物理系学生のための数学入門

富山大学
栗本 猛

2023 年 10 月 6 日版

本書は大学で理工系分野，特に物理関係の勉強をするにあたって必要と思われる数学的知識と技術を高校レベルから解説したものである．近年，学生の学力低下が指摘され，大学で専門分野を学ぶにあたっての基礎知識と理解が欠けている学生が少なからず見かけられる．中学，高校で数学を勉強する時間と内容が以前より少なくなったり，様々な要因で数学的，論理的思考力を育む余裕がなくなっているためと思われる．数学的な能力が不足したままで大学に入ってきて，理系の専門の授業についていけず脱落する学生が今後増える可能性があるので，そのような学生への何らかの支援が求められている．この文書はその一環として必要な数学的知識を学生が自習する際の教材として作られた．

本書の特徴は以下の通りである．

- 大学で理系分野の勉強をするにあたって必要と思われる数学的知識と技術を高校レベルから，高校の学習指導要領にしばられず，**骨太に**解説している．場当たり的な暗記で対応するのではなく，物事をしっかりと自分で考える姿勢で地道な努力を重ねたならば，高校生でも内容を理解できるはずである．(逆に数学，物理を丸暗記科目ととらえているような者は理解にかなりの努力を必要とする．)
- 数学を実用的に応用することを主眼としているので，厳密な数学的証明にはこだわっていない．丸暗記するのではなく論理的な話の流れの筋を理解してもらうことを目的として解説している．
- 各章毎に演習問題と詳しい解答例をつけて自習の糧としている．
- PDF 形式のハイパーテキストなので，コンピュータ上で利用することにより検索や参照したい箇所へのジャンプが容易にできる．当然ながら紙に印刷したものは通常のテキストとして利用できる

本書の構成を説明する．

第 I 部 高校 $+\alpha$ レベル

高校数学で学ぶ項目のうち，大学での理工系学生向け授業で必要度が高いものを復習のためにここでとりあげた．第 II 部以降は，ここに記してある事柄は理解しているものとして説明を行っている．確認のために一度目を通した上で，もし理解が足りないと思われるところがあれば十分に復習した上で次に進んでもらいたい．

第 II 部 大学初級レベル

多くの理工系分野で必須の数学技術として，多変数での微積分，簡単な常微分方程式，ベクトル解析と行列の計算を解説している．

第 III 部 大学中級レベル A: 複素関数とその応用

第 IV 部 大学中級レベル B: 微分方程式

第 V 部 大学中級レベル C: 特殊関数

第 III～V 部では第 I, II 部で記した事柄をマスターしているものとして，物理系の学部・学科で必要となる項目を解説している．第 III 部と第 IV 部はほぼ独立であるが，第 V 部は第 III 部と第 IV 部の内容を必要とする．

本書の内容を使える技術として修得し，それでも不足する部分を後で示す参考文献等で適宜補ったならば，数学科を除く大学理工系のほとんどの分野で数学的技能に困ることは無いであろう．しかし，これらは「土台」である．その上に各自の求める「建物」を築いていくためには，しっかりとした土台でないとすぐに倒れてしまう．本書が堅固な土台作りのための一助となれば幸いである．

2011 年 5 月 10 日
富山大学
栗本 猛

目次

索引 271

第 I 部

高校 $+\alpha$ レベル

第 1 章

概算値の見積もり，次元解析

1.1 有効数字

理工学でデータとして用いる数値は，測定の精度によって意味をもつ数字の範囲が決まる．アナログな計測器を用いてある量を測定する場合，普通は最小目盛りの 1/10 までを目分量で読み，そこまでを意味のある数字 (有効数字) とする．得られた数値を表記する場合は，有効数字の範囲がわかるように表す．得られた量に単位がある場合，数値には単位を明記する．

例)

123.4 mm	有効数字 4 桁	$1.2\ \times 10^3$ mm	有効数字 2 桁
12.34 cm	有効数字 4 桁	$1.23\ \times 10^2$ cm	有効数字 3 桁

有効数字どうしの計算は，その精度を考えて行なう．途中の計算では有効数字より一桁多い桁数で計算し，最終結果は以下のようにまとめる．

加, 減 ：結果は精度の最も悪い位に合わせて四捨五入

$$1.2 + 0.78 = 1.98 \Longrightarrow 2.0$$

(理由)

上の例で，1.2 という数値は実際は 1.2 ± 0.1 の範囲に，0.78 という数値は実際は 0.78 ± 0.01 の範囲にあると考えられる．両者の和では，0.78 に関する 0.01 の誤差は 1.2 に関する 0.1 の誤差より一桁小さい．和としての数字には 0.1 以上の誤差があり，小数点第 2 位まで有効数字にすることはできないので，1.98 を丸めて 2.0 とする．

乗, 除 ：結果は精度の最も悪い桁数に合わせて四捨五入

$$1.2 \times 0.7 = 0.84 \Longrightarrow 0.8$$

(理由)

上の例で，1.2 という数値は実際は 1.2 ± 0.1 の範囲に，0.7 という数値は実際は 0.7 ± 0.1 の範囲にあると考えられる．単純に考えると (実際は統計学に基づいた操作が必要)，両者の積の値は $1.1 \times 0.6 = 0.66$ から $1.3 \times 0.8 = 1.04$ という広い範囲にあることになり，中心の値を取った場合の 0.84 に約 0.2 の誤差が生じている．この場合，0.84 の 2 桁目の 4 という数字は無意味になる．

実験で得られた数値データから電卓やコンピュータを用いて計算すると長い桁数の値が得られるが，これをそのまま用いてはいけない．有効数字を考えて必要な桁や位に切りつめること．

例) 円の直径を測って 2.1cm という値が得られた場合に，円の面積を計算する場合.

$$\frac{2.1}{2} \times \frac{2.1}{2} \times \pi = 3.4636059\ldots \Rightarrow 3.5\ \mathrm{cm}^2\ (\text{有効数字は 2 桁})$$

1.2　概算値の見積もり (order estimation)

理工学ではある量のおおまかな数値を知ることがしばしば重要となる．実験や計算を行う場合に結果がどの程度になるかをおおまかに見積もっておくことで，その実行の手助けとする．実験で結果の見積もりを一桁間違うと，必要な手間や装置，経費が大きく異なってくる．計算ではおおよその値を見積もっておくことで，計算結果の妥当性を調べることができる．

order estimation: 有効数字 1∼2 桁で計算し，$\Longrightarrow a \times 10^b$ の a (1∼2 桁) と b を知る．(10^b という表記の意味については「指数関数」の節 (4.1 節) を参照せよ．)

自然科学における計算では様々な自然定数を知っておくことが大切である.

例 1)　10 m の高さから物体を落としたときの落下時間

$$\frac{1}{2}gt^2 = 10\ , \quad t = \sqrt{2 \times 10/9.8} \simeq \sqrt{2.0} = 1.4\ (\mathrm{s})$$

例 2)　水 1 ℓ 中の水素原子の数

水 1 ℓ は約 1 kg，水の分子量は H_2O で 18

$$\frac{1.0 \times 10^3}{18} \simeq 5.6 \times 10\ \text{モル} \Longrightarrow 2 \times (6 \times 10^{23}) \times (5.6 \times 10) \simeq 7 \times 10^{25}\ \text{個}$$

例 3)　稲光が見えてから 5 秒してから雷鳴が聞こえた場合の雷との距離.

音速は約 340 m/s なので

$$340\ (\mathrm{m/s}) \times 5\ (\mathrm{s}) = 1700\ (\mathrm{m}) \rightarrow 2\ (\mathrm{km})$$

1.3　次元解析

1.3.1　単位

測定量のほとんどに単位がある．いろいろな測定量の中で基本的なものとして，長さ，質量，時間，電流をとり，それぞれの単位を m, kg, s, A にとったものを MKSA 単位系とよび，これに温度 (K)，モル (mol)，光度 (cd) を加えた SI 単位系が国際的に使用される単位系となっている．

m　：1m は真空中を光が (1/299792458) 秒の間に進む距離．もとは地球の子午線の北極から赤道までの長さの 10^{-7} 倍として定められた.

kg　：1kg は国際度量衡局 (パリ近郊) が保管する国際キログラム原器の質量.

s　: 1 秒はセシウム原子 (^{133}Cs) が出すある定まった輻射の周期の 9192631770 倍．もとは 1 日の平均時間の $\dfrac{1}{24 \times 60 \times 60}$ 倍.

A　: 真空中に置かれた無限に長い 2 本の直線電流があり，それらの長さ 1m について 2×10^{-7}N の力を及ぼしあう時に流れている電流を 1A とする.

他の単位は m, kg, s, A などの組み合わせで表すことができる.

例 1　電荷 (C): [C]= [A]·[s] $\Longleftarrow I = \dfrac{dQ}{dt}$

例 2　力 (N): [N] = [kg]·[m]/[s^2] $\Longleftarrow F = ma$

物理量を扱うときは，どの単位が用いられているかに注意しなければならない.

大きな数や小さな数を扱う場合，100000... や 0.0000... と表記するのを避けて指数 (10^x) または 10 の整数乗倍を作るための接頭語を用いる.

倍数	接頭語	記号	倍数	接頭語	記号
10^{15}	ペタ	P	10^{-1}	デシ	d
10^{12}	テラ	T	10^{-2}	センチ	c
10^{9}	ギガ	G	10^{-3}	ミリ	m
10^{6}	メガ	M	10^{-6}	マイクロ	μ
10^{3}	キロ	k	10^{-9}	ナノ	n
10^{2}	ヘクト	h	10^{-12}	ピコ	p
10^{1}	デカ	da	10^{-15}	フェムト	f

1.3.2　次元解析

与えられた量から，それらの単位と自然定数を組み合わせて求める量と同じ単位になるようにすることで，おおよその値や方程式の形を知ることができる場合がよくある．このやり方を次元解析という.

物理での数式の計算が正しいことをチェックするのにも次元解析は役立つ．例えば，エネルギーを計算しているはずなのに，途中の結果の次元がエネルギーと同じになっていなければ，どこかで計算間違いをしていることがわかる.

例 1)　光の波長からエネルギーを求める:　波長 λ (m) $\Longleftrightarrow$ エネルギー (J)
λ (m) と光速 c (m/s) とプランク定数 h (J·s) を組み合わせると ch/λ がエネルギーと同じ次元をもつ．$E = h\nu = hc/\lambda$ の公式と一致.

例 2)　運動エネルギーの式:
運動エネルギーは物体の質量 m (kg) と速さ v (m/s) で表される．エネルギーの次元は仕事と同じく [J]=[N]·[m] = ([kg]·[m]/[s^2])·[m] = [kg]·[m^2]/[s^2] なので，m と v から [J] と同じ次元を持つ量を作ると mv^2．実際は $(1/2)mv^2$ なので，(1/2) の係数を除いて一致する..

例 3)　万有引力による惑星運動の周期と軌道半径の間の関係: 周期 T (s) $\Longleftrightarrow$ 半径 R (m)

万有引力定数 G ($\mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2 = m^3/s^2{\cdot}kg}$) と惑星の質量 M (kg) を用いると GMT^2 が R^3 と同じ次元を持つ．$\Longrightarrow$ 公転周期の二乗は軌道半径の 3 乗に比例 (ケプラーの第三法則)

(参考) 正確な計算では，$GMT^2 = 4\pi^2 R^3$

1.4　演習問題

1. 以下の量のおおよその数値 (有効数字 1∼2 桁でよい) を調べ，単位をつけて記せ.

(a)	宇宙の年齢	(l)	電子の質量
(b)	銀河系の半径	(m)	光が太陽から地球に届く時間
(c)	太陽から冥王星までの距離	(n)	1 年を秒で
(d)	地球 – 月間の距離	(o)	1 日を秒で
(e)	地球の赤道 1 周の長さ	(p)	家庭の交流電気の周波数 (東日本)
(f)	水素原子の直径	(q)	富山付近での地磁気の大きさ
(g)	太陽の質量	(r)	電子 1 個の電荷
(h)	地球の質量	(s)	水の比熱
(i)	月の質量	(t)	大気圧 (1 気圧以外で)
(j)	酸素分子 1 mol の質量	(u)	20°C，1 気圧の空気中での音速
(k)	陽子の質量	(v)	地球の表面での重力加速度

2. あなたの身体は何個の核子 (陽子または中性子．双方の質量はほぼ等しい) からできているだろうか，おおよその値を以下の順番で見積もってみよ.
   (a) 水素分子 1 個は何個の陽子からできているか
   (b) 水素分子 1 mol は何個の陽子からできているか.
   (c) 水素分子 1 mol は何 g か
   (d) 陽子 1 個の質量はおおよそいくらか.
   (e) あなたの体重を陽子 1 個の質量で割るとどうなるか.
3. 以下の量の単位を m (メートル), kg (キログラム), s(秒), A (アンペア), K(ケルビン) で記せ.

(a)	長さ	(e)	質量	(i)	時間
(b)	電流	(f)	エネルギー	(j)	慣性モーメント
(c)	周波数	(g)	比熱	(k)	電場 ($\vec{E}$) の強さ
(d)	磁場 ($\vec{B}$) の強さ	(h)	静電容量	(l)	電荷

4. 次の定数の単位とおおよその値を記せ

(a)	万有引力定数	(d)	$1/(4\pi\epsilon_0)$	(g)	真空中の光速
(b)	熱の仕事当量	(e)	アボガドロ数	(h)	電子 1 モルの電荷 (ファラデー定数)
(c)	ボルツマン定数	(f)	プランク定数	(i)	気体定数

5. 質量 (m) と光速 (c) だけを用いて，エネルギーの次元を持つ量をつくれ.
6. 上で得た式を用いて，1.0 mg (ミリグラム) の質量が全てエネルギーに等しいとした場合に，どれだけの量のエネルギーになるか計算せよ．またそのエネルギーでプールの水 (50m × 15m × 2.0m) の温度を何度上げることができるかを見積もれ.

7. 太陽から地球にそそがれるエネルギーは，単位面積あたり毎分約 2 cal/cm^2 である．これと地球–太陽間距離 (約 1 億 5 千万 km) から，太陽が毎秒どれだけのエネルギーを放射しているかを見積もれ．

1.5　解答例

1.

(a)	1.4×10^{10} 年	(l)	9.1×10^{-31} kg
(b)	5×10^{4} 光年	(m)	5×10^{2} 秒
(c)	6×10^{9} km	(n)	3.2×10^{7} 秒
(d)	3.8×10^{5} km	(o)	86400 秒 $= 9 \times 10^{4}$ 秒
(e)	4×10^{4} km	(p)	50 Hz
(f)	1Å$= 1 \times 10^{-10}$ m	(q)	5×10^{-5} T
(g)	2×10^{30} kg	(r)	-1.6×10^{-19} C
(h)	2×10^{24} kg	(s)	1 cal/g°C
(i)	7×10^{22} kg	(t)	1.0×10^{3} hPa $= 1.0 \times 10^{5}$ Pa $= 1.0 \times 10^{5}$ N/m^2
(j)	32 g	(u)	3.4×10^{2} m/s
(k)	1.7×10^{-27} kg	(v)	9.8 m/s^2

2.

(a) 2 個

(b) $2 \times 6 \times 10^{23} = 1.2 \times 10^{24}$ 個

(c) 2 g

(d) $\dfrac{2}{1.2 \times 10^{24}} = 1.7 \times 10^{-24}$ g

(e) 体重 M kg として，$\dfrac{M \times 10^{3}}{1.7 \times 10^{-24}} = M \times 0.59 \times 10^{27}$ 個

3.

(a)	m	(e)	kg	(i)	s
(b)	A	(f)	J = N m= kg m^2/s^2	(j)	kg m^2
(c)	Hz = 1/s	(g)	J/(kg K)	(k)	$\vec{F} = q\vec{E}$ より [F/q]= N/(As)
(d)	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ より [F/q v] = N/(C (m/s)) = kg /As^2	(h)	まず電位差 V の単位は W(仕事率)= IV より [V]= kg m^2/A s^3 これと $Q = CV$ より [C]= A^2 s^4/(kg m^2)	(l)	C(クーロン) = A s

4.

(a)	6.7×10^{-11} [N m^2/kg^2]	(f)	6.6×10^{-34} [J s]
(b)	4.2 [J/cal]	(g)	3.0×10^{8} [m/s]
(c)	1.4×10^{-23} [J/K]	(h)	9.6×10^{5} [C/mol]
(d)	9.0×10^{9} [N m^2/C^2]	(i)	8.3 [J/(mol K)]
(e)	6.0×10^{23} [1/mol]		

5.

$[m] = \mathrm{kg}$, $[c] = \mathrm{m/s}$, [エネルギー] $= \mathrm{J} = \mathrm{kg\ m^2/s^2}$ より，$[mc^2] = \mathrm{kg\ m^2/s^2}$ となって，mc^2 はエネルギーと同じ次元を持つ．

(参考) 特殊相対性理論から，静止している質量 m の物体は $E = mc^2$ の質量エネルギーを持つことが示される．

6.

$1.0\ \mathrm{mg} = 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{kg}$, $c = 3.0 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$ より

$$mc^2 = (1.0 \times 10^{-6}) \times (3.0 \times 10^8)^2 = 9.0 \times 10^{10}\ [\mathrm{J}]$$

プールの水 (50m × 15m × 2m) の質量は

$$(50 \times 10^2) \times (15 \times 10^2) \times (2.0 \times 10^2) \times 1.0 = 1.5 \times 10^9\ [\mathrm{g}]$$

水の比熱 $1.0\ \mathrm{cal/(g\ K)} = 4.2\ \mathrm{J/(g\ K)}$ を用いて，温度の上昇は

$$\frac{9 \times 10^{10}}{4.2 \times 1.5 \times 10^9} = 14\ [\mathrm{K}]$$

7.

地球–太陽間距離を半径する球面の表面積は

$$4\pi \times (1.5 \times 10^{8+3+2})^2 = 2.83 \times 10^{27}\ [\mathrm{cm}^2]$$

この単位面積あたりに $2\ \mathrm{cal/min} = 2 \times 4.2/60 = 0.14\ [\mathrm{J/s}]$ なので,

$$2.83 \times 10^{27} \times 0.14 = 4 \times 10^{26}\ [\mathrm{J/s}]$$

(参考) このエネルギーを質量の損失によるものとして換算すると，$E = mc^2$ から

$$\Delta m = \frac{4 \times 10^{26}}{(3.0 \times 10^8)^2} = 4 \times 10^9\ [\mathrm{kg/s}]$$

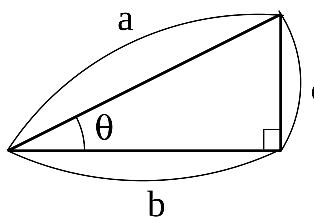
これは太陽質量 $(2 \times 10^{30}\ \mathrm{kg})$ の 2×10^{-21} 倍.

第 2 章

三角関数

2.1　直角三角形での定義

直角三角形の各辺の長さを図のように a (斜辺), b, c とし，一つの角を θ としたとき，三角関数は以下のように辺の長さの比で定義される．

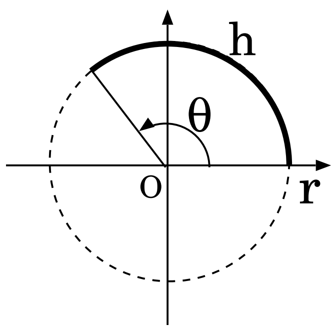


$$\sin\theta = \frac{c}{a}\ , \qquad \cos\theta = \frac{b}{a}, \qquad \tan\theta = \frac{c}{b}\ ,$$
$$\mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}\ , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\ , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}\ .$$

ピタゴラスの定理, $a^2 = b^2 + c^2$, から以下の関係式が成立する．

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\ , \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\ .$$

これらの式は計算によく用いられる．



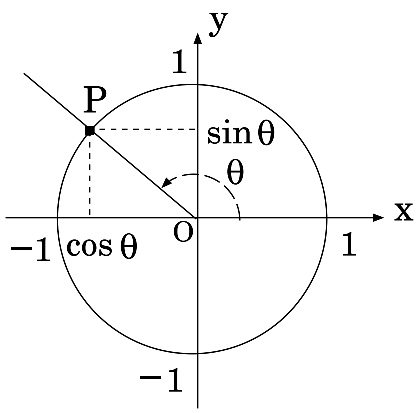
通常，角度はラジアン (rad) で測られる．図のように半径 r の円周上に，角度 θ をとり，その角度に対応する円弧の長さを h とするとき，$\theta = \dfrac{h}{r}$ で角度 (rad) の大きさを定義する．度 (°) との対応は，$30° = \dfrac{\pi}{6}$, $45° = \dfrac{\pi}{4}$，$60° = \dfrac{\pi}{3}$，$90° = \dfrac{\pi}{2}$，$180° = \pi$ となる．

角度 (rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
sin	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

代表的な三角関数の値

2.2 単位円を用いた定義

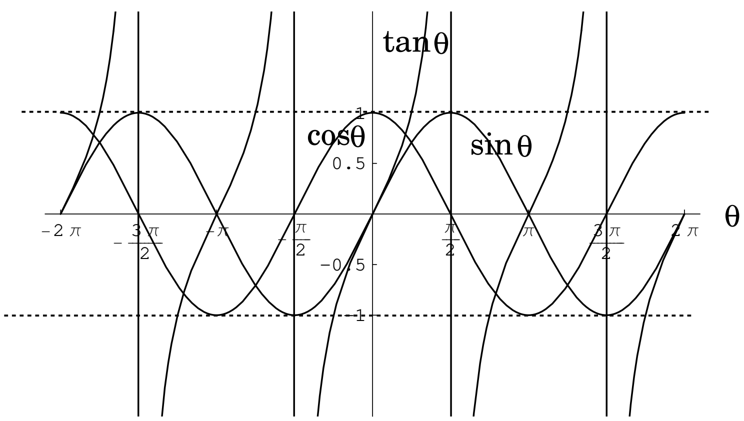
角度が $\pi/2$ 以上になると直角三角形が作れないので，直角三角形を用いた定義では三角関数の値も定義できない．そこで，図のように xy 平面上に原点を中心とする半径 1 の円 (単位円) を考え，原点を始点とする半直線で，x 軸の正の向きに対し角度 θ の方向のものと単位円との交点 P をとる．この点 P の x 座標，y 座標は，$0 \leq \theta < \pi/2$ の範囲では直角三角形で定義された三角関数 $\cos\theta, \sin\theta$ の値とそれぞれ一致している．よって，ここで $\cos\theta, \sin\theta$ をそれぞれ点 P の x 座標，y 座標の値と定義しなおす．



また，角度の向きを，反時計回りを正の向き，時計回りを負の向きにとると，新しい定義では任意の実数の値での角度 θ に対する $\cos\theta, \sin\theta$ を与える．$\tan\theta$ は $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ で定義する．この新しい定義を用いて，以下の関係式が導かれる．

$$\begin{aligned}
&\sin(-\theta) = -\sin\theta\ ,\quad \cos(-\theta) = -\cos\theta\ ,\quad \tan(-\theta) = -\tan\theta\ ,\\
&\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta\ ,\quad \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta\ ,\quad \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan\theta}\ ,\\
&\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta\ ,\quad \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta\ ,\quad \tan(\theta + \pi) = \tan\theta\ .
\end{aligned}$$

各三角関数のグラフは下図のようになる．



2.3　三角関数の加法定理

$\sin(\alpha+\beta)$ のような量を求めるために，xy 平面での図形の回転を考える．座標上の点 (x, y) を原点を中心に反時計回りに角度 α だけ回転させて点 (x', y') に移ったとする．このとき，(x, y) と (x', y') との関係は行列を用いて次のように表される．

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .
$$

さらに，同様に角度 β だけ回転させて点 (x', y') が点 (x'', y'') に移ると，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

これらの操作は，点 (x, y) を角度 $\alpha+\beta$ だけ回転させて点 (x'', y'') に移すことと同じなので，

$$
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,
$$

両者を比較して以下の関係式 (三角関数の加法定理) を得る．

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \ , \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ , \\
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \ .
\end{aligned}
$$

上で得られた加法定理から倍角の公式を得ることができる．

$$
\begin{aligned}
\sin 2\theta &= \sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta \ , \\
\cos 2\theta &= \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \ , \\
\tan 2\theta &= \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta} = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \ .
\end{aligned}
$$

cos の倍角の公式から半角の公式を得ることができる．

$$
\begin{aligned}
\sin^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos\theta}{2} \ , \\
\cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1+\cos\theta}{2} \ , \\
\tan^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} \ .
\end{aligned}
$$

加法定理から，三角関数の積を和に変換する公式が得られる．

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\ ,\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];\ ,\\ \sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]\ .\end{aligned}$$

上で $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$ とおいて整理すると，三角関数の和を積に変換する公式が得られる．

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B &= 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})\ ,\\ \cos A+\cos B &= 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})\ .\end{aligned}$$

よく使われる公式をもう一つ，加法定理を使って導いておく．

$$\begin{aligned}P\sin\theta+Q\cos\theta &= \sqrt{P^2+Q^2}\left[\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\sin\theta+\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\sin\theta\right]\\ &= \sqrt{P^2+Q^2}[\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha] = \sqrt{P^2+Q^2}\sin(\theta+\alpha)\\ &\text{ここで}\ \sin\alpha = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\ ,\ \cos\alpha = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\ .\end{aligned}$$

2.4　演習問題

1. ラジアンでの角度 $1, \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{7\pi}{18}$ を度 $(°)$ で表せ.
2. $1°, 75°, 216°$ をラジアンで表せ.
3. 半径 r で角度が θ ラジアンの扇形の面積が $\dfrac{1}{2}r^2\theta$ であることを示せ.
4. $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2},\ \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を示せ.
5. $\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(\theta + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin\theta,\ \tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ を示せ.
6. $\sin(\theta - \dfrac{\pi}{2}) = -\cos\theta,\ \cos(\theta - \dfrac{\pi}{2}) = \sin\theta$ を示せ.
7. $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ を求めよ.
8. $\cos\dfrac{5\pi}{6}$ を求めよ.
9. $\tan\dfrac{\pi}{8}$ を求めよ.
10. sin, cos についての三倍角の公式を求めよ.
11. $\sin(\omega t) + \sin(\Omega t)$ を三角関数の積で表せ.
12. $\sin(\dfrac{2\pi}{\lambda}x) + \sin[\dfrac{2\pi}{\lambda}(x + d)]$ を三角関数の積で表せ.

2.5　解答例

1. 2π (rad) $= 360^\circ$ より，

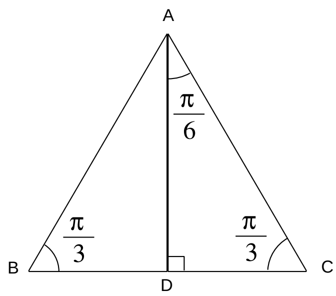
$$
\begin{aligned}
1 \text{ (rad)} &= \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \ (\simeq 57.3^\circ) \\
\frac{2\pi}{5} \text{ (rad)} &= \frac{360^\circ}{2\pi} \times \frac{2\pi}{5} = 72^\circ \\
\frac{7\pi}{18} \text{ (rad)} &= \frac{360^\circ}{2\pi} \times \frac{7\pi}{18} = 70^\circ
\end{aligned}
$$

2. 2π (rad) $= 360^\circ$ より，

$$
\begin{aligned}
1^\circ &= \frac{2\pi}{360} \text{ (rad)} = \frac{\pi}{180} \text{ (rad)} \ (\simeq 0.0175 \text{ (rad)}) \\
75^\circ &= 75 \times \frac{2\pi}{360} \text{ (rad)} = \frac{5\pi}{12} \text{ (rad)} \\
216^\circ &= 216 \times \frac{2\pi}{360} \text{ (rad)} = \frac{6\pi}{5} \text{ (rad)}
\end{aligned}
$$

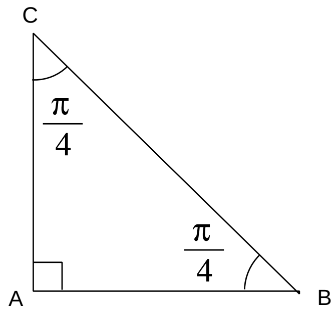
3. 半径 r の円の面積は πr^2 である．角度 θ の扇形の面積は，その $\dfrac{\theta}{2\pi}$ 倍なので，求める面積は $\pi r^2 \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2} r^2 \theta$

4. 右図の正三角形 ABC で A から辺 BC の中点 D に線分を引くと，$\triangle$ABD と $\triangle$ADC は，3 辺の長さが等しいので合同．よって $\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{BDA} = \angle\mathrm{CDA} = \dfrac{1}{2} \times \pi = \dfrac{\pi}{2}$. $\triangle$ADC は直角三角形をなす．$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}} = 2\overline{\mathrm{DC}}$ とピタゴラスの定理より $\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{DC}}^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{AC}}$. これより，



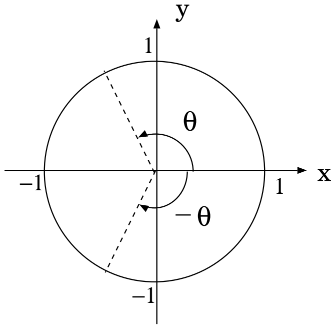
$$
\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{\mathrm{DC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{1}{2}\,, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}
$$

右図の直角二等辺三角形 ABC で，$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$. $\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. ピタゴラスの定理より $\overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$，よって $\overline{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{BC}}$. これより

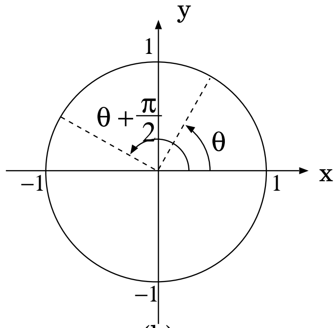


$$
\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
$$

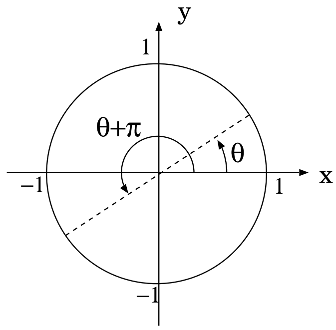
5. 図 (a) より，$\theta \to -\theta$ で単位円上の点 (x, y) は $(x, -y)$ へ移る．よって，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$.
図 (b) より，$\theta \to \theta + \dfrac{\pi}{2}$ で単位円上の点 (x, y) は $(-y, x)$ へ移る．よって，$\cos(\theta + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin\theta$.
図 (c) より，$\theta \to \theta + \pi$ で単位円上の点 (x, y) は $(-x, -y)$ へ移る．よって，$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$.



