch nicht, — also kommen auf die 7 Gleichungen 2, 4, 5 scheinbar 8 Unbekannte, von welchen jedoch Eine, z. B. Q, als arbiträr angesehen werden kann, da jedem Werte von t im allgemeinen ein System von Werten entsprechen muss, weil es sich um das Aufsuchen einer Kurve, nicht eines einzelnen Punktes handelt. Setzt man, um die Rechnung zu erleichtern,

$$\mathrm{Co}\, \varphi_1 = \mathrm{Co}\, \varphi : \sqrt{1 - e^2\, \mathrm{Si}^2 \varphi} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Si}\, \varphi_1 = \sqrt{1 - e^2} \cdot \mathrm{Si}\, \varphi : \sqrt{1 - e^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi}$$
$$\varrho_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 = \mathrm{Si}\, D \qquad \varrho_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 = \mathrm{Co}\, D \cdot \sqrt{1 - e^2} \qquad \upsilon_1 = \upsilon : \varrho_1 \qquad \mathbf{6}$$
$$\varrho_2 \cdot \mathrm{Si}\, d_2 = \mathrm{Si}\, D \cdot \sqrt{1 - e^2} \qquad \varrho_2 \cdot \mathrm{Co} d_2 = \mathrm{Co}\, D \qquad \zeta_1 = \sqrt{1 - \upsilon_1^{\,2} - \xi^2}$$

so gehen, weil hieraus

$$\varrho_1^{\,2} = \mathrm{Si}^2 D + \mathrm{Co}^2 D \cdot (1 - e^2) = 1 - e^2 \cdot \mathrm{Co}^2 D$$

folgt, also ϱ_1 wenig von der Einheit, folglich auch υ_1 wenig von υ, und ζ_1 wenig von $\zeta = \sqrt{1 - \upsilon^2 - \xi^2}$ verschieden sein wird, — also wegen des kleinen Faktors i noch um so mehr $i \cdot \zeta$ durch $i \cdot \zeta_1$ ersetzt werden darf, unsere 2 in

$$(1 - i \cdot \zeta_1) \cdot \mathrm{Si}\, Q = x - \xi \qquad (1 - i\, \zeta_1)\, \mathrm{Co}\, Q = y - \varrho_1 \cdot \upsilon_1 \qquad \mathbf{7}$$

über, während nach 6

$$\xi^2 + \upsilon_1^{\,2} + \zeta_1^{\,2} = 1 \qquad \mathbf{8}$$

ist. Setzt man ferner

$$\mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Si}\, \gamma = x - l \cdot \mathrm{Si}\, Q \qquad \mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Co}\, \gamma = (y - l \cdot \mathrm{Co}\, Q) : \varrho_1 \qquad \mathbf{9}$$

so gehen die 7, wenn man in der zweiten $i : \varrho_1$ durch i ersetzt, in

$$\xi = \mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Si}\, \gamma + i \cdot \zeta_1 \cdot \mathrm{Si}\, Q \qquad \upsilon_1 = \mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Co}\, \gamma + i \cdot \zeta_1 \cdot \mathrm{Co}\, Q \qquad \mathbf{10}$$

über, und man erhält somit nach 8, wenn man i^2 vernachlässigt und nach ζ_1 auflöst,

$$\zeta_1 = \mathrm{Co}\, \beta - i \cdot \mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Co}\, (Q - \gamma) = \mathrm{Co}\, (\beta + \varepsilon) \quad \text{wo} \quad \varepsilon = i \cdot \mathrm{Co}\, (Q - \gamma) : \mathrm{Si}\, 1'' \qquad \mathbf{11}$$

Ferner findet man mit Hilfe von 4, 5, 6

$$\xi = \mathrm{Co}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Si}\, \theta \qquad \upsilon_1 = \mathrm{Si}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 - \mathrm{Co}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 \cdot \mathrm{Co}\, \theta$$
$$\zeta_1 = \mathrm{Si}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 + \mathrm{Co}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 \cdot \mathrm{Co}\, \theta \qquad \mathbf{12}$$

woraus

$$\zeta_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 - \upsilon_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 = \mathrm{Co}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Co}\, \theta \qquad \zeta_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 + \upsilon_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 = \mathrm{Si}\, \varphi_1 \qquad \mathbf{13}$$

folgt. Endlich giebt 4''' mit Hilfe von 6 und 13

$$\zeta = \varrho_2 \cdot [\zeta_1 \cdot \mathrm{Co}\, (d_1 - d_2) - \upsilon_1 \cdot \mathrm{Si}\, (d_1 - d_2)] \qquad \mathbf{14}$$

Der Gang der Rechnung ist nun folgender: Man berechnet nach 6″ für alle bei der frühern Rechnung berücksichtigten Stunden $\varrho_1\, \varrho_2\, d_1\, d_2$, — sodann unter verschiedenen Annahmen für Q je successive nach 9, 11, 12′, 13, 6′ die β, γ, ε, ζ_1, ξ, υ_1, ϑ, φ_1, φ und endlich nach 3 noch w. Die durch φ und w bestimmten Punkte der Erde liegen nunmehr in der Grenzlinie des Schattens (des partialen oder totalen, je nach den für l eingeführten Werten), haben also Anfang oder Ende der Finsternis, — und zwar **Anfang**, wenn der dem Zeitelemente entsprechende Zuwachs des Abstandes von der Schattenaxe oder also wenn (470) der Zuwachs von $\triangle$ **kleiner** als derjenige des Schattenhalbmessers L ist, — dagegen **Ende,** falls er **grösser** ist, — also **Anfang oder Ende,** je nachdem das Differential von $\triangle^2$ nach der Zeit **kleiner oder grösser** als dasjenige von L^2 wird, d. h. je nachdem

$$2\,(x-\xi)\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d\xi}{dt}\right)+2\,(y-\upsilon)\left(\frac{dy}{dt}-\frac{d\upsilon}{dt}\right)\lesseqgtr 2\,(l-i\zeta)\left(\frac{dl}{dt}-i\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

oder, wenn die Differentialquotienten von x, ξ, ... nach der Zeit durch $\triangle x$, $\triangle \xi$, ... ersetzt werden, je nachdem die Differenz

$$P=(x-\xi)\,(\triangle x-\triangle\xi)+(y-\upsilon)\,(\triangle y-\triangle\upsilon)-(l-i\zeta)\,(\triangle l-i\cdot\triangle\zeta)$$

negativ oder positiv ausfällt. Diese letztere geht aber nach 2 und 470 : 17″ in

$$P=L\,.\,\triangle P \quad \text{wo} \quad \triangle P=(\triangle x-\triangle\xi)\,\mathrm{Si}\,Q+(\triangle y-\triangle\upsilon)\cdot\mathrm{Co}\,Q-(\triangle l-i\cdot\triangle\zeta) \qquad \mathbf{15}$$

über, und es ist daher P negativ oder positiv, je nachdem L und $\triangle P$ **verschiedenes oder gleiches Vorzeichen** haben. Nimmt man die Stunde als Zeiteinheit, so bezeichnen $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle l$, $\triangle \xi$, $\triangle \upsilon$ und $\triangle \zeta$ offenbar stündliche Veränderungen, von welchen uns die drei ersten bereits bekannt sind. Um auch noch die drei letzten zu finden, differentieren wir die 4, wo ϱ und φ' als Ortscoordinaten konstant sind, nach der Zeit, und erhalten so, wenn

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d\,(\mu_1-w)}{dt}=\frac{d\mu_1}{dt}=\triangle\mu \qquad \frac{dD}{dt}=\triangle D \qquad \mathbf{16}$$

gesetzt und alle diese Grössen in Sekunden ausgedrückt werden, mit Benutzung von 2

$$\begin{aligned}\triangle\xi&=\triangle\mu\cdot[-y\cdot\mathrm{Si}\;D+\zeta\cdot\mathrm{Co}\,D+(l-i\zeta)\cdot\mathrm{Si}\,D\cdot\mathrm{Co}\,Q]\\ \triangle\upsilon&=\triangle\mu\cdot[\quad x\cdot\mathrm{Si}\;D-(l-i\cdot\zeta)\,\mathrm{Si}\;D\cdot\mathrm{Si}\,Q]-\triangle D\cdot\zeta \qquad \mathbf{17}\\ \triangle\zeta&=\triangle\mu\cdot[-x\cdot\mathrm{Co}\;D+(l-i\cdot\zeta)\,\mathrm{Co}\;D\cdot\mathrm{Si}\,Q]+\triangle D\,[y-(l-i\cdot\zeta)\,\mathrm{Co}\,Q]\end{aligned}$$

Substituiert man aber diese Werte in 15, vernachlässigt die Glieder mit i^2 und $i\cdot\triangle D$, und setzt

$$\begin{aligned}&\triangle a=-\triangle l-\triangle\mu\cdot i\cdot x\cdot\mathrm{Co}\,D \qquad \triangle b=-\triangle y+\triangle\mu\cdot x\cdot\mathrm{Si}\,D\\ &\triangle c=\triangle x+\triangle\mu\cdot y\cdot\mathrm{Si}\,D+\triangle\mu\cdot i\cdot l\cdot\mathrm{Co}\,D \qquad e\cdot\mathrm{Si}\,E=\triangle b \qquad \mathbf{18}\\ &e\cdot\mathrm{Co}\,E=\triangle c \qquad f\cdot\mathrm{Si}\,F=\triangle D \qquad f\cdot\mathrm{Co}\,F=\triangle\mu\cdot\mathrm{Co}\,D\end{aligned}$$

so erhält man

$$\triangle P=\triangle a+e\cdot\mathrm{Si}\,(Q-E)-f\cdot\zeta\cdot\mathrm{Si}\,(Q-F) \qquad \mathbf{19}$$

Da nun $\triangle a$ offenbar eine kleine Grösse ist, so wird somit $\triangle P$ zunächst **negativ oder positiv,** je nachdem

$$e\cdot\mathrm{Si}\,(Q-E)<f\cdot\zeta\cdot\mathrm{Si}\,(Q-F) \quad \text{oder} \quad e\cdot\mathrm{Si}\,(Q-E)>f\cdot\zeta\cdot\mathrm{Si}\,(Q-F) \qquad \mathbf{20}$$

ist. Da aber nach 470 für die **partiale oder annulare** Finsternis L positiv ist, so folgt hieraus, dass P in diesen Fällen nach 15 **negativ** (Finsternis-Anfang) oder **positiv** (Ende) ist, je nachdem 20′ oder 20″ statt hat, — dass dagegen für die **totale** Finsternis, wo L negativ wird, P **negativ** (Anfang) oder **positiv**

(Ende) ist, je nachdem 20″ oder 20′ eintrifft. — Für die Finsternis von 1860 VII 18 erhalten wir, mit Bessel Lg $\sqrt{1-e^2} = 9{,}99855$ einführend, nach 6 und 18 successive

M. Z. Gr.	d_1	Lg ϱ_1	d_2	Lg ϱ_2	$\triangle a$	$\triangle b$
0^h	21° 1′ 39″,5	9,998 7324	20° 53′ 58″,0	9,999 8143	— 0,001356	0,050342
1	1 14,0	23	53 32,6	45	0766	101816
2	0 48,5	22	53 7,3	46	0175	153241
3	0 22,9	21	52 41,8	47	— 0415	204612
4	20 59 57,4	20	52 16,4	48	— 1005	255925
5	59 31,8	19	51 50,9	50	— 1595	307171