(a)



(b)

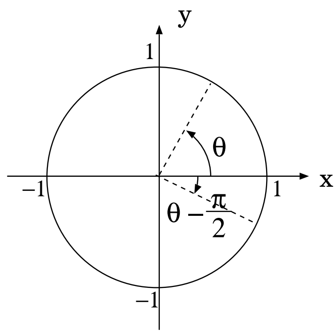


(c)

6.

図より, $\theta \to \theta - \dfrac{\pi}{2}$ で単位円上の点 (x, y) は $(y, -x)$ へ移る．よって，

$$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos\theta$$
$$\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$$



7.

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

8.

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

9. 半角の公式と，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ では $\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ より

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\ ,\quad \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

よって

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

10.

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta = (4\cos^2\theta - 1)\sin\theta \\
\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\
&= (1-2\sin^2\theta)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta = (1-4\sin^2\theta)\cos\theta
\end{aligned}$$

11.

$$\sin(\omega t) + \sin(\Omega t) = 2\sin[\frac{(\omega+\Omega)}{2}t]\cos[\frac{(\omega-\Omega)}{2}t]$$

注) ここで $\Omega = \omega - \Delta$ とおくと，上の式は $2\cos(\Delta t)\sin[(\omega - \frac{\Delta}{2})t]$ となり，$\omega \gg |\Delta|$ では，振幅が $2\cos(\Delta t)$ のように変化する角振動数がほぼ ω の波の式になる．これは「うなり」を表している．

12.

$$\begin{aligned}
&\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x) + \sin[\frac{2\pi}{\lambda}(x+d)] \\
&= 2\sin\frac{1}{2}[\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{\lambda}(x+d)]\cos\frac{1}{2}[\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{\lambda}(x+d)] \\
&= 2\cos\frac{\pi d}{\lambda}\sin[\frac{2\pi}{\lambda}(x+\frac{d}{2})]
\end{aligned}$$

注) $d = \frac{n}{2}\lambda$ (n は整数) のとき，$|\cos\frac{\pi d}{\lambda}|$ が最大 (1) または最小 (0) になる．これは，行路差によって二つの波が干渉して強め合ったり，弱め合ったりすることを表している．

第3章

数列と級数

3.1 自然数と数列

1, 2, 3, ... と並ぶ数は自然数とよばれている．これを数学的に表す方法の一つとして

- 1 は自然数である．
- n が自然数のとき，$n+1$ も自然数である

という言い方をすることがある[*1]．この規則に従えば $1+1$ は自然数であり，それは 2 とよばれ，さらに $2+1$ も自然数であり，それを 3 とよぶ，というように続けていけば任意の自然数を定義することができる．自然数のように数が並んだものを数列といい

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ , a_n,\ \ldots$$

と並べて記したり，単に $\{a_n\}$ と表したりする．このとき a_k は数列 $\{a_n\}$ の k 番目の数であり，これを第 k 項とよぶ．応用上そうした方が都合がよい場合は，a_k の添字 k として自然数だけでなく整数をとることもあり，a_{-3} のような記述を見かけることもある．

並ぶ規則が明確な場合はそれを数式で表して

$$a_n = 2n\ ,\quad b_n = 2n-1\ ,\quad c_n = n^2$$

のように表す．これを一般項とよぶ．今の場合 $\{a_n\}$ は正の偶数，2, 4, 6, ...，の列であり，$\{b_n\}$ は正の奇数の列，$\{c_n\}$ は自然数の二乗の列である．以下によく用いられる数列の例を示す．

等差数列 ：$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ ,\ a+nd,\ \ldots$
等比数列 ：$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots\ ,\ ar^n,\ \ldots$
自然数のべき乗の列 ：$1^p,\ 2^p,\ 3^p,\ \ldots\ ,\ n^p,\ \ldots$

[*1] ペアノの公理とよばれる厳密な定義の一部だけを記した．

3.2 数列の漸化式

数列を定義するには，第 n 項の具体的な形を数式で示すのではなく数列の項の間の関係式を示すことがある．たとえば，自然数の数列を表すには以下の関係式を用いることができる．

$$a_1 = 1\ ,\quad a_{n+1} = a_n + 1$$

これは最初に述べた自然数を表す方法そのものである．このような数列の項の間の関係式を漸化式とよぶ．漸化式だけでは数列は完全に決まらない．最初に $a_1 = 1$ と記しているように，どこかで数列を決定する条件を与えなければならない．最初の項 (初項という) の値をその条件として用いることが多い．上に述べた数列の例を漸化式を用いて表すと

等差数列　: $a_1 = a,\ \ a_{n+1} = a_n + d$
等比数列　: $a_1 = a,\ \ a_{n+1} = ra_n$
自然数のべき乗の列　: $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = [(a_n)^{1/p} + 1]^p$

となる．漸化式として，ある項とその次の項の間の関係式だけを用いるのではなく前後の数項の間の関係を用いることもある．その場合は初項の値だけでなく，複数の条件が必要となる．有名な例ではフィボナッチ数列とよばれるものがあり，

$$a_1 = a_2 = 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

で定義される．このとき

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_7 = 8,\ \ldots$$

であり，第 n 項を数式で表すと以下のようになる．

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

フィボナッチ数列の各項は自然数なのに，それを数式で表す際には $\sqrt{5}$ という無理数が現れるので，一見奇妙に感じるかもしれないが，具体的に $n = 1, 2, 3$ の場合を計算してみると正しくフィボナッチ数列を再現する．

漸化式から数列の具体的な形を求める方法の例を 2 つ紹介しておく．

$a_{n+1} = pa_n + q$ $(p \neq 1)$ **の形のもの**　($p = 1$ の場合は等差数列)

$a_{n+1} - c = p(a_n - c)$ の形に変形することを考えると，$c - pc = q$ でなければならないので $c = \dfrac{q}{(1-p)}$．よって

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \frac{q}{(1-p)} &= p\{a_n - \frac{q}{(1-p)}\} = p^2\{a_{n-1} - \frac{q}{(1-p)}\} = \cdots \\ &= p^n\{a_1 - \frac{q}{(1-p)}\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= p^{n-1}\{a_1 - \frac{q}{(1-p)}\} + \frac{q}{(1-p)} = p^{n-1}a_1 + \frac{(1-p^{n-1})}{1-p}q \\
&\to a_1 + (n-1)q \quad (p \to 1 \text{ の極限})
\end{aligned}
$$

$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ **の形のもの**

$a_{n+2} - sa_{n+1} = r(a_{n+1} - sa_n)$ の形に変形することを考えると，$r+s=p$，$rs=-q$ でなければならない．この r, s は 2 次方程式 $x^2 - px - q = (x-r)(x-s) = 0$ の解である．このとき

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} - sa_n &= r(a_{n+1} - sa_n) = r^2(a_n - sa_{n-1}) = \cdots = r^n(a_2 - sa_1) \\
a_{n+1} - sa_n &= r^{n-1}(a_2 - sa_1)
\end{aligned}
$$

の形に帰着できるので，上の方法が使える．

3.3　数列の和，級数

数列のある部分の項の和を求めることがよくある．たとえば数列 $\{a_n\}$ の第 p 項から第 q 項 $(q \geq p)$ までの和を求める場合，記号 Σ を用いて

$$
\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q
$$

のように表す．$p = 1$ (または $p = 0$) として $q \to \infty$ とした場合を (無限) 級数という．いくつかの数列の第 1 項から第 n 項までの和を求めてみる．

自然数の和　: $a_n = n$

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
\text{順序を大き順に並べ替えて}\quad S_n &= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \\
\text{上と下を足して}\quad 2S_n &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) \\
&= n(n+1) \\
\text{よって}\quad S_n &= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

等差数列の和　: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$
\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}[a_1 + (k-1)d] = na_1 + \frac{n(n+1)}{2}d - nd = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d
$$

等比数列の和　: $a_n = r^{n-1}a_1$

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}a_1 = a_1(1 + r + \cdots + r^{n-1})$ とおくと，

$$
S_n = a_1(1 + r + \cdots + r^{n-1})
$$

$$
\begin{aligned}
rS_n &= a_1(\quad\ \ r + \cdots + r^{n-1} + r^n) \\
\text{上から下を引いて}\ \ (1-r)S_n &= a_1(1-r^n) \\
\text{よって}\ \ S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \\
&\to \frac{a_1}{1-r} \quad (|r| < 1 \text{ のときの } n \to \infty \text{ の極限})
\end{aligned}
$$

自然数の 2 乗和　: $a_n = n^2$

これを求めるのに $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ という恒等式を考え，この両辺で k を 1 から n まで和をとる．

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] &= \sum_{k=1}^{n}[3k^2 + 3k + 1] \\
\{2^3 + \cdots + (n+1)^3\} - \{1^3 + \cdots + n^3\} &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
(n+1)^3 - 1 &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n
\end{aligned}
$$

よって

$$
\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
$$

分数の形の数列の和　: $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\
&= 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \ (n \to \infty \text{ の極限})
\end{aligned}
$$

2 項係数の和　: $a_k = {}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (n は自然数で，$k = 0,\ \cdots,\ n$)

$$
\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k = 2^n
$$

(証明) 2 項定理の公式 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k y^{n-k}$ で $x = y = 1$ と置けばよい．

円周率 π などの数学でよく現れる定数が級数で表されることがある．以下に代表的なものを証明抜きで挙げておく．(証明は本書の後半や適当な文献を参照せよ．)

円周率 $\pi = 3.14159\cdots$

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$$

$$\pi^2 = 6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 6\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$$

$$\pi^2 = 8\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 8\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)$$

自然定数 $e = 2.71828\cdots$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$$

オイラーの定数 $\gamma = 0.577215\cdots$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[-\log_e n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]$$

3.4 演習問題

1. 以下の数列の最初の 5 つの項を具体的に書き下し，さらに一般項を数式で表せ.
   (a) 7 で割って余りが 2 になる自然数を小さい順に並べた数列
   (b) $\cos x = 0$ となる正の実数 x を小さい順に並べた数列
   (c) 自然数の 2 乗の逆数を大きい順に並べた数列
2. フィボナッチ数列 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$ の一般項が
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
   で与えられることを示せ.
3. 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について
$$a_{n+1} - a_n = b_n\ ,\ a_1 = 1\ ,\ b_{n+1} = 3b_n - 2\ ,\ b_1 = 2$$
   が成立しているとき，一般項 a_n, b_n を求めよ.
4. 次の数列の和を求めよ.
$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) \qquad \text{(b)}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k^2-1)} \qquad \text{(c)}\ \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k$$
5. 数学的帰納法とは以下の手順で，ある整数 p 以上の任意の整数で，ある関係が成立することを示す証明法である.
   (i) 整数 p のときに関係が成立することを示す.
   (ii) 整数 n の場合にその関係が成立していることを仮定し，$n+1$ の場合でも関係が成立することを示す.

   数学的帰納法を用いて以下を証明せよ.

   (a) 4 以上の整数 n に対して $2^n < n!$
   (b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n$ の場合，$a_n = \dfrac{1}{2}(n^2 - n + 2)$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3.5 解答例

1.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_n
(a)	2	9	16	23	30	$7n-5$
(b)	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$	$9\pi/2$	$(2n-1)\pi/2$
(c)	1	1/4	1/9	1/16	1/25	$1/n^2$

2. フィボナッチ数列では $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ なのでテキスト中の r, s は $x^2 - x - 1 = 0$ の解 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる．これを用いて

$$\begin{aligned} a_n - sa_{n-1} &= r^{n-2}(a_2 - sa_1) \\ a_n - ra_{n-1} &= s^{n-2}(a_2 - ra_1) \end{aligned}$$

上式に r をかけたものから，下式に s をかけたものを引くと

$$\begin{aligned} ra_n - rsa_{n-1} &= r^{n-1}(a_2 - sa_1) \\ sa_n - sra_{n-1} &= s^{n-1}(a_2 - ra_1) \\ (r-s)a_n &= r^{n-1}(a_2 - sa_1) - s^{n-1}(a_2 - ra_1) \end{aligned}$$

ここで $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} r - s &= \sqrt{5} \\ a_2 - sa_1 = 1 - s &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = r \\ a_2 - ra_1 = 1 - r &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} = s \end{aligned}$$

よって

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[r^n - s^n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

3. まず b_n を求める．$b_{n+1} = 3b_n - 2$, $b_1 = 2$ より

$$\begin{aligned} b_n - 1 &= 3(b_{n-1} - 1) = 3^2((b_{n-2} - 1) = \cdots 3^{n-1}(b_1 - 1) \\ \text{よって } b_n &= 3^{n-1}(2-1) + 1 = 3^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

この結果を用いて

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} + (3^{n-2} + 1) = a_{n-2} + (3^{n-3} + 1) + (3^{n-2} + 1) \\ &= \cdots = a_1 + (3^0 + 1) + \cdots (3^{n-2} + 1) = 1 + \frac{1 - 3^{n-1}}{1 - 3} + (n-1) \\ &= n + \frac{3^{n-1} - 1}{2} \end{aligned}$$

4. (a)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=2\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k^2-1)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(-1)^k=[1+(-1)]^n=0$$

5. (a) まず $n=4$ のとき，$2^4=16<4!=24$ なので題意は成立している．n が 4 以上のある整数 k のとき $2^k<k!$ が成立しているとすると，$n=k+1$ のとき，$2<k+1$ なので，$2^k\times 2<k!(k+1)$ となり，$n=k+1$ でも題意は成立する．よって数学的帰納法より，4 以上の整数 n で $2^n<n!$ が成立する．

(b) $n=1$ を $a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ に代入すると $a_1=\frac{1}{2}(1^2-1+2)=1$ となるので，$n=1$ では $a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ は成立している．n が自然数 k のときに $a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ が成立しているとすると，$n=k+1$ のときは漸化式を用いて

$$a_{k+1}=a_k+k=\frac{1}{2}(k^2-k+2)+k=\frac{1}{2}(k^2+k+2)=\frac{1}{2}[(k+1)^2-(k+1)+2]$$

よって $n=k+1$ でも題意が成立するので，すべての自然数 n で $a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ が成立する．

(c) $n=1$ のとき $\sum_{k=1}^{1}k^3=1=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$ なので題意は成立している．n が自然数 j のときに題意が成立しているとすると，$n=j+1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j+1}k^3&=\sum_{k=1}^{j}k^3+(j+1)^3=\frac{j^2(j+1)^2}{4}+(j+1)^3\\&=\frac{1}{4}(j+1)^2[j^2+4(j+1)]=\frac{1}{4}(j+1)^2(j+2)^2\end{aligned}$$

よって $n=j+1$ でも成立するので，すべての自然数 n で題意が成立する．

第 4 章

指数関数，対数関数

4.1　指数関数

正の実数 a のべき乗 (累乗) を考える．n を自然数とすれば

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a \quad (a \text{ を } n \text{ 回かけたもの})$$

である．負の整数のべき乗は $a^{-n} = 1/a^n$ で定義する．このとき，$a^n \times a^m$ は (a を n 回かけたもの)$\times$ (a を m 回かけたもの) なので，結局 a を $n+m$ 回かけたもの，すなわち a^{n+m} になる．同様に $a^n \times a^{-m} = a^{n-m}$ になる．$n = m$ のとき $a^n \times a^{-n} = 1$ なので，$a^0 = 1$ と定義する．これで全ての整数 n に対して a^n が定義できたことになる．

次に自然数 p について，$a^{1/p}$ を $x^p = a$ の解で正の実数になるものとして定義する[*1]．$a^{1/p}$ は正の実数なので，そのべき乗は上と同様に計算されて q を整数として $a^{q/p}$ が定義できる．これで全ての有理数 r に対して a^r が定義できたことになる．

$\sqrt{2}$ や π などの有理数でない実数 s については，a^s をどう定義すればいいだろうか．数学的には s に収束する有理数の数列 $\{s_n\}$ を考え，a^{s_n} の極限として定義する．(本来は収束するかどうかを厳密に考えなければならないが，収束することが証明されている．) より直感的には,

$$a^s = \lim_{t \to s} a^t \quad (t \text{ は有理数}) .$$

こうして任意の実数 x について a^x が定義される．これを x の関数とみなして a を底とする指数関数とよぶ．指数関数は以下の性質をもつ．

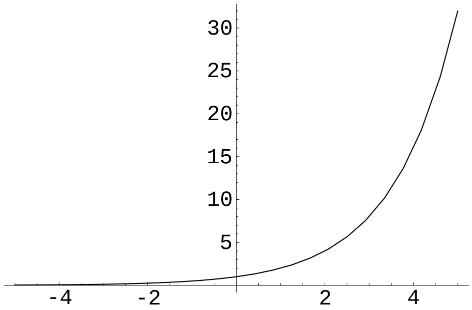
$$\begin{aligned} a^x \times a^y &= a^{x+y} \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ a^0 &= 1 \end{aligned}$$

[*1] 一般に $x^p = a$ の解は $a^{1/p} e^{2ik\pi}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots p-1)$ で与えられ，$k = 0$ のときのみ正の実数になる．

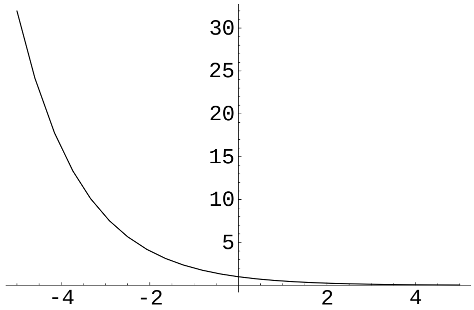
自然科学でよく使われる指数関数の底に e がある．これは

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

で定義される実数で，自然定数とよばれ，$e = 2.71828\ldots$ である．e を底とする指数関数は微積分が容易になるので，計算によく用いられる．以下では単に指数関数という場合は e を底とする指数関数を意味するものとする．底が e の指数関数と底が 1/2 の指数関数のグラフを示しておく．グラフからもわかるように，x の変化によって指数関数 a^x は急激に増大または減少する．



e を底とする指数関数 e^x

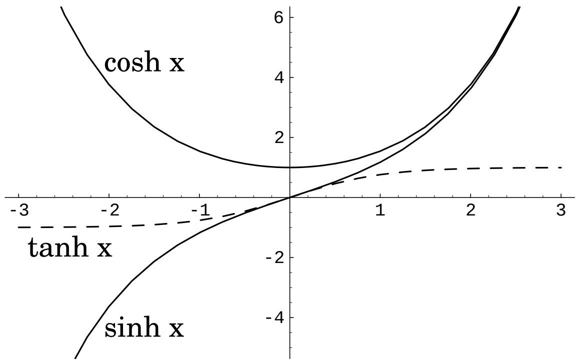


1/2 を底とする指数関数 $(1/2)^x$

指数関数を用いて，以下の双曲線関数が定義される．

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ,\ \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ,\ \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

sinh は「ハイパボリック　サイン」，または「サインハイポ」とよばれる．cosh，tanh も同様に前にハイパボリックまたは後ろにハイポをつけてよばれる．



$\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$

4.2　対数関数

指数関数の逆関数．すなわち $y = a^x$ で x と y を入れ替えて，$x = a^y$ となるような変数 x と関数の値 y との関係を考え，これを

$$y = \log_a x$$

と記して a (a は正の実数) を底とする対数関数とよぶ．ここで x は正でなければならない．

$r = a^x$, $s = a^y$ とすると $x = \log_a r$，$y = \log_a s$．指数関数の性質より

$$\log_a r + \log_a s = x + y = \log_a(a^{x+y}) = \log_a(a^x \times a^y) = \log_a(r \times s)\ .$$

他の指数関数の性質も用いて得られる性質をまとめると，

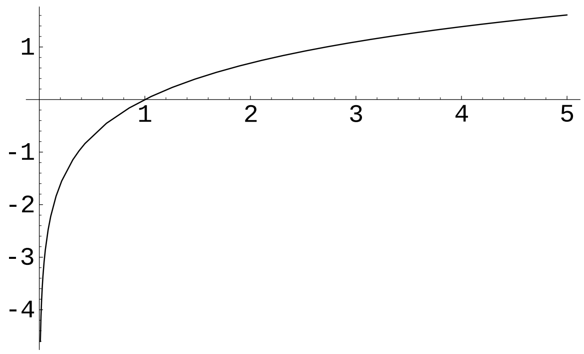
$$\begin{aligned}\log_a x + \log_a y &= \log_a(xy)\\ \log_a\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log_a x\\ \log_a(x^y) &= y\log_a x\\ \log_a 1 &= 0\end{aligned}$$

さらに，$x = \log_a r$，$y = \log_a s$，$t = \log_r s$ とすると，$r^t = s = a^y$．この両辺の a を底とする対数をとって

$$y = \log_a s = \log_a r^t = t\log_a r = tx \longrightarrow \frac{\log_a s}{\log_a r} = \frac{y}{x} = t = \log_r s$$

が成立する．

底として e をとったものを自然対数とよび，$\ln x$ または単に $\log x$ と表される．自然科学では最もよく用いられる対数関数である．任意の正の実数 a を底とする指数関数 a^x は $a^x = e^{x\ln a}$ と表すことができる．また上の関係式を用いて，任意の正の実数 a を底とする対数関数 $\log_a x$ は $\log_a x = \log_e x/\log_e a = (1/\ln a)\ln x$ と表すことができる．



e を底とした対数関数 $\ln x$

4.3　関数方程式と級数による定義

ある正の値をとる関数 $f(x)$ が任意の実数 x, y について次の関係式を満たすとする．

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

$x = y = 0$ を代入して $f(0) = f(0+0) = \{f(0)\}^2$，よって $f(0)$ =1．自然数 n につき関係式より

$$f(n) = f(n-1)f(1) = f(n-2)f(1)f(1) = \cdots = \{f(1)\}^n$$

また，

$$f(1) = f(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}) = f(\frac{n-1}{n})f(\frac{1}{n}) = \cdots = \{f(\frac{1}{n})\}^n$$

$f(1) = a$ $(a > 0)$ とおくと，これらから 4.1 節での議論と同様にして任意の実数につき

$$f(x) = a^x$$

となる．

次に関数 $g(x)$ を以下の級数で定義する．

$$g(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

このとき $g(x)g(y)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} g(x)g(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}\right) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!\,l!} \\ (k+l=n \text{ として}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = g(x+y) \end{aligned}$$

が成立する．計算の 2 行目では $k + l = n$ とおいて和の取り方を変えているが，全ての k, l について和をとっていることには変わりはない．関数 $g(x)$ は最初の関係式を満たすので

$$g(x) = e^x$$

となる．ここで

$$e = g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

であり，この値は自然定数の値と一致する．両者が一致することは以下で $n \to \infty$ とすることでわかる．

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (\frac{1}{n})^k \\ &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}1(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}) \end{aligned}$$

一般の指数関数は $g(x \ln a) = e^{x \ln a} = a^x$ で得られる．

4.4　演習問題

1. 1 万，100 万，1 億，1 兆を 10 のべき乗で表せ．
2. 2^4, 2^8, 2^{16} を求めよ．
3. 2^{32}, 2^{64} を有効数字 2 桁まで求めよ．
4. 21600 を素因数分解せよ．
5. a を正の実数，n, m を自然数とするとき $(a^n)^m = a^{nm}$ を示せ．
6. $\displaystyle\lim_{n\to p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の値を，$p = 1, 2, 3, 4$ の場合につき小数点第 1 位まで求めよ．
7. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を示せ．
8. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ を示せ．
9. 有効数字 3 桁で $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ であることを用いて $\log_{10} 4$, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 6$, $\log_{10} 8$, $\log_{10} 9$ を有効数字 2 桁まで求めよ．
10. $\log(x^y) = y \log x$ を示せ．

4.5　解答例

1. 1 万 $= 10^4$，100 万 $= 10^6$，1 億 $= 10^8$，1 兆 $= 10^{12}$
2. $2^4 = 16$, $2^8 = 256$, $2^{16} = 65536$
3. $2^{16} = 65536$ より $2^{32} = (2^{16})^2 = (65536)^2 = 4.29\ldots \times 10^9 \simeq 4.3 \times 10^9$.
   $2^{32} = 4.29\ldots \times 10^9$ より $2^{64} = (2^{32})^2 = (4.29\ldots \times 10^9)^2 = 1.84\ldots \times 10^{19} \simeq 1.8 \times 10^{19}$
4. $21600 = 216 \times 10^2 = 54 \times 4 \times (2 \times 5)^2 = 27 \times 2 \times 4 \times (2 \times 5)^2 = 3^3 \times 2^3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^5\ 3^3\ 5^2$
5. a^n は a を n 回かけたものであり，$(a^n)^m$ はそれを m 回かけたものであるので，

$$\begin{aligned}(a^n)^m = &\quad (a \times a \times \cdots \times a) \qquad (a \text{ が } n \text{ 回})\\ &\times (a \times a \times \cdots \times a) \qquad (a \text{ が } n \text{ 回})\\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\times (a \times a \times \cdots \times a) \qquad (a \text{ が } n \text{ 回})\\ = a^{n\times m} = a^{nm}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 &= 2^1 = 2.0\\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25 \simeq 2.3\\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.37\ldots \simeq 2.4\\ \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 &= \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2.44\ldots \simeq 2.4\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \frac{4}{4} = 1\end{aligned}$$

8. $e^x = \cosh x + \sinh x$, $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$ より，

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{1}{2}[e^x e^y - e^{-x} e^{-y}]\\ &= \frac{1}{2}(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y)\\ &\quad -\frac{1}{2}(\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)\\ &= \frac{1}{2}\,[\cosh x \cosh y + \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\\ &\qquad + \sinh x \sinh y - \cosh x \cosh y + \sinh x \cosh y\\ &\qquad + \cosh x \sinh y - \sinh x \sinh y]\\ &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\end{aligned}$$

9.

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 4 &= \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2 = 2 \times 0.301 \simeq 0.60 \\
\log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.301 \simeq 0.70 \\
\log_{10} 6 &= \log_{10}(2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \simeq 0.78 \\
\log_{10} 8 &= \log_{10} 2^3 = 3\log_{10} 2 = 3 \times 0.301 \simeq 0.90 \\
\log_{10} 9 &= \log_{10} 3^2 = 2\log_{10} 3 = 2 \times 0.477 \simeq 0.95
\end{aligned}
$$

10. $\log x = s$ とすると $x = e^s$．指数関数の性質 $x^y = (e^s)^y = e^{sy}$ が成立する．この両辺の対数をとると

$$
\log(x^y) = \log(e^{sy}) = sy = ys = y\log x
$$

第 5 章

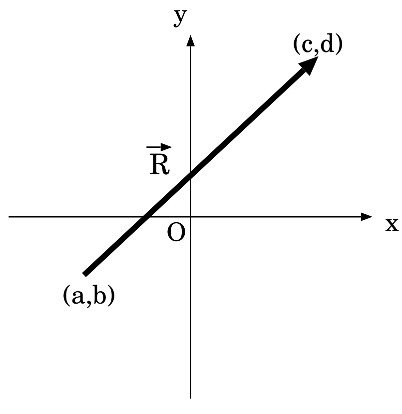
ベクトル

5.1　ベクトル

物体が運動している場合，どの方向へどれくらいの速さで移動しているかという情報は重要である．このように「大きさ」と「向き」を示すことで特徴付けられる量を**ベクトル**とよぶ．力 (大きさと力の向き) や風の様子 (風力と風向き) など，自然科学にはベクトルとして表される量が多い．ベクトルは $\vec{a}$ のように矢印を上に付けたり，あるいは $\boldsymbol{a}$ のように太文字で表される．以下に物理学でよく用いられるベクトルを挙げておく．

位置[*1]，速度[*2]，力，運動量，力のモーメント，角運動量，電場，磁場，. . .