M. Z. Gr.	$\triangle c$		Halbschatten und nahe Kernschatten		Für Beide	
	Halbsch.	Kernsch.	E	Lg e	F	Lg f
0^h	0,631779	0,631165	4° 33′ 21″	9,801939	— 0° 1′ 44″	9,388244
1	616776	616162	9 22 25	795965	44	264
2	601711	601097	14 17 17	793034	44	285
3	586571	585987	19 13 48	793255	44	305
4	571342	570728	24 7 46	796604	44	326
5	556010	555395	28 55 7	802923	44	347

und sodann, um z. B. die Halbschattengrenze zur Zeit $T = 2^h\ 8^m\ 12^s$ zu bestimmen, für welche durch Interpolation

$x = -0{,}00672$ $y = 57409$ $l = 53673$ $\text{Lg}\ i = 7{,}66287$ $\text{Lg}\ \varrho_1 = 9{,}99873$

$\mu_1 = 30^\circ 34' 13''$ $d_1 = 21^\circ 0' 45''$ $E = 14^\circ 58'$ $\text{Lg}\ e = 9{,}7931$ $\text{Lg}\ f = 9{,}3883$

folgen, für die Arbiträre Q die Werte 50° und 300° einführend und die oben angegebene Formelnfolge benutzend,

Q	γ	β	ε	Lg ζ_1	ξ	υ_1
50	— 61° 11′ 53″	28° 28′ 52″	— 5′ 43″	9,94437	— 0,41478	0,23235
300	56 12 27	33 27 20	— 6 59	9,92191	0,45482	0,30854

Q	Ltg ϑ	ϑ	Ltg φ_1	Ltg φ	φ	w
50	9,74979 · n	— 29° 20′ 20″	9,79856	9,80001	32° 15′ 33″	59° 54′ 33″
300	9,83232	34 12 15	9,86101	9,86246	36 4 30	356 21 58

womit also die den beiden Annahmen für Q entsprechenden Punkte der Schattenkurve wirklich bestimmt sind, und zwar gehört, da für sie

$$\text{Lg}\,[e \cdot \text{Si}\,(Q - E)] = \left\{\begin{matrix} 9{,}5521 & > 9{,}2170 \\ 9{,}7780 \cdot n & < 9{,}2477 \cdot n \end{matrix}\right\} = \text{Lg}\,[\zeta_1 \cdot f \cdot \text{Si}\,\vartheta]$$

wird, und F kaum berücksichtigt zu werden verdient, nach 20 der erstere der dem Ende der Finsternis entsprechenden Teile der Kurve an, der zweite der ihrem Anfange entsprechenden Teile.

473. Darstellung der erhaltenen Resultate durch Zeichnung. — Sind einmal nach dem vorhergehenden die nötigen Rechnungen ausgeführt, so hat es offenbar keine Schwierigkeit, die erhaltenen Resultate in eine Karte einzutragen, die einzelnen Punkte zu verbinden und so den ganzen Gang der Erscheinung übersichtlich darzustellen [a].

Zu 473: *a.* Dehnt man z. B. die in 472 durchgeführten Rechnungen auf eine grössere Anzahl von Zeiten und von Annahmen für die Arbiträre aus, so erhält man offenbar die nötigen Grundlagen für solche Darstellungen, wie sie schon aus früherer Zeit für einzelne bemerkenswerte Finsternisse vorliegen, und in neuerer Zeit von den grössern Ephemeriden, wie namentlich vom Nautical Almanac, regelmässig publiziert werden. Für weitern Detail muss jedoch auf die in 469 gegebene Speciallitteratur verwiesen werden.

474. Vorausbestimmung der Erscheinungen an einem bestimmten Orte durch Rechnung. — Die sich an einem bestimmten Orte folgenden Phasen einer Finsternis lassen sich, wenn einmal nach dem vorhergehenden die sich auf die Erscheinung im allgemeinen beziehenden Rechnungen ausgeführt sind, verhältnismässig leicht abstrahieren [a]. Man kann jedoch dieselben auch, ohne zuvor jenen immerhin etwas weiten Weg zu verfolgen, mit meist genügender Annäherung durch verschiedene einfachere Methoden direkt ermitteln [b].

Zu 474: *a.* Für Zürich ist $\varphi = 47^0\,22'\,39'',8$, $\varphi' = 47^0\,11'\,11'',3$, $\mathrm{Lg}\,\varrho = 9{,}9994499$, $w = -8^0\,33'\,15'' = -34^m\,13^s$; man erhält daher für diesen Ort und die früher benutzten Greenwicher Stunden 0 bis 5 nach 470 : 11, 12 (wo wieder $\mu - A$ durch $\mu_, - w$ zu ersetzen ist), — nach den mit 470 : 13 übereinstimmenden Formeln

$$x - \xi = \Delta \cdot \mathrm{Si}\,q \qquad y - \upsilon = \Delta \cdot \mathrm{Co}\,q \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Tg}\,q = (x - \xi) : (y - \upsilon) \qquad \mathbf{1}$$

und nach den 470 : 17, unter Benutzung der frühern Rechnungsresultate, successive:

M. Z. Gr.	ξ	υ	Lg ζ	Δ	L'	L''
0^h	0,08357	0,44316	9,949935	1,340930	0,532767	— 0,013040
1	25507	45921	929128	0,930480	2911	— 2899
2	40918	49171	885193	0,501401	3215	— 2597
3	53541	53513	813908	0,122914	3654	— 2159
4	62514	58981	706473	0,497453	4192	— 1622
5	67224	65081	543169	1,033570	4784	— 1033

und somit als Hauptresultat, dass Zürich beständig zu weit von der Schattenaxe abstand, um in den Kernschatten eintauchen zu können, — dass sich dagegen für den Halbschatten die Werte

M. Z. Gr.	$\Delta - L'$	Differenz	Mittel
0^h	0,808863	— 0,410594	
1	0,397569	— 0,429383	} — 0,404155
2	— 0,031814	— 0,378926	
3	— 0,410740	0,374001	} 0,454763
4	— 0,036739	0,535525	
5	0,498786		

ergeben, aus welchen sofort folgt, dass die partiale Finsternis in Zürich nahe um $2^h - 0{,}031814 : 0{,}404155 = 1^h\, 55^m{,}3$ Gr. $= 2^h\, 29^m{,}5$ Z. begann, und um $4^h + 0{,}036739 : 0{,}454763 = 4^h\, 4^m{,}9$ Gr. $= 4^h\, 39^m{,}1$ Z. endigte. Die Mitte der Finsternis traf somit etwa auf $3^h\, 0^m{,}1$ Gr. $= 3^h\, 34^m{,}3$ Z., so dass die für 3^h Gr. erhaltenen Werte von Δ, L' und L'' auch für die Mitte der Finsternis passen, woraus sich (vgl. Fig. 3 in 470) sehr nahe die Grösse der Finsternis

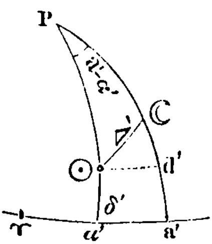
$$M = 12 \cdot \frac{u''}{u'} = 12 \cdot \frac{L' - \Delta}{L' + L''} = 9{,}3 \text{ Zolle} \tag{2}$$

ergiebt. — Anhangsweise füge ich bei, dass von mir in Zürich der Anfang der partiellen Finsternis um $2^h\, 29^m{,}7$ m. Z. Zürich notiert, also eine gute Übereinstimmung mit der Vorausberechnung konstatiert, das Ende dagegen wegen einem eintretenden Gewitter nicht beobachtet werden konnte. — *b.* Ein solches Rechnungsverfahren erhält man z. B. durch folgende Entwicklung: Ist T eine dem Anfange der Finsternis nahe Ortszeit, und bezeichnen a, d, α, δ die geocentrischen oder **wahren** $\mathcal{R}$ und D von Mond und Sonne für diese Zeit, — a', d', α', δ' ihre durch die Parallaxe veränderten oder **scheinbaren** Coordinaten, so hat man nach 435 : 13, 14

$$a' = a - \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(t - a) \cdot \mathrm{Se}\, d \qquad d' = d + \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Si}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(d - n) \cdot \mathrm{Cs}\, n$$
$$\text{wo} \qquad \mathrm{Ct}\, n = \mathrm{Ct}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\,[t - 1/2\,(a + a')] \cdot \mathrm{Se}\, 1/2\,(a - a') \tag{3}$$

ist, π die Parallaxe bezeichnet und ϱ, φ', t die geocentrischen Coordinaten des betreffenden Ortes sind. Schreibt man diese Gleichungen für Mond und Sonne auf und nimmt je die Differenz, so erhält man, indem man die Korrektionsglieder für die Sonne ganz vernachlässigt, und in denjenigen für den Mond $\varrho = 1$ setzt, ferner $t - a$ und $t - 1/2\,(a + a')$ mit dem Stundenwinkel $s = t - \alpha$ der Sonne, sowie d mit δ vertauscht und $\mathrm{Se}\, 1/2\,(a - a') = 1$ annimmt,

$$a' - \alpha' = a - \alpha - ☾ \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, s \cdot \mathrm{Se}\, \delta$$
$$d' - \delta' = d - \delta - ☾ \cdot \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\,(\varphi' - w) \cdot \mathrm{Se}\, w \tag{4}$$
$$\text{wo} \qquad \mathrm{Tg}\, w = \mathrm{Tg}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, s$$



ist. Bezeichnet sodann Δ' die scheinbare Distanz von Sonne und Mond zur Zeit T, so hat man

$$\mathrm{Co}\, \Delta' = \mathrm{Si}\, \delta' \cdot \mathrm{Si}\, d' + \mathrm{Co}\, \delta' \cdot \mathrm{Co}\, d' \cdot \mathrm{Co}\,(a' - \alpha')$$

oder $\mathrm{Si}^2\, 1/2\, \Delta' = \mathrm{Si}^2\, 1/2\,(d' - \delta') + \mathrm{Co}\, \delta' \cdot \mathrm{Co}\, d' \cdot \mathrm{Si}^2\, 1/2\,(a' - \alpha')$ oder also, da bei der Konjunktion die Coordinaten von Sonne und Mond nahe gleich sind,

$$\Delta'^2 = (d' - \delta')^2 + (a' - \alpha')^2 \cdot \mathrm{Co}^2\, \delta \tag{5}$$

Setzt man daher für die Zeit T

$$A = (a' - \alpha') \cdot \mathrm{Co}\,\delta' \qquad D = d' - \delta' \qquad \mathbf{6}$$

und versteht unter A' und D' die entsprechenden Grössen für die Zeit $T' = T + \theta^h$, so dass

$$f = (A' - A) : \theta \qquad g = (D' - D) : \theta \qquad \mathbf{7}$$

die stündlichen Veränderungen dieser Grössen bezeichnen, so hat man nach 5 für die Zeit T + t des Anfanges und Endes der partialen oder totalen Finsternis

$$(\varrho \pm r)^2 = (A + f \cdot t)^2 + (D + g \cdot t)^2 \qquad \mathbf{8}$$

woraus sich, wenn

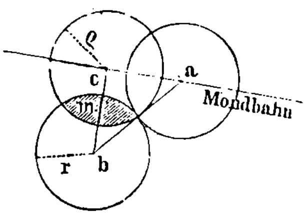
$$\tau' = -\frac{A \cdot f + D \cdot g}{f^2 + g^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Tg}^2\,\alpha = \frac{A^2 + D^2 - (\varrho \pm r)^2}{(f^2 + g^2) \cdot \tau'^2} \qquad \mathbf{9}$$

gesetzt wird, durch Auflösung nach t sofort

$$t = \tau' \left(1 \pm \mathrm{Se}\,\alpha \cdot \sqrt{\mathrm{Co}\,2\alpha}\right) \qquad \mathbf{10}$$

ergiebt, wo offenbar das obere Zeichen dem Ende, das untere dem Anfange entspricht, so dass

$$t' = T + \tau' \quad \text{und} \quad t'' = \tau' \cdot \mathrm{Se}\,\alpha \cdot \sqrt{\mathrm{Co}\,2\alpha} \qquad \mathbf{11}$$