5.2　座標とベクトル



あるベクトル $\vec{R}$ を図形として矢印で表し，座標平面に置いた場合，その始点の座標を (a, b)，終点の座標を (c, d) とすると，ベクトル $\vec{R}$ を

$$\vec{R} = (c - a,\ d - b)$$

で表す．この場合のベクトルの大きさ (絶対値) は矢印の長さであり，

$$|\vec{R}| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

のように $|\ \ |$ という記号で表す．向きは矢印の方向である．
空間中にベクトルを置いた場合は，3 つの成分を用いて

$$\vec{A} = (p, q, r)$$

[*1] 基準となる点からの距離と基準点からの方向でベクトルになる．
[*2] 物理学で速さという場合は大きさだけを意味する

のように表す．このとき $|\vec{A}| = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$ である．より一般的な n 次元空間中でのベクトルも同様に n 成分を用いて表す．

$$\vec{V} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$|\vec{V}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

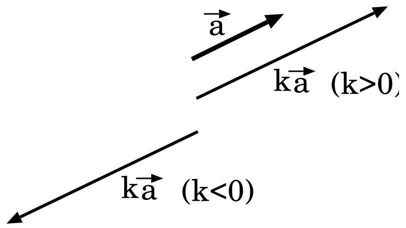
特殊なベクトルとして，成分が全て 0 のゼロベクトル $\vec{0}$ がある．ゼロベクトルは大きさが 0 で，向きも指定できないが，ベクトルとして扱う．また，大きさが 1 のベクトルは単位ベクトルとよばれる．

以下では特にことわらない限り，3 次元でのベクトルを考えるものとする．

5.3　ベクトルの定数倍，足し算，引き算

ベクトル $\vec{a}$ に実数の定数 k をかけたものを $k\vec{a}$ と表す．ベクトルを成分で表したときは，各成分に k がかかる．$k=0$ の場合はゼロベクトルになる．$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ とすれば

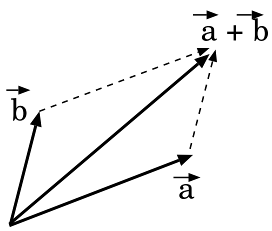
$$k\vec{a} = (ka_x, ka_y, ka_z)$$



図形的には，k が正の場合は元のベクトルの大きさを k 倍にして向きをそのままとしたもの，k が負の場合は元のベクトルの大きさを $|k|$ 倍にして向きを逆にしたものになる．

二つのベクトルの足し算を考えることができて，成分で表すと各成分毎に和をとることで定義する．$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とすれば

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$$



図形的には片方のベクトルを平行移動させて，一方の終点がもう一方の始点になるように配置し，二つの矢印で移動した点を新しい終点とする．

ベクトルの引き算も足し算と同様に各成分毎に差をとることで定義する．あるいは $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-1)\vec{b}$ と，ひく方のベクトルに -1 をかけたベクトルを足し算することで定義できる．

5.4　ベクトルの内積

二つのベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を以下で定義する．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

ベクトルの和や差の結果はベクトルになるが，内積の結果はただの数になる．(14.2 節で説明する外積ではベクトルの積が別のベクトルになる．) 内積を用いるとベクトルの大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

と表される．ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ がなす角を θ とすると，内積は以下の式でも得られる．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

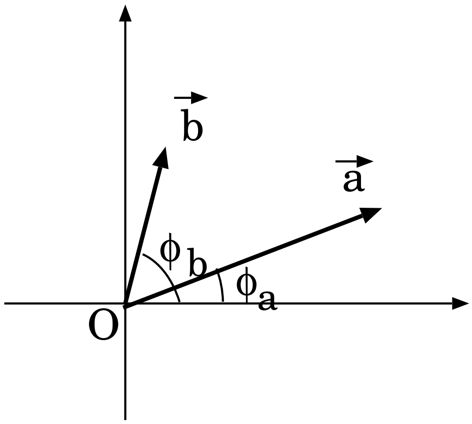
両者が一致することを以下に示す．二つのベクトルは一つの平面内にあるので，それを xy 平面にとる．(座標の回転でいつでもこうできるので一般性を失わない．）このとき $\vec{a} = (a_x, a_y, 0)$，$\vec{b} = (b_x, b_y, 0)$ とする．$\vec{a}$ が x 軸の正の方向となす角度を ϕ_a，$\vec{b}$ が x 軸の正の方向となす角度を ϕ_b とすると

$$\begin{aligned} a_x &= |\vec{a}|\cos\phi_a \quad & a_y &= |\vec{a}|\sin\phi_a \\ b_x &= |\vec{b}|\cos\phi_b \quad & b_y &= |\vec{b}|\sin\phi_b \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}||\vec{b}|(\cos\phi_a\cos\phi_b - \sin\phi_a\sin\phi_b) \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\phi_a - \phi_b) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\phi_b - \phi_a) \end{aligned} \tag{5.1}$$

ここで三角関数の性質，$\cos(-x) = \cos x$，と加法定理を用いた．$\phi_b - \phi_a$ は二つのベクトルがなす角度であるので，両者は一致する．この式から分かるように直交するベクトル間の内積は 0 になる．ベクトルの内積は物理学の多くの場面でよく用いられる．



5.5　演習問題

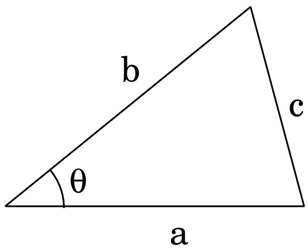
1. 三角形の各頂点と対辺の中点を結ぶ線は 1 点 (重心) で交わることを，ベクトルを用いて示せ.
2. $\vec{q} = (a, b, c)$ で表される点を通り，ベクトル $\vec{d} = (k, l, m)$ に平行な直線上の点をベクトルを用いて表せ.
3. $\vec{q} = (a, b, c)$ で表される点を通り，ベクトル $\vec{d} = (k, l, m)$ に垂直な平面上の点が満たすべき関係式をベクトルを用いて表せ.
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$ が成立することを，余弦定理を用いて示せ.

   余弦定理

   図のように三角形の各辺の長さを a, b, c とし，a と b の辺にはさまれる角度を θ とすると

   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

   が成立する.

5. $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, -1, 0)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度を求めよ.

5.6　解答例

1. 図のように三角形の一つの頂点を原点 O にとり，他の二つの頂点を A, B，各辺の中点を P, Q, R とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ と表す．OQ 上の点はベクトルで表すと，k を $0 \leq k \leq 1$ なる実数とすると

$$k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}) = k[\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})] = \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

AR 上の点をベクトルで表すと，l を $0 \leq l \leq 1$ なる実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \vec{a} + l[\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}] = (1-l)\vec{a} + \frac{l}{2}\vec{b}$$

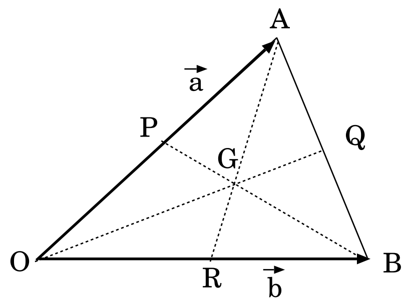
OQ と AR の交点 G はこの二つのベクトルが一致するところなので

$$\frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = (1-l)\vec{a} + \frac{l}{2}\vec{b}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ の係数が一致しなければならないから $k = l = 2/3$．すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = (\vec{a} + \vec{b})/3$.
次に BP 上の点をベクトルで表す．m を $0 \leq m \leq 1$ なる実数として

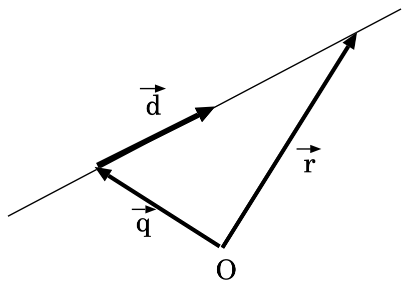
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} + m\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \vec{b} + m(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) = \frac{m}{2}\vec{a} + (1-m)\vec{b}$$

ここで $m = 2/3$ を入れると $(\vec{a} + \vec{b})/3$ となって $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と一致する．よって題意が示された．



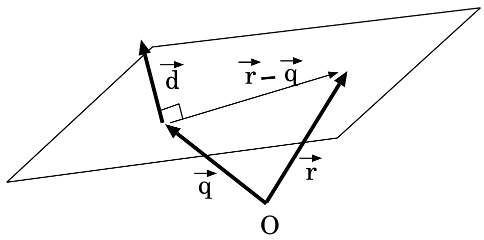
2. 直線上の点の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると

$$\vec{r} = \vec{q} + t\vec{d} \ \ (t \text{ は任意の実数})$$



3. 平面上の点の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると

$$(\vec{r} - \vec{q}) \cdot \vec{d} = 0$$



4.
図のように三角形上にベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ をとる．このとき

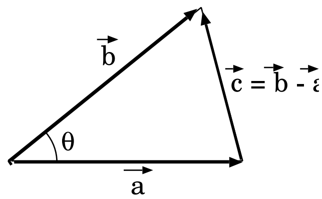
$$|\vec{c}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

一方，余弦定理より

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

よって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$



5. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度を θ とすると，$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$ の関係を用いて

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (1, 0, 1) \cdot (-1, -1, 0) = 1 \times (-1) + 0 + 0 = -1 \\
|\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
|\vec{b}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

よって $\cos\theta = -1/\sqrt{2 \times 2} = -1/2$ となって $\theta = 2\pi/3$

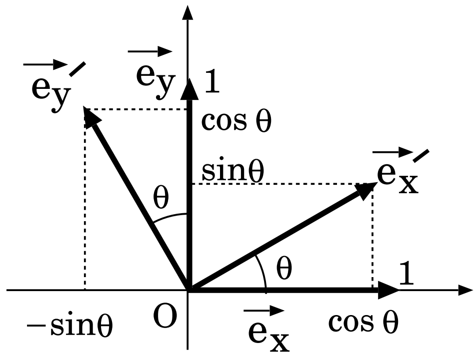
第 6 章

行列

6.1　行列

座標平面上で x 軸，y 軸の正の方向の単位ベクトル $\vec{e}_x = (1, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1)$ を考える．これらのベクトルを，原点を中心として反時計まわりに角 θ だけ回転させたベクトルをそれぞれ $\vec{e}_x'$, $\vec{e}_y'$ とする．図から，

$$\begin{aligned} \vec{e}_x' &= (\cos\theta, \sin\theta) \\ \vec{e}_y' &= (-\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$



座標平面上の任意のベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y)$ は $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ を用いて

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$$

と表すことができるので，このベクトル $\vec{a}$ を角 θ だけ回転させると

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= a_x\vec{e}_x' + a_y\vec{e}_y' = a_x(\cos\theta, \sin\theta) + a_y(-\sin\theta, \cos\theta) \\ &= (\cos\theta\ a_x - \sin\theta\ a_y\ ,\ \sin\theta\ a_x + \cos\theta\ a_y) = (a_x', a_y') \end{aligned}$$

となる．これを，ベクトルを縦に記して

$$\begin{pmatrix} a_x' \\ a_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\ a_x - \sin\theta\ a_y \\ \sin\theta\ a_x + \cos\theta\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

と表す．最後の項でベクトルの前に置かれているものは行列とよばれ，一般に複数行，複数列の成分を持ち，n 行 m 列の成分をもつ行列を $n \times m$ 行列とよぶ．ここでは 3 行 3 列までの行列を扱い，より一般の行列については後の 16 節で扱う．

3×3 行列を 3 成分のベクトルにかける操作は以下で定義される．

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3 \\ A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3 \\ A_{k1}v_1 + A_{k2}v_2 + A_{33}v_3 \end{pmatrix}$$

上の式で行列を A，ベクトルを $\vec{v}$ と記し，各成分を添字をつけて表せば以下のようになる．

$$(A\vec{v})_j = \sum_{i=1}^{3} A_{ji} v_i$$

6.2　行列の定数倍，和，差，積

行列 A の定数倍は，各成分にその定数をかけたものである．

$$\begin{aligned} kA &= k \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & kA_{13} \\ kA_{21} & kA_{22} & kA_{23} \\ kA_{31} & kA_{32} & kA_{33} \end{pmatrix} \\ (kA)_{ij} &= kA_{ij} \end{aligned}$$

同じ $n \times m$ 行列どうしの間で和と差が定義できる．

$$\begin{aligned} A \pm B &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} & A_{13} \pm B_{13} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} & A_{23} \pm B_{23} \\ A_{31} \pm B_{31} & A_{32} \pm B_{32} & A_{33} \pm B_{33} \end{pmatrix} \\ (A \pm B)_{ij} &= A_{ij} \pm B_{ij} \end{aligned}$$

積 AB は次式で定義される．

$$(AB)_{ij} = \sum_{p=1}^{3} A_{ip} B_{pj}$$

2×2 行列の場合は以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

行列の積では，順序が変わると結果も変わるのが普通である．2×2 行列の場合で計算してみると

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{pmatrix}$$

となり，一般に $AB \neq BA$ である．

6.3　単位行列，逆行列

行列の成分 A_{ij} で $i = j$ のものを対角成分という．対角成分がすべて 1 で，他の成分が全て 0 の正方行列を単位行列といい，$\mathbf{1}$ または I と記す．

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{，成分で書くと } I_{ij} = \delta_{ij}$$

ここで出てきた δ_{ij} という記号はクロネッカーのデルタとよばれ，以下で定義される．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$n \times n$ の単位行列と任意の $n \times n$ 行列 A との積は A になる．

$$AI = IA = A \ , \quad \text{成分で書くと } (AI)_{ij} = \sum_{k=1} A_{ik}\delta_{kj} = (IA)_{ij} = \sum_{k=1} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij} \ .$$

行列 A に別の行列 B をかけて結果が I となるとき，B を A の逆行列といい，A^{-1} と記す．

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

2×2 行列の場合

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ として } ad - bc \neq 0 \text{ のとき } A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である．$ad - bc = 0$ のときは逆行列は存在しない．

逆行列を用いて連立一次方程式をとくことができる．x , y という 2 個の未知数に対し

$$ax + by = p \ , \quad cx + dy = q$$

という連立一次方程式が成立しているとき，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \ \vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

として，連立方程式は $A\vec{x} = \vec{v}$ と表すことができる．A^{-1} が存在する場合，上式の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{v} \Longrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{v}$$

となって $\vec{x}$ を求めることができる．

6.4　行列式

2×2 行列 A の行列式 $|A|$ ($\det A$ とも記す) を以下で定義する．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ として } |A| = ad - bc$$

前節で述べた逆行列が存在するための条件は $|A| \neq 0$ である．3×3 行列の場合

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ として}$$

$$\begin{aligned} |A| = {} & A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} \\ & -A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} \end{aligned}$$

で定義される．

6.5 演習問題

1. 次の計算を行え

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. パウリ行列は以下で与えられる．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

行列に対する交換関係を $[A\ ,\ B] = AB - BA$，反交換関係を $\{A\ ,\ B\} = AB + BA$ と定義する．このとき，

a)　$[\sigma_1\ ,\ \sigma_2]$ と $\{\sigma_1\ ,\ \sigma_2\}$ を求めよ．

b)　$[\sigma_2\ ,\ \sigma_3]$ と $\{\sigma_2\ ,\ \sigma_3\}$ を求めよ．

c)　$[\sigma_3\ ,\ \sigma_1]$ と $\{\sigma_3\ ,\ \sigma_1\}$ を求めよ．

3. (a) 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = O$ (O は成分が全て 0 の行列) を示せ．

(b) 前問の結果を用いて，$a = b = c = d = 1$ のとき，A^n (n は自然数) を求めよ．

4. 2×2 回転行列を $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$R(\theta)$ の逆行列を求めよ．

5. 次の連立一次方程式を行列を用いて解け．

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 7 \\ 2x - 9y &= 11 \end{aligned}$$

6. 次の行列式を求めよ．

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

6.6　解答例

1. (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   注) ベクトルが行列の左からかかる場合は，横に成分が並んだベクトルを 1 行複数列の行列と考えれば計算できる．$v'_i = \sum_{k=1} v_k A_{ki}$

2.

$$[\sigma_a\ ,\ \sigma_b] = \sum_{c=1}^{3} 2i\epsilon_{abc}\sigma_c\ ,\quad \{\sigma_a\ ,\ \sigma_b\} = 2\delta_{ab}\quad (a,b,c = 1 \sim 3)$$

   ここで ϵ_{abc} は完全反対称テンソルとよばれ，以下で定義される．

$$\epsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & (abc)\ \text{が}\ (123)\ \text{からの偶数回の数字の入れ替えのとき} \\ -1 & (abc)\ \text{が}\ (123)\ \text{からの奇数回の数字の入れ替えのとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

3.

   (a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$-(a+d)A = -\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$$

$$(ad-bc)I = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

   よって

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O$$

   (b) $a = b = c = d = 1$ を代入すると $A^2 - 2A + 0I = O$ よって $A^2 = 2A$．これを用いて

$$A^n = A^2 A^{n-2} = 2A^{n-1} = 2^2 A^{n-2} = \cdots = 2^{n-1}A = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 逆行列の式を用いて

$$R^{-1}(\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta - (-\sin^2\theta)}\begin{pmatrix} \cos\theta & -(-\sin\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

5. 連立方程式を行列を用いて表せば

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\times(-9)-5\times 2}\begin{pmatrix} -9 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 63+55 \\ 14-33 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 118 \\ -19 \end{pmatrix}$$

6.

(a) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)\sin\theta = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-2-2 = -3$

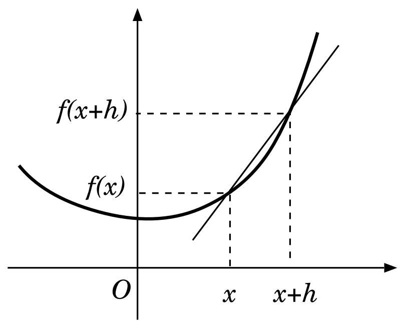
(c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-0-0 = 0$

第 7 章

微分

7.1　一変数実数関数の微分

x を変数とする連続な実数関数 $f(x)$ を考える．$f(x)$ のグラフを描いて，点 $(x, f(x))$ と点 $(x+h, f(x+h))$ を結ぶ直線をつくると，その傾きは以下で与えられる．



$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$h \to 0$ の極限でこの値が有限になるとき $f(x)$ は x で微分可能といい，$f(x)$ の微分を以下で定義する．

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

微分された関数は $\dfrac{df}{dx}$ 以外にも，$f'(x)$ と記されることもある．時間で微分した場合は $\cdot$ (ドット) を用いて，$\dot{f}$ と表すことも物理ではよく用いられる．

二つの関数 $f(x), g(x)$ につき，それらの和，差，積，商の微分を考えよう．定義から和，差の微分は微分したものの和，差になる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f\pm g] &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\pm g(x+h)]-[f(x)\pm g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]\pm[g(x+h)-g(x)]}{h}\\ &= \frac{df}{dx}\pm\frac{dg}{dx}\end{aligned}$$

積の場合は,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{f(g+h)-g(x)}{h}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

商の場合は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)h}\,[f(x+h)g(x) - f(x)g(x) \\
&\qquad\qquad + f(x)g(x) - g(x+h)f(x)] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right] \\
&= \frac{1}{g^2}\left[\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}\right]
\end{aligned}$$

である．

定数関数 $g(x) = c$ (c は定数) の微分は 0 になるので，関数の定数倍の微分は元の関数の微分を定数倍したものになる．

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = \frac{dc}{dx}f(x) + c\frac{df}{dx} = c\frac{df}{dx}$$

関数の変数が別の変数の関数になっている場合，すなわち $f(x) = f(x(t))$ のようになっている場合を考える．このとき

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x(t+h)) - f(x(t))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x(t+h)) - f(x(t))}{x(t+h) - x(t)}\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\
&= \lim_{a\to 0}\frac{f(x+a) - f(x)}{a}\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\
&= \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}
\end{aligned}$$

である．ここで $x(t+h) - x(t) = a$ とした．

7.2 初等関数の微分

x^n 　(n は自然数)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k h^{n-k} - x^n\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n) - x^n\right] \\
&= \lim_{h\to 0}[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}] = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

x^{-n}　(n は自然数)

$1 = x^n x^{-n}$ の両辺を x で微分して,

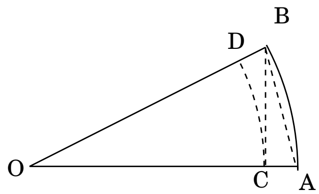
$$\frac{d}{dx}1 = \frac{d}{dx}[(x^n)(x^{-n})]$$
$$0 = \left\{\frac{d}{dx}(x^n)\right\}(x^{-n}) + (x^n)\frac{d}{dx}(x^{-n}) = nx^{n-1}(x^{-n}) + (x^n)\frac{d}{dx}(x^{-n})$$

よって

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

三角関数

まず準備のために $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ と $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}$ を求める.
右図の扇型 OAB で $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$, $\angle\mathrm{AOB} = h$ とする. B から OA におろした垂線と OA の交点を C, $\mathrm{OC} = \mathrm{OD}$ となる OB 上の点を D とする. このとき $\mathrm{OC} = \mathrm{OD} = \cos h$, $\mathrm{BC} = \sin h$ である. 扇形 OAB の面積は $h/2$, 三角形 OAB の面積は $(1/2)\sin h$, 扇形 OCD の面積は $(h/2)\cos^2 h$ となる. 3 つの図形の面積を比べて次の不等式を得る.



$$\frac{h\cos^2 h}{2} \le \frac{\sin h}{2} \le \frac{h}{2}$$

それぞれを $h/2$ で割って, $h \to +0$ (h を正として 0 に近づける) の極限を考えると

$$\lim_{h\to +0}\cos^2 h \le \lim_{h\to +0}\frac{\sin h}{h} \le 1 \Longrightarrow \lim_{h\to +0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

h が負の場合でも, $-h = a$ とすると $\sin h = \sin(-a) = -\sin a$ から $\frac{\sin h}{h} = \frac{-\sin a}{-a} = \frac{\sin a}{a}$ $(a > 0)$ となって上と同じ結果になる. よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

$\frac{1-\cos h}{h}$ に $(1+\cos h)$ をかけて $h \to 0$ の極限をとると

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}(1+\cos h) = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 h}{h}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h}\times 2 = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\sin h = 1\times 0$$
$$\text{よって}\ \lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h} = 0$$

上の結果から,

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\right] = \cos x \\
\frac{d}{dx}\cos x &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\cos x\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\frac{\sin h}{h}\right] = -\sin x \\
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

指数関数，対数関数

まず $f(x) = \ln x = \log_e x$ を考える．e は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ で定義されていたが，自然数 n を実数に拡張して $e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ であることを用いる[*1]．$x = 1/h$ として両辺の対数をとると

$$1 = \ln\left[\lim_{h\to 0}(1+h)^{(1/h)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}$$

ここで $\ln(1+h) = a$ とおくと，$h\to 0$ で $a\to 0$ なので，

$$1 = \lim_{a\to 0}\frac{a}{e^a-1} \Longrightarrow \lim_{a\to 0}\frac{e^a-1}{a} = 1$$

を得る．これらを用いて，以下が得られる．

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x$$
$$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

一般の指数関数，対数関数の場合は

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = \ln a e^{x\ln a} = a^x\ln a$$
$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{x\ln a}$$

となる．

x^p　(p は任意の実数)

$y = x^p$ の両辺の対数をとると $\ln y = p\ln x$．この両辺を x で微分して

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{p}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = y\frac{p}{x} = px^{p-1}$$

7.3　関数の極大，極小

微分を用いて，関数の値の増減を調べることができる．h を微小な正の数として，微分の定義から

$$f(x+h) \simeq f(x) + hf'(x)$$

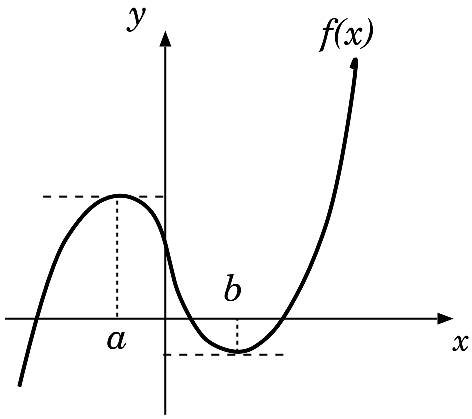
$f'(x)$ が正ならば $f(x+h) > f(x)$，負ならば $f(x+h) < f(x)$ なので，微分の値が分かれば，変数 x の増減に伴って関数 $f(x)$ の値が増えるか減るかが分かる．$f'(x) = 0$ となる点はそこでの接線の傾きが 0 なので，その前後で関数の値が増加するか減少するかが変化する可能性があることを示す．($y = x^3$ の

[*1] これが成立することは数学で証明されている．

ように一端 $x=0$ で微分が 0 になっても，その前後で増加し続ける場合があるので，必ず増減が変化するとは限らない．）関数の増減がある x の値の前後で変化する場合，その x の値での $f(x)$ の値を極値という．増加から減少に変化する場合は極大値，減少から増加に変化する場合は極小値とよばれる．$f'(x)=0$ となる x の値は，関数に極値をあたえる x の候補となる．

実際に関数の変化を調べるには，$f'(x)$ を計算して下のような表を作る．$f'(x)>0$ では関数は増加し，$f'(x)<0$ では減少する．それに従って $f(x)$ が増えるか減るかを矢印で表し，表からグラフを作るとよい．

x		a		b	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$



7.4 演習問題

1. 以下の微分を求めよ．ただし，ω, h, v, g は定数，$\arctan x$ は $\tan x$ の逆関数である．

(a)	$\frac{d}{dx}\cos^2 x$	(b)	$\frac{d}{dt}e^{\sin t}$	(c)	$\frac{d}{dt}[e^{-2t}\sin t]$
(d)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)$	(e)	$\frac{d}{dx}\ln\left[\frac{x}{x^2+1}\right]$	(f)	$\frac{d}{dx}[x\ln x]$
(g)	$\frac{d}{dt}\sin(\omega t)$	(h)	$\frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega t)$	(i)	$\frac{d}{dx}\arctan x$
(j)	$\frac{d}{dt}\left[h+vt-\frac{g}{2}t^2\right]$	(k)	$\frac{d^2}{dt^2}\left[h+vt-\frac{g}{2}t^2\right]$	(l)	$\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2}$

2. $P_n(x) \equiv \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$ (n は 0 以上の整数) とするとき $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ を求めよ．
3. 関数 $U(r) = \dfrac{a}{r^2} - \dfrac{b}{r}$ ($r > 0$，a, b は正の定数) の最小値と，その最小値を与える r の値を求めよ．
4. 関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ が関係式 $\dfrac{df}{dx} = f(x)$ を満たすことを示せ．
5. $|x| < 1$ で定義された関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ が関係式 $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{1+x}$ を満たすことを示せ．

7.5 解答例

1. (a)

$$\frac{d}{dx}\cos^2 x = 2\cos x(\cos x)' = -2\cos x \sin x = -2\sin 2x$$

(b)

$$\frac{d}{dt}e^{\sin t} = e^{\sin t}\cos t$$

(c)

$$\frac{d}{dt}[e^{-2t}\sin t] = -2e^{-2t}\sin t + e^{-2t}\cos t = e^{-2t}(-2\sin t + \cos t)$$

(d)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \frac{-(\tan x)'}{\tan^2 x} = \frac{-1}{\cos^2 x \tan^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

(e)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\left[\frac{x}{x^2+1}\right] &= \frac{d}{dx}\left[\ln x - \ln(x^2+1)\right] = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\\ &= \frac{x^2+1-2x^2}{x(x^2+1)} = \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}\end{aligned}$$

(f)

$$\frac{d}{dx}[x\ln x] = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

(g)

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t)$$

(h)

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega t) = \frac{d}{dt}[\omega\cos(\omega t)] = -\omega^2\sin(\omega t)$$

(i) $y = \arctan x$ とおくと $\tan y = x$ この両辺を x で微分

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}x \ \Rightarrow\ \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} = 1 \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

(j)

$$\frac{d}{dt}\left[h + vt - \frac{g}{2}t^2\right] = v - gt$$

(k)

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[h + vt - \frac{g}{2}t^2\right] = \frac{d}{dt}[v - gt] = -g$$

(l)

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2} = \frac{d}{dx}[-2xe^{-x^2}] = -2e^{-x^2} - 2x(-2x)e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

2.