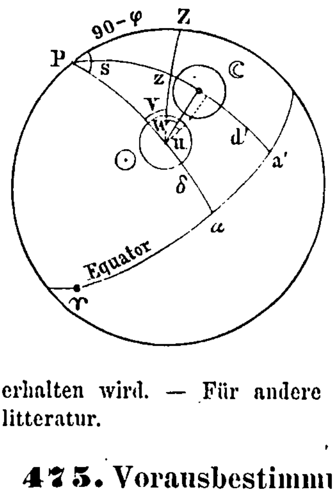


die Zeit der Mitte der Finsternis und die halbe Dauer derselben bestimmen. — Da $\sqrt{f^2 + g^2}$ selbstverständlich die stündliche Bewegung in der scheinbaren Mondbahn darstellt, so hat man $ac = t'' \cdot \sqrt{f^2 + g^2}$, während $ab = \varrho + r$ ist. Es stellt also

$$bc = \sqrt{(\varrho + r)^2 - t''^2 \cdot (f^2 + g^2)} \qquad \mathbf{12}$$

den kleinsten Abstand von Mond und Sonne vor, und mit dessen Hilfe kann man nach

$$m = \varrho - (bc - r) = 12(\varrho + r - bc) : 2r \text{ Sonnenzolle} \qquad \mathbf{13}$$



die sog. Grösse der Finsternis berechnen. — Um endlich noch den Winkel W zu erhalten, welchen der Ein- oder Austrittspunkt des Mondes mit dem Vertikal der Sonne bestimmt, so hat man offenbar

$$W = 90^\circ - (v + u) \qquad \mathbf{14}$$

wo zur Bestimmung von u

$$\mathrm{Si}\,u = \frac{d' - \delta}{\varrho \pm r} \qquad \mathrm{Co}\,u = \frac{a' - \alpha}{\varrho \pm r} \cdot \mathrm{Co}\,\delta \qquad \mathbf{15}$$

verwendet werden können, während v nach 177 aus

$$\mathrm{Tg}\,v = \mathrm{Tg}\,s \cdot \mathrm{Se}\,(\delta + n) \cdot \mathrm{Si}\,n \quad \text{wo} \quad \mathrm{Tg}\,n = \mathrm{Co}\,s \cdot \mathrm{Ct}\,\varphi \qquad \mathbf{16}$$

erhalten wird. — Für andere Verfahren vgl. die in 469 gegebene Specialliteratur.

475. Vorausbestimmung für eine Zwischenstation durch Interpolation. — Sind die Hauptmomente einer Sonnenfinsternis für drei nicht gar zu weit voneinander entfernte Orte berechnet, so kann man dieselben auch für andere benachbarte Orte durch Aufstellung einer Art Interpolationsformel leicht ermitteln.

Zu 475: *a.* So entnahm z. B. **Littrow** (Astr. II 280), von der Annahme ausgehend, dass die Zeit t des Eintrittes einer gewissen Phase eine Funktion der Länge λ und Breite φ des betreffenden Ortes sei, dem Taylor'schen Lehrsatze die Näherungsformel

$$t + \Delta t = t + A \cdot \Delta\lambda + B \cdot \Delta\varphi \qquad 1$$

wo A und B die Differentialquotienten von t nach λ und φ bezeichnen, woraus sich für zwei benachbarte Orte die Beziehung

$$t'' - t' = A \cdot (\lambda'' - \lambda') + B \cdot (\varphi'' - \varphi') \qquad 2$$

ergiebt. Sind also für drei der Lage nach nicht gar zu verschiedene Orte die Ortszeiten einer Phase bereits berechnet, so kann man die 2 zweimal aufschreiben, aus diesen beiden Gleichungen A und B berechnen, und sodann nach 2 für jeden benachbarten Ort aus seiner Länge λ und Breite φ höchst einfach die angenäherte Ortszeit t derselben Phase ermitteln. — So z. B. gab das Berliner Jahrbuch für die Sonnenfinsternis von 1860 VII 18 für München, Padua und Paris an, dass dieselbe zu den mittlern Ortszeiten $t' = 2^h,72$, $t'' = 2^h,81$ und $t''' = 1^h,89$ beginnen werde, während nach Tab. VII[a] diesen Orten die Längen $\lambda' = 0^h,77$, $\lambda'' = 0^h,79$, $\lambda''' = 0^h,15$ und die Breiten $\varphi' = 48^0,15$, $\varphi'' = 45^0,40$, $\varphi''' = 48^0,83$ entsprechen. Hiefür erhält man aber in angegebener Weise statt 2 die Gleichung

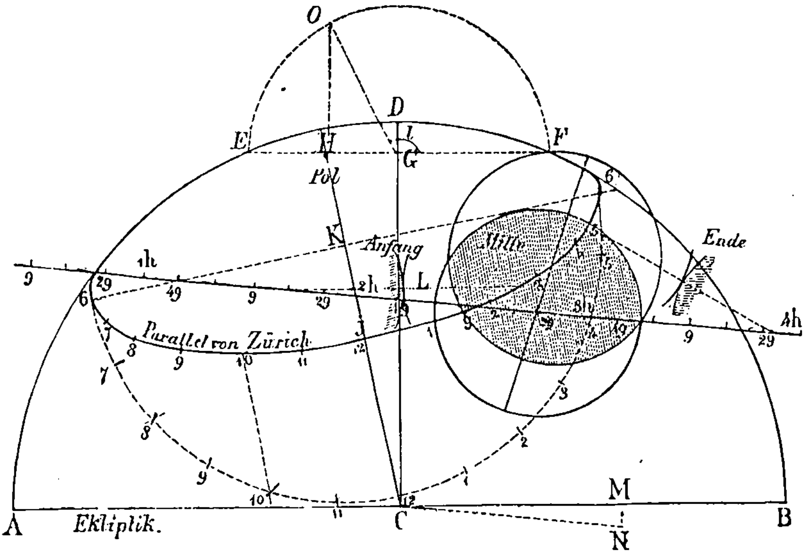
$$2^h,72 - t = 1,31\,(0^h,77 - \lambda) - 0,02\,(48,15 - \varphi) \qquad 3$$

und wenn man in dieselbe für Zürich $\lambda = 0^h,57$ und $\varphi = 47^0,38$ einführt, so erhält man $t = 2^h,48 = 2^h\,28^m,8$, während wir oben (474 : a) durch strenge Rechnung $2^h\,29^m,5$ gefunden haben.

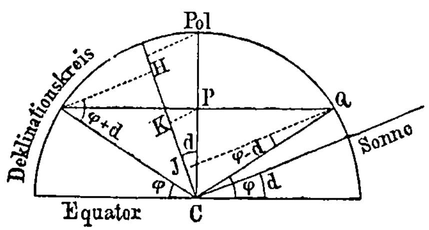
476. Vorausbestimmung auf graphischem Wege. — Wenn es sich nur darum handelt, für einen Ort eine angenäherte Darstellung einer Sonnenfinsternis zu erhalten, so kann man in der Weise vorgehen, dass man aus den geocentrischen Coordinaten des Mondes zur Zeit seiner Opposition (entsprechend wie in 474 : b) die diesem Orte zukommenden scheinbaren Coordinaten berechnet, und sodann in ganz entsprechender Weise operiert, wie es (246) für die Mondsfinsternisse geschehen ist [a]. Etwas genauere Resultate geben allerdings andere, aber dafür auch viel umständlichere Verfahren, von welchen namentlich das von Tob. **Mayer** benutzte lange sehr beliebt war [b].

Zu 476: *a.* In Anwendung dieses höchst einfachen Verfahrens auf die Sonnenfinsternis von 1860 VII 18 erhielt ich (vgl. Verz. 230) für Zürich $2^h\,32^m$ und $4^h\,45^m$ m. Z. als Anfang und Ende der Finsternis, — also (vgl. 474 und 475) bis auf einige Minuten richtige Werte und dabei zugleich eine graphische Darstellung der Erscheinung. — *b.* Das von Tob. **Mayer** 1745 in seinem „Mathematischen Atlas" auseinandergesetzte Verfahren entspricht ganz den von **Kepler** (vgl. 469 : b) ausgesprochenen Principien, indem es wesentlich in folgendem besteht: Zuerst verzeichnet man, für die Minute eine beliebige Einheit wählend, einen die Erde im richtigen Verhältnisse zum Monde darstellenden

Kreis, wofür, da die Radien der beiden Gestirne sich bei gleicher Distanz wie die Mondparallaxe ☾ zum Mondradius ϱ verhalten würden, aber hier der



Radius der Erde wegen ihrer etwas grössern Entfernung von der Sonne im Verhältnisse von (☾ — ⊙) : ☾ zu vermindern ist, als Radius A C = ☾ — ⊙ gewählt werden muss. Stellt A B die Ekliptik vor, so giebt die Senkrechte C D ihren Pol, von welchem der Pol des Equators um e absteht, also für D E = e = D F irgendwo in der Geraden E F liegen muss, und zwar, sofern F die dem Frühlingsequinoktium entsprechende Lage und die gemeinschaftliche Länge von Sonne und Mond zur Zeit unserer Konjunktion gleich l ist, wenn ∠ F G O = l aufgetragen wird, in der Projektion von O auf E F.



Die Distanz Pol-C muss dabei, wie beistehende Hilfsfigur zeigt, gleich A C · Co d werden, und wenn man C J = A C · Si $(\varphi - d)$, C H = A C · Si $(\varphi + d)$, C K = A C · Si φ · Co d und K 6 = P Q = A C · Co φ aufträgt, so sind dadurch die Axen der Projektion des Parallels bestimmt: Es kann also diese in gewohnter Weise mit Hilfe eines über der grossen Axe konstruierten Halbkreises nicht nur wirklich verzeichnet, sondern auch mit einer Zeitteilung versehen werden, wie dies in der Zürich und der Finsternis von 1860 entsprechenden Hauptfigur angedeutet ist. Um sodann auch noch die Mondbahn mit ihrer Zeitteilung zu verzeichnen, hat man offenbar nur nötig, C L gleich der Breite des Mondes zur Zeit der Konjunktion in Länge, C M gleich der Differenz der stündlichen Bewegungen von Mond und Sonne in Länge, und M N gleich der stündlichen Bewegung des Mondes in Breite zu machen, — sodann durch L eine Parallele zu C N zu ziehen, — auf dieser von L aus die relative stündliche Bewegung C N des Mondes nach beiden Seiten wiederholt abzutragen, — und schliesslich jede solche einer

Stunde entsprechende Distanz noch weiter abzuteilen. Hierauf werden (entsprechend 469:b) mit Hilfe eines um $r + \varrho$ geöffneten Zirkels die gleich bezifferten Punkte des Parallels und der Mondbahn aufgesucht, welche einer äussern Berührung oder dem Anfang und Ende der Finsternis entsprechen, — und ebenso die den kleinsten Abstand zeigenden und daher der Mitte der Finsternis entsprechenden Punkte mit Hilfe des Zirkels durch Versuch ermittelt. Verzeichnet man endlich aus letztern Punkten mit r und ϱ Sonne und Mond, so ergiebt sich auch noch die Grösse der Finsternis. — Aus einer unserer Hauptfigur entsprechenden, aber in etwa dreifachem Mass-Stabe ausgeführten Zeichnung (vgl. Verz. 32) erhielt ich seinerzeit die Resultate, dass die Sonnenfinsternis von 1860 VII 18 in Zürich um $2^h\,24^m$ w. Z. $= 2^h\,30^m$ m. Z. beginnen, um $3^h\,28^m$ w. Z. $= 3^h\,34^m$ m. Z. die Grösse von etwa $9\frac{1}{4}$ Sonnenzollen erreichen, und um $4^h\,32^m$ w. Z. $= 4^h\,38^m$ m. Z. beendigt sein werde, — also ein gegenüber 474 gar nicht übles Resultat, welches wohl bei noch etwas grösserm Mass-Stabe und sorgfältigerer Zeichnung ganz mit dem Rechnungsergebnisse übereingestimmt hätte.