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= \frac{1}{2^0 0!}(x^2-1)^0 = 1\\
P_1(x) &= \frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = \frac{1}{2}2x = x\\
P_2(x) &= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2] = \frac{1}{4\times 2}\frac{d}{dx}[2(x^2-1)(2x)]\\
&= \frac{1}{8}4[(x^2-1)+x(2x)] = \frac{1}{2}(3x^2-1)
\end{aligned}
$$

3. $U(r)$ を微分して，関数の増減表をつくる．

$$
\frac{d}{dr}U(r) = \frac{d}{dr}\left[\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r}\right] = \frac{-2a}{r^3}-\frac{(-b)}{r^2} = \frac{1}{r^3}(br-2a)
$$

よって $r=\dfrac{2a}{b}$ で微分が 0 になる．関数の増減表は下のようになるので，最小を与える r は $r=\dfrac{2a}{b}$.

r		$\frac{2a}{b}$	
U'	$-$	0	$+$
U	$\searrow$	$U(\frac{2a}{b})$	$\nearrow$

最小値は

$$
U\left(\frac{2a}{b}\right) = a\left(\frac{2a}{b}\right)^{-2} - b\left(\frac{2a}{b}\right)^{-1} = a\frac{b^2}{4a^2} - b\frac{b}{2a} = -\frac{b^2}{4a}
$$

4. 関数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+\cdots\right]\\
&= 0+1+\frac{2x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = f(x)
\end{aligned}
$$

最後の等式では $n-1=k$ と置き直している．

5. 関数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots\right]\\
&= 1-x+x^2-\cdots+(-1)^k x^k+\cdots\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}
\end{aligned}
$$

ここで等比級数の和の公式を用いた．

第 8 章

積分

8.1 一変数実数関数の積分

8.1.1 不定積分と定積分

実数関数 $f(x)$ に対し，次の関係を満たす関数 $F(x)$ が存在するとき，

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

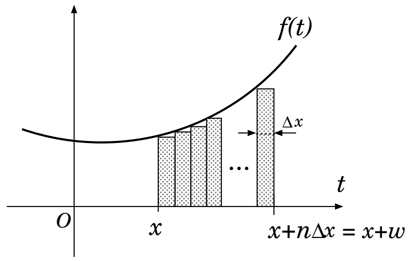
$F(x)$ を $f(x)$ の (不定) 積分または原始関数とよび，$\displaystyle\int f(x)dx$ で表す．不定積分とよぶのは，定数の微分は 0 なので，$F(x)$ に任意の定数を加えても上式が成立するため $F(x)$ にその分の不定性があるからである．

微分の定義を用いると

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

ここで Δx を微小だが有限な量と考えると

$$\begin{aligned}
F(x+\Delta x) &\simeq F(x) + f(x)\Delta x \\
F(x+2\Delta x) &\simeq F(x+\Delta x) + f(x+\Delta x)\Delta x \\
&= F(x) + \left[f(x) + f(x+\Delta x)\right]\Delta x \\
&\vdots \\
F(x+n\Delta x) &\simeq F(x) + \left[f(x) + f(x+\Delta x) + \ldots + f(x+(n-1)\Delta x)\right]\Delta x \\
\text{よって} & \\
F(x+n\Delta x) - F(x) &\simeq \left[f(x) + f(x+\Delta x) + \ldots + f(x+(n-1)\Delta x)\right]\Delta x
\end{aligned}$$



ここで式の右辺の意味を考えると，図の斜線部分の最も左側の長方形の面積が $f(x)\Delta x$，次の長方形の面積が $f(x+\Delta x)\Delta x$，$\ldots$ となって，結局右辺は図の斜線部分全体の面積になることがわかる．さらに $n\Delta x = w$ (有限の正の実数) を一定に保ったまま $\Delta x \to 0$, $n \to \infty$ の極限をとると関数 f のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積になる．これを

$$F(x+w) - F(x) = \int_x^{x+w} f(t)dt$$

と表して，関数 f の定積分とよぶ．積分記号内で $f(t)dt$ と記しているのは，積分する変数は自由にとってよいので，元の x と混同しないよう区別するためである．不定積分にあった定数分の不定性は，前式の左辺から分かるように $F(x+w)$ と $F(x)$ の引き算で相殺されるので，定積分には存在しない．(当然のことながら，$F(x+w)$ と $F(x)$ には同じ定数が付加されていると考えなければならない．) 関数 f が負の値をとるときは定積分の値も負になる場合がある．面積を求めたことからはずれるようだが (面積は 0 以上の実数)，この定義をそのまま使うことにする．

原始関数 F の定義から以下が成立する．

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)\ , \quad \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$$

$\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ の関係と 7.2 節の結果から以下の公式を得る．

$f(x)$	$F(x)$ (定数分の不定性を除く)
$x^p\ \ (p \neq -1)$	$\dfrac{1}{(p+1)}x^{p+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
e^x	e^x
$a^x\ \ (a > 0)$	$\dfrac{1}{\ln a}a^x$

8.1.2　**部分積分**

二つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の積の微分は

$$\frac{d}{dx}[fg] = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

であった．この両辺を定積分すると

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[fg]dx = \int_a^b \left[\frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}\right]dx$$

$$[fg]_a^b = \int_a^b \left[\frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}\right] dx$$

$$移項して\quad \int_a^b \frac{df}{dx}g\ dx = [fg]_a^b - \int_a^b f\frac{dg}{dx}\ dx$$

ここで $[\ \ ]_a^b$ は $[\ \ ]$ 内の関数で，変数が b での値から変数が a での値を引いたもの，すなわち $W(x)$ を任意の関数として $[W(x)]_a^b \equiv W(b) - W(a)$ である．関数の積の積分を求めるにはこの関係式を用いる．
例)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\sin x)xdx &= [(-\cos x)x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\frac{d}{dx}xdx \\
&= (-\cos\pi)\pi - (-\cos 0)0 - \int_0^\pi (-\cos x)dx \\
&= \pi + 0 + \int_0^\pi \cos xdx \\
&= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi
\end{aligned}$$

この方法を部分積分とよぶ．部分積分を用いると対数関数の積分ができる．

$$\begin{aligned}
\int_a^t \ln x\ dx = \int_a^t 1\ln x\ dx &= \int_a^t \frac{d}{dx}x\ln x\ dx \\
&= [x\ln x]a^t - \int_a^t x\frac{d}{dx}\ln x\ dx = t\ln t - a\ln a - \int_a^t x\frac{1}{x}dx \\
&= t\ln t - a\ln a - \int_a^t 1dx = t\ln t - a\ln a - (t-a)
\end{aligned}$$

ここで t を変数，a を定数とすれば $t\ln t - t$ が $\ln t$ の積分であることがわかる．

$$f(x) = \ln x \longleftrightarrow F(x) = x\ln x - x$$

実際に $x\ln x - x$ を x で微分すれば $\ln x$ が得られることは容易に確かめられる．

8.1.3　**置換積分**

関数の変数が別の変数の関数になっている場合の積分) を考える．$\dfrac{dF}{dx} = f$ が成立し，変数 x を別の変数 t の関数と $x(t)$ して表すことができるとする．このとき，変数が別の変数の関数になっている場合の微分を用いて，

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = f(x(t))\frac{dx}{dt}$$

両辺を t で積分して

$$F = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$$

を得る．これを置換積分という．置換積分を用いて定積分を行うときは変数を新しい変数に置き換えるときの変数の範囲に注意すること．

例 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

$x = \tan\theta$ とおくと，x が 0 から 1 へ動くときに新しい変数 θ は 0 から $\pi/4$ まで動くので

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)}\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\pi/4} 1\ d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

例 2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}d\theta \quad (|r|<1)$

$t = \cos\theta$ とおくと，$\dfrac{dt}{d\theta} = -\sin\theta$．$\theta$ が 0 から π へ動くときに変数 t は 1 から -1 まで動くので

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}d\theta &= \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2r\cos\theta+r^2}(-\frac{dt}{d\theta})d\theta \\ &= \int_1^{-1} \frac{1}{1+2rt+r^2}(-dt) \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+2rt+r^2}dt \\ &= \frac{1}{2r}\left[\ln(1+2rt+r^2)\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2r}[\ln(1+r)^2 - \ln(1-r)^2] = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\end{aligned}$$

8.2　演習問題

1. 以下の定積分を求めよ

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\ \cos x\ dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$　　(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$

   (e) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\ dx$ (n は自然数)　　(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2. n を $n \geq 2$ なる整数とするとき，次の公式を示せ.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \left(\frac{n-1}{n}\right) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$$

3. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b は正の定数) の面積を求めよ.
4. 底面が半径 r の円で高さが h の円錐の体積を積分を用いて求めよ.

8.3　解答例

1.

(a)

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = 0 - \int_0^1 \frac{x}{2}dx = -\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

(注: $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$)

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\ \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

(c)

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(d)

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

(e) $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$ (n は 0 以上の整数) とすると,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1 \\ I_n &= \left[x^n(-e^{-x})\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} nx^{n-1}(-e^{-x})dx \\ &= n\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = nI_{n-1} \end{aligned}$$

よって

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots n!I_0 = n!$$

(f) $x = \sin\theta$ とおいて $\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$. $x = 0 \to 1$ で $\theta = 0 \to \pi/2$ より

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

2. $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ とおくと

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin x\ \sin^{n-1} x\, dx \\
&= \big[(-\cos x)\sin^{n-1} x\big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x\ \cos x\, dx \\
&= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ \sin^{n-2} x\, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\
I_n + (n-1)I_n &= (n-1)I_{n-2} \\
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

3. 楕円の上半分は $y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ と表すことができるので，面積は

$$2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

で求められる．$x = a\sin t$ と置くと，x が $-a$ から a まで動くときに t は $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで動くので

$$\begin{aligned}
2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx &= 2b\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\frac{dx}{dt}dt = 2b\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\ (a\cos t)\ dt \\
&= 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt \\
&= ab\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab
\end{aligned}$$

(別解: 重積分 (10.2 節) を用いる方法)
楕円で囲まれた領域を D とすると，D は $x = ar\cos t$, $y = br\sin t$ $(0 \le r \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi)$ と表すことができる．

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{pmatrix} = abr$$

よって求める面積は

$$\int\!\!\int_D dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abrdtdr = ab(2\pi)\int_0^1 rdr = 2\pi ab\frac{1}{2} = \pi ab$$

4.

図のような，円錐の底から高さ y のところにある半径 d，厚さ dy の円盤を考えると，比例関係から

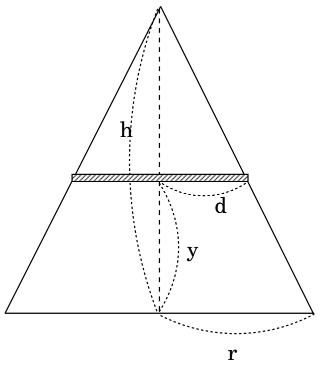
$$d = \left(\frac{h-y}{h}\right) r$$

よって円盤の体積は

$$\pi d^2 dy = \pi \frac{r^2}{h^2}(h-y)^2 dy$$

となる．円錐の体積はこれを y について 0 から h まで積分すれば求められて

$$\int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2}(h-y)^2 dy = \pi \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{(y-h)^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



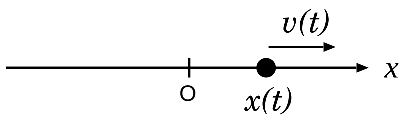
第 II 部

大学初級レベル

第 9 章

微積分の物理的イメージ

9.1　力学超入門



物体の運動を表すには、物体の位置、速度 (速さと向きの両方) が必要となる．今、簡単のため物体は直線の上を運動しているとし、その直線を x 軸にとる．時刻 t での物体の位置を、その x 座標で表し $x(t)$ とする．速度は位置の変化を要した時間で割ったもので与えられる．

時刻 $t+\Delta t$ での物体の位置は $x(t+\Delta t)$ で与えられるので、

$$\text{速度} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

になる．ここで時間間隔 Δt を非常に小さくして 0 に近づく極限を考え、そのときの速度を $v(t)$ と記す．この極限操作が数学での微分に相当し,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

と表される．

次に速度の時間変化を考える．位置の時間変化から速度が出てきたときと同様に、

$$\begin{aligned}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} &= \frac{\left(\frac{x(t+2\Delta t)-x(t+\Delta t)}{\Delta t}\right)-\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right)}{\Delta t}\\ &= \frac{x(t+2\Delta t)+x(t)-2x(t+\Delta t)}{(\Delta t)^2}\end{aligned}$$

が速度の時間変化になり、ここで Δt が非常に小さい極限をとったときの値を加速度 $a(t)$ とよぶ．微分を使うと $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ となる．

物体の運動を表す法則の一つは、「加速度は物体に加えられる力に比例する。」というものであり、式で表すと以下のようになる．

$$F = ma(t) = m\frac{dv(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

ここで m は物体の質量、F は物体に加えられる力である．この関係を運動方程式とよぶ．数学的には位置の関数 $x(t)$ についての微分方程式である．

運動方程式を解くというのは，関数 $x(t)$ を求めることであり，物体の質量 (m) と，その初期条件 (ある時刻 t_0 での物体の位置と速度: $x(t_0)$, $v(t_0)$)，物体にどのような力 (F) が加えられるかが分かっていると (原理的には) $x(t)$ を得ることができ，好きな時刻での物体の位置を求めることができる．

9.2　積分のイメージ

ある時刻 t での物体の位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ が分かっているとすると，時刻 $t+\Delta t$ での物体の位置と加速度は近似的に

$$
\begin{aligned}
x(t+\Delta t) &= x(t) + v(t)\Delta t\ , \\
v(t+\Delta t) &= v(t) + a(t)\Delta t = v(t) + \frac{F}{m}\Delta t
\end{aligned}
$$

で与えられる．時刻 $t+2\Delta t$ では、

$$
\begin{aligned}
x(t+2\Delta t) &= x(t+\Delta t) + v(t+\Delta t)\Delta t \\
&= x(t) + v(t)\Delta t + \left(v(t) + \frac{F}{m}\Delta t\right)\Delta t \\
&= x(t) + 2v(t)\Delta t + \frac{F}{m}(\Delta t)^2\ , \\
v(t+2\Delta t) &= v(t+\Delta t) + a(t+\Delta t)\Delta t \\
&= v(t) + \frac{F}{m}\Delta t + \frac{F}{m}\Delta t
\end{aligned}
$$

となる．これらは Δt の高次のべき乗の項を無視した近似式であるが，上の操作を何度もくり返した上で $\Delta t \to 0$ の極限をとると正しい結果が得られる．これが数学での積分の操作に相当する．(8.1.1 節を参照．)

(参考: コンピュータを使っての数値積分では $\Delta t \to 0$ の極限がとれないので，微小だが有限の Δt で実際に上の操作に類することを行う．)

9.3　演習問題

1. 以下で表される質点の運動の速度と加速度を求めよ．また，運動方程式も求めよ．ただし，質点の質量を m とし，t は時間である．
   (a) 等速直線運動: $x = vt$ (v は定数)
   (b) 自由落下: $z = h_0 - \dfrac{1}{2}gt^2$ (h_0 は $t = 0$ での高さ．g は重力加速度)
   (c) 真上への投げ上げ: $z = h_0 + vt - \dfrac{1}{2}gt^2$ (v は初速．h_0, g は上問と同じ．)
   (d) 放物運動: $(x, z) = (x_0 + v_x t\ , z_0 + v_z t - \dfrac{1}{2}gt^2)$ ($t = 0$ での位置 (x_0, y_0), 速度 (v_x, v_z))
   (e) 等速円運動: $(x, y) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ (R は円運動の半径, ω は角速度)
   (f) 単振動: $x = A\sin(\omega t + \alpha)$ (A は振幅，ω は角速度，α は初期位相)
2. 質量 m の質点の鉛直方向の運動を考える．時刻 t での質点の z 座標を $z(t)$ とし，$t = 0$ で $z(0) = z_0$, $dz/dt = v_0$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，重力加速度を g，鉛直上向きを正の向きとする．
   (a) 質点の運動方程式を書け．
   (b) 運動量と加速度の積を g と速度で表せ．
   (c) $\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{dz(t)}{dt}\right)^2 + mgz(t)$ が時間に依存しないことを示せ．
3. 時刻 t での質点の速度が $\dfrac{d}{dt}(x, y) = (k\,(1 - \cos(\omega t))\,,\ k\sin(\omega t))$ で与えられる運動がある．この質点の時刻 t での位置を求めよ．またその運動の軌跡の概形を描け．ただし $t = 0$ で質点は原点にあるものとする．

9.4　解答例

1. (a) 速度: $\dfrac{dx}{dt} = v$，加速度: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$，運動方程式: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0.$

   (b) 速度: $\dfrac{dz}{dt} = -gt$，加速度: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g$，運動方程式: $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg.$

   (c) 速度: $\dfrac{dz}{dt} = v - gt$，加速度: $\dfrac{d^2z}{dt^2} = -g$，運動方程式: $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg.$

   (d) 速度: $\dfrac{d}{dt}(x,z) = (v_x, v_z - gt)$，加速度: $\dfrac{d^2}{dt^2}(x,z) = (0,-g)$，
   運動方程式: $m\dfrac{d^2}{dt^2}(x,z) = m(0,-g).$

   (e) 速度: $\dfrac{d}{dt}(x,y) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$，
   加速度: $\dfrac{d^2}{dt^2}(x,y) = -R\omega^2(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$，
   運動方程式: $m\dfrac{d^2}{dt^2}(x,y) = -\omega^2(x,y).$

   (f) 速度: $\dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$，加速度: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha)$，
   運動方程式: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$

2. (a) $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg$

   (b) 時刻 t での速度: $\dfrac{dz}{dt} = v_0 - gt$，加速度: $\dfrac{d^2z}{dt^2} = -g$ より

$$(\text{運動量}) \times (\text{加速度}) = m(v_0 - gt)(-g) = -mgv_0 + mgt^2$$

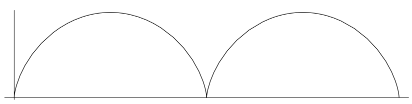
   (c)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2 + mgz(t)\right] &= m\frac{dz(t)}{dt}\frac{d^2z(t)}{dt^2} + mg\frac{dz(t)}{dt}\\ &= -mgv_0 + mgt^2 + mg(v_0 - gt) = 0\end{aligned}$$

3.

$$(x(t), y(t)) = \int^t \left(k\left(1 - \cos(\omega s)\right),\ k\sin(\omega s)\right)ds = k(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t),\ -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)) + (x_0, y_0)$$

$(x(0), y(0)) = (0,0)$ より $x_0 = 0,\ y_0 = \dfrac{k}{\omega}$. よって $(x(t), y(t)) = \dfrac{k}{\omega}(\omega t - \sin(\omega t),\ 1 - \cos(\omega t))$



第 10 章

多変数関数の微積分

10.1 偏微分

複数の変数をもつ関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を考える．変数の一つにだけ注目し，他の変数は固定された定数と見なして微分を計算したものを偏微分とよぶ.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f((x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h}$$

このときの微分の記号には d でなくて ∂ を用いる.

偏微分を用いて，多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ で各変数 x_k が dx_k だけ微小に変化した場合の $f(x_1, \ldots, x_n)$ の変化 df は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

と表される．これを全微分という.

例：理想気体 n モルでの圧力 P は状態方程式からモル数 n，温度 T，体積 V の関数で表される.

$$P = \frac{nRT}{V} \quad (R \text{ は気体定数})$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial n} dn + \frac{\partial P}{\partial T} dT + \frac{\partial P}{\partial V} dV = \frac{RT}{V} dn + \frac{nR}{V} dT - \frac{nRT}{V^2} dV$$

[変数変換]

関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が別の変数 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ の関数として表されるとき; $x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_n)$，$t_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ についての偏微分は次の式で表すことができる．(連鎖定理)

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_k}$$

例) 二次元の直交座標 (x, y) が極座標 (r, θ) $(0 \leq r \leq \infty,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の関係にある場合.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ,\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

より

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta\ , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta \quad .$$

$\sin\theta = y/\sqrt{x^2+y^2}$ の両辺を x, y で偏微分して

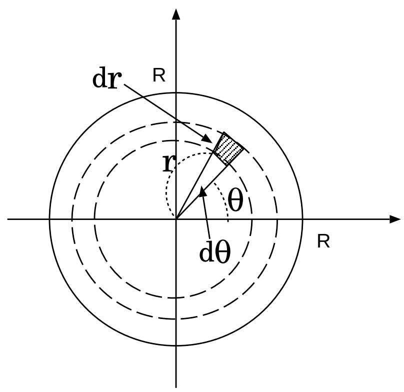
$$\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\ ,$$
$$\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\cos^2\theta}{r}\ .$$

よって $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{r}$. これらを用いて

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\ .$$

10.2　重積分

曲線で囲まれた部分の面積や立体の体積，4 次元以上の空間中の領域の体積を求めるにはどうすればいいだろうか[*1].



円の場合を考えてみる．円の内部に半径 r の円と半径 $r+dr$ の円で囲まれた同心円を考え，さらに原点から出発する角度 θ と $\theta+d\theta$ の半直線をとる．これらで囲まれた図中の斜線部の面積は，$rd\theta dr + \cdots$. 微小の極限としての dr, $d\theta$ を考えると第二項以降は無視できる．この斜線部の面積を，r が 0 から R まで，θ が 0 から 2π の範囲で足し上げたものが半径 R の円の面積となる．

$$\int_0^R\int_0^\pi r\ d\theta dr = \int_0^R r\left(\int_0^\pi d\theta\right)dr = 2\pi\int_0^R r\ dr = \pi R^2$$

このように複数の積分を行うことを重積分という．自然科学では

$$\int\int\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ dx_1dx_2\ldots dx_n$$

のような形の多重の積分が必要になることが多い．重積分の計算を行うには，被積分関数を独立な変数毎に積分していけばよい．計算を容易にするために多変数での変数変換を行うことがある．この場合，変数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ を新たな変数 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ の関数，$x_1(k_1,k_2,\ldots,k_n)$, $x_n(k_1,k_2,\ldots,k_n)$,

[*1] 自然科学で 4 次元以上の空間など考える必要は無いと思うかもしれないが，力学その他で複数の物体の運動を位相空間で表す際などに必要となる．

$\dots x_n(k_1, k_2, \dots, k_n)$ として表して，以下の関係式を用いる．

$$dx_1 dx_2 \dots dx_n = |J| \, dk_1 dk_2 \dots dk_n$$

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial k_1} & \frac{\partial x_1}{\partial k_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial k_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial k_1} & \frac{\partial x_2}{\partial k_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial k_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial k_1} & \frac{\partial x_n}{\partial k_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial k_n} \end{pmatrix}$$

ここで現れた J という行列式はヤコービアンとよばれる．式中の $|J|$ は行列式 J の絶対値であることに注意せよ．

例 1) 球の体積

球の体積を求めるのに，まず直交座標を球座標に変換する．

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ ,\quad y = r\sin\theta\sin\phi\ ,\quad z = r\cos\theta\quad (0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le \phi \le 2\pi)$$

ヤコービアンは

$$\begin{aligned} J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi - (-r^2)\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi - (-r^2)\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} (\text{半径 } R \text{ の球の体積}) &= \int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le R^2} dxdydz = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta d\phi d\theta dr \\ &= 2\pi\int_0^R\int_0^\pi r^2\sin\theta d\theta dr = 2\pi\int_0^R r^2\left[-\cos\theta\right]_0^\pi dr \\ &= 4\pi\int_0^R r^2\ dr = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

例 2) ガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = I$ と置くと $(I > 0)$

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\ (\text{極座標に変数変換して}) \quad &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rd\theta dr = 2\pi\int_0^R e^{-r^2}rdr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \\ &= \pi \end{aligned}$$

よって $I = \sqrt{\pi}$.

10.3　演習問題

1. 以下の偏微分を求めよ.

(a)	$\frac{\partial}{\partial y}\ln\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]$	(b)	$\frac{\partial}{\partial x}\ln\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]$	(c)	$\frac{\partial}{\partial x}\sin(\sqrt{x^2+y^2})$
(d)	$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{y}{x}\right]$	(e)	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{y}{x}\right]$	(f)	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{y}{x}\right]$

2. 直交座標 (x, y, x) から 球座標への変換を $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ とするとき，$\dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial}{\partial \theta}, \dfrac{\partial}{\partial \phi}$ を r, θ, ϕ および $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ を用いて表せ.
3. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．$r \neq 0$ のとき以下が成立することを示せ.
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{1}{r} = 0$$
4. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b$ は正の定数$)$ の面積を，重積分を用いて求めよ.
(hint: $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ $(0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi)$ と置く．)
5. 領域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$ $(a, b, c$ は正の定数$)$ の体積を求めよ.
6. 次の積分を $0 < a < R$, $R < a$ の両方の場合について求めよ.
$$\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{-G}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}\rho r^2\sin\theta d\phi d\theta dr$$
ここで G, ρ, a は正の実数である.

10.4　解答例

1. (a)

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]=\frac{\partial}{\partial y}[\ln x-\ln(x^2+y^2)]=-\frac{2y}{x^2+y^2}$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]=\frac{\partial}{\partial x}[\ln x-\ln(x^2+y^2)]=\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}$$

(c)

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin(\sqrt{x^2+y^2})=\cos(\sqrt{x^2+y^2})\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\cos(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(d)

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{y}{x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x}=\frac{-1}{x^2}$$

(e)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{y}{x}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x}=0$$

(f)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{y}{x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-y}{x^2}\right]=\frac{2y}{x^3}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial z}\ ,\\
\frac{\partial}{\partial \theta}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}=r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}\ ,\\
\frac{\partial}{\partial \phi}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \phi}=-r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

3. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$ に対し,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x)\right]\\
&=-\left[(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2x)x\right]=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}
\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\quad,\quad\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

よって

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{1}{r}=\frac{-3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=\frac{-3}{r^3}+\frac{-3r^2}{r^5}=0$$

4. 楕円で囲まれた領域を D とすると，D は $x = ar\cos t$, $y = br\sin t$ $(0 \le r \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi)$ と表すことができる．

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{pmatrix} = abr$$

よって求める面積は

$$\int\int_D dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abrdtdr = ab(2\pi)\int_0^1 rdr = 2\pi ab\frac{1}{2} = \pi ab$$

5. 問題の領域を D とすると，D は $x = ar\sin\theta\cos\phi$, $y = br\sin\theta\sin\phi$, $z = cr\cos\theta$ $(0 \le r \le 1,$ $0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi)$ と表すことができる．ヤコービアンは

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi & ar\cos\theta\cos\phi & -ar\sin\theta\sin\phi \\ b\sin\theta\sin\phi & br\cos\theta\sin\phi & br\sin\theta\cos\phi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= abcr^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi + abcr^2\sin^3\theta\sin^2\phi + abcr^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + abcr^2\sin^3\theta\cos^2\phi$$

$$= abcr^2(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta) = abcr^2\sin\theta$$

よって求める体積は

$$\int\int\int_D dxdydz = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} abcr^2\sin\theta d\phi d\theta dr = 2\pi abc\int_0^1\int_0^\pi r^2\sin\theta d\theta dr$$

$$= 4\pi abc\int_0^1 r^2\ dr = \frac{4\pi}{3}abc$$

6. 求める積分を I とすると

$$I = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{-G}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}\rho r^2\sin\theta d\phi d\theta dr = -2\pi G\rho\int_0^R\int_0^\pi \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}d\theta dr$$

$$= -2\pi G\rho\int_0^R r^2\left[\frac{1}{ar}(r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{1/2}\right]_0^\pi dr$$

$$= -\frac{2\pi G\rho}{a}\int_0^R r\left\{(r^2+a^2+2ar)^{1/2} - (r^2+a^2-2ar)^{1/2}\right\}dr$$

$$= -\frac{2\pi G\rho}{a}\int_0^R r(|r+a| - |r-a|)dr$$

上の積分で r は $0 \le r \le R$ の範囲を動く．$R < a$ のときは $r \le R < a$ より $|r-a| = a-r$．このとき

$$I = -\frac{2\pi G\rho}{a}\int_0^R r\{(r+a)-(a-r)\}dr = -\frac{2\pi G\rho}{a}\int_0^R 2r^2\ dr$$

$$= -\frac{4\pi G\rho R^3}{3a}\quad\left(= -G\frac{M}{a}\quad (M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho)\right)$$

$0 < a < R$ のときは積分を二つに分けて

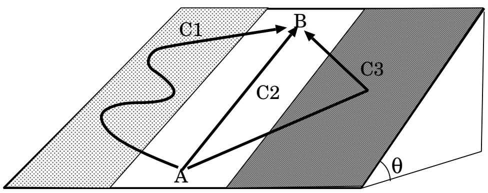
$$\begin{aligned} I &= -\frac{2\pi G\rho}{a}\left[\int_0^a r\{(r+a)-(a-r)\}dr + \int_a^R r\{(r+a)-(r-a)\}dr\right] \\ &= -\frac{2\pi G\rho}{a}\left[\int_0^a 2r^2\,dr + \int_a^R 2ar\,dr\right] = -\frac{2\pi G\rho}{a}\left[\frac{2}{3}a^3 + a(R^2-a^2)\right] \\ &= -\frac{4\pi G\rho a^2}{3} - 2\pi G\rho(R^2-a^2) = 2\pi G\rho(\frac{a^2}{3} - R^2) \end{aligned}$$

第 11 章

線積分と面積分

11.1　線積分

図のような斜面があり，色の違う部分は摩擦の大きさが異なるとする．荷物を斜面に沿って滑らせながら A 点から B 点まで運ぶのに必要な仕事の大きさは，摩擦のために経路によって違ってくる．



荷物を微少な変位 $\Delta\vec{r}$ だけ移動させるのに必要な仕事は，その地点で荷物を移動させるのに必要な力を $\vec{F}(\vec{r})$ として，$\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}$ となる．これを経路に沿って足し上げたものが，その経路にそって荷物を運ぶのに必要な仕事であり，以下のような積分で表す．