477. Die Ausnutzung der erhaltenen Rechnungsresultate und Beobachtungen. — Hat man für einen Ort die Zeiten berechnet, zu welchen unter gewissen Annahmen für die geographische Lage desselben und für die Coordinaten der in Frage kommenden Gestirne die verschiedenen Phasen der Erscheinung einzutreten haben, und sodann diese Zeiten auch durch Beobachtung bestimmt, so kann man die sich allfällig ergebenden Differenzen zur Prüfung oder Verbesserung einzelner der zur Vorausbestimmung verwendeten Elemente benutzen. So zeigt sich namentlich [a], dass sehr angenähert ein Fehler in der geographischen Länge auf die vorausberechnete Zeit der Mitte der Finsternis, und damit auch nahe in gleicher Weise auf die sämtlichen Phasenzeiten übergeht, und es kann somit, wie dies bereits **Kepler** für seine kritische Untersuchung der Ortstafeln mehrfach in Anwendung brachte [b], jene Vergleichung, wenn im übrigen die Fehler in den Tafeln und Rechnungsmethoden als verschwindend betrachtet werden dürfen, an Stelle einer Längenbestimmung Verwendung finden [c].

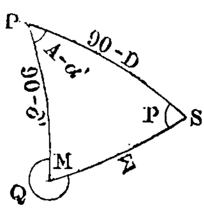
Zu 477: *a.* Beträgt die Länge des Ortes nicht l, wie für die Rechnung in 474 angenommen wurde, sondern $l + dl$, so entsprechen die für die Ephemeridenzeit $T - l$ berechneten Werte von A und D der Ortszeit $T + dl$, und müssen daher um $f \cdot dl$ und $g \cdot dl$ vermindert werden, wenn sie dennoch der Ortszeit T entsprechen sollen. Nun folgt aber aus 474:9'

$$d\tau' = -(f \cdot dA + g \cdot dD) : (f^2 + g^2) \qquad \mathbf{1}$$

und hieraus ergiebt sich für $dA = -f \cdot dl$ und $dD = -g \cdot dl$ in der That $d\tau' = dl$, d. h. das oben ausgesprochene. — *b.* Obschon bereits einige Astronomen des Altertums einsahen, dass auch die Beobachtung von Sonnenfinsternissen für die Längenbestimmung nutzbar gemacht werden könnte, ja sogar genauere Resultate als diejenige der Mondfinsternisse ergeben dürfte, und später wieder **Mercator** (vgl. 320) hierauf zurückkam, so fehlten eben bis auf **Kepler** die hiefür nötigen Rechnungsmethoden, und so bleibt der von diesem letztern (vgl. Ad Vitell. paral. pag. 392—95) gemachte Versuch, aus einer von ihm in Graz 1598 III 7 beobachteten Sonnenfinsternis und einer auf der Uranienburg durch einen Schüler Tychos gemachten korrespondierenden Beobachtung den Längenunterschied dieser beiden Punkte zu bestimmen, dennoch der Ausgangspunkt für diese Methode; dass Kepler dabei, zum Teil infolge einiger bei der numerischen Rechnung begangener Fehler, für diesen Unterschied 18^m, anstatt etwa 11^m, fand, thut nichts zur Sache, da sein Verfahren korrekt war. — *c.* Nachdem sodann Dom. **Cassini** sich etwa von 1661 hinweg ebenfalls mit dieser Methode befasst und namentlich (Mém. Par. 1700) aus der Sonnenfinsternis von 1699 IX 23, für welche er unter anderm von dem geschickten Beobachter Samuel **Reyher** (Schleusingen in Grafschaft Henneberg 1635 — Kiel 1714; Prof. math. et jur. Kiel; vgl. Weyer in A. N. 2527) korrespondierende Angaben erhielt, die Länge von Kiel und einigen andern Orten bestimmt hatte, und dann wieder durch die Abhandlung „**Grischow**, Détermination de la différence des Méridiens entre l'Observatoire de Paris et celui de Berlin (Mém. prés. 1750)" auf deren praktischen Wert aufmerksam gemacht worden war, wurde sie noch nebst der verwandten Längenbestimmung aus Sternbedeckungen (480) von der Akademie in Kopenhagen zum Gegenstande der Preisaufgabe für 1788 gewählt, und von den eingegangenen Arbeiten die von **Cagnoli** verfasste Abhandlung „Méthode pour calculer les longitudes géographiques d'après l'observation d'éclipses de soleil ou d'occultations d'étoiles. Vérone 1789 in 8." preisgekrönt. Seither hat sie nun allerdings an Wichtigkeit bedeutend verloren, da für Bestimmung der Meereslänge die Sonnenfinsternisse viel zu selten sind, und für Bestimmungen auf dem Lande weit bessere Mittel aufgefunden wurden.

478. Vorausberechnung der Sternbedeckungen. — Die Vorausberechnung der Sternbedeckungen durch den Mond kann natürlich ganz nach den gleichen Principien durchgeführt werden wie diejenige der Sonnenbedeckungen, — ja es treten sogar dafür noch wesentliche Vereinfachungen ein, da der scheinbare Radius des bedeckten Gestirnes nunmehr verschwindend klein ist und es sich nur um die Bestimmung der beiden Zeiten handeln kann, wo der Stern zu- und abgedeckt wird [a].

Zu 478: *a.* Bezeichnen A und D Rektascension und Deklination des Sternes zur Sternzeit t, ferner α, δ und α', δ' die gleichzeitigen geocentrischen und scheinbaren Coordinaten des Mondes, φ und φ' geographische und geocentrische Breite des Beobachters, ϱ dessen in Equatorradien ausgedrückte Entfernung vom Erdcentrum, r und r' endlich die scheinbaren Halbmesser des Mondes in Beziehung auf Erdcentrum und Beobachter, so folgen einerseits aus der Figur die Beziehungen



$$\text{Si}\,\Sigma : \text{Co}\,\delta' = \text{Si}\,(A - \alpha') : \text{Si}\,P \qquad \mathbf{1}$$

$$\text{Si}\,\Sigma \cdot \text{Co}\,P = \text{Si}\,\delta' \cdot \text{Co}\,D - \text{Co}\,\delta' \cdot \text{Si}\,D \cdot \text{Co}\,(A - \alpha') \qquad \mathbf{2}$$

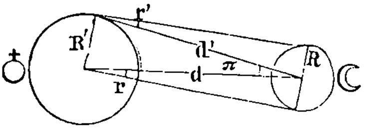
und macht man anderseits in den Transformationsformeln 93 die (nach 435) dem Equator entsprechenden Substitutionen mit der einzigen Abänderung, dass man (um sich auf den Deklinationskreis des Sternes, anstatt auf den

Colur der Nachtgleichen zu beziehen) die Grössen w, w' und W durch $A-\alpha$, $A-\alpha'$ und $A-t$ ersetzt, so erhält man

$$\triangle\cdot \mathrm{Si}\,\delta' = \mathrm{Si}\,\delta - \varrho\cdot\mathrm{Si}\,\pi\cdot\mathrm{Si}\,\varphi' \tag{3}$$

$$\triangle\cdot \mathrm{Co}\,\delta'\cdot\mathrm{Si}\,(A-\alpha') = \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,(A-\alpha) - \varrho\cdot\mathrm{Si}\,\pi\cdot\mathrm{Co}\,\varphi'\cdot\mathrm{Si}\,(A-t) \tag{4}$$

$$\triangle\cdot \mathrm{Co}\,\delta'\cdot\mathrm{Co}\,(A-\alpha') = \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,(A-\alpha) - \varrho\cdot\mathrm{Si}\,\pi\cdot\mathrm{Co}\,\varphi'\cdot\mathrm{Co}\,(A-t) \tag{5}$$



wo $\triangle$ das Verhältnis der Entfernungen des Mondes von Beobachter und Erdcentrum, π aber die Equatorealhorizontalparallaxe des Mondes bezeichnet. Ferner ist

$$R = d'\cdot\mathrm{Si}\,r' = d\cdot\mathrm{Si}\,r$$

also $$\triangle = d' : d = \mathrm{Si}\,r : \mathrm{Si}\,r' \tag{6}$$

Substituiert man nun aus 3—5 in 1 und 2, so erhält man

$$\triangle\cdot\mathrm{Si}\,\Sigma\cdot\mathrm{Si}\,P = \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,(A-\alpha) - \varrho\,\mathrm{Si}\,\pi\cdot\mathrm{Co}\,\varphi'\cdot\mathrm{Si}\,(A-t) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\triangle\cdot\mathrm{Si}\,\Sigma\cdot\mathrm{Co}\,P = {} & \mathrm{Si}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,D - \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,D\cdot\mathrm{Co}\,(A-\alpha) - \\ & - \varrho\cdot\mathrm{Si}\,\pi\,[\mathrm{Si}\,\varphi'\cdot\mathrm{Co}\,D - \mathrm{Co}\,\varphi'\cdot\mathrm{Si}\,D\cdot\mathrm{Co}\,(A-t)]\end{aligned} \tag{8}$$

Für den Anfang oder das Ende einer Sternbedeckung ist aber $\Sigma = r'$, also, wenn (232) $k = 0{,}2725$ das Verhältnis von Mond- und Erdradius bezeichnet, mit Hilfe von 6

$$\triangle\cdot\mathrm{Si}\,\Sigma = \triangle\cdot\mathrm{Si}\,r' = \mathrm{Si}\,r = R:d = R\cdot\mathrm{Si}\,\pi : R' = k\cdot\mathrm{Si}\,\pi \tag{9}$$

und hiefür gehen 7 und 8 in

$$\begin{aligned}k\cdot\mathrm{Si}\,P &= \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,(A-\alpha):\mathrm{Si}\,\pi - \varrho\cdot\mathrm{Co}\,\varphi'\cdot\mathrm{Si}\,(A-t) = I - \varrho\cdot II\\ k\cdot\mathrm{Co}\,P &= [\mathrm{Si}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,D - \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,D\cdot\mathrm{Co}\,(A-\alpha)]:\mathrm{Si}\,\pi - \\ &\quad - \varrho\,[\mathrm{Si}\,\varphi'\cdot\mathrm{Co}\,D - \mathrm{Co}\,\varphi'\cdot\mathrm{Si}\,D\cdot\mathrm{Co}\,(A-t)] = III - \varrho\cdot IV\end{aligned} \tag{10}$$

über, woraus durch Quadrieren und Addieren

$$k^2 = [I - \varrho\cdot II]^2 + [III - \varrho\cdot IV]^2 \tag{11}$$

folgt. — Für eine Zeit T, welche der gesuchten Zeit $T+\tau$ des Eintrittes oder Austrittes des Sternes nahe liegt, sei

$$I = p \qquad III = q \qquad \varrho\cdot II = u \qquad \varrho\cdot IV = v \tag{12}$$

während die Werte derselben Grössen für die Zeit $T+\tau$ durch $p+p'\cdot\tau$, $q+q'\cdot\tau$, $u+u'\cdot\tau$ und $v+v'\cdot\tau$ ausgedrückt werden mögen. Für diese Annahmen geht 11 in

$$k^2 = [p-u+(p'-u')\cdot\tau]^2 + [q-v+(q'-v')\cdot\tau]^2$$

über, oder, wenn man noch

$$\begin{gathered}p-u = m\cdot\mathrm{Si}\,M \qquad q-v = m\cdot\mathrm{Co}\,M \qquad p'-u' = n\cdot\mathrm{Si}\,N\\ q'-v' = n\cdot\mathrm{Co}\,N \qquad m\cdot\mathrm{Si}\,(M-N) = k\cdot\mathrm{Co}\,\psi\end{gathered} \tag{13}$$

setzt, in

$$k^2 = m^2 + n^2\cdot\tau^2 + 2\,m\cdot n\cdot\tau\cdot\mathrm{Co}\,(M-N) \tag{14}$$

woraus

$$n\cdot\tau = -\,m\cdot\mathrm{Co}\,(M-N) \pm k\cdot\mathrm{Si}\,\psi \tag{15}$$

folgt, wo das obere Zeichen offenbar für den später eintreffenden Austritt, das untere für den Eintritt zu wählen ist. Führt man die Werte 12 und 13 auch in 10 ein, so erhält man endlich mit Benutzung von 15

$$k\cdot\mathrm{Si}\,P = p-u+(p'-u')\cdot\tau = m\cdot\mathrm{Si}\,M + n\tau\cdot\mathrm{Si}\,N = k\cdot\mathrm{Co}\,(N\mp\psi)$$

$$k\cdot\mathrm{Co}\,P = q-v+(q'-v')\cdot\tau = m\cdot\mathrm{Co}\,M + n\cdot\tau\cdot\mathrm{Co}\,N = -\,k\cdot\mathrm{Si}\,(N\mp\psi)$$

so dass $$P = 90^0 + N \mp \psi \quad \text{und somit} \quad Q = 270^0 + N \mp \psi \tag{16}$$

folgt, wo wieder das obere Zeichen für den Austritt, das untere für den Eintritt gilt. — Für andere Methoden zur Vorausberechnung auf die früher (namentlich 469) aufgeführte Litteratur verweisend, erwähne ich hier noch speciell die beiden Abhandlungen „**Bessel**, Über die Vorausberechnung der Sternbedeckungen (A. N. 145 von 1828 und Berl. Jahrb. 1831), — und: **Encke**, Über die Vorausberechnung der Sternbedeckungen (Berl. Jahrb. 1830—31)", von welchen die letztere noch um so wichtiger ist, als das Berliner Jahrbuch nachher lange Jahre die darauf gestützt für Berlin vorausberechneten Sternbedeckungen und überdies Hilfstafeln enthielt, um die für andere Orte eintretenden Modifikationen leicht zu ermitteln.

479. Graphische Methoden. — Auch die graphischen Methoden für Vorausbestimmung der sog. Sonnenfinsternisse lassen sich auf die Sternbedeckungen in entsprechend vereinfachter Gestalt übertragen [a].

Zu 479: *a.* Es dürfte kaum nötig sein, dies hier eingehend nachzuweisen und auszuführen; dagegen erwähne ich noch zur etwelchen Vervollständigung der Speciallitteratur: „J. J. **Waterston**, On a graphical method of predicting occultations (Monthly Not. 1845), — F. C. **Penrose**, On a method of predicting by graphical construction occultations of stars by the moon, and solar eclipses. London 1869 in fol., — A. **Tissot**, Sur l'emploi des méthodes graphiques dans la prédiction des occultations (Compt. rend. 1877), — etc."

480. Ausnutzung der Beobachtungen. — Die Sternbedeckungen können natürlich in ähnlicher Weise wie die Sonnenfinsternisse zur Längenbestimmung benutzt werden, und da sich zudem viel häufiger solche ereignen, so war sogar ihre Beobachtung in früherer Zeit eines der allerbeliebtesten Mittel zu diesem Zwecke [a], — zumal es mehrere Astronomen gab, welche es sich zu einer Hauptaufgabe machten, alle bei ihnen einlaufenden Beobachtungen sofort zur Ortsbestimmung zu verwerten [b].

Zu 480: *a.* Schon **Menelaus** beobachtete (vgl. Almagest Halma II 27) zu Rom im Jahre 845 von Nabonnassar (oder 98 n. Chr.) die Bedeckung eines Sternes im Skorpion durch den Mond; dagegen ist die Angabe von Peschel (Gesch. 44), es habe **Ptolemäus** diese Beobachtung zu einer geographischen Längenbestimmung benutzt, unrichtig, — er benutzte dieselbe gegenteils zur Bestimmung der Länge des bedeckten Sternes. Nach Humboldt (Examen critique, Ed. in fol. p. 475) war Amerigo **Vespucci**, welcher von 1499 hinweg die Sternbedeckungen zu geographischen Zwecken beobachtete, der Erste, welcher diese Methode anwandte, und dann scheint allerdings bald darauf auch **Werner** dieselbe empfohlen zu haben. Grössere Bedeutung konnte sie jedoch nur nach Erstellung etwas zuverlässiger Mondtafeln erhalten, und so wurde sie eigentlich erst vom 18. Jahrhundert hinweg weiter ausgebildet, wofür auf die Specialschriften „J. **Cassini**, Méthode de déterminer les longitudes des lieux de la Terre par les éclipses des étoiles fixes et des planètes par la Lune (Mém. Par. 1703), — L. **Euler**, Méthode de déterminer la longitude des lieux par l'observation d'occultations des étoiles fixes par la Lune (Mém. Berl.

1747), — Fr. v. **Zach**, Beiträge zu geographischen Längenbestimmungen aus Fixstern-Bedeckungen (Mon. Corr. 1809—12), — Edward **Riddle** (Troughend in Northumberland 1788 — Greenwich 1854; Vorsteher von Schulen in Newcastle und Greenwich), On finding the longitude from an observed occultation of a fixed star by the Moon (Mem. Astr. Soc. 1831), — etc." verwiesen wird. — *b.* Unter diesen selbstlosen astronomischen Rechnern verdienen namentlich Fr. **Triesnecker** und J. Fr. **Wurm** dankbare Erwähnung.

Einige Zusätze und Berichtigungen.

36 (zu 3): Vgl. „J. **Epping**, Astronomisches aus Babylon. Freiburg i./B. 1889 in 8., — und: P. **Jensen**, Die Kosmologie der Babylonier. Strassburg 1890 in 8."

37 (zu 4): Von den Schriften des **Aristoteles** hebe ich seine 8 Bücher über Physik und seine 4 Bücher über das Himmelsgebäude hervor, welche z. B. Karl **v. Prantl** (Landsberg 1820 geb.; Prof. philos. München) zu Leipzig 1854—57 in 8. griechisch und deutsch herausgab. Sodann seine Schrift „De generatione animalium", welche den denkwürdigen Ausspruch „Noch sind die Erscheinungen nicht hinlänglich erforscht; wenn sie es aber dereinst sein werden, alsdann ist **der Wahrnehmung mehr zu trauen als der Spekulation, und letzterer nur insoweit als sie mit den Erscheinungen Übereinstimmendes giebt**" enthält, welchen seine verbissensten Anhänger gerade am allerwenigsten berücksichtigten.

38 (zu 5): Der Litteratur füge ich bei: „F. E. **Hall**, The Surja-Siddhanta. Calcutta 1854 in 8., — und: E. **Burgess**, Translation of the Surja-Siddhanta. New-Haven 1860 in 8. (vgl. J. B. Biot in Journ. d. Sav. 1860)."

39 (zu 6): Es ist zu verbessern, dass **Walafried** (genannt Strabo oder Strabus) von 806 bis 849 lebte. — Enrico **Narducci** (Rom 1832 geb.) ist Bibliothekar in Rom.

40 (zu 8): Vgl. „Joh. Ludwig Emil **Dreyer** (Kopenhagen 1852 geb.; Dir. Obs. Armagh), Tycho Brahe. Edinburgh 1890 in 8. — Ludwig **Häpke** (Bassum bei Bremen 1835 geb.) ist Lehrer in Bremen.

41 (zu 9): In seiner „Institutio" wagte **Gassendi** nicht, sich zum Coppernicanischen Systeme zu bekennen, und soll einmal gesagt haben: „Il est contraire à l'écriture; en conséquence et pour obéir, je me vois contraint de donner la palme à Tycho". Auch **Scheiner** sprach sich in seinem „Prodromus (vgl. meine Sonnenfl. Litt. 660)" gegen dasselbe aus; vgl. für ihn „Anton **v. Braunmühl**, Christoph Scheiner. Bamberg 1891 in 8."

42 (zu 12): Der Litteratur sind beizufügen: „**Lalande**, Abrégé d'astronomie. Paris 1774 in 8. (auch später und in verschiedenen Sprachen), und: Traité du flux et du reflux de la mer. Paris 1781 in 4. (auch für die 3. éd. giltiger Hauptteil des damals erschienenen Supplementbandes zur 2. éd. der Astronomie), — Gottlieb Friedrich **Rösler** (Stuttgart 1740 — ebenda 1790; Prof.

math. et phys. Stuttgart), Handbuch der praktischen Astronomie. Tübingen 1788 in 8., — Abel **Bürja** (Kikebusch bei Berlin 1752 — Berlin 1816; Prof. math. Berlin), Lehrbuch der Astronomie. Berlin 1794—1806, 5 Bde. in 8., — **Voiron**, Histoire de l'astronomie depuis 1881. Paris 1810 in 4. (als Fortsetzung von Bailly zu betrachten), — Gottlieb Leberecht **Schulze** (Hirschfeld 1779 — Dresden 1856; Kirchen- und Schulrat Dresden), Darstellung des Weltsystemes. Leipzig 1811 in 8. (2. A. 1821), — Johann **Pasquich** (Wien 1753 — ebenda 1829; Priester; Prof. math. und Dir. Obs. Ofen), Epitome elementorum astronomiæ sphærico-calculatoriæ. Viennæ 1811, 2 Vol. in 4., — etc."

43 (zu 13): G. B. **Airy** starb 1892 zu London. Wolfgang **Sartorius** von Waltershausen (Göttingen 1809 — ebenda 1876) war Prof. min. et geol. Göttingen. — Der Litteratur füge ich bei: „Jeremias David **Reuss** (Rendsburg 1750 bis Göttingen 1837; Bibliothekar Göttingen), Repertorium commentationum a societatibus litterariis editarum. Gottingæ 1801—21, 16 Vol. in 4. (Vol. 5 ist speciell der Astronomie gewidmet), — Em. **Develey**, Cours élémentaire d'astronomie. Lausanne 1833 in 8. (2 éd. 1835), — R. **Engelmann**, Recensionen von F. W. Bessel. Leipzig 1878 in 8. — Die Erudition, welche **Delambre**, der sehr sprachengewandt war und für welchen die längsten analytischen Entwicklungen oder numerischen Rechnungen als Erholung galten, in seiner Geschichte entwickelt, ist geradezu fabelhaft; dagegen wird er allerdings, sowohl in dieser als in seiner Astronomie, sehr oft ausserordentlich weitschweifig und vergisst vor lauter Rechnerei gar vieles zu sagen, was man in so dickleibigen Werken mit Recht zu finden hofft, und **Gauss** fürchtete sogar (vgl. Brief an Schumacher vom Herbst 1814), es werde letzteres Werk, das kaum etwas Trigonometrie voraussetze, nur „astronomische Taglöhner und keine Astronomen" bilden.