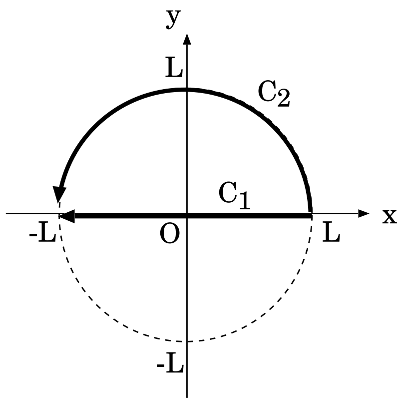
$$\sum_C \vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r} \longrightarrow \int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

実際に計算するには，経路を表す式とパラメータ，$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$，を指定し，そのパラメータについて積分する．

$$\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{t1}^{t2} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt$$

このように，経路に沿って行う積分を線積分とよぶ．

例) 摩擦のある水平面上 (動摩擦係数 μ) を滑らせながら，質量 m の荷物を位置 $(L, 0)$ から $(0, -L)$ に移動させる場合の仕事 W．



この場合, 摩擦力の大きさは μmg であり, その向きは常に進行方向と逆向きである．その摩擦力に逆らって荷物を押すには $\vec{F} = \mu mg \dfrac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|}$ の力を加えなければならない．よって

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu mg \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} \cdot d\vec{r} = \mu mg|d\vec{r}| = \mu mg|\frac{d\vec{r}}{dt}dt|$$

経路 C_1: $\vec{r} = (L(1-t), 0)\ \ (0 \le t \le 2)$

$$|\frac{d\vec{r}}{dt}dt| = |(-L,0)dt| = Ldt \text{ より } W(C_1) = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \mu mgLdt = 2\mu mgL$$

経路 C_2: $\vec{r} = L(\cos t, \sin t)\ \ (0 \le t \le \pi)$

$$|\frac{d\vec{r}}{dt}dt| = |L(-\sin t, \cos t)dt| = Ldt \text{ より } W(C_2) = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \mu mgLdt = \mu mgL\pi$$

ここまでの説明は数学に定義された線積分を物理に応用した例である．より一般的には，経路を $s(t) = (x(t), y(t))$ $(t_1 \le t \le t_2)$ として以下のように表される．

$$\int_C f(s)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(s(t))\frac{ds}{dt}dt\ ,\quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

● 経路を逆にたどる積分は，元の経路の複素積分の符号 $(+-)$ を変えた値になる．

例) 円 $x^2 + y^2 = r^2$ (r は正の実数) の周の長さ．

円を一周する経路を $C : (x(t), y(t)) = (r\cos t, r\sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ と表すと，微少な変位による移動距離は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\, dt = rdt$$

よって円周の長さは

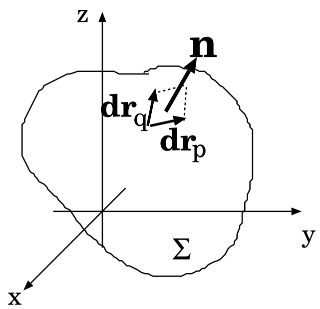
$$\int_C ds = \int_0^{2\pi} rdt = 2\pi r$$

11.2 面積分

空間中での二次元曲面は，その曲面上での位置ベクトルを二つのパラメータ p, q で指定して表すことができる．たとえば，原点を中心とする半径 R の球面は，球面上の位置を (θ, ϕ) $(0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi < 2\pi)$

$$x = R \sin\theta \cos\phi \ , \ x = R \sin\theta \sin\phi \ , \ z = R \cos\theta$$

で表すことができる．($x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ という球面の式が成立していることを確かめよ．)



空間中の面 Σ 上の点が $\vec{r}(p, q)$ と表されるとき，関数 $f(\vec{r})$ の Σ での面積分を以下で定義する．

$$\int_\Sigma f(\vec{r})\ dS \equiv \int\int f(\vec{r}(p,q)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial p} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right| \ dpdq$$

電磁気学など，物理ではこの種の積分の取り扱いが必要となることが多い．

例) 原点に電荷 Q があるとき，原点を中心とする半径 R の球面 Σ を貫く電気力線の数．

電気力線数の単位面積あたりの密度を，面に垂直な方向の電場の強さで定義する．原点から r 離れた位置 $\vec{r}$ での電場 $\vec{E}$ の大きさは $\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ であり，その向きは位置ベクトル $\vec{r}$ の向きと一致する．この場合 $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{r}$ として，電気力線の本数は $\displaystyle\int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\ dS$ で与えられる．$\vec{r}$ の成分を球座標 (一番上の式) で表すと，

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (R\cos\theta\cos\phi, R\cos\theta\sin\phi, -R\sin\theta) \ , \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-R\sin\theta\sin\phi, R\sin\theta\cos\phi, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (R^2\sin^2\theta\cos\phi, R^2\sin^2\theta\sin\phi, R^2\sin\theta\cos\theta)$$

よって，

$$\int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\ dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^2 \sin\theta\ d\theta d\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

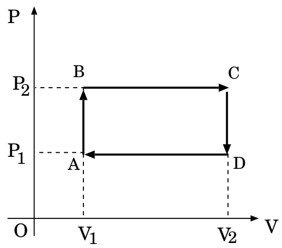
線積分，面積分と体積積分の関係を表す重要な定理を以下に与えておく．(証明は適当な参考書を参照せよ．)

$$\text{ガウスの定理 (面積分と体積積分の関係)} \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{A}\ dV$$

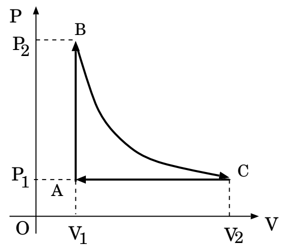
$$\text{ストークスの定理 (線積分と面積積分の関係)} \int \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n}\ dS$$

11.3　演習問題

1. 以下の線積分を求めよ
   (a) 原点から点 (a,b) まで直線的に進む経路に沿った $f(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$ (k は正の定数) の線積分
   (b) x 軸上の正の無限遠点から点 $(r,0)$ まで直線的に進む経路に沿った $f(x,y)=\dfrac{k}{x^2+y^2}$ (k は正の定数) の線積分
   (c) 原点を中心とする半径 R の円周上を 1 周する経路に沿った $f(x,y)=\dfrac{\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}$ (μ_0 は正の定数) の線積分
2. 理想気体では，圧力 (P)，体積 (V)，温度 (T) の間に $PV=nRT$ (n はモル数，R は気体定数) の関係が成立する．以下の問いに答えよ．
   (a) 1 モルの理想気体の状態を下の図のように A→B→C→D と変化させた場合に気体が外へなす仕事 $\displaystyle\int PdV$ を求めよ．



   (b) 1 モルの理想気体の状態を下の図のように A→B→C と変化させた場合に気体が外へなす仕事 $\displaystyle\int PdV$ を求めよ．ただし B→C の状態変化は等温過程とする．



   (c) 問 (b) で，B→C の状態変化が断熱過程の場合，$PV^\gamma=[一定]$ (γ は定数) である．この場合に A→B→C と変化させた場合に気体が外へなす仕事を求めよ．
3. 半径 a の球内及び球面上でベクトル場 $\vec{E}$ が $\vec{E}(\vec{r})=k\vec{r}$ で与えられているとき，球の表面 S における面積分 $\displaystyle\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS$ ($\vec{n}=\vec{r}/|\vec{r}|$) が球内部分の体積積分 $\displaystyle\int_V \nabla\cdot\vec{E}dV$ に等しくなることを直接計算して示せ．
4. 半径 a の円内及び円周上でベクトル場 $\vec{A}$ が $\vec{A}(x,y,z)=(0,\omega x,0)$ (ω は定数) で与えられているとき円周上を反時計回りにまわる経路 C での線積分 $\displaystyle\int_C \vec{A}\cdot d\vec{s}$ が円内部分の面積分 $\displaystyle\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}dS$ ($\vec{n}=(0,0,1)$) に等しくなることを直接計算して示せ．

11.4　解答例

1.

(a) 経路を $C:(x(t),y(t))=(at,bt,0)\ (t=0\to 1)$ ととると，$ds=\sqrt{a^2+b^2}dt$．求める積分は

$$\begin{aligned}\int_c f(x,y)ds &= \int_0^1 k\sqrt{(at)^2+(bt)^2}\sqrt{a^2+b^2}dt = k(a^2+b^2)\int_0^1 tdt \\ &= \frac{k}{2}(a^2+b^2)\end{aligned}$$

(b) 経路を $C:(x(t),y(t))=(t,0,0)\ (t=\infty\to r)$ ととると，$ds=dt$．求める積分は

$$\int_c f(x,y)ds = \int_\infty^r \frac{k}{t^2}dt = -\frac{k}{r}$$

(c) 経路を $C:(x(t),y(t))=(R\cos t,R\sin t)\ (t=0\to 2\pi)$ ととると，$ds=Rdt$．求める積分は

$$\int_c f(x,y)ds = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}}Rdt = \mu_0$$

2.

(a)

過程	A→B	B→C	C→D	D→A
P	$\frac{RT}{V}$ (V 一定)	P_2 (一定)	$\frac{RT}{V}$ (V 一定)	P_1 (一定)

より

$$\begin{aligned}\int PdV &= 0+\int_{V_1}^{V_2}P_2dV+0+\int_{V_2}^{V_1}P_1dV \\ &= P_2(V_2-V_1)+P_1(V_1-V_2)=(P_2-P_1)(V_2-V_1)\end{aligned}$$

(b)

過程	A→B	B→C	C→A
P	$\frac{RT}{V}$ (V 一定)	$\frac{RT}{V}$	P_1 (一定)

より

$$\begin{aligned}\int PdV &= 0+\int_{V_1}^{V_2}\frac{RT}{V}dV+\int_{V_2}^{V_1}P_1dV = RT\ln(\frac{V_2}{V_1})+P_1(V_1-V_2) \\ &= RT\ln(\frac{V_2}{V_1})-P_1(V_2-V_1)\end{aligned}$$

(c) (b) で B→C の過程において $PV^\gamma = P_2V_1^\gamma = P_1V_2^\gamma$ なので $P = \dfrac{P_2V_1^\gamma}{V^\gamma}$

$$
\begin{aligned}
\int PdV &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{P_2V_1^\gamma}{V^\gamma} dV - P_1(V_2 - V_1) \\
&= P_2V_1^\gamma \frac{V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} - P_1(V_2 - V_1) \\
&= \frac{P_1V_2 - P_2V_1}{1-\gamma} - P_1(V_2 - V_1)
\end{aligned}
$$

3. 球の表面では $\vec{E} \cdot \vec{n} = k\vec{r} \cdot \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = k|\vec{r}| = ka$ よって

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} kaa^2 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi ka^3$$

一方，$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot k(x, y, z) = 3k$ より

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \int_0^a \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 3kr^2 \sin\theta d\phi d\theta dr = 3k\frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi ka^3$$

よって，両者は一致する.

4. 線積分の経路を $C\ :\ (x(t), y(t)) = (a\cos t, a\sin t)\ (t = 0 \to 2\pi)$ ととると，$d\vec{s} = a(-\sin t, \cos t, 0)dt$.

$$
\begin{aligned}
\int_C \vec{A} \cdot \vec{s} &= \int_0^{2\pi} (0, \omega a\cos t, 0) \cdot a(-\sin t, \cos t, 0)dt = \int_0^{2\pi} \omega a^2 \cos^2 dt \\
&= \omega a^2 = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \omega\pi a^2
\end{aligned}
$$

一方 $\nabla \times \vec{A} = (0, 0, \omega)$ より

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} \omega r d\theta dr = \omega\pi a^2$$

よって，両者は一致する.

第 12 章

テーラー展開

12.1 テーラー展開

何回でも微分可能な実数関数 $f(x)$ があり，それが次のように $(x-a)^n$ (a は任意の実数，n は 0 以上の整数) の級数で展開可能とする．(これを解析的という．)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

このとき，係数 c_n を求めると，

(1) 式の両辺に $x=a$ を代入して	$f(a) = c_0$
(1) 式の両辺を x で微分して	$f'(x) = 0 + c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$
この両辺に $x=a$ を代入して	$f'(a) = c_1$
(1) 式の両辺を x で 2 度微分して	$f''(x) = 0 + 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3(x-a)^2 \cdots$
この両辺に $x=a$ を代入して	$f''(a) = 2c_2$
$\vdots$	$\vdots$
(1) 式の両辺を x で n 回微分して	$\dfrac{d^n}{dx^n} f(x) = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 c_n + (n+1)\cdot n \cdots 2c_{n+1}(x-a) + \cdots$
この両辺に $x=a$ を代入して	$f^{(n)}(a) = n! c_n$

この結果より，解析的な実数関数 $f(x)$ の $x=a$ を中心とした展開 (テーラー展開) を得る：

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\,(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n\ .$$

特に $a=0$ の場合をマクローリン展開という．

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\,x^n\ .$$

例)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

解析的な関数の場合，上の式は任意の x で使用できるが，解析的でない関数 (ある点で微分不可能だったり，発散したりするもの) の場合は，級数の収束範囲に注意する．

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1 \text{ で収束})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \ (-1 < x \leq 1 \text{ で収束})$$

多変数関数の場合，それぞれの変数毎に上のテーラー展開の式を偏微分を用いて適用する．

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(x-b) + \cdots \ . \end{aligned}$$

12.2　三角関数，指数関数の級数展開による定義

$\sin x$, $\cos x$ は任意の実数 x で何回でも微分可能かつ微分した関数が連続なのでテーラー展開できる．テーラー展開の公式で $a = 0$ として，sin, cos に適用すると，

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \ ,$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \ .$$

これを $\sin x$, $\cos x$ の定義とすることもでき，単位円での定義による sin, cos と値は一致する．(数値計算で三角関数の値を求めるときは級数展開による定義を用いている．) 指数関数のテーラー展開は，

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \ .$$

これらの展開は x が実数の時に成立するが，ここで適用範囲を拡張して変数が複素数の場合でも上の展開式を三角関数と指数関数の定義にとることにすると，このとき実数 θ に対し以下の関係が成立する．

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{i^{2m}}{(2m)!}\theta^{2m} + \frac{i^{2m+1}}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} = \cos\theta + i \sin\theta \end{aligned}$$

この関係式はオイラーの公式とよばれ，非常によく用いられる．加法定理を用いると，

$$
\begin{aligned}
e^{i\alpha}e^{i\beta} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\
&= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

となって，上の定義でも指数関数の性質 $e^A e^B = e^{A+B}$ が成立していることがわかる．一般の複素数の場合でも，z, w を複素数として，

$$
\begin{aligned}
e^z e^w &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}z^k w^{n-k} \\
&\qquad\qquad (k+j=n \text{ として和の取り方を変えた}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n \text{ (二項定理を用いた)} \\
&= e^{z+w}
\end{aligned}
$$

となって，同じ性質が成立することが示される．

12.3　演習問題

1. テーラー展開の公式 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k$ を用いて，$\sin x$, $\cos x$ のテーラー展開を求めよ．
2. $\cos x$ のテーラー展開で x^4 までの項に $x = \dfrac{\pi}{3}$ を代入し，真の値との誤差がいくらになるか計算せよ．(電卓等を用いよ．)
3. $|x| < 1$ の時に $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の $x = 0$ を中心とした展開を x^2 の項まで求めよ．
4. a, r を $r \ll a$ なる正の実数とし、 θ を任意の実数とする時、$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}}$ の $r = 0$ を中心とした展開を r^2 の項まで求めよ．
5. $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ を示せ．
6. $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} e^{2ikx}\right|^2$ を求めよ．

12.4　解答例

1. まず $\sin x$, $\cos x$ の n 回微分を求める．

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x\ ,\ \frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x\ ,\ \cdots\ ,$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \begin{cases} (-1)^m \sin x & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^m \cos x & (n = 2m+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\ ,\ \frac{d^2}{dx^2}\cos x = -\cos x\ ,\ \cdots\ ,$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\cos x = \begin{cases} (-1)^{m+1} \cos x & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{m+1} \sin x & (n = 2m+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで m は 0 以上の整数である．ここで $x = 0$ として $f^{(n)}(0)$ を求めてテーラー展開の公式に代入して，

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\ x^{2m+1}\ ,\quad \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\ x^{2m}$$

2.

$$\cos\frac{\pi}{3} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 = 1 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^4}{1944} = 0.501796\ldots$$

真の値 0.5 との差は 0.001796….　これは真の値の約 0.36% になる．次の項は $-\dfrac{1}{6!}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^6 = -\dfrac{\pi^6}{524880} = -0.00183\ldots$ なので，小数点以下第二位までの精度を求めるなら，$\dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^4$ までの展開で十分である．

3. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = f(x)$ とおくと，$f'(x) = (1/2)\ (1-x)^{-3/2}$，$f''(x) = (3/4)\ (1-x)^{-5/2}$．よって

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + O(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(z^3)$$

4.

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1 - [(2a/r)\cos\theta - (r/a)^2]}}$$

$[(2a/r)\cos\theta - (r/a)^2] = x$ とおいて，前問の結果より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}} &= \frac{1}{a}\left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3)\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[1 + \frac{1}{2}[(2a/r)\cos\theta - (r/a)^2] + \frac{3}{8}[(2a/r)\cos\theta - (r/a)^2]^2 + O(x^3)\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[1 + \frac{r}{a}\cos\theta - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{3r^2\cos^2\theta}{2a^2} + O(r^3)\right] \\
&= \frac{1}{a} + \frac{r}{a^2}\cos\theta + \frac{r^2}{a^3}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) + O(r^3)
\end{aligned}$$

5. オイラーの公式より $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$. よって

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\ ,\quad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

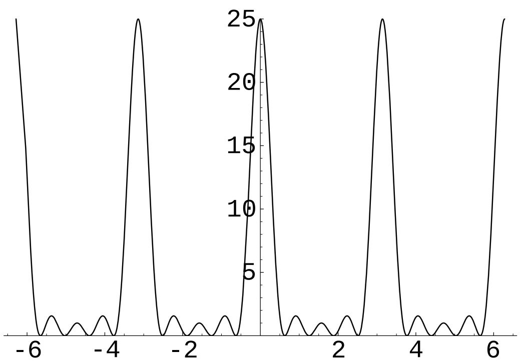
6. $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} e^{2ikx}$ とおくと，等比級数の和を求める要領で，

$$\begin{aligned} A &= 1 + e^{2ix} + e^{4ix} + \cdots e^{2i(N-1)x} = \frac{1-(e^{2ix})^N}{1-e^{2ix}} = \frac{1-e^{2iNx}}{1-e^{2ix}} \\ &= \frac{e^{iNx}(e^{-iNx} - e^{2iNx})}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})} = \frac{e^{iNx}2i\sin(Nx)}{e^{ix}2i\sin x} = \frac{e^{iNx}\sin(Nx)}{e^{ix}\sin x} \end{aligned}$$

任意の θ に対して $|e^{i\theta}| = |cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ なので，

$$|A|^2 = \left|\frac{e^{iNx}\sin(Nx)}{e^{ix}\sin x}\right|^2 = \frac{\sin^2(Nx)}{\sin^2 x}$$

注) これは回折格子を通ってやってくる波の強さを表している．$N = 5$ の場合のグラフを以下に示しておく．



第 13 章

物理に現われる微分方程式

13.1　常微分方程式

1 変数関数 $f(x)$ とその微分 $(f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)\ \ldots,)$ の間に成立する方程式を常微分方程式という．

$$F(x, f, f', f'', \ldots) = 0$$

この関係式を満たす関数 f を求めることを微分方程式を解くという．微分方程式に現れる f の n 回微分で，最高の n の値を階数という．

$$\text{1 階常微分方程式の例: } \frac{d}{dx}f(x) = kf(x) \quad (k \text{ は定数})$$
$$\text{2 階常微分方程式の例: } m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -m\omega^2 x(t) - \eta\frac{d}{dt}x(t) \quad (m,\ \omega,\ \eta \text{ は定数})$$

n 階常微分方程式の解は n 個の初期条件 $(f(x_0) = f_0,\ f'(x_1) = f_1,\ f''(x_2) = f_2, \ldots)$ を与えれば一意的に決まることが数学的に証明されている．

例 1: **放射性物質の崩壊**

元素の中には時間とともに自然と放射線を出して，その種類を変えるものがある (放射性同位元素)．例えば $^{238}_{92}\mathrm{U}$(ウラン) は α 線を放出して $^{234}_{90}\mathrm{Th}$(トリウム) になる．この反応は確率的に起こり (量子論的現象)，ある一つのウラン原子核がいつトリウムになるかは原理的に予測できない．予測できるのは，数多くの回数の観測を行うとどれくらいの割合で反応が起こるかという確率だけである．ウラン原子核を多数準備して観測を続けると，約 45 億年でウランの半分がトリウムに変化する．

ある放射性同位元素が単位時間に変化する確率を p とし，時刻 t でのその放射性同位元素の数を $N(t)$ とする．時刻が t から $t + \Delta t$ までの間に $pN(t)\Delta t$ 個の元素が反応を起こすので，$N(t)$ の変化は以下で与えられる．

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta N(t) = -pN(t)\Delta t$$

この両辺を Δt で割って，$\Delta t \to 0$ の極限をとると次の微分方程式が得られる．

$$\frac{d}{dt}N(t) = -pN(t)$$

この微分方程式を解くには変数分離法という技術を用いる．両辺を $N(t)$ で割ると

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -p$$

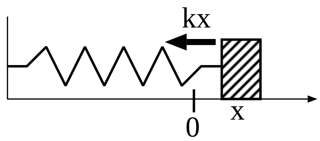
この両辺を t で不定積分する．

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}dt &= \int(-p)dt \\ \int \frac{1}{N}dN &= \int(-p)dt \\ \ln N(t) &= -pt + C \quad (C \text{ は初期条件で決める積分定数}) \\ N(t) &= N(t_0)e^{-p(t-t_0)}\end{aligned}$$

ここで積分定数 C は $t = t_0$ で元素の個数が $N(t_0)$ であるという初期条件を満たすようにとった．得られた解 $N(t) = N(t_0)e^{-p(t-t_0)}$ を元の微分方程式に代入すれば，方程式が満たされていることがわかる．元素の個数が元の半分になる時間 (半減期) を $\tau_{1/2}$ と記すと，$e^{-p\tau_{1/2}} = 1/2$．よって半減期と単位時間に変化する確率 p の間には $p = \ln 2/\tau_{1/2}$ の関係がある．ウランの場合，半減期が約 45 億年なので，一つのウラン元素が 1 年のうちに反応を起こす確率は約 1.5×10^{-10}，1 秒間に反応を起こす確率は約 5×10^{-18} になる．アボガドロ数は約 6×10^{23} なので，1 モルのウランがあれば，毎秒あたり $6 \times 10^{23} \times (5 \times 10^{-18}) = 3 \times 10^6$ 個のウラン元素が反応を起こすことになる．

例 2: 単振動

なめらかな面の上にあり，バネ定数 k のバネでつながれた物体の運動を考える．バネの自然長の位置から x だけずれた位置に物体があると，バネから $-kx$ の力を受ける (力の向きに注意せよ)．



このときの運動方程式は，物体の質量を m として以下で与えられる．

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t)$$

これは 2 階常微分方程式であるので，初期条件を 2 つ与えれば解は一意的に決まる．この方程式を変数分離法のように解くことは困難であるが，2 回微分すると元の関数に比例するという点から，$x(t) = A\sin(\omega t + B)$ (ω, A, B は定数) と置いて代入してみると

$$-m\omega^2 A\sin(\omega t + B) = -kA\sin(\omega t + B)$$

これから $\omega = \sqrt{k/m}$ が得られる．後は 2 つの初期条件に合うように A, B を選べばよい．

13.2　偏微分方程式

多変数関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が満たすべき関係式を偏微分を用いて表したものを偏微分方程式という．物理では位置 (x, y, z) や時間 t を変数とする量を扱うことが重要なので，様々な分野で偏微分方程式が現れる．代表的なものを次に示しておく．

3 次元座標 $\vec{r} = (x, y, z)$ とラプラシアン $\Delta \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\text{ポアソン方程式} & \Delta\phi(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \\
& \quad (\text{ここで } \rho(\vec{r}) = 0 \text{ の場合はラプラス方程式とよばれる．}) \\
\text{ヘルムホルツ型方程式} & \left[\Delta + \mu^2\right] \phi(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \\
\text{波動型方程式} & \left[\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \psi(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (v \text{ は波の速さ}) \\
\text{拡散型方程式} & \left[\Delta - \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial} t\right] \psi(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)
\end{aligned}
$$

これらの方程式の解き方については本書の後半で説明する．

13.3　演習問題

1. ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ の半減期は 1.6×10^3 年である．ある放射性物質に ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ が含まれている場合，その物質中での ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ の量がはじめの 1/10 になるには何年かかるかを求めよ．
2. 微分方程式 $\dfrac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$ の解で，次の初期条件を満たすものを求めよ．ただし，自明な解 $x(t) = 0$ は除く．

   a) $x(0) = A\ ,\ \dot{x}(0) = 0$　b) $x(0) = 0\ ,\ \dot{x}(0) = v$　c) $x(0) = A\ ,\ \dot{x}(0) = v$

3. 次の微分方程式を初期条件 $v(0) = 0$ の下で解け．ただし g, k は正の定数とする．

   $$\frac{dv(t)}{dt} = -g - kv(t)$$

   (ヒント: 微分方程式の両辺に e^{kt} をかけて整理する．)
4. f, g を 2 回微分可能な任意の 1 変数関数とするとき，$\xi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ が波動方程式 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t) = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t)$ の解になっていることを示せ．

13.4　解答例

1. かかる年数を t 年とすると，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/(1.6\times10^3)} = \frac{1}{10}$$

両辺の対数をとって

$$-\ln 2 \times \frac{t}{1.6\times10^3} = -\ln 10$$

$$t = 1.6\times10^3 \times \frac{\ln 10}{\ln 2} \cong 1.6\times10^3 \times \frac{2.30}{0.693}$$

$$\cong 5.3\times10^3 \text{ 年}$$

2. $\dfrac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$ の一般解は $x(t) = a\sin(\omega t + b)$ で与えられるので，$\dot{x}(t) = a\omega\cos(\omega t + b)$. これに初期条件を入れて a と b を求める．

   a) $x(0) = a\sin b = A$, $\dot{x}(0) = a\omega\cos b = 0$ より $b = \pi/2$, $a = A$．よって

$$x(t) = A\sin(\omega t + \pi/2) = A\cos(\omega t)$$

   b) $x(0) = a\sin b = 0$, $\dot{x}(0) = a\omega\cos b = v$ より $b = 0$, $a = v/\omega$．よって

$$x(t) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t)$$

   c) $x(0) = a\sin b = A$, $\dot{x}(0) = a\omega\cos b = v$ より

$$1 = \sin^2 b + \cos^2 b = \left(\frac{A}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{a\omega}\right)^2 \Longrightarrow a = \sqrt{A^2 + (v/\omega)^2}$$

   よって

$$x(t) = \sqrt{A^2 + (v/\omega)^2}\sin(\omega t + \theta)$$

   ただし，θ は $\sin\theta = A/\sqrt{A^2 + (v/\omega)^2}$, $\cos\theta = (v/\omega)/\sqrt{A^2 + (v/\omega)^2}$ を満たす角．

3. 問題の微分方程式の両辺に e^{kt} をかけると

$$e^{kt}\frac{dv(t)}{dt} = -ge^{kt} - kv(t)e^{kt} = -ge^{kt} - v(t)\frac{d}{dt}\{e^{kt}\}$$

$$e^{kt}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\{e^{kt}\}v(t) = -ge^{kt}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{kt}v(t)] = -ge^{kt}$$

両辺を t で積分して　$e^{kt}v(t) = -\dfrac{g}{k}e^{kt} + C$　(C は積分定数)

よって　$v(t) = -\dfrac{g}{k} + Ce^{-kt}$

初期条件 $v(0) = 0$ より，$C = \dfrac{g}{k}$.

$$v(t) = -\frac{g}{k}[1 - e^{-kt}]$$

(参考)

これは速度に比例する抵抗がある場合の，一様な重力場の下での自由落下の速度の時間変化を記述している．

4. 波動方程式 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t) = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t)$ に $\xi(x,t) = f(x - vt)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x-vt) &= f''(x-vt)\\ \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x-vt) &= \frac{(-v)^2}{v^2}f''(x-vt) = f''(x-vt)\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x-vt) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x-vt)$$

同様に $\xi(x,t) = g(x+vt)$ を代入しても

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x-vt) = g''(x+vt) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x+vt)$$

波動方程式の任意の解 f_1, f_2 につき $af_1 + bf_2$ (a, b は定数) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[af_1 + bf_2] &= a\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_1 + b\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_2\\ &= a\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_1 + b\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_2 = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[af_1 + bf_2]\end{aligned}$$

となるので，$af_1 + bf_2$ もまた波動方程式の解になる．

(注: このような性質を，方程式が線型であるという．)