44 (zu 14): Zur Berichtigung erwähne ich, dass **Chauvenet** 1820 (nicht 1819) zu Milford geboren wurde, wo sein aus Narbonne stammender Vater eine kleine Farm besass, — dass **Herr** früher in Graz (nicht in Prag) Prof. math. war, — und dass der Herausgeber von Angers Vorträgen **Zaddach** (nicht Zadbach) hiess. — **Adams** starb 1892 zu Cambridge, — **Brünnow** 1891 zu Heidelberg, — und **Schönfeld** 1891 zu Bonn. — Friedrich Wilhelm **Looff** (Magdeburg 1808 — Langensalza 1889) war lange Jahre Schuldirektor in Gotha. — Maximilien **Marie** (Paris 1819 geb.) war früher Examinator bei der Ecole polytechnique. — Albert-Benoît-Marie **Lancaster** (Mons in Belgien 1849 geb.) ist Bibliothekar der Sternwarte in Brüssel. — Die 1865 gegründete „Deutsche astronomische Gesellschaft" begann sofort mit „Publicationen", welchen sich im folgenden Jahre auch noch eine „Vierteljahrsschrift" anschloss. — Der Litteratur füge ich bei: „**Sédillot**, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux. Paris 1848—49, 2 Vol. in 8., — Olry **Terquem** (Metz 1782 — Paris 1862; Bibliothekar Paris), Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématique (von 1855 bis zu seinem Tode als Suppl. der Nouv. Annal. de Math. erschienen), — Ribeiro de **Sousa Pinto**, Elementos de astronomia. Coimbra 1860, 2 Vol. in 8., — George F. **Chambers**, A handbook of descriptive and practical astronomy. London 1861 in 8. (4. ed. Oxford 1889, 3 Vol.), — Ch. A. **Young**, A textbook of general astronomy. Boston 1888 in 8., — Florian **Cajori**, The teaching and history of mathematics in the United States. Washington

1890 in 8., — und: Charl. **Wolf**, Astronomie et géodésie. Cours professé à la Sorbonne. Paris 1891 in 8.

45 (zu 25): Für die Wahl der Logarithmentafel kann man sich an die Regel halten, dass die Mantissen ebensoviele Stellen haben sollen als Zahlstellen berücksichtigt werden müssen. — Nach „W. **Cudworth**, Life and correspondence of Abr. Sharp. London 1889 in 4." wurde **Sharp** 1653 (nicht 1651) geboren.

46 (zu 26): Der Arithmometer von **Thomas** soll sich von der 1770—76 durch Philipp Matthäus **Hahn** (Scharnhausen in Würtemberg 1739 — Echterdingen 1790; Pfarrer in Echterdingen) ausgedachten und noch von dessen Sohne wiederholt ausgeführten Rechenmaschine wesentlich nur durch eine, ein rascheres Arbeiten erlaubende Anordnung unterscheiden.

47 (zu 33): Für die **Determinanten**, an welche schon **Leibnitz** dachte, aber die erst G. **Cramer** wirklich einführte, verweise ich auf die Specialschriften von Fr. **Brioschi** (Pavia 1854), R. **Baltzer** (Leipzig 1857, 4. A. 1875), S. **Günther** (Erlangen 1875), G. **Dostor** (Paris 1877), — etc."

48 (zu 52): Bemerkenswert ist, dass Robert **Adrain** (Dublin 1780? — New-York 1843; Autodidakt, der 1798 expatriierte; Prof. math. New-Brunswick und New-York) schon in der Abhandlung „Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations (The Analyst, Vol. I von 1808)" das zwar damals von **Gauss** bereits aufgestellte, aber noch nicht publizierte Fehlergesetz ableitete, und auch entsprechend **Legendre**, dessen wenig frühere Publikation ihm wohl schwerlich bekannt war, das Zusammenfallen der wahrscheinlichsten Lage mit dem Schwerpunkte erkannte. Vgl. auch seine spätere „Investigation of the figure of the earth and of the gravity in different latitudes (Trans. Amer. Phil. Soc. I von 1818)". — Der Litteratur füge ich bei: „Robert **Ellis** (Bath in Somerset 1817 geb.; Fellow Trinity College Cambridge), On the method of least squares (Trans. Cambridge VIII von 1844), — James Whitbread Lee **Glaisher** (Lewisham in Kent 1848 geb.; Sohn von James in 598; Senior tutor of Trinity College Cambridge), On the law of facility of errors of observations, and on the method of least squares (Mem. Astr. Soc. 39 von 1872), — Mansfield **Merriman**, A list of writings relating to the method of least squares (Trans. Connecticut Acad. IV von 1877), — und: Emmanuel **Czuber** (Prag 1851 geb.; Prof. math. Brünn), Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891 in 8." — Endlich trage ich nach, dass Angelo **Forti** (Pesaro 1818 geb.) Prof. math. Pisa ist, — Friedrich Gustav **Gauss** (Bielefeld 1829 geb.) Generalinspektor des k. preussischen Katasters, — und Christian August **Vogler** (Wiesbaden 1841 geb.) Prof. geod. Bonn.

49 (zu 53): Der Litteratur füge ich bei „Justus Günther **Grassmann** (Linzlow bei Stettin 1779 — Stettin 1852; Prof. math. Stettin), Raumlehre. Berlin 1817—24, 2 Th. in 8.", sowie die weiter ausbauenden Schriften seiner Söhne „Hermann Günther **Grassmann** (Stettin 1809 — ebenda 1877; Prof. math. Stettin), Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig 1844 in 8, — und: Robert **Grassmann**, Die Ausdehnungslehre. Stettin 1891 in 8."

50 (zu 60): Vgl. „Ferdinand **Rudio** (Wiesbaden 1856 geb; Prof. math. Zürich), Das Problem von der Quadratur des Zirkels (Zürcher. Viertelj. 35 von 1890)."

51 (zu 70): Bezeichnet w den äussern Winkel, welchen die Tangente am Punkte der Polarcoordinaten (r, v) mit r bildet, so erhält man nach den zu 1 führenden Principien

$$\mathrm{Tg}\, w = - r \cdot dv : dr \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Tg}\,(90 - w) = - dr : (r \cdot dv) \qquad \mathbf{9}$$

Hieraus folgen, wenn w nahe an 90° fällt, die Winkel in Minuten ausgedrückt und die Formeln 39 : 7 und 41 : 3 benutzt werden,

$$(90 - w) \cdot \mathrm{Si}\, 1' \coloneqq - \frac{dr}{r \cdot dv \cdot \mathrm{Si}\, 1'} \qquad \text{wo} \qquad \frac{dr}{r} = \mathrm{Ln}\, 10 \cdot d\, \mathrm{Lg}\, r$$

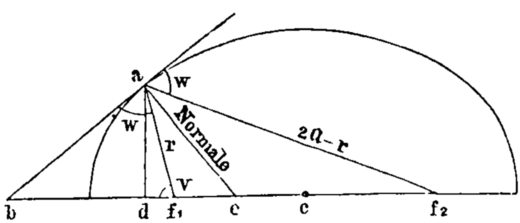
so dass in diesem Specialfalle

$$w \coloneqq 90^0 + \frac{\mathrm{Ln}\, 10}{\mathrm{Si}^2\, 1'} \cdot \frac{d\, \mathrm{Lg}\, r}{dv} = 90^0 + \overline{7{,}4348} \cdot \frac{d\, \mathrm{Lg}\, r}{dv} \qquad \mathbf{10}$$

52 (zu 71): Der von **Oppikofer** 1822/3 (nicht erst 1826) erfundene Planimeter wurde zuerst durch Johannes **Pfäffli** (Signau 1802 — Bern 1828; Mech. Bern), dann durch Heinrich Rudolf **Ernst** (Bern 1803 — Boulogne 1863; Mech. Bern und Paris) wirklich ausgeführt. Etwa 1849 hatte sodann Kaspar **Wetli** (Männedorf 1822 — Zürich 1889; Ingenieur) die glückliche Idee, den anfänglich nur $9^1/_2{}^0$ betragenden Kegelwinkel auf 90° zu erhöhen, und noch später wurden durch **Hansen**, **Starke**, etc. verschiedene konstruktive Verbesserungen eingeführt. Vgl. „S. **Stampfer**, Über das neue Planimeter von Wetli. Wien 1850 in 8., — **Bauernfeind**, Die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen. München 1853 in 8., — etc." — Nach **Bauernfeind** (Vermessungskunde 3. A. 553) wurde das Polarplanimeter, ziemlich gleichzeitig mit und unabhängig von Amsler, auch durch Joh. Leopold **Schmidt** (Wien 1826 geb.; damals Bergmeister in Leoben, später Docent für Maschinenbau zu Przibram) erfunden.

53 (zu 74): Nach 1'' ist

$$r \cdot \mathrm{Co}\, v = [a\,(1 - e^2) - r] : r$$



folglich mit Hilfe von 4

$$b\,f_1 = \frac{r^2\,(1 - \mathrm{Co}^2\, v)}{(1 - e^2) \cdot r \cdot \mathrm{Co}\, v} + r \cdot \mathrm{Co}\, v = \frac{a \cdot r \cdot e}{a - r} \qquad \mathbf{26}$$

$$f_1 e = (1 - e^2)\,(a \cdot e + r \cdot \mathrm{Co}\, v) - (r \cdot \mathrm{Co}\, v) = e \cdot r \qquad \mathbf{27}$$

und es ergeben sich somit aus den Dreiecken $a\,b\,f_1$, $f_1\,a\,e$ und $f_1\,a\,f_2$ die Proportionen

$$\mathrm{Si}\,(w + v) : \mathrm{Si}\, w = a\,f_1 : b\,f_1 = (a - r) : a \cdot e \qquad \mathbf{28}$$

$$- \mathrm{Co}\,(w + v) : \mathrm{Co}\, w = a\,f_1 : e\,f_1 = 1 : e \qquad \mathbf{29}$$

$$\mathrm{Si}\, 2w : \mathrm{Si}\, v = f_1 f_2 : a\,f_2 = 2a \cdot e : (2a - r) \qquad \mathbf{30}$$

so dass man z. B., wenn α, r, w bekannt sind, aus 28:29 den Winkel v und sodann aus 30 auch e berechnen kann, wovon wir in 570 Gebrauch machen werden.

54 (zu 78): Es ist beizufügen „**Ligowski**, Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen. Berlin 1890 in 8.“, — ferner dass Christoph **Gudermann** (Winneburg bei Hildesheim 1798 — Münster 1852) Prof. math. Münster war, und Charles-Ange **Laisant** (Basse-Indre 1841 geb.) Militär und Deputierter ist.