よって $f(x-vt)$, $g(x+vt)$ それぞれが波動方程式の解なので，$f(x-vt) + g(x+vt)$ も解になっている．

第 14 章

スカラー，ベクトル，テンソル

14.1 空間回転とベクトル

高校で習ったベクトルとは「大きさ」と「向き」を持つ量のことであった．速度，加速度，運動量，電場，磁場などが物理で現れる代表的なベクトルである．より数学的なベクトルの定義を与えるには，空間の回転の下での変換性を考える必要がある．位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ を考え，空間の回転の下で $\vec{r}$ と同じように変換するものをベクトルとよぶ．(より一般にはある連続変換のもとで，基本となるベクトルと同じ変換性を示す量．) 変換されないものはスカラーとよばれる．

スカラー ：空間回転で値が不変なもの (例: 電荷，質量，電位ポテンシャル)
ベクトル ：位置ベクトル $\vec{r}$ と同じ変換性をもつもの (例: 運動量，角運動量，電場，磁場)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\text{または } r'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} r_j \quad (R\text{: 回転行列})$$

回転行列の性質 $RR^T = R^T R = \vec{1}$ より $r_i = \sum_{k=1}^{3} (R^T)_{ik} r'_k = \sum_{k=1}^{3} r'_k R_{ki}$

(R^T は R の転置行列: $(R^T)_{ij} = R_{ji}$)

テンソル ：$T_{ij\ldots n} \longrightarrow \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\cdots\sum_{u=1}^{3}(R_{ip})(R_{jq})\cdots(R_{nu})T_{pq\ldots u}$ と変換するもの

(例: スカラー関数を異なる変数で 2 回以上微分したもの $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$，応力テンソル，曲率テンソル)

14.2 ベクトルの外積

二つの 3 次元ベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ の外積 (ベクトル積) $\vec{a} \times \vec{b}$ を以下で定義する．

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

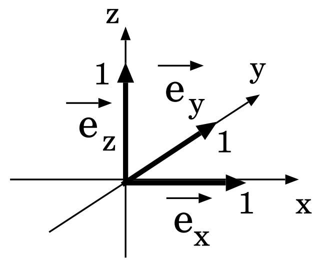
この定義から，$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ であることが分かる．通常の数のかけ算やベクトルの内積と異なって，外積では順序がかわると結果がマイナスになることに注意せよ．

外積の演算のイメージを見るため，以下の 3 つの単位ベクトルを考える．

$$\vec{e}_x=(1,0,0)\ ,\quad \vec{e}_y=(0,1,0)\ ,\quad \vec{e}_z=(0,0,1)$$

定義に従って，これらの間の外積を計算すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}\vec{e}_x\times\vec{e}_x=\vec{e}_y\times\vec{e}_y=\vec{e}_z\times\vec{e}_z=\vec{0}\\ \vec{e}_x\times\vec{e}_y=-\vec{e}_y\times\vec{e}_x=\vec{e}_z\\ \vec{e}_y\times\vec{e}_z=-\vec{e}_z\times\vec{e}_y=\vec{e}_x\\ \vec{e}_z\times\vec{e}_x=-\vec{e}_x\times\vec{e}_z=\vec{e}_y\end{aligned}$$



この結果をみると，平行なベクトル同士の外積は $\vec{0}$ になり，
外積によって得られた新しいベクトルは元の二つのベクトルと直交している．この結果は任意のベクトルの間での外積でも成立する．

ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ がなす角を θ とするとき，$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ となって，外積でできるベクトルの大きさは元の二つのベクトルが作る平行四辺形の面積に相当する．

(証明) $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ とすると，

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2\\&=(a_yb_z)^2+(a_zb_y)^2+(a_zb_x)^2+(a_xb_z)^2+(a_xb_y)^2+(a_yb_x)^2-2a_ya_zb_zb_y-2a_za_xb_zb_x-2a_xa_yb_xb_y\\&=(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)-a_x^2b_x^2-a_y^2b_y^2-a_z^2b_z^2-2a_ya_zb_zb_y-2a_za_xb_zb_x-2a_xa_yb_xb_y\\&=(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

2 つのベクトルのなす角は $0\le\theta\le\pi$ の範囲内なので $0\le\sin\theta$ よって上式の平方をとった場合，正または 0 のものが残るので，$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

ベクトルの外積は，任意の 3 次元ベクトル $\vec{v}$ の x 成分を v_1，y 成分を v_2，z 成分を v_3，すなわち $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ と記すことにすると，完全反対称テンソル ϵ_{ijk} を用いて，

$$(\vec{a}\times\vec{b})_i=\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\ a_jb_k$$

と表すことができる．ここで完全反対称テンソルは以下で定義される．

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}\ \ 1 & :\ (i,j,k)=(1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2)\ \text{のとき}\\ -1 & :\ (i,j,k)=(1,3,2),\ (2,1,3),\ (3,2,1)\ \text{のとき}\\ \ \ 0 & :\ \text{それ以外}\end{cases}$$

この定義を用いると，平行なベクトル同士の外積が 0 になることがすぐに分かる．$\vec{a}$ と $c\vec{a}$ (c は定数) に対し

$$(\vec{a}\times c\vec{a})_i=\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\ a_jca_k=c\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\ a_ja_k$$

$$= c \sum_{k',j'=1}^{3} \epsilon_{ik'j'}\, a_{k'} a_{j'} \quad (j = k',\, k = j' \text{ と置いた})$$

$$= c \sum_{j',k'=1}^{3} (-\epsilon_{ij'k'})\, a_{j'} a_{k'} = -(\vec{a} \times c\vec{a})_i$$

となって，$\vec{a} \times c\vec{a} = \vec{0}$ が示せる．

ベクトルの外積は力のモーメントや角運動量の計算，電磁場を扱う際によく用いられる．例えば，$\vec{r}$ の位置にある運動量 $\vec{p}$ を持つ質点の角運動量は $\vec{r} \times \vec{p}$ で定義される．

14.3　演習問題

1. 次のベクトル積を求めよ

a)	$(1,0,0)\times(0,1,1)$	b)	$(1,0,1)\times(-1,0,0)$
c)	$(1,1,2)\times(-2,-\frac{1}{2},1)$	d)	$(v,v,0)\times(0,0,B)$
e)	$\frac{1}{\sqrt{3}}(F,F,F)\times(r,0,r)$	f)	$(0,p,0)\times(x,y,z)$

2. 運動方程式 $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$ を考え，以下の問いに答えよ．
   (a) 運動方程式の両辺に左から $\vec{r}$ をベクトル積としてかけたものを記せ．
   (b) 運動量を $\vec{p}$ とするとき，$\vec{r}\times\vec{p}$ (角運動量) の時間微分を $\vec{F}$ と $\vec{r}$ を用いて表せ．
   (c) $\vec{F}$ が $\vec{r}$ と平行のとき (このとき $\vec{F}$ は中心力であるという)，$\vec{r}\times\vec{p}$ が保存することを示せ．
3. ベクトルの内積はスカラーであることを示せ．
4. 任意の 3 次元ベクトル $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ について以下が成立することを示せ．

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

   また，上の量の幾何学的な意味について述べよ．
5. 任意の 3 次元ベクトル $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ について以下が成立することを示せ．

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

6. 電荷 q を持つ質点が磁場 $\vec{B}$ 中で運動しているとローレンツ力 $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ を受ける．磁場 $\vec{B}=(0,0,B)$ 中での質点 (電荷 q，質量 m) の運動を初期条件 $\vec{r}(0)=(a,0,0)$, $\vec{v}(0)=(0,v,0)$ の下で求めよ．
7. 上の問題を，初期条件 $\vec{r}(0)=(a,0,0)$, $\vec{v}(0)=(0,v,v_z)$ の下で解け．

14.4　解答例

1. 定義に従って計算すればよい．

(a)	$(0,-1,1)$	(b)	$(0,-1,0)$	(c)	$(2,-5,\frac{3}{2})$
(d)	$(vB,-vB,0)$	(e)	$\frac{1}{\sqrt{3}}(Fr,0,-Fr)$	(f)	$(pz,0,-px)$

2.

(a) $$\vec{r}\times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}\times\vec{F}$$

(b)
$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{r}\times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}\times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}\times\vec{F}$$

(c) $\vec{F}$ が $\vec{r}$ と平行なので，$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}$．よって (b) より $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{0}$ となり，時間に依存しないので $\vec{r}\times\vec{p}$ は保存する．

3. 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は回転の下で

$$a_i\to a'_i=\sum_{j=1}^{3}R_{ij}a_j\ ,\quad a_i\to b'_i=\sum_{j=1}^{3}R_{ij}b_j$$

と変換する．このとき $\vec{a}'$ と $\vec{b}'$ の内積は

$$\begin{aligned}\vec{a}'\cdot\vec{b}'&=\sum_{i=1}^{3}a'_ib'_i=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}R_{ij}a_j\sum_{k=1}^{3}R_{ik}b_k=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}R_{ij}R_{ik}a_jb_k\\&=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\delta_{jk}a_jb_k=\sum_{j=1}^{3}a_jb_j\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

となって，回転の下で不変である．よって，ベクトルの内積はスカラーである．

4.

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})&=\sum_{i=1}^{3}A_i(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}B_jC_k)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_iB_jC_k\\&=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{kij}A_kB_iC_j=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}B_iC_jA_k\\&=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})\\&=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\epsilon_{jki}A_jB_kC_i=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}C_iA_jB_k\\&=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\end{aligned}$$

この量はベクトル $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ がつくる平行六面体の体積になる．

5.

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right)_1 &= A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3)\\
&= (A_2C_2 + A_3B_3)B_1 - (A_2B_2 + A_3B_3)C_1\\
&= (A_1C_1 + A_2C_2 + A_3B_3)B_1\\
&\quad -(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)C_1\\
&= (\vec{A}\cdot\vec{C})B_1 - (\vec{A}\cdot\vec{B})C_1
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
\left(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right)_2 = (\vec{A}\cdot\vec{C})B_2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})C_2\ ,\ \left(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right)_3 = (\vec{A}\cdot\vec{C})B_2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})C_3
$$

よって $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ が成立する．

6. 運動方程式は

$$
m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{v}\times\vec{B} = qB(v_y, -v_x, 0)
$$

$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ を用いて，これを成分ごとに分けると

$$
m\frac{dv_x}{dt} = qBv_y\ ,\quad m\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x\ ,\quad m\frac{dv_z}{dt} = 0
$$

最初の式と 2 番目の式から

$$
\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x
$$

この微分方程式の一般解は，$\dfrac{qB}{m} = \omega$ とおいて，$v_x(t) = \alpha\sin(\omega t + \beta)$ で与えられる．初期条件 $v_x(0) = 0$ より $\beta = 0$ となって $v_x(t) = \alpha\sin(\omega t)$．これを時間で積分して $x(t) = -\dfrac{\alpha}{\omega}\cos(\omega t) + \gamma$．初期条件 $x(0) = a$ より $\gamma - \dfrac{\alpha}{\omega} = a$.

次に y 方向の運動は，$m\dfrac{dv_x}{dt} = qBv_y$ より

$$
v_y = \frac{1}{\omega}\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\omega}\alpha\omega\cos(\omega t) = \alpha\cos(\omega t)
$$

初期条件 $v_y(0) = v$ より $\alpha = v$．これから $\gamma = a + \dfrac{\alpha}{\omega} = a + \dfrac{v}{\omega}$．さらに v_y を時間で積分して $y(t) = \dfrac{v}{\omega}\sin(\omega t) + \delta$．初期条件 $y(0) = 0$ より $\delta = 0$.

最後に z 方向の運動は，$\dfrac{dv_z}{dt} = 0$ より $v_z(t) = \eta$．初期条件 $v_z(0) = 0$ より $\delta = 0$．もう一度時間で積分し，初期条件 $z(0) = 0$ より $z(t) = 0$．まとめて

$$
x(t) = \frac{v}{\omega}[1 - \cos(\omega t)] + a\ ,\ y(t) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t)\ ,\ z(t) = 0
$$

7. 運動方程式は前問と同じで，z 成分の初期条件のみが異なる．$\dfrac{dv_z}{dt} = 0$ と初期条件 $v_z(0) = v_z$ より $v_z(t) = v_z$．もう一度時間で積分し，初期条件 $z(0) = 0$ より $z(t) = v_z t$．まとめて

$$
x(t) = \frac{v}{\omega}[1 - \cos(\omega t)] + a\ ,\ y(t) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t)\ ,\ z(t) = v_z t
$$

第 15 章

ベクトル解析

15.1　場の概念

力学　: 時刻 t での質点の位置 $\vec{r}(t)$ を求める
電磁気学　: **時刻** t **位置** $\vec{r}$ での**空間の性質** (電場 $\vec{E}(\vec{r},t)$, 磁場 $\vec{B}(\vec{r},t)$) を求める

場 — 空間の物理的な性質

スカラー場: 値がスカラー量の場, ベクトル場: 値がベクトル量の場

15.2　空間微分の変換性

微分演算子 $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ をベクトルのように並べて, $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, この量の空間回転の下での変換性を考える．空間の回転

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R)_{\tilde{x}x} & (R)_{\tilde{x}y} & (R)_{\tilde{x}z} \\ (R)_{\tilde{y}x} & (R)_{\tilde{y}y} & (R)_{\tilde{y}z} \\ (R)_{\tilde{z}x} & (R)_{\tilde{z}y} & (R)_{\tilde{z}z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

に対し, $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = (R)_{\tilde{x}x}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (R)_{\tilde{y}x}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + (R)_{\tilde{z}x}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = (R)_{\tilde{x}y}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (R)_{\tilde{y}y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + (R)_{\tilde{z}y}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = (R)_{\tilde{x}z}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (R)_{\tilde{y}z}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + (R)_{\tilde{z}z}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}
\end{aligned}$$

$R^T R = R^{-1} R = I$ を用いてまとめると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \end{pmatrix}$$

これは位置ベクトルと同じ変換性である．よって $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\,,\ \dfrac{\partial}{\partial y}\,,\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ と定義し，微分演算子 ∇ (ナブラ) をベクトルとして扱う．

15.3 勾配 (grad), 発散 (div), 回転 (rot)

∇ とスカラー関数 $(f(\vec{r}))$，ベクトル関数 $(\vec{A}(\vec{r}) = (A_x(\vec{r}), A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r}))$ との演算を考える．

勾配 (grad) ： $\mathrm{grad} f(\vec{r}) = \nabla f(\vec{r}) \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial x}f\,,\ \dfrac{\partial}{\partial y}f\,,\ \dfrac{\partial}{\partial z}f\right)$

発散 (div) ： $\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}A_x + \dfrac{\partial}{\partial y}A_y + \dfrac{\partial}{\partial z}A_z$

回転 (rot) ： $\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \left(\dfrac{\partial}{\partial y}A_z - \dfrac{\partial}{\partial z}A_y\,,\ \dfrac{\partial}{\partial z}A_x - \dfrac{\partial}{\partial x}A_z\,,\ \dfrac{\partial}{\partial x}A_y - \dfrac{\partial}{\partial y}A_x\right)$

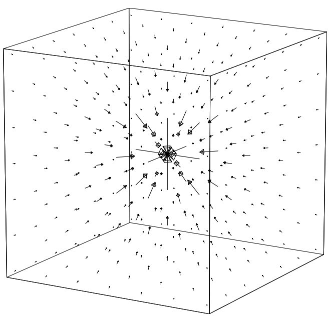
または　$(\nabla \times \vec{A})_i = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}(\nabla)_j(\vec{A})_k = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_j A_k$

grad のイメージ

万有引力の下で，原点にある質量 M の物体から距離 r 離れた点での質量 m の質点の位置エネルギーは $V(\vec{r}) = -G\dfrac{Mm}{r}$ で与えられる．これは $r = |\vec{r}|$ だけの関数なのでスカラー量である．この位置エネルギーに grad を作用させると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}V(\vec{r}) &= \nabla\left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \nabla\left(-G\frac{Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= -GMm\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right) \\
&= GMm\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \\
&= \left(\frac{GMm}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}
$$

これは大きさが $\dfrac{GMm}{r^2}$ で向きが $\vec{r}$ と同じベクトルであり，万有引力による力にマイナスをかけたものと一致する．位置エネルギーが $V(\vec{r})$ で与えられると，働く力は $-\nabla V(\vec{r})$ で与えられる．



$-\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)$ で得られるベクトル場

div のイメージ

原点を中心とする半径 a の球の内部に一様に電荷が電荷密度 ρ で分布している場合，球内の電場は $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{4\pi k\rho}{3}\vec{r}$ で与えられる．(導出の計算は「多変数関数の微積分」の演習問題 6 の結果に grad を作用させればよい．) この電場に対し div を作用させると

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) &= \nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z \\ &= \frac{4\pi k\rho}{3}(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z) = 4\pi k\rho\end{aligned}$$

となり，得られる値は位置 $\vec{r}$ での電荷密度に比例する．一方，原点に点電荷 Q があると，それによってつくられる電場は $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{kQ}{r^2}\dfrac{(x,y,z)}{r}$ で与えられる．この電場に対し div を作用させると

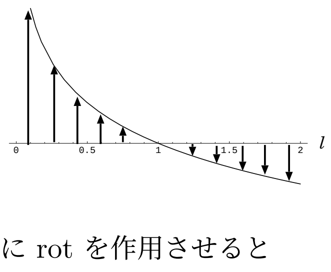
$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) &= \nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kQ}{r^3}x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kQ}{r^3}y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kQ}{r^3}z\right) \\ &= \frac{kQ}{r^3} - 3\frac{kQ}{r^5}x^2 + \frac{kQ}{r^3} - 3\frac{kQ}{r^5}y^2 + \frac{kQ}{r^3} - 3\frac{kQ}{r^5}z^2 = 0 \quad (r \neq 0 \text{ のとき})\end{aligned}$$

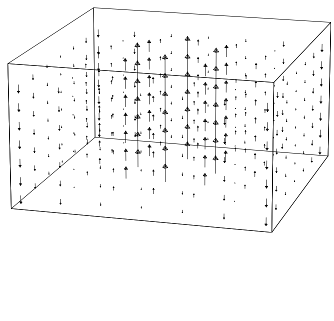
となり，原点以外では 0 になる．(原点では電場の値が無限大になり，このままでは計算できない．) この場合，原点以外には電荷が存在していないのでそこでの電荷密度は 0 である．前の例と合わせて考えると，$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r})$ は位置 $\vec{r}$ での電荷密度に比例すると予想される．

div は気体や液体の流れを調べる研究 (流体力学) で，流れ $\vec{j}(\vec{r})$ が与えられたときに，位置 $\vec{r}$ での流体の湧きだしや吸い込みを表す量として使われている．電磁気学では，電荷の分布があるときに，それに伴って現れる電場と電荷の量を結びつけるものとして用いられる．

rot のイメージ

$\vec{A}(\vec{r}) = (0, 0, -\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\ln(x^2+y^2))$ というベクトルを考える．このベクトルは z 軸に平行で，その大きさは z 軸からの距離 $\ell = \sqrt{x^2+y^2}$ に依存している．(下の左図参照) これを空間中の矢印で表したものが下の右図である．

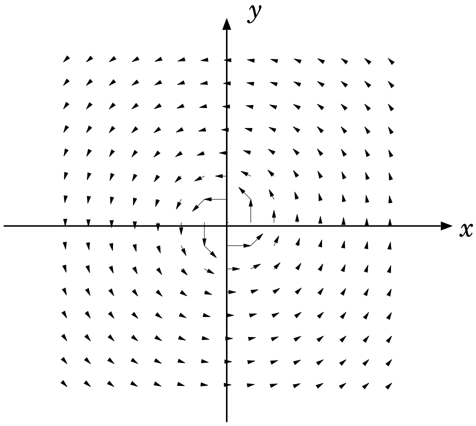




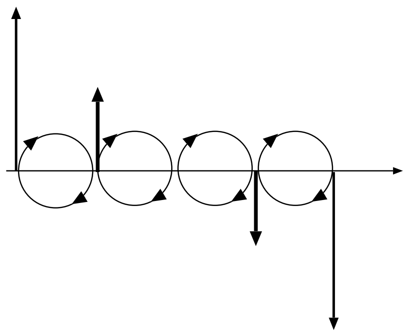
このベクトル $\vec{A}$ に rot を作用させると

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}) &= \nabla\times(A_x, A_y, A_z) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) \\ &= \left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)\ ,\ \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2)\ ,\ 0\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\ell}(-\frac{y}{\ell}, \frac{x}{\ell}, 0)\end{aligned}$$

これは z 軸上を正の方向に流れる電流 I がつくる磁場になっている．(下図参照) 最初に導入した $\vec{A}$ というベクトル場が磁場の源となっていて，それに rot を作用させせることにより磁場が得られる．($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$) このベクトル場 $\vec{A}$ はベクトルポテンシャルとよばれる．grad のところで位置エネルギーから力が得られたように，ベクトルポテンシャルから磁場が得られる．(より詳しくは電磁気学のアドバンスな教科書を参照せよ．)



rot のイメージは渦である．上図のような流れがあると，z 軸からの距離によって流れの大きさが異なるので下の図のような回転がおきる．この回転の大きさと向きを表す角運動量のようなベクトルを考えると，それが磁場に対応している．



15.4 演習問題

1. $\vec{r} = (x\ ,\ y\ ,\ z)$,　$r = |\vec{r}| \neq 0$ とするとき，以下を計算して $\vec{r}$，r を用いて表せ．

(a)	∇r	(d)	$\nabla \cdot \vec{r}$	(g)	$\nabla \times \vec{r}$
(b)	$\nabla(1/r)$	(e)	$\nabla \cdot (\vec{r}/r^3)$	(h)	$\nabla \times (\nabla r)$
(c)	$\nabla(\nabla \cdot \vec{r})$	(f)	$(\nabla \cdot \nabla) r$	(i)	$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{r})$

2. $V(\vec{r}) = \dfrac{1}{2} k |\vec{r}|^2$ (k は定数) のとき，$-\nabla V(\vec{r})$ を求めよ．

3. $\vec{B} = \dfrac{k}{(x^2 + y^2)}(-y, x, 0)$ (ただし $x^2 + y^2 \neq 0$ で k は定数) に対して $\nabla \cdot \vec{B}$ を求めよ．

4. $\vec{m} = (0, 0, 1)$, $\vec{A} = k\dfrac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$　$(r \neq 0)$ とするとき (k は定数．$\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$)，$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ と $\nabla \cdot \vec{B}$ を求めよ．

5. $\vec{r} = (x, y, z)$ の関数であるスカラー f に対して，次の関係式を証明せよ．

$$\nabla \times \nabla f = \vec{0}$$

6. $\vec{r} = (x, y, z)$ の関数であるベクトル $\vec{A}$ に対して，次の関係式を証明せよ．

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

7. $\vec{r} = (x, y, z)$ の関数であるベクトル $\vec{A}$ に対して，次の関係式を証明せよ．

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

15.5　解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\nabla r &= \nabla(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\vec{r}}{r}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\ &= \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\\ &= -\frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}$$

(c)

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{r}) = \nabla 3 = \vec{0}$$

(d)

$$\nabla\cdot\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 3$$

(e)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec{r}/r^3) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\ &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\ &\quad + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\ &\quad + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\ &= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\nabla)r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
&+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
=&\frac{3}{r}-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{r^3}=\frac{2}{r}
\end{aligned}
$$

(g)

$$\nabla\times\vec{r}=\left(\frac{\partial}{\partial z}y-\frac{\partial}{\partial y}z,\frac{\partial}{\partial x}z-\frac{\partial}{\partial z}x,\frac{\partial}{\partial y}x-\frac{\partial}{\partial x}y\right)=\vec{0}$$

(h)

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla r)&=\nabla\times\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&=(\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\
&\quad\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\
&\quad\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \\
&=(-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \\
&\quad-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \\
&\quad-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})=\vec{0}
\end{aligned}
$$

(i)

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{r})=\nabla\cdot\vec{0}=0$$

2.

$$-\nabla V(\vec{r})=-\nabla\left(\frac{1}{2}k|\vec{r}|^2\right)=-\frac{k}{2}\nabla(x^2+y^2+z^2)=-k(x,y,z)=-k\vec{r}$$

3.

$$\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot k\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right)=k\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+0\right)=0$$

4. $\vec{A}=k\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}=\dfrac{k}{r^3}(-y,x,0)$ から計算して

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{A}&=k\left(\frac{3xz}{r^5},\frac{3yz}{r^5},\frac{2}{r^3}-\frac{3}{r^5}(r^2-z^2)\right)=k\left[-\frac{\vec{m}}{r^3}+\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}\right] \\
\nabla\cdot\vec{B}&=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0
\end{aligned}
$$

5.

$$\nabla\times(\nabla f)=(\partial_y(\partial_z f)-\partial_z(\partial_y f),\partial_z(\partial_x f)-\partial_x(\partial_z f),\partial_x(\partial_y f)-\partial_y(\partial_x f))=\vec{0}$$

6.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \partial_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \partial_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \partial_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x) = 0$$

7.

$$\begin{aligned}
\Big(\nabla \times (\nabla \times \vec{A})\Big)_x &= \partial_y(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - \partial_z(\partial_z A_x - \partial_x A_z) \\
&= \partial_y \partial_x A_y + \partial_z \partial_x A_z - (\partial_y \partial_y + \partial_z \partial_z) A_x \\
&= \partial_x(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) - (\partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y + \partial_z \partial_z) A_x \\
&= \partial_x(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A_x
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
\Big(\nabla \times (\nabla \times \vec{A})\Big)_y &= \partial_y(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A_y \\
\Big(\nabla \times (\nabla \times \vec{A})\Big)_z &= \partial_z(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A_z
\end{aligned}$$

これらから

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

第 16 章

一般の行列

16.1　一般の行列

6.1 節で述べた行列についての内容をより一般に拡張して，n 行，m 列の成分を持つ行列について考える．(必ずしも $n = m$ とはしない．) 物理では 2, 3 次元の空間以外にも (複数の) 粒子の運動量と位置を同時に成分とする抽象的な空間 (位相空間) を考えたり，量子力学的な状態を多次元のベクトルで表現したりすることがよくあるので，その扱いに行列を用いることが多い．

行列をベクトルにかける操作は以下で定義される．

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + \cdots + A_{1n}v_n \\ A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + \cdots + A_{2n}v_n \\ \vdots \\ A_{k1}v_1 + A_{k2}v_2 + \cdots + A_{kn}v_n \end{pmatrix}$$

上の式で行列を A，ベクトルを $\vec{v}$ と記し，各成分を添字をつけて表せば以下のようになる．

$$(A\vec{v})_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}v_i$$

n 行 m 列の成分をもつ行列を $n \times m$ 行列とよぶ．上の規則からわかるように，
s 成分のベクトルにかけることのできる行列は s 列の成分を持たなければならない．

16.2　行列の定数倍，和，差，積

行列 A の定数倍は，各成分にその定数をかけたものである．

$$kA = k\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kA_{k1} & kA_{k2} & \cdots & kA_{kn} \end{pmatrix}$$

$$(kA)_{ij} = kA_{ij}$$

同じ $n \times m$ 行列どうしの間で和と差が定義できる．

$$
\begin{aligned}
A \pm B &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} & \cdots & A_{1n} \pm B_{1n} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} & \cdots & A_{2n} \pm B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} \pm B_{m1} & A_{m2} \pm B_{m2} & \cdots & A_{mn} \pm B_{mn} \end{pmatrix} \\
(A \pm B)_{ij} &= A_{ij} \pm B_{ij}
\end{aligned}
$$

$n \times m$ 行列は $m \times k$ 行列にかけることができる．$n \times m$ 行列を A，$m \times k$ 行列を B として，積 AB は次式で定義される．

$$(AB)_{ij} = \sum_{p=1}^{m} A_{ip} B_{pj}$$

$m \times k$ 行列を，縦に並んだ m 成分のベクトルが横に k 個並んだものと思えば，行列の積で得られる新しい行列は各 m 成分ベクトルに $n \times m$ 行列をかけたものを順に横に並べたものである．

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \vec{b}_k \end{pmatrix} \ , \ \vec{b}_s = \begin{pmatrix} B_{1s} \\ B_{2s} \\ \vdots \\ B_{ms} \end{pmatrix}$$

として

$$AB = (A\vec{b}_1 \ A\vec{b}_2 \ \cdots A\vec{b}_k)$$

行列の積では，一般に順序が変わると結果も変わるのは 2×2 行列，3×3 行列の場合と同様である．

$$AB \neq BA$$

16.3　演習問題

1. 次の計算を行え

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 特殊相対性理論によると，静止している座標系での座標と時間，(x, ct) (c は光速) と，それに対して x 軸の正の方向に速さ v で等速で運動している座標系での座標と時間，(x', ct') の間には次の関係が成立する．

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (\beta = \frac{v}{c})$$

(a) 止まっている座標系に対し，x 軸に沿って正の方向に速さ v で棒が運動している．この棒は運動している座標系では静止していると観測される．静止している座標系での，時刻 t での棒の端の位置 x 座標を x_1, x_2 とする．このとき動いている座標系で見たときの棒の端の位置の座標 x'_2, x'_1 を求めよ．

(b) 動いている座標系の棒の長さを $\ell = x'_2 - x'_1$ とするとき，静止している座標系で見たときの棒の長さ，$x_2 - x_1$ を ℓ と β で表せ．

(c) 速さ v で等速で運動している座標系に対し，さらに同じ方向に速さ v_2 で運動している座標系での座標と時間 (x'', ct'') を (x, ct) と β, $\beta' = v_2/c$ を用いて表せ．

(d) 上で求めた関係式は，静止している座標系に対していくらの速さで運動している座標系を表しているか，その速さを求めよ．

16.4　解答例

1.

(a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} = -14 + 18 = 4$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

注) ベクトルが行列の左からかかる場合は，横に成分が並んだベクトルを 1 行複数列の行列と考えれば計算できる．

2.

(a) 問題文で与えられた関係式を用いて

$$x_1' = \frac{x_1 - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \ ,\ x_2' = \frac{x_2 - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(b)

$$\ell = x_2' - x_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}[(x_2 - \beta ct) - (x_1 - \beta ct)] = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

よって　$x_2 - x_1 = \ell\sqrt{1-\beta^2}$

(注：これは，運動してる物体の長さが，運動の方向に関しては静止しているときよりも短く観測されることを表している．)

(c) 問題文で与えられた関係式より，$\beta' = v_2/c$ として，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} & \frac{-\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} \\ \frac{-\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} & \frac{-\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} \\ \frac{-\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta'^2)}}\begin{pmatrix} 1+\beta\beta' & -\beta-\beta' \\ -\beta-\beta' & 1+\beta\beta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) 上で得られた式を変形して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta'^2)}}\begin{pmatrix} 1+\beta\beta' & -\beta-\beta' \\ -\beta-\beta' & 1+\beta\beta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \\ &= \frac{1+\beta\beta'}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta'^2)}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{(\beta+\beta')}{(1+\beta\beta')} \\ -\frac{(\beta+\beta')}{(1+\beta\beta')} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(\beta+\beta')/(1+\beta\beta')=\omega$ と置くと，

$$\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}}=\frac{1+\beta\beta'}{\sqrt{(1+\beta\beta')^2-(\beta+\beta')^2}}=\frac{1+\beta\beta'}{\sqrt{1-\beta^2-\beta'^2-\beta^2\beta'^2}}$$
$$=\frac{1+\beta\beta'}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta'^2)}}$$

よって，これは速さ $c\omega$ で運動している座標系と静止している座標系の間の関係式になっている．その速さは

$$c\omega=\frac{c(\beta+\beta')}{(1+\beta\beta')}=\frac{v+v_2}{1+(vv_2/c^2)}<c$$

第 17 章

逆行列，行列式，行列の固有値

17.1　単位行列，逆行列

行列のうち，行の数と列の数が等しいものを正方行列という．正方行列の成分 A_{ij} で $i=j$ のものを対角成分という．対角成分がすべて 1 で，他の成分が全て 0 の正方行列を単位行列といい，$\mathbf{1}$ または I と記す．

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{，または成分で表して} \quad I_{ij} = \delta_{ij}$$

ここで出てきた δ_{ij} という記号はクロネッカーのデルタとよばれ，以下で定義される．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$n \times n$ の単位行列と任意の $n \times n$ 行列 A との積は A になる．

$$AI = IA = A$$

$$\text{成分で表すと } (AI)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij} \ , \ (IA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}$$

正方行列 A に別の行列 B をかけて結果が I となるとき，B を A の逆行列といい，A^{-1} と記す．

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

2×2 行列の場合

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ として } ad - bc \neq 0 \text{ のとき } A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である．$ad - bc = 0$ のときは逆行列は存在しない．3×3 以上の行列の逆行列の公式も作れるが，複雑なのでほとんど用いられることはない．必要になった場合はコンピュータで計算するか，何か上手なやり方を工夫して求める．

逆行列を用いて連立一次方程式をとくことができる．x_1 , x_2 , ... , x_n という n 個の未知数に対し

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

という連立一次方程式が成立しているとき，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} , \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

として，連立方程式は

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

と表すことができる．A^{-1} が存在する場合，上式の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Longrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

となって解 $\vec{x}$ を求めることができる．

17.2　行列式

2×2 行列 A の行列式 $|A|$ ($\mathrm{det}A$ とも記す) を以下で定義する．(**注！ $|A|$ を絶対値と混同しないこと**)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ として } |A| = ad - bc$$

前節で述べた逆行列が存在するための条件は $|A| \neq 0$ である．3×3 行列の場合

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ として}$$
$$\begin{aligned} |A| = &A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} \\ &-A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} \end{aligned}$$

である．一般の $n \times n$ 行列では

$$|A| = \sum_P (\mathrm{sgn}P) A_{1p_1} A_{2p_2} \ldots A_{np_n}$$

で定義される．ここで $(p_1\ p_2\ \ldots\ p_n)$ は $(1\ 2\ \ldots\ n)$ の数字を並べ替えたもので，和は全ての可能な並び替えについてとる．また

$$\mathrm{sgn}P = \begin{cases} 1 & : (1\ 2\ \ldots\ n) \text{ から偶数回の数字の入替えで } (p_1\ p_2\ \ldots\ p_n) \text{ になるとき} \\ -1 & : (1\ 2\ \ldots\ n) \text{ から奇数回の数字の入替えで } (p_1\ p_2\ \ldots\ p_n) \text{ になるとき} \end{cases}$$

である．たとえば (1 2 3) の数字の並べかえは，(1 2 3), (2 1 3), (1 3 2), (3 2 1), (2 3 1), (3 1 2) の 6 種類あるが，それぞれに並べ替えるまでに必要な二つの数字の入替えの回数は以下のようになる．

					入れ替えの回数
(1 2 3)					0
(1 2 3)	$\rightarrow$	(2 1 3)			1
(1 2 3)	$\rightarrow$	(1 3 2)			1
(1 2 3)	$\rightarrow$	(3 2 1)			1
(1 2 3)	$\rightarrow$	(2 1 3)	$\rightarrow$	(2 3 1)	2
(1 2 3)	$\rightarrow$	(3 2 1)	$\rightarrow$	(3 1 2)	2

ここで $(p_1\ p_2\ \ldots\ p_n)$ は $(1\ 2\ \ldots\ n)$ の数字を並べ替えたもので，和は全ての可能な並び替えについてとる．

行列式を用いると二つのベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ の外積は

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

とかける．

行列の積の行列式は，それぞれの行列の行列式の積で与えられる．(証明は線形代数の適当な参考書を参照．)

$$|AB| = |A||B|$$

17.3　行列の固有値

正方行列 A に対し，ある縦ベクトル $\vec{x}$ $(\vec{x} \neq \vec{0})$ があり，

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\lambda \text{ は行列でなく，ただの数})$$

となるとき，λ を A の固有値，$\vec{x}$ を A の固有ベクトルという．

行列の固有値の求め方

行列 A の固有値を λ とおくと，$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ となるゼロベクトルでない固有ベクトル $\vec{x}$ が存在する．このとき

$$\vec{0} = A\vec{x} - \lambda\vec{x} = (A - \lambda I)\vec{x} \quad (I \text{ は単位行列})$$

もし $|(A - \lambda I)| \neq 0$ ならば，$(A - \lambda I)$ の逆行列が存在し，$\vec{x} = (A - \lambda I)^{-1}\vec{0} = \vec{0}$．これは $\vec{x}$ がゼロベクトルでないとしたことと矛盾する．よって

$$|A - \lambda I| = 0$$

でなければならない．この行列式は，A が $n \times n$ 行列のとき n 次方程式となり，一般に n 個の解が存在する．

例) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトル

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \to \lambda = \pm 1$$

よって固有値は ± 1．固有ベクトルを $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Longrightarrow \beta = \lambda\alpha \text{ , } \alpha = \beta\lambda$$

よって

$$\text{固有値 } 1 \text{ の固有ベクトル } N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ , 固有値 } -1 \text{ の固有ベクトル } N_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで，N_1, N_2 は 0 でない任意の数である．通常，ベクトルの大きさを 1 にとることが多い．(これを規格化するという．) その場合，$|N_1| = |N_2| = 1/\sqrt{2}$ にとる．(ここの $|\ |$ は行列式ではなくて絶対値．)

行列の固有値と固有ベクトルは物理学でよく用いられる．特に量子力学では物理量は行列として表すことができて，その物理量を観測して得られる値がその行列の固有値に相当する．このとき，固有ベクトルはその物理量が固有値の値となるような物理的な状態を表す．

17.4　演習問題

1. 次の行列式を求めよ．

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(c)}\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{(d)}\ \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta \\ r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(e)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

2. **正方行列** A, B **に対し** $|AB| = |A||B|$ **が成立する．**
   (a) 2×2 行列の場合に，$|AB| = |A||B|$ が成立していることを確認せよ．
   (b) 次の行列の積を計算せよ．

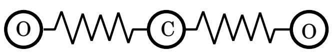
$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 \end{pmatrix}$$

   (c) 上で求めた行列の行列式を求めよ．

3. 行列 $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (i は $i^2 = -1$ となる虚数単位) の固有値と固有ベクトルを求めよ．

4. CO_2 分子をモデル化して，図のように炭素原子と酸素原子がバネでつながれたものと考える．炭素原子の質量を M，酸素原子の質量を m，バネ定数を k とし，各原子の平衡の位置からのずれを，図の左から x_1, x_2, x_3 とすると，次の運動方程式が成立する．

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_1 = k(x_2 - x_1)\ ,\ M\frac{d^2}{dt^2}x_2 = k\{(x_3 - x_2) - (x_2 - x_1)\}\ ,$$
$$m\frac{d^2}{dt^2}x_3 = -k(x_3 - x_2)$$



上の方程式に $x_i = A_i\sin(\omega t)$ $(i = 1, 2, 3)$ を代入し，ω の満たすべき値を求めよ．

17.5　解答例

1. (a)

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)\sin\theta = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 2 - 2 = -3$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

(d)

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta \\ r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 0 - r^2\sin^3\theta\cos^2\phi - r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi - r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi - 0 - r^2\sin^3\theta\sin^2\phi$$
$$= -r^2\sin^3\theta - r^2\cos^2\theta\sin\theta = -r^2\sin\theta$$

(e)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} &= yz^2 + zx^2 + xy^2 - yx^2 - xz^2 - zy^2 \\ &= (z-y)x^2 - (z^2-y^2)x + yz^2 - zy^2 \\ &= (z-y)\left[x^2 - (z+y)x + yz\right] \\ &= (z-y)(x-y)(x-z) = (x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

2. (a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} |A| &= ab = cd\ ,\ |B| = ps - qr\ , \\ |AB| &= \begin{vmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq-ds \end{vmatrix} \\ &= (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) = adps + bcrq - adqr - bcsp \\ &= (ad-bc)ps - (ad-bc)qr = (ad-bc)(ps-qr) = |A||B| \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&(\text{与式}) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_3 - \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & -\sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_3 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \sin\theta_1\cos\theta_3 + \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_3 - \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ -\cos\theta_2\sin\theta_3 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2\cos\theta_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(c) 積をとる前の各行列の行列式の値は全て 1 なので，積の結果の行列の行列式も 1 である．

3. 固有値

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \longrightarrow \lambda = \pm 1$$

固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longrightarrow -i\beta = \lambda\alpha \ , \ i\alpha = \lambda\beta$$

よって $\lambda = 1$ の固有ベクトルは $N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$，$\lambda = -1$ の固有ベクトルは $N_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

(N_1, N_2 は 0 でない定数)

4. 題意より

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_1 = k(x_2 - x_1) \ , \quad M\frac{d^2}{dt^2}x_2 = k\{(x_3 - x_2) - (x_2 - x_1)\} \ , \quad m\frac{d^2}{dt^2}x_3 = -k(x_3 - x_2)$$

上式に $x_i = A_i \sin(\omega t)$ $(i = 1, 2, 3)$ を代入．

$$
\begin{aligned}
m(-\omega^2)A_1\sin(\omega t) &= k(A_2 - A_1)\sin(\omega t) \\
M(-\omega^2)A_2\sin(\omega t) &= k(A_3 - 2A_2 + A_1)\sin(\omega t) \\
m(-\omega^2)A_3\sin(\omega t) &= k(A_2 - A_3)\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

行列を用いてまとめると，

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{M} & \omega^2 - \frac{2k}{M} & \frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これが自明でない解を持つには，左辺の行列の行列式が 0 とならねばならないので，

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{M} & \omega^2 - \frac{2k}{M} & \frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{k}{m} \end{vmatrix} = (\omega^2 - \frac{k}{m})^2(\omega^2 - \frac{2k}{M}) - 2\frac{k^2}{Mm}(\omega^2 - \frac{k}{m}) \\
&= \omega^2(\omega^2 - \frac{k}{m})(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{2k}{M})
\end{aligned}
$$

よって　$\omega = 0 \ , \ \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}} \ , \ \pm\sqrt{\dfrac{k}{m} + \dfrac{2k}{M}}$

第 18 章

直交行列，エルミート行列，ユニタリー行列

18.1　直交行列

行列 A の縦と横を入れ替えたものを**転置行列**といい A^T または A^t で表す.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kn} \end{pmatrix} \text{ に対し } A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{k1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{kn} \end{pmatrix},$$

成分で表すと　$(A^T)_{ij} = A_{ji}$

実数の縦ベクトル (成分が実数で，それらを縦に並べたベクトル) $\vec{a}, \vec{b}$ につき，その内積は次のように表すことができる.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = (a_1 a_2 \ldots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_b + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

これらのベクトルに行列をかけて変換したときに，**内積の値が変わらない**条件を求める.

$$\vec{a} \to R\vec{a}\ ,\ \vec{b} \to R\vec{b} \text{ として } \vec{a}^T \to \vec{a}^T R^T \text{ なので } \vec{a} \cdot \vec{b} \to \vec{a}^T R^T R \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$$

これが成立するには $R^T R = I$ でなければならない．この条件を満たす行列を**直交行列**といい，直交行列によるベクトルの変換を直交変換という．直交変換の例として座標系の回転や空間反転による変換がある.

18.2 エルミート行列とユニタリー行列

ベクトルの成分が複素数の場合，内積は $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{a}^*)^T\vec{b}=\sum_{k=1}^{n}a_k^*b_k$ で定義する．$\vec{a}=\vec{b}$ のとき，この値は実数となるが，一般には複素数になる．この場合，内積の値を変えない変換 U は

$$(\vec{a}^*)^T\vec{b}\to(U\vec{a})^{*T}(U\vec{b})=(\vec{a}^*)^T(U^*)^TU\vec{b}=(\vec{a}^*)^T\vec{b}\ ,$$

すなわち $(U^*)^TU=I$ を満たさねばならない．この条件を満たす行列をユニタリー行列という．また，行列 A に対し $(A^*)^T$ とする操作をエルミート共役をとる，といい $A^\dagger$ で表す．

$$A^\dagger=(A^*)^T\ ,\ \text{成分で表すと}\ \ (A^\dagger)_{ij}=A_{ji}^*\ .$$

これを用いると，ユニタリー行列の条件は $U^\dagger U=UU^\dagger=I$ と書ける．

エルミート共役をとっても元に戻る行列をエルミート行列という：$H^\dagger=H$．量子力学ではエネルギーや運動量のような物理量がエルミート行列で表され，その固有値が実際に観測される値になる．以下に，量子力学で重要になる定理を二つ示しておく．

「エルミート行列の固有値は実数である．」

エルミート行列 H の固有値を λ とし，その固有ベクトルを $\vec{v}$ とすると $H\vec{v}=\lambda\vec{v}$．両辺に左から $(\vec{v}^*)^T$ をかけて $(\vec{v}^*)^TH\vec{v}=\lambda(\vec{v}^*)^T\vec{v}$．成分で表すと

$$\sum_{i,j}v_i^*H_{ij}v_j=\lambda\sum_i v_i^*v_i\ .$$

左辺の複素共役をとり，H がエルミート行列であることを用いると

$$(\sum_{i,j}v_i^*H_{ij}v_j)^*=\sum_{i,j}v_iH_{ij}^*v_j^*=\sum_{i,j}v_iH_{ji}v_j^*=\sum_{i,j}v_j^*H_{ji}v_i=\sum_{i',j'}v_{i'}^*H_{i'j'}v_{j'}$$

となり，左辺が実数であることがわかる．右辺の $\sum_i v_i^*v_i$ は実数なので，λ も実数でなければならない．

「エルミート行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する．」

エルミート行列 H の二つの互いに異なる固有値を λ_1，λ_2．それぞれに対応する固有ベクトルを $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$ とする．

$$H\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_1\ ,\ H\vec{v}_2=\lambda_2\vec{v}_2$$

二番目の式の両辺でエルミート共役をとると

$$(\vec{v}_2^*)^TH^\dagger=\lambda_2(\vec{v}_2^*)^T\longrightarrow(\vec{v}_2^*)^TH=\lambda_2(\vec{v}_2^*)^T\quad(H^\dagger=H\ \text{より})$$

最初の式に左から $(\vec{v}_2^*)^T$ をかけて

$$(\vec{v}_2^*)^TH\vec{v}_1=\lambda_1(\vec{v}_2^*)^T\vec{v}_1$$

ここで，先ほどの結果から (左辺) $= \lambda_2(\vec{v}_2^*)^T\vec{v}_1$．よって

$$\lambda_2(\vec{v}_2^*)^T\vec{v}_1 = \lambda_1(\vec{v}_2^*)^T\vec{v}_1 \longrightarrow (\lambda_2-\lambda_1)(\vec{v}_2^*)^T\vec{v}_1 = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので $(\vec{v}_2^*)^T\vec{v}_1 = 0$ となり，$\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ は直交する．

18.3　エルミート行列の対角化

エルミート行列 H の固有値 λ_1，$\lambda_1, \ldots \lambda_n$ と規格化された固有ベクトル $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2, \ldots \vec{x}_n$ (これらは縦ベクトル) が求まれば (固有値が同じだが独立なベクトルどうしを適当に直交化したものとして)，$U = (\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_n)$ という行列はユニタリー行列になる:

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^\dagger \\ \vec{x}_2^\dagger \\ \vdots \\ \vec{x}_n^\dagger \end{pmatrix} (\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^\dagger\cdot\vec{x}_1 & \vec{x}_1^\dagger\cdot\vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_1^\dagger\cdot\vec{x}_n \\ \vec{x}_2^\dagger\cdot\vec{x}_1 & \vec{x}_2^\dagger\cdot\vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_2^\dagger\cdot\vec{x}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_n^\dagger\cdot\vec{x}_1 & \vec{x}_n^\dagger\cdot\vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n^\dagger\cdot\vec{x}_n \end{pmatrix} = I$$

このとき

$$U^\dagger HU = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^\dagger \\ \vec{x}_2^\dagger \\ \vdots \\ \vec{x}_n^\dagger \end{pmatrix} H(\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_n) = U^\dagger HU = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^\dagger \\ \vec{x}_2^\dagger \\ \vdots \\ \vec{x}_n^\dagger \end{pmatrix} (\lambda_1\vec{x}_1\ \lambda_2\vec{x}_2 \ldots \lambda_n\vec{x}_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{x}_1^\dagger\cdot\vec{x}_1 & \lambda_2\vec{x}_1^\dagger\cdot\vec{x}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{x}_1^\dagger\cdot\vec{x}_n \\ \lambda_1\vec{x}_2^\dagger\cdot\vec{x}_1 & \lambda_2\vec{x}_2^\dagger\cdot\vec{x}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{x}_2^\dagger\cdot\vec{x}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1\vec{x}_n^\dagger\cdot\vec{x}_1 & \lambda_2\vec{x}_n^\dagger\cdot\vec{x}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{x}_n^\dagger\cdot\vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となり，$U^\dagger HU$ は対角成分以外は 0 になる．これを，H を U で対角化したという．

これまで挙げた行列以外にも，ある種の性質をもつ行列には固有の名前がついている場合がある．以下によく用いられるものを挙げておく．

対称行列　: 転置行列と元の行列が等しいもの

$$A^T = A$$

成分が全て実数の対称行列 (実対称行列) は，エルミート行列の一種なのでユニタリー行列で対角化できる．この場合のユニタリー行列は直交行列になる．

交代行列または歪対称行列　: 転置行列が元の行列の符号を変えたものに等しいもの

$$A^T = -A$$

共役行列　: 行列の成分の複素共役をとったもの．A^* または $\overline{A}$ と記す．

$$(A^*)_{ij} = (A_{ij})^*$$

18.4　演習問題

1. 2×2 の回転行列 $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示せ.
2. パウリ行列は以下で与えられる.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   σ_1, σ_2, σ_3 のすべてがエルミート行列であり，かつユニタリー行列であることを示せ.
3. x, y, z の関数であるユニタリー行列 $U(x,y,z)$ に対し，以下が成立することを示せ.

$$\nabla U = -U(\nabla U^\dagger)U$$

4. **正方行列の対角成分の総和** $(\mathrm{Tr}A = \sum_i (A)_{ii})$ **をトレースという．** このとき以下を示せ
   a)　$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B$.
   b)　$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   c)　$\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(A)$.
5. 行列 X の指数関数を $e^X \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$ と定義する．実数 θ について $e^{i\theta\sigma_1}$ を以下の手順で求めよ．計算には以下の定義を用いよ.

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n\theta^{2n+1},\quad \cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n\theta^{2n}$$

   (a) $(i\theta\sigma_1)^2$ を求めよ.
   (b) $(i\theta\sigma_1)^n$ を n が奇数 $(n=2m+1)$ のときと偶数 $(n=2m)$ の場合にわけて求めよ.
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta\sigma_1)^n$ を $\sin\theta, \cos\theta$ を使って表わせ.
6. 次のエルミート行列 H の固有値と固有ベクトルを全て求め，H を対角化するユニタリー行列 U を求めよ.

$$H = \begin{pmatrix} m & ik \\ -ik & m \end{pmatrix}\quad (m,\ k \text{ は 0 でない実数})$$

18.5　解答例

1.

$$
\begin{aligned}
R^T R &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & (-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I
\end{aligned}
$$

2. σ_1 について

$$
\sigma_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1
$$

よって，エルミート行列である．

$$
\sigma_1^\dagger \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I
$$

よって，　ユニタリー行列である．

σ_2, σ_3 についても同様.

3. U はユニタリー行列なので $UU^\dagger = I$．この両辺に ∇ を演算すると

$$
\begin{aligned}
\nabla(UU^\dagger) &= \nabla I = O \\
(\nabla U)U^\dagger + U(\nabla U^\dagger) &= O
\end{aligned}
$$

両辺に右から U をかけて

$$
\begin{aligned}
(\nabla U)U^\dagger U + U(\nabla U^\dagger)U &= OU = O \\
\nabla U + U(\nabla U^\dagger)U &= O \\
\nabla U &= -U(\nabla U^\dagger)U
\end{aligned}
$$

4. (a)

$$
\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_i (A+B)_{ii} = \sum_i (A_{ii} + B_{ii}) = \sum_i A_{ii} + \sum_i B_{ii} = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_k A_{ik}B_{ki} = \sum_k \sum_i B_{ki}A_{ik} \\
&= \sum_k (BA)_{kk} = \mathrm{Tr}(BA)
\end{aligned}
$$

(c) b) の結果を用いて

$$
\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}\left(B^{-1}(AB)\right) = \mathrm{Tr}\left((AB)B^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(ABB^{-1}) = \mathrm{Tr}A
$$

5. (a)　$(i\theta\sigma_1)^2 = -\theta^2\sigma_1^2 = -\theta^2 I$

(b)

$n = 2m+1$ (m は 0 以上の整数) のとき

$$(i\theta\sigma_1)^{2m+1} = i^{2m+1}\theta^{2m+1}\sigma_1^{2m+1} = i(-1)^m\theta^{2m+1}\sigma_1$$

$n = 2m$ のとき $(i\theta\sigma_1)^{2m} = i^{2m}\theta^{2m}\sigma_1^{2m} = (-1)^m\theta^{2m} I$

(c) 上の結果と問題に与えられた定義を用いて

$$\begin{aligned}
e^{i\theta\sigma_1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\theta\sigma_1)^n = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2m)!}(i\theta\sigma_1)^{2m} + \frac{1}{(2m+1)!}(i\theta\sigma_1)^{2m+1}\right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2m)!}(-1)^m\theta^{2m} I + i\frac{1}{(2m+1)!}(-1)^m\theta^{2m+1}\sigma_1\right] \\
&= \cos\theta I + i\sin\theta\sigma_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6. まず固有値を求める.

$$0 = \begin{vmatrix} m-\lambda & ik \\ -ik & m-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - m)^2 - k^2$$

$$\lambda - m = \pm k$$

$$\text{よって}\quad \lambda = m \pm k$$

固有ベクトルとユニタリー行列は

$$m-k\ :\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\ ,\quad m+k\ :\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

— (U が実際に H を対角化することのチェック) —

$$\begin{aligned}
U^\dagger H U &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & ik \\ -ik & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m-k & im+ik \\ -ik+im & k+m \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} m-k-k+m & im+ik-ik-im \\ -im+ik-ik+im & m+k+k+m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m-k & 0 \\ 0 & m+k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

第 III 部

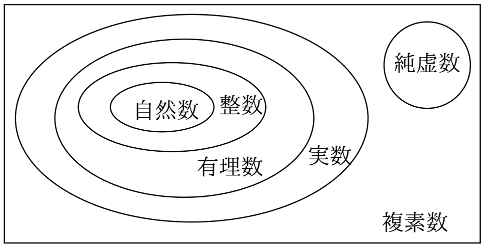
大学中級レベル A
(複素関数とその応用)

第 19 章

複素数と複素関数

19.1　複素数

$x^2 = -a$ $(a > 0)$ という方程式は実数の範囲内での解を持たない．このため $i^2 = -1$ となる数 (虚数単位) を導入し，この方程式の解を $x = \pm i\sqrt{a}$ と表す．二つの実数 x, y から $z = x + iy$ をつくることで数の範囲が拡大される．これを複素数とよぶ．



なぜ必要か

- 代数方程式 $(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0)$ の解は一般に複素数．(数学)
- 計算のテクニックとして．(物理)
  例) 運動方程式 $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$ を解くのに，$x(t) = Ae^{i\omega t}$ (A, ω は定数) を代入すると，
  $$(i\omega)^2 Ae^{i\omega t} = -kAe^{i\omega t} \Longrightarrow \omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{よって } x(t) = A_1 e^{i(\sqrt{k/m})t} + A_2 e^{-i(\sqrt{k/m})t}$$
- 量子力学は本質的に複素数を必要とする．(物理)

19.2　複素数の表示

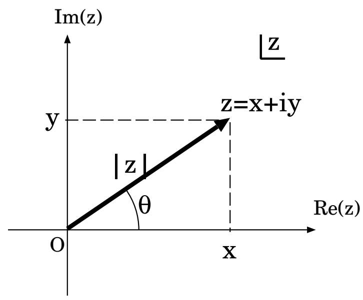
$z = x + i\,y$　(x, y は実数) として，以下を定義する．

実部 (real part)　: $\mathrm{Re}(z) = x$,
虚部 (imaginary part)　: $\mathrm{Im}(z) = y$
複素共役　: $z^* = x - i\,y$,（数学の教科書では複素共役を $\bar{z}$ で表すことが多い．）
絶対値　: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z^*|$

複素数の絶対値で成立する関係

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \ , \quad \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} \ , \quad \Big||z_1| - |z_2|\Big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

複素平面　:
２次元座標で，横軸を $\mathrm{Re}(z)$ 縦軸を $\mathrm{Im}(z)$ にとり，複素数 $z = x + iy$ を座標上に表示する．このとき，原点と $z = x + iy$ を表わす点を結ぶベクトルが x 軸となす角 (図の θ) を偏角といい，$\arg[z] = \theta$ と表わす．偏角と絶対値 $|z|$ を用いると



$$z = |z|(\cos\theta + i\ \sin\theta)$$

とかける．これを複素数の極表示という．
複素数の積では

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1)|z_2|(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\ (\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

より，絶対値は積，偏角は和になる．

19.3　オイラーの公式

実数 θ に対し，純虚数 $i\theta$ の指数関数を以下で定義する．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

これを用いると，$|z| = r$ として $z = re^{i\theta}$, $z^* = re^{-i\theta}$ とかける．
この式で $\cos\theta$，$\sin\theta$ をテーラー展開すると

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} + i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(i\theta)^k$$

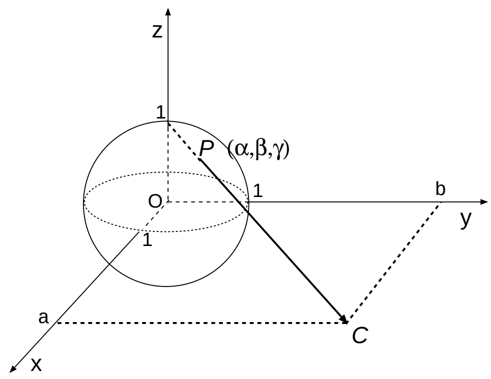
となって，$e^{i\theta}$ を形式的にテーラー展開したものに一致する．しかしこれは証明ではない．指数関数の虚数べきをオイラーの公式で定義すれば数学的に矛盾が無いということを示している．