55 (zu 114): Bezeichnet m die Masse der Volumeneinheit, so ist diejenige eines geraden und homogenen Hohlcylinders der Radien x und (x + dx) und der Höhe h gleich $[(x + dx)^2 - x^2] \cdot \pi \cdot h \cdot m \fallingdotseq 2h \cdot \pi \cdot m \cdot x \cdot dx$, also stellt $2h \cdot \pi \cdot m \cdot x^3 \cdot dx$ dessen Trägheitsmoment in Beziehung auf die Cylinderaxe, und somit

$$M = 2h \cdot \pi \cdot m \cdot \int_0^r x^3 \cdot dx = {}^1\!/_2\, h \cdot \pi \cdot m \cdot r^4 \qquad \mathbf{16}$$

das entsprechende Trägheitsmoment eines Vollcylinders des Radius r vor. Hieraus ergiebt sich aber leicht das Trägheitsmoment einer Kugel in Beziehung auf einen ihrer Durchmesser; denn schneidet man dieselbe in den Distanzen x und (x + dx) vom Mittelpunkte durch zwei zu dem Durchmesser senkrechte Ebenen, und ist $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ der Radius des für x erhaltenen Parallelkreises, so ist nach 16 das Trägheitsmoment des herausgeschnittenen Kugelstückes gleich $^1/_2\, dx \cdot \pi \cdot m \cdot y^4$, und somit dasjenige der ganzen Kugel

$$M = {}^1\!/_2\, m \cdot \pi \cdot \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)^2 \cdot dx = {}^8\!/_{15}\, m \cdot \pi \cdot r^5 \qquad \mathbf{17}$$

Teilt man diesen Wert durch die $^4/_3\, r^3 \cdot \pi \cdot m$ betragende Kugelmasse, so erhält man einen Quotienten

$$z^2 = {}^2\!/_5\, r^2 \qquad \text{woraus} \qquad z \fallingdotseq 0{,}63 \cdot r \qquad \mathbf{18}$$

folgt, und es hat daher ein in letzterm Abstande vom Durchmesser befindlicher Punkt, wenn man ihm die Kugelmasse zuteilt, ein ebenso grosses Trägheitsmoment als die ganze Kugel, so dass er ein sog. **Trägheitspunkt** ist.

56 (zu 117): Der Litteratur füge ich bei: „Th. **Young**, A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. London 1807, 2 Vol. in 4., — Wilhelm **Eisenlohr** (Pforzheim 1799 — Karlsruhe 1872; Prof. phys. Karlsruhe), Lehrbuch der Physik. Mannheim 1836 in 8. (11. A. 1876), — Victor **Lang** (Wiener-Neustadt 1838 geb.; Prof. phys. Wien), Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig 1867—73 in 8. (2. A. 1891), — Emil-Léonard **Mathieu** (1834 geb. — Nancy 1890; Prof. math. Nancy), Cours de physique mathématique. Paris 1873 in 4.), — J. **Chappuis** et A. **Berget**, Leçons de physique générale. Paris 1891—92, 3 Vol. in 8., — und: E. **Gerland**, Geschichte der Physik. Leipzig 1892 in 8.“ Ferner trage ich nach, dass William **Thomson** (Belfast 1824 geb.) Prof. phys. Glasgow, Peter Guthrie **Tait** (Dalkeith 1831 geb.) Prof. Nat. Philos. Edinburgh, und August **Heller** (Budapest 1843 geb.) Prof. phys. Budapest ist.

57 (zu 121): Während (114) k den Abstand des Trägheitspunktes in Beziehung auf die durch M gelegte Parallele zu Z bezeichnet, mag K die entsprechende Bedeutung für Z selbst besitzen, so dass nach 4 und 6

$$M \cdot K^2 = M \cdot (a^2 + k^2) \qquad \text{oder} \qquad K^2 = a \cdot l \qquad \mathbf{13}$$

somit in Beziehung auf die Drehaxe **der Abstand des Trägheitspunktes das geometrische Mittel aus den Abständen von Schwerpunkt und Schwingungspunkt** ist, folglich (da a durch Auflegen des Pendelkörpers auf eine Schneide, oder mit dem Apparate von Repsold bestimmt, l aus der beobachteten Schwingungsdauer nach 120:2 berechnet werden kann) leicht gefunden wird, wie dies **Autenheimer** noch kürzlich (Schweiz. Bauz. 1891) hervorhob. — Der Näherungsformel 120:2 für das mathematische Pendel entsprechen nach 6 und 13 beim physischen Pendel die Formeln

$$t = \pi \cdot \sqrt{(a^2 + k^2) : (a \cdot g)} = K \cdot \pi : \sqrt{a \cdot g} = \pi \cdot \sqrt{J : (a \cdot g \cdot M)} \qquad \mathbf{14}$$

wo J das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Drehaxe bezeichnet.

58 (zu 123): Unter den Uhrmachern des vorigen Jahrhunderts sind z. B. noch Joh. Georg **Enderli** (vgl. 494), Joh. Konrad **Pfenninger** (Zürich 1725 — ebenda 1797; Uhrmacher in Kassel, wo er als zweiter Bürgi galt, und Zürich, zuletzt Landvogt in Eglisau), und Henry **Sully** (vgl. 409 und seine „Description d'une horloge pour la juste mesure du temps sur mer. Paris 1726 in 4.") zu erwähnen, — der Litteratur „George **Maurice** (Genève 1799 — Nizza 1839; Prof. phys. Genf), Discours sur l'histoire de la mesure du temps. Genève 1831 in 8., — J. H. **Martens**, Beschreibung der Hemmungen der höhern Uhrmacherkunst. Furtwangen 1858 in 8., — und: Eugen **Gelcich**, Die Uhrmacherkunst und die Behandlung der Präcisionsuhren. Wien 1891 in 8." beizufügen.

59 (zu 127): Ich trage nach, dass Joh. Karl **Prediger** (Klausthal 1822 geb.) Prof. math. Klausthal, — Moritz Richard **Rühlmann** (Dresden 1846 geb.) Gymnasialprof. in Chemnitz ist.

60 (zu 129): Ich füge bei, dass Wilhelm **Weber** 1891 zu Göttingen starb, und neuerlich „L. A. **Zellner**, Vorträge über Akustik. Wien 1892, 2 Bde. in 8." ausgegeben wurde.

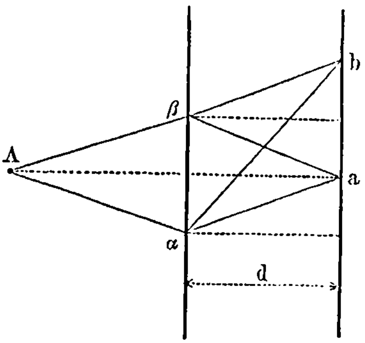
61 (zu 130): Ich trage nach, dass Edmond **Becquerel** 1891 zu Paris starb, und Elie-Nicolas **Mascart** (Quarouble in Nord 1837 geb.) Prof. phys. und Akad. Paris ist. Der Litteratur ist beizufügen „Ad. **Steinheil** und E. **Voit**, Handbuch der angewandten Optik. I. Leipzig 1891 in 8."

62 (zu 133): Aus einem in „Gerold **Meyer von Knonau** (Zürich 1843 geb.; Prof. hist. Zürich), Lebensbild des heil. Notker von St. Gallen. Zürich 1877 in 4." reproduzierten Bilde, welches sich in einem dem 9. Jahrhundert angehörenden Codex der St. Galler Stiftsbibliothek erhalten hat, geht unzweifelhaft hervor, dass man damals auch in St. Gallen vom Tubus Gebrauch machte.

63 (zu 141): Ich trage nach, dass Heinrich Friedrich Ludwig **Matthiessen** (Fissau bei Eutin 1830 geb.) Prof. phys. Rostock ist, — und Joh. Benedikt **Listing** 1882 zu Göttingen starb.

64 (zu 146): Während **Bouguer** (und später Foucault) die zu vergleichenden Lichtquellen so lange verschob, bis sie die zwei durch eine Wand getrennten Hälften eines (am besten durchscheinenden) Blattes gleich stark erleuchteten, glich **Lambert** (wie später Rumford) die von einem Stabe geworfenen Schatten aus, und es besitzen diese beiden Verfahren noch jetzt einen gewissen Wert; dagegen war der Vorschlag von **Lampadius**, abzuzählen, wie viele durchsichtige Scheibchen eine Lichtquelle unsichtbar machen, nicht sehr glücklich. Für andere Verfahren und überhaupt für das ganze Gebiet vgl. „Adrien **Palaz** (Riez bei Cully 1863 geb.; Prof. math. Lausanne), Traité de Photométrie industrielle. Paris 1892 in 8"

65 (zu 148): Als Th. **Young** von einem Punkte A aus homogenes Licht durch zwei enge Öffnungen α und β in einen dunkeln Raum treten liess, so



zeigten sich auf einem entgegengehaltenen weissen Schirme regelmässige Folgen von hellen und dunkeln Streifen, — genau wie es erfolgen muss, wenn das Licht in einer Wellenbewegung besteht, und sich somit nach dem Durchgange durch α und β nach allen Richtungen ausbreitet: Nehmen wir nämlich z. B. an, es liege β vertikal über α, so wird es auf dem Schirme eine Horizontale geben, deren Punkte a von α und β gleichen Abstand haben, während jedem andern Punkte b, wenn $\alpha\beta = c$ und $ab = e$ ist, eine Wegdifferenz

$$\alpha b - \beta b = \sqrt{(e + {}^1\!/_2\, c)^2 + d^2} - \sqrt{(e - {}^1\!/_2\, c)^2 + d^2} \fallingdotseq \frac{e \cdot c}{d} \qquad \mathbf{1}$$

entspricht. Während somit die bei a zusammentreffenden Strahlen gleiche Wege durchlaufen haben, folglich sich nach der Wellenlehre verstärken und also $e = 0$ eine helle Stelle entspricht, so nimmt mit e auch die Wegdifferenz und damit die Schwächung des Lichtes fortwährend zu, bis jene für einen gewissen Wert e' gleich der Hälfte der Wellenlänge λ wird, also eine vollständige Interferenz oder eine dunkle Stelle entsteht. Misst man somit e', so kann man nach der aus 1 folgenden Formel

$$\lambda = 2 \cdot e' \cdot c : d \qquad \mathbf{2}$$

die Länge der Wellen des angewandten Lichtes wirklich berechnen, und so erhielt **Fresnel**, indem er durch Vorsetzen eines roten Glases das Licht einer Flamme homogen machte, $\lambda = 0{,}67^{\mu}$ oder, wenn die Geschwindigkeit des Lichtes (467) zu 300000^{km} angenommen wird, auf eine Sekunde die enorme Anzahl von $300000^{\mathrm{km}} : 0{,}67^{\mu} \fallingdotseq 448$ Billionen sich folgender Wellen. Entsprechend lassen sich auch die Wellenlängen anderer Farben messen; jedoch erhält man sie, wie schon **Fraunhofer** zeigte, noch bequemer und genauer, wenn man sog. „Gitterspektra" erzeugt und die Messungen auf die nach ihm benannten Linien bezieht. — Zum Untersuchen eines Lichtstrahles auf seine Polarisation dient meistens ein von William **Nicol** (1768? bis 1851; Prof. phys. Edinburgh) aus zwei Doppelspathen kombiniertes und 1828 in Jamesons philos. Journal beschriebenes, seinen Namen tragendes Prisma: Enthält das auffallende Licht keine polarisierten Strahlen, so hat eine Drehung des Nicol keinen Einfluss, — ist es dagegen gemischt, so variiert die Intensität während derselben, — und findet sich eine Stellung, wo letztere unmerklich wird, so ist das polarisierte Licht zum mindesten weit überwiegend.

66 (zu 152): Ich trage nach, dass Joh. Georg **Greiner** (Russhütte in Thüringen 1788 — Berlin 1860) Mechaniker in Berlin, — Rudolf **Hottinger** (Meilen 1834 — Zürich 1883; Tochtermann und Geschäftsnachfolger von Goldschmid in 128) Ingenieur und Mechaniker in Zürich war, — und Hermann **Suhle** (Potsdam 1830 geb.) Prof. math. et phys. Bernburg ist. Ferner verweise ich auf „Richard **Assmann** (Magdeburg 1845 geb.; Oberbeamter am meteor. Inst. Berlin), Das Aspirations-Psychrometer, ein neuer Apparat zur Ermittlung der wahren Temperatur und Feuchtigkeit der Luft (in „Das Wetter" 1887 u. f.)".

67 (zu 154): Schon Tob. **Mayer** lehrte um 1760, dass die Quadrate der Schwingungszahlen magnetischer Nadeln ein Mass für die örtliche Stärke (Intensität) des Erdmagnetismus geben. — Vgl. auch „J. **Liznar**, Anleitung zur Messung und Berechnung der Elemente des Erdmagnetismus. Wien 1883 in 8."

68 (zu 158): Joh. Georg **Halske** (Hamburg 1814 — Berlin 1890) gründete 1844 in Berlin eine mechanische Werkstätte, in welche Werner **Siemens** 1847 eintrat, während sich sein Bruder Karl Wilhelm **Siemens** (Leuthe 1823 — London 1883) in London etablierte.

69 (zu 160): Beim Betriebe der Glühlampen kommen namentlich auch sekundäre Batterien oder sog. **Accumulatoren** in Betracht, welche für galvanische Ströme analoge Bedeutung haben, wie sie die Leydner-Flasche für die statische Elektricität besitzt. Schon 1803 durch J. W. **Ritter** eingeführt, werden sie jetzt meistens nach dem 1859 durch Gaston **Planté** (Orthèz in Basses-Pyrenées 1834 geb.; Prof. phys. Paris) gemachten Vorschlage aus dafür eigens präparierten (z. B. von Faure mit Mennig bestrichenen) Bleiplatten erstellt, welche in verdünnte Schwefelsäure tauchen und mit einer Dynamomaschine geladen werden, wobei sie gewisse, sich fortwährend steigernde chemische Modifikationen erleiden, die bei jedem spätern Stromschlusse (indem gewissermassen chemische in elektrische Energie übergeht) wieder abnehmen, während ein gleichmässiger elektrischer Strom langsam abfliesst.

70 (zu 172): Schon **Wendelin** teilte (vgl. Ciel et terre 1891) Huygens mit, dass nach seinen Beobachtungen ein Pendel im Sommer etwas langsamer schwinge als im Winter. — Vgl. auch „Max **Zwink** (Waldenburg in der Mark 1858 geb.; Obs. Strassburg), Die Pendeluhren im luftdicht verschlossenen Raume. Halle 1888 in 4."

71 (zu 177): Um das unter einer Polhöhe φ dem Stundenwinkel s entsprechende Azimut w eines Sternes der Deklination d zu berechnen, erhält man nach 1 und 4 die wenig bequeme Formel

$$\mathrm{Tg\,w = Si\,s \cdot Co\,d : (Si\,\varphi \cdot Co\,d \cdot Co\,s - Co\,\varphi \cdot Si\,d)} \qquad \mathbf{10}$$

Aus einem von Horner herrührenden Manuskripte ersehe ich nun, dass er die glückliche Idee hatte, durch

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\varphi + \mathrm{d}),\quad \beta = \tfrac{1}{2}(\varphi - \mathrm{d}),\quad \mathrm{Tg\,M} = \frac{\mathrm{Co}\,\alpha}{\mathrm{Si}\,\beta} \cdot \mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{s},\quad \mathrm{Tg\,N} = \frac{\mathrm{Si}\,\alpha}{\mathrm{Co}\,\beta} \cdot \mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{s} \qquad \mathbf{11}$$

einige aus den Gegebenen sehr leicht zu berechnende Hilfsgrössen einzuführen, und dadurch 10 auf

$$\mathrm{Tg\,w} = \frac{\mathrm{Tg\,M + Tg\,N}}{1 - \mathrm{Tg\,M \cdot Tg\,N}} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{w = M + N} \qquad \mathbf{12}$$

zu reduzieren.

72 (zu 191): Die Bestimmung von Tschu-Kong datiert vom Jahre 1100 (nicht 2100) vor unserer Zeitrechnung.

73 (zu 195): Die Formel 15 ist nach den in 73 befolgten Principien, nach welchen immer der vom Mittelpunkte aus vorwärts liegende Scheitel ins Auge zu fassen ist, durch

$$q = A + a = - h \cdot Ct\,(p + \varphi) \qquad \mathbf{15'}$$

zu ersetzen, welche sodann für die Solstitien ($p = 90 \mp e$) den richtigen Wert $q = h \cdot Tg\,(\varphi \mp e)$ ergiebt. — Der Litteratur füge ich bei: „Jos. **Ferchel**, Praktische Sonnenuhrkunst. Passau 1844 in 8., — und: **Born**, Gnomonique graphique et analytique. Paris 1846 in 8."

74 (zu 214): Der Litteratur ist beizufügen „Ernst **Mayer**, Handbuch der Astrologie. Berlin 1891 in 8."

75 (zu 218): Der die Einführung einer Universalzeit in bürgerlichen Gebrauch glücklich vermittelnde Vorschlag von **Fleming**, sich für die bürgerliche Zeit überall (anstatt auf willkürlich gewählte) auf Meridiane zu beziehen, welche um volle Stunden vom ersten Meridiane abstehen, und so zu bewirken, dass alle Uhren auf der Erde in Beziehung auf Minute und Sekunde übereinstimmen, hat alle Aussicht, bald allgemein adoptiert zu werden, — sind ja bereits Nordamerika, Schweden und die deutschen Eisenbahnverwaltungen mit gutem Beispiele vorangegangen, indem sie in dieser modifizierten Weise Greenwicher-Zeit benutzen.

76 (zu 221): Vgl. „B. **Studer**, Lehrbuch der physik. Geographie. Bern 1844 bis 1847, 2 Bde. in 8., — Gustav Adolf **v. Klöden** (Berlin 1814 — ebenda 1885; Geograph), Handbuch der physischen Geographie. Berlin 1859 in 8., — P. J. **Stieltjes**, Quelques remarques sur les variations de la densité dans l'intérieur de la terre (Arch. néerl. 19 von 1884), — O. **Callandreau**, Sur la constitution intérieure de la terre (Compt. rend. 1885), — R. **Radau**, Sur la loi des densités à l'intérieur de la terre (Bull. astr. 7 von 1890), — und: S. **Günther**, Lehrbuch der physik. Geographie. Stuttgart 1891 in 8."

77 (zu 225): Es sind die „Tables météorologiques internationales. Paris 1890 in 4." beizufügen. — Wilhelm Jakob **van Bebber** (Grieth bei Emmerich 1841 geb.) ist Abteilungsvorstand der Seewarte in Hamburg, — Joh. Georg Gustav **Hellmann** (Löwen in Schlesien 1854 geb.) Vizedirektor des meteor. Inst. Berlin. — G. J. **Symons** fand in der Bodleyanischen Bibliothek in Oxford ein Witterungsjournal, welches William **Merle**, Pfarrer zu Driby in Lincolnshire, von 1337—1343 regelmässig führte.

78 (zu 226): In der von der Societas Palatina benutzten Formel $\frac{1}{4}\,(19^h + 2^h + 2 \times 9^h)$ wurde (wenigstens für die Schweiz) 2^h mit Vorteil durch 1^h ersetzt.

79 (zu 227): Max Ferdinand **Thiessen** (Johannisburg in Ostpreussen 1849 geb.) ist Assistent der k. Normal-Aichungs-Kommission in Berlin.

80 (zu 228): Aus „Pierre **Perrault**, De l'origine des fontaines. Paris 1674 in 12." ersieht man, dass schon 1668—74 (also vor Townley) in Paris Regenmessungen gemacht wurden.

81 (zu 236): Es ist beizufügen, dass **Weinek** schon 1886 im Appendix zum 45. Jahrg. eine Reihe solcher Zeichnungen publizierte.

82 (zu 240): Vgl. „Ch. **Simon**, Mémoires sur la rotation de la Lune et sur la libration réelle en latitude (Annal. Ecole norm. 1866 et 1869)", und die Note von **Tisserand** in Compt. rend. 1885.

83 (Zu 262): Schon vor William **Ferrel** (Bedford County in Pennsylvanien 1817 bis Maywood in Kansas 1891; Rechner im Naut. und Sign. Office) machte **Poisson** in seiner Abhandlung „Sur le mouvement des projectiles dans l'air en ayant égard à la rotation de la terre (Journ. Ec. polyt. 26 von 1838)" betreffende Untersuchungen über den Einfluss der Erdrotation.

84 (zu 269): Die von **Kepler** in Kap. 37 seiner „Astronomia nova" gegebene unrichtige Darstellung der epicyklischen Bewegung unsers Mondes um die Sonne durch eine Wellenlinie mit Inflexionspunkten wurde vielfach reproduziert, anstatt die durch **Maclaurin** in seinen „Account of Sir Is. Newton's philos. discoveries. London 1748 in 4." aufgenommene Untersuchung zu beachten. — Vgl. „G. D. E. **Weyer**, Über die Bahnen der Planetenmonde in Bezug auf die Sonne (A. N. 3007 von 1890)". — **Voltaire** starb 1778 (nicht 1678).

85 (zu 286): Das 1842 von **Doppler** aufgestellte Princip wurde auch durch die 1844 von **Buys-Ballot** (vgl. dessen „Akustische Versuche auf der niederländischen Eisenbahn zur Prüfung der Doppler'schen Theorie" in Pogg. 66 von 1845) und 1848 von **Fizeau** (vgl. „Bull. Soc. philom. von 1848 und Annal. de chim. et de phys. von 1870) mit Schall-Quellen angestellten Versuche als richtig erwiesen, dagegen gezeigt, dass die von Doppler darauf gestützte Erklärung des Farbenwechsels unhaltbar sei. Namentlich hob **Fizeau** hervor, dass jenes Princip statt einer Farbenänderung nur eine **Verschiebung** des Spektrums bedinge, — dass es möglich sein sollte, diese an den Spektrallinien zu messen, folglich die Geschwindigkeit in der Gesichtslinie zu bestimmen, — und es hat daher **Cornu** (vgl. Annuaire 1891) mit Recht verlangt, dass dieses neue Messungsverfahren als **Methode Doppler-Fizeau** bezeichnet werde. — Benedikt **Sestini** (Italien 1816 — Frederick in Maryland 1888?; Jesuit) war erst Dir. Observ. Coll. Rom., dann Prof. math. in Georgetown und andern amerik. Ordenskollegien.

86 (zu 317): Da Ostern auf 35 verschiedene Tage fallen kann, so erfordert ein immerwährender Kalender, der Wochentage und Festtage enthalten soll, 35 Einzelkalender, wie sich solche in „Chr. Fr. **Rüdiger**, Immerwährender Kalender. Leipzig 1789 in 8." finden. — Laurenz **Feldt** starb 1882 zu Kösen a. d. S.

87 (zu 327): Bei dem von **d'Aubuisson** angewandten Apparate war die Einstellung (vgl. Note Laussedat in Compt. rend. 1880) von freiem Auge auszuführen, so dass strenge genommen keine optische Berührung, wohl aber (wie schon bei Tralles und Hassler) „une règle unique" benutzt wurde.

88 (zu 352): Von den 1732 auf offener See angestellten 68 Proben ergaben

16	26	14	6	1	5

Fehler, welche zwischen

0,0—0',5	0,6—1,5	1,6—2,5	2,6—3,5	3,6—5,0	5,1—11',9

fielen, so dass ihnen ein mittlerer Fehler von $\pm$ 2',7 entsprechen würde, wenn nicht nach den Gesetzen der Erfahrungswahrscheinlichkeit unzweifelhaft die letzte Klasse wegzuwerfen und somit derselbe auf $\pm$ 1',6 (von welchen wohl überdies die grössere Hälfte dem Beobachter zufällt) zu reduzieren wäre. — Vgl. auch „H. **Eylert**, Der Sextant. Hamburg 1881 in 4."