19.4 複素平面以外の複素数の幾何学的表示の例

三次元空間内に球面 $x^2+y^2+z^2=1$ を考える．球の頂点 $(0,0,1)$ と xy 平面上の一点 $C=(a,b,0)$ を結ぶ直線と球面との交点 P を求めると

$$P=\left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}\,,\ \frac{2b}{a^2+b^2+1}\,,\ \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right)$$

これより，C と P が 1 対 1 で対応して，複素数全体とこの球面を対応づけることができる．



19.5 複素関数

複素数を変数とする関数を複素関数という．以下では 1 変数の複素関数 $f(z)$ のみを考える．z と z^* 両方の関数のようなもの (例 $g(z,z^*)=2z+5z^*$) や，2 変数以上 ($h(z_1,z_2,\ldots)$) はここでは扱わない．

19.5.1 よく使われる複素関数

代数関数　: 複素数の定数を c_1, $c_2,\ldots$ として

$$f(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z+c_0$$

有理関数　: 複素数の定数を a_1, $a_2,\ldots$, b_1, $b_2,\ldots$ として

$$f(z)=\frac{a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1z+a_0}{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0}$$

指数関数　: $z=x+iy$ (x, y は実数) に対し

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\ \sin y)$$

対数関数　: $z=re^{i\theta}$ (r, θ は実数) に対し ($\ln x\equiv\log_e x$)

$$\ln z=\ln[re^{i\theta}]=\ln[r]+\ln[e^{i\theta}]=\ln r+i\theta$$

三角関数

$$\sin z=\frac{1}{2i}[e^{iz}-e^{-iz}]\,,\quad \cos z=\frac{1}{2}[e^{iz}+e^{-iz}]\,,\quad \tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$$

双曲線関数

$$\sinh z=\frac{1}{2}[e^{z}-e^{-z}]\,,\quad \cosh z=\frac{1}{2}[e^{z}+e^{-z}]\,,\quad \tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z}$$

([注]sinh などの読み方: sin, cos などの三角関数の記号に h がついた双曲線関数は，サイン，コサイン等にハイポをつけてよぶ．たとえば，sinh はサインハイポである．cosh はコサインハイポ以外にコッシュとよばれることもある．)

これらの関数は変数が実数の場合と同じ性質をもつ．($e^{z+w} = e^z e^w$, $(e^z)^w = e^{zw}$, $\ln(zw) = \ln z + \ln w$ など)

19.5.2　多価関数

たとえば $f(z) = z^{1/2}$ を考えると，$z = re^{i\theta} = re^{i\theta}e^{2n\pi i} = re^{i(\theta+2n\pi)}$ (n は整数) なので，

$$z^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{r} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -\sqrt{r} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となって，値が唯一に決まらない．このような関数を多価関数という．多価関数を扱う場合は，元の z の偏角の範囲を決めておく．$z = re^{i\theta}$ で $0 \leq \theta < 2\pi$ としておくか，$-\pi < \theta \leq \pi$ とするのがよく用いられる．(より数学的な手法としてリーマン面という概念を用いることがあるが，ここでは説明を省く．詳しく知りたい者は適当な複素関数論の教科書を参照せよ．)

[計算例: 以下で偏角の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ としておく．]

1.
$$\begin{aligned} (-2)^i &= (e^{i\pi}e^{\ln 2})^i = e^{-\pi}e^{i\ln 2} = e^{-\pi}[\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)] \\ (\text{数値にすると}) &\simeq 0.0432 \times [\cos(0.693) + i\sin(0.693)] \\ &\simeq 0.0432 \times (0.769 + 0.638\ i) \simeq 0.033 + 0.028\ i \end{aligned}$$

2. $i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2}$
3. $\ln(1+\sqrt{3}i) = \ln\left[2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$= \ln 2 + \ln e^{i\pi/3} = \ln 2 + \frac{\pi}{3}i$
4. $\sin(i) = \frac{1}{2i}(e^{ii} - e^{-ii}) = \frac{1}{2i}(e^{-1} - e)$
5. $\cosh(\frac{\pi}{4}i) = \frac{1}{2}(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

19.6 特異点，極

たとえば関数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は，$z=0$ で関数の値が無限大の大きさになる．このように関数の値の大きさが無限大になったり，不定になったりする点を**特異点**とよぶ．(数学的により正確には，微分可能でない点．) 特異点には次の 3 種類がある．

除去可能な特異点　: $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z-1}=\dfrac{(z-1)(z+1)}{(z-1)}$ の場合，$z=1$ では $f(1)=\dfrac{0}{0}$ となって不定だが，$f(z)=z+1$ ($z\neq 1$ の時), $f(1)=2$ と定義し直すと $z=1$ は特異点でなくなる．このように再定義によって除去できる場合.

極　: $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z-1}$ は $z=1$ が特異点であるが，$(z-1)f(z)$ は $z=1$ が特異点ではない．このように関数 $f(z)$ では $z=a$ が特異点だが，$(z-a)^n f(z)$ (n は自然数) では $z=a$ が特異点でない場合，$z=a$ を n **位の極**とよぶ.

真性特異点　: 除去可能でも極でもない特異点．例) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ の $z=0$.

19.7 演習問題

1. 複素数 $z = x + iy = re^{i\theta}$ (x, y, $r = |z|$, θ は実数で，$0 \le \theta < 2\pi$) に対して，以下を x と y で，また絶対値と偏角を r, θ で表せ.

(a)	$z+1+i$	(b)	$(1+i\sqrt{3})z$	(c)	z^2	(d)	$(z^3)^*$
(e)	$1/z$	(f)	$1/z^*$	(g)	$(z+z^*)/2$	(h)	$(z-z^*)/2$
(i)	$\|z\|^2$	(j)	$z/\|z\|$				

2. 次の値を $x + iy$ の形で表せ

(a)	$e^{i\pi/6}$	(b)	$e^{i\pi/4}$	(c)	$e^{i\pi/3}$	(d)	$e^{i\pi/2}$	(e)	$e^{-i\pi/4}$
(f)	$e^{-i\pi/2}$	(g)	$e^{i3\pi/2}$	(h)	$e^{i3\pi/4}$	(i)	$e^{i7\pi/4}$	(j)	$e^{-i6\pi/3}$

3. 方程式 $z^3 = 1$ の解を全て極形式でまず求め，それから $z = x + iy$ の形に直せ.

4. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ (n は自然数) を示せ.
(hint: 数学的帰納法を使えばよい．$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ は，この結果を元にいえることなので使ってはいけない．)

5. 実数 x に対して

$$R = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx)\ ,$$
$$I = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)$$

を求めよ．(hint: $R + iI$ を考える．)

6. 微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = -\omega^2 f(t) \qquad (\omega \text{ は正の定数})$$

の解を得るために，$f(t) = Ce^{at}$ (C, a は定数) と置いて a の満たすべき方程式を求めよ．その方程式を解いて，$f(t)$ の一般解を求めよ.

7. 二つの複素数 z_1, z_2 に対する三角不等式 $|z_1| + |z_2| \ge |z_1 + z_2|$ を証明せよ.

8. 次の関係を満たす z の領域を複素平面上に表せ.
(a) $|z+1| < 1$.
(b) $1 < |z| < 2$ かつ $0 < \arg[z] < \pi/4$.
(c) $|z-2| + |z+2| < 6$.

9. 次の値を求めよ．ただし偏角の範囲は $-\pi < \arg[z] \le \pi$ とする.
a) $(2i)^4$　b) 1^i　c) $(-i)^i$　d) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3$　e) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-3i}$

10. 次の値を求めよ．ただし偏角の範囲は $-\pi < \arg[z] \le \pi$ とする.
a) $\ln 1$　b) $\ln i$　c) $\ln(1+i)$
d) $\ln\left[\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3\right]$　e) $\ln\left[\dfrac{(1+i\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+i)}\right]$

11. 次の値を求めよ．ただし偏角の範囲は $-\pi < \arg[z] \leq \pi$ とする．
    a) $\cos(i)$　b) $\tan(-i)$　c) $\sin(i \ln 2)$
    d) $\cos(\pi + i)$　e) $\sec(-2i) = \dfrac{1}{\cos(-2i)}$
12. 次の値を求めよ．ただし偏角の範囲は $-\pi < \arg[z] \leq \pi$ とする．
    a) $\sinh(2)$　b) $\sinh(i\pi)$　c) $\cosh(i\dfrac{\pi}{6})$
    d) $\tanh(i\dfrac{\pi}{3})$　e) $\sinh(-2 + i\pi)$
13. $e^z e^w = e^{(z+w)}$ (z, w は複素数) を示せ.
14. $\ln(zw) = \ln z + \ln w$ (z, w は複素数) を示せ.
15. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ (z, w は複素数) を示せ.
16. $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$ (z, w は複素数) を示せ.

19.8　解答例

1.

	$x,\,y$ での表示	絶対値	偏角
a)	$(x+1)+i(y+1)$	$\sqrt{(r\cos\theta+1)^2+(r\sin\theta+1)^2}$	$\arctan(\dfrac{r\sin\theta+1}{r\cos\theta+1})$
b)	$(x-\sqrt{3}y)+i(\sqrt{3}x+y)$	$2r$	$\theta+\dfrac{\pi}{3}$
c)	$(x^2-y^2)+i(2xy)$	r^2	2θ
d)	$x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$	r^3	-3θ
e)	$\dfrac{x}{(x^2+y^2)}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$	$\dfrac{1}{r}$	$-\theta$
f)	$\dfrac{x}{(x^2+y^2)}+i\dfrac{y}{x^2+y^2}$	$\dfrac{1}{r}$	θ
g)	x	$\lvert r\cos\theta\rvert$	$0\ (x>0),\ \pi\ (x<0)$
h)	iy	$\lvert r\sin\theta\rvert$	$\dfrac{\pi}{2}\ (y>0),\ \dfrac{3\pi}{2}\ (y<0)$
i)	x^2+y^2	r^2	0
j)	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	1	θ

2.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$　b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　c) $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　d) i

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{1}}$　f) $-i$　g) $-i$　h) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　j) 1

3.

$z=1,\ e^{\frac{2\pi}{3}i},\ e^{-\frac{2\pi}{3}i}=1,\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

4. $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ を数学的帰納法で証明する．まず，$n=1$ のときは明らかに成立している．

$n=k$ (k は自然数) で $(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)$ が成立しているとすると，$n=k+1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)=(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta))(\cos\theta+i\sin\theta)\\
&= \cos(k\theta)\cos\theta-\sin(k\theta)\sin\theta+i\left[\sin(k\theta)\cos\theta+\cos(k\theta)\sin\theta\right]\\
(\text{加法定理より}) &= \cos[(k+1)\theta]+i\sin[(k+1)\theta]
\end{aligned}
$$

よって $n=k+1$ でも成立する．数学的帰納法より，全ての自然数 n で最初の関係式が成立する．

5.

$$
\begin{aligned}
R+iI &= \sum_{k=1}^{n}[\cos(kx)+i\sin(kx)] = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{inx} \\
&\text{(等比級数の和の公式より)} \\
&= \frac{e^{ix}(1-e^{inx})}{1-e^{ix}} = \frac{e^{ix}e^{inx/2}(e^{-inx/2}-e^{inx/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})} = e^{i(n+1)x/2}\frac{(-2i)\sin(nx/2)}{(-2i)\sin(x/2)} \\
&= [\cos(\frac{(n+1)x}{2})+i\sin(\frac{(n+1)x}{2})]\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}
\end{aligned}
$$

両辺の実部と虚部を比較して

$$
R=\cos(\frac{(n+1)x}{2})\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)},\quad I=\sin(\frac{(n+1)x}{2})\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}
$$

6. 微分方程式 $\dfrac{d^2}{dt^2}f(t)=-\omega^2 f(t)$ に $f(t)=Ce^{at}$ を代入すると

$$
a^2Ce^{at}=-\omega^2Ce^{at} \ \to\ a^2=-\omega^2 \ \text{よって}\ a=\pm i\omega
$$

問題の微分方程式は 2 階の微分方程式なので，積分定数を 2 つ与えれば一般解になる．

$$
f(t)=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}
$$

7.

代数的な証明

$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ ($x_{1,2}$, $y_{1,2}$ は実数) とおくと，

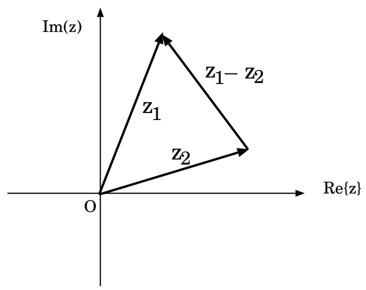
$$
|z_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2},\quad |z_2|=\sqrt{x_2^2+y_2^2},\quad |z_1+z_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}
$$

$$
\begin{aligned}
(|z_1|+|z_2|)^2-|z_1+z_2|^2 &= (\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2})^2-(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 \\
&= x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \\
&\quad -(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2) \\
&= 2\left[\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}-(x_1x_2+y_1y_2)\right] \\
\text{ここで}\quad & \left[\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}\right]^2-|(x_1x_2+y_1y_2)|^2 \\
&= (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2 \\
&= x_1^2x_2^2+y_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2y_2^2-(x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2) \\
&= y_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2=(x_1y_2-x_2y_1)^2\geq 0
\end{aligned}
$$

よって $(|z_1|+|z_2|)^2-|z_1+z_2|^2\geq 0$ であり，$|z_1|+|z_2|$, $|z_1+z_2|$ はともに 0 以上なので，$|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|$ が成立する．

幾何学的な証明

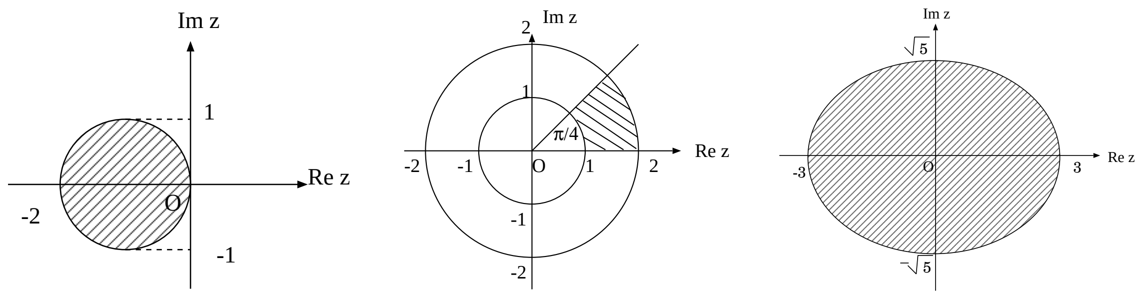
複素平面上に z_1, z_2 を表示すると，z_1, z_2, $z_1 - z_2$ は三角形をなす. (右図参照) その三角形の辺の長さが $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 - z_2|$ に相当するが，三角形の成立条件，2 辺の長さの和は残りの辺の長さより大きい，より



$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

が成立する.

8.



(a) 境界を含まず $(x+1)^2 + y^2 < 1$

(b) 境界を含まず

(c) 境界を含まず $(x/3)^2 + y^2/5 < 1$

9.

(a) $(2i)^4 = 2^4 i^4 = 16(-1)^2 = 16$

(b) $1^i = (e^0)^i = e^0 = 1$

(c) $(-i)^i = (e^{-i\pi/2})^i = e^{\pi/2}$

(d) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = (e^{i\pi/4})^3 = e^{i3\pi/4} = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

(e) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-3i} = (e^{i\pi/6})^{-3i} = e^{\pi/2}$

10.

(a) $\ln 1 = 0$

(b) $\ln i = \ln e^{i\pi/2} = \dfrac{\pi}{2} i$

(c) $\ln(1+i) = \ln\left[\sqrt{2}\dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}}\right] = \ln(\sqrt{2}) + \ln e^{i\pi/4} = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi}{4} i$

(d) $\ln\left[\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \ln e^{i3\pi/4} = \dfrac{3\pi}{4} i$

(e) $\ln\left[\dfrac{(1+i\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+i)}\right] = \ln\left[\dfrac{(1+i\sqrt{3})}{2}\dfrac{2}{(\sqrt{3}+i)}\right] = \ln\left[\dfrac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/6}}\right] = \ln(e^{i\pi/6}) = \dfrac{\pi}{6} i$

11.

(a) $\cos i = \dfrac{1}{2}(e^i i + e^{-ii}) = \dfrac{1}{2}(e^{-1} + e)$

(b) $\tan(-i) = \dfrac{\sin(-i)}{\cos(-i)} = \dfrac{2}{2i}\dfrac{(e^{i(-i)} - e^{-i(-i)})}{(e^{i(-i)} + e^{-i(-i)})} = \dfrac{1}{i}\dfrac{(e - e^{-1})}{(e + e^{-1})} = -i\dfrac{(e^2 - 1)}{(e^2 + 1)}$

(c) $\sin(i\ln 2) = \dfrac{(e^{ii\ln 2} - e^{-ii\ln 2})}{2i} = \dfrac{(e^{-\ln 2} - e^{\ln 2})}{2i} = \dfrac{(\frac{1}{2} - 2)}{2i} = \dfrac{3}{4}i$

(d) $\cos(\pi + i) = \dfrac{(e^{i(\pi+i)} + e^{-i(\pi+i)})}{2} = \dfrac{-e^{-1} - e}{2} = -\dfrac{1}{2}(e^{-1} + e)$

(e) $\sec(-2i) = \dfrac{1}{\cos(-2i)} = \dfrac{2}{e^{i(-2i)} + e^{-i(-2i)}} = \dfrac{2}{e^2 + e^{-2}} = \dfrac{2e^2}{e^4 + 1}$

12.

(a) $\sinh(2) = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} = \dfrac{e^4 - 1}{2e^2}$

(b) $\sinh(i\pi) = \dfrac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2} = \dfrac{(-1) - (-1)}{2} = 0$

(c) $\cosh(i\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $\tanh(i\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{2i\sin(\pi/3)}{2\cos(\pi/3)} = \sqrt{3}i$

(e) $\sinh(-2 + i\pi) = \dfrac{e^{-2+i\pi} - e^{-(-2+i\pi)}}{2} = -\dfrac{1}{2}(e^{-2} - e^2) = \dfrac{e^4 - 1}{2e^2}$

13. $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$ ($x_{1,2}$, $y_{1,2}$ は実数) と置くと，

$$\begin{aligned}
e^z e^w &= e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}\left[(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2) + i(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)\right] \\
(\text{加法定理より}) &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z+w}
\end{aligned}$$

14. $z = r_1e^{i\theta_1}$, $w = r_2e^{i\theta_2}$ ($r_{1,2} \geq 0$, $\theta_{1,2}$ は実数) と置くと，

$$\begin{aligned}
\ln(zw) &= \ln(r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2}) = \ln(r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}) \\
&= \ln(r_1r_2) + i(\theta_1+\theta_2) = \ln(r_1) + \ln(r_2) + i(\theta_1+\theta_2) \\
&= \ln(r_1) + i\theta_1 + \ln(r_2) + i\theta_2 = \ln z + \ln w
\end{aligned}$$

15. 問題 13 より任意の複素数で $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ が成立するので，

$$\begin{aligned}
\sin(z+w) &= \frac{1}{2i}(e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}) = \frac{1}{4i}\left[(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})\right] \\
&= \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}\frac{(e^{iw} + e^{-iw})}{2} + \frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2}\frac{(e^{iw} - e^{-iw})}{2i} = \sin z\cos w + \cos z\sin w
\end{aligned}$$

16.

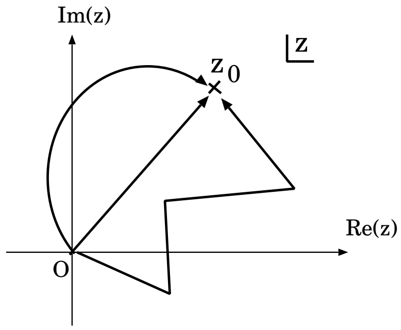
$$\begin{aligned}
\cosh(z+w) &= \frac{1}{2}(e^{z+w} + e^{-(z+w)}) = \frac{1}{4}\left[(e^z + e^{-z})(e^w + e^{-w}) + (e^z - e^{-z})(e^w - e^{-w})\right] \\
&= \frac{(e^z + e^{-z})}{2}\frac{(e^w + e^{-w})}{2} + \frac{(e^z - e^{-z})}{2}\frac{(e^w - e^{-w})}{2} = \cosh z\cosh w + \sinh z\sinh w
\end{aligned}$$

第 20 章

複素関数の微分

20.1 複素関数の極限

複素関数では極限の取り方に注意が必要である．$z \to z_0$ となるどんな極限の取り方によっても $\lim_{z \to z_0} f(z)$ が同じ値をとる場合に，$f(z)$ は極限値をもつという．



たとえば，$f(z) = \dfrac{1}{z}$ を考える．この関数の $z \to 0$ の極限は，絶対値が $\dfrac{1}{0}$ になってしまうので定義できない．また，$g(z, z^*) = \dfrac{z^*}{z}$ という関数を考え，$z = re^{i\theta}$ として $z \to 0$ の極限を $r \to 0$ でとると $\lim_{z \to 0} g(z, z^*) = \lim_{r \to 0} \dfrac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$ となり，θ の値は任意なので極限は一意的に決まらず不定となる．

20.2 複素関数の微分

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が $\Delta z \to 0$ の極限の取り方によらずに一意的に存在するとき，$f(z)$ は点 z で微分可能という．$f(z)$ が点 z の近傍全体で微分可能なとき，$f(z)$ は点 z で**正則**という．微分可能な関数 $f(z)$ で，$z = x + iy$ に対し，$\mathrm{Re}[f(z)] = u(x, y)$，$\mathrm{Im}[f(z)] = v(x, y)$ とすると，実数関数の微分の定義を用いて

$$f(z + \Delta z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y),$$

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) = u(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}u\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}u\Delta y + O(\Delta x\Delta y,\ \Delta x^2,\ \Delta y^2),$$
$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) = v(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}v\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}v\Delta y + O(\Delta x\Delta y,\ \Delta x^2,\ \Delta y^2),$$
$$f(z+\Delta z) - f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}u + i\frac{\partial}{\partial x}v\right)\Delta x + \left(\frac{\partial}{\partial y}u + i\frac{\partial}{\partial y}v\right)\Delta y.$$

よって

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}u + i\frac{\partial}{\partial x}v\right)\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \left(\frac{\partial}{\partial y}u + i\frac{\partial}{\partial y}v\right)\frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

先に $\Delta y = 0$ としてから $\Delta x \to 0$ の極限を考えると $\dfrac{df}{dz} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}u + i\dfrac{\partial}{\partial x}v\right)$.

先に $\Delta x = 0$ としてから $\Delta y \to 0$ の極限を考えると $\dfrac{df}{dz} = -i\left(\dfrac{\partial}{\partial y}u + i\dfrac{\partial}{\partial y}v\right)$.

微分可能なときは，結果は極限の取り方によらないので，両者の実部と虚部を比較して

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v \quad \text{(コーシー・リーマンの関係式)}$$

が成立する．逆にコーシー・リーマンの関係式が成立すれば微分可能である．

20.3　演習問題

1. 次の極限を求めよ．極限が存在しない場合はその理由を述べよ

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+i)^{-n}$　b) $\displaystyle\lim_{z\to e^{i\pi/3}}(z^2+z+1)$

   c) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{(z^3+i)}{(z-i)}$　d) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}$

2. 次の関数がコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べ，満たす場合はその微分を求めよ

   a) z^2+2z+1　b) $\sin z$　c) $|z|^2$　d) $\dfrac{z-z^*}{2i}$

3. 複素関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ に対するコーシー・リーマンの関係式を，$z=re^{i\theta}$ として r,θ を用いてあらわせ．($\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial v}{\partial r}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$ の間の関係式として求める．)

4. 次の関数の微分を求めよ．

   (a) z^2 (微分の定義から求めよ．)

   (b) e^z (実部と虚部に分け，コーシー・リーマンの関係式を用いて求めよ．)

   (c) $\ln z$ (実部と虚部に分け，コーシー・リーマンの関係式を用いて求めよ．)

   (d) $\cos z$ ($\cos z$ の定義と (b) の結果を用いて求めよ．)

   (e) $\arctan z$ ($w=\arctan z$ と置くと，

   $$z=\tan w=(e^{iw}-e^{-iw})/i(e^{iw}+e^{-iw}).$$

   これを e^{iw} について解いた後，対数をとって微分して求めよ．(b), (c) の結果を用いてよい．)

5. 複素関数 $f(z)$ が正則でかつ $f(z)$ が常に実数となる時，$f(z)=$ 定数 であることを示せ．

6. $z=x+iy$ (x, y は実数) を変数とする複素関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ($u=\mathrm{Re}[f]$, $v=\mathrm{Im}[f]$) においてコーシー・リーマンの関係式が成立するとき，

   $$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u(x,y)=0\ ,\quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]v(x,y)=0$$

   が成立することを示せ．

20.4　解答例

1.

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(1+i)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}\right]^n = 0$

(b) $\displaystyle \lim_{z\to e^{i\pi/3}}(z^2+z+1) = e^{i2\pi/3}+e^{i\pi/3}+1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1 = 1+\sqrt{3}i$

(c) $\displaystyle \lim_{z\to i}\frac{(z^3+i)}{(z-i)} = \lim_{z\to i}\frac{(z^3-i^3)}{(z-i)} = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+iz-1)}{(z-i)} = i^2+ii-1 = -2-1 = -3$

(d) $z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$, θ は実数) と置いて,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\frac{(e^z-1)}{z} &= \lim_{r\to 0}\frac{e^{r(\cos\theta+i\sin\theta)}-1}{re^{i\theta}} = \lim_{r\to 0}\left[\frac{e^{r\cos\theta}\{\cos(r\sin\theta)+i\sin(r\sin\theta)\}-1}{re^{i\theta}}\right] \\
&= \lim_{r\to 0}\frac{1}{re^{i\theta}}\left[[1+r\cos\theta+O(r^2)][1+O(r^2)+i\{r\sin\theta+O(r^2)\}]-1\right] \\
&= \lim_{r\to 0}\frac{1}{re^{i\theta}}\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)+O(r^2)\right] = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = 1
\end{aligned}$$

2. $z = x+iy$ (x, y は定数) と置いて

(a) $z^2+2z+1 = (z+1)^2 = (x+1+iy)^2 = (x+1)^2-y^2+2i(x+1)y$ よって $u = (x+1)^2-y^2$, $v = 2(x+1)y$ として

$$\frac{\partial}{\partial x}u = 2(x+1)\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}u = -2y\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x}v = 2y\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}v = 2(x+1)$$

よって，コーシ・リーマンの関係式 $\dfrac{\partial}{\partial x}u = \dfrac{\partial}{\partial y}v$,　$\dfrac{\partial}{\partial y}u = -\dfrac{\partial}{\partial x}v$ が成立する．微分は

$$\frac{\partial}{\partial x}u + i\frac{\partial}{\partial x}v = 2(x+1)+2yi = 2(z+1)$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} &= \frac{1}{2i}[e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}] = \frac{1}{2i}[e^{-y}\{\cos x+i\sin x\}-e^{y}\{\cos x-i\sin x\}] \\
&= \sin x\frac{(e^y+e^{-y})}{2}+i\cos x\frac{(e^y-e^{-y})}{2} = u+iv
\end{aligned}$$

として,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u = \cos x\frac{(e^y+e^{-y})}{2}\ &,\frac{\partial}{\partial y}u = \sin x\frac{(e^y-e^{-y})}{2}\ , \\
\frac{\partial}{\partial x}v = -\sin x\frac{(e^y-e^{-y})}{2}\ &,\ \frac{\partial}{\partial y}v = \cos x\frac{(e^y+e^{-y})}{2}
\end{aligned}$$

よって，コーシ・リーマンの関係式が成立する．微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u + i\frac{\partial}{\partial x}v &= \cos x\frac{(e^y+e^{-y})}{2}+i(-\sin x)\frac{(e^y-e^{-y})}{2} \\
&= \frac{1}{2}[e^y(\cos x-i\sin x)+e^{-y}(\cos x+i\sin x)] \\
&= \frac{1}{2}[e^ye^{-ix}+e^{-y}e^{ix}] = \frac{1}{2}[e^{-i(x+iy)+e^{i(x+iy}}] = \frac{1}{2}[e^{iz}+e^{-iz}] = \cos z
\end{aligned}$$

（c）$|z|^2 = x^2 + y^2 = u + iv$ とすると $u = x^2 + y^2$, $v = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}u = 2x\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}u = 2y\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x}v = 0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}v = 0$$

よって，コーシ・リーマンの関係式は成立しない．

（d）$\dfrac{z - z^*}{2i} = y = u + iv$ とすると $u = y$, $v = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}u = 0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}u = 1\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x}v = 0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}v = 0$$

よって，コーシ・リーマンの関係式は成立しない．

3. $z = x + iy = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$ より $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$．連鎖定理を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}$$

これらとコーシー・リーマンの関係式より

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \theta} &= r\cos\theta(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + r\sin\theta(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = 0 \\
r\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} &= r\cos\theta(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + r\sin\theta(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) = 0
\end{aligned}$$

よって求める関係式は

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}\ ,\quad r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

4.

（a）

$$\frac{d}{dz}z^2 = \lim_{w\to 0}\frac{(z+w)^2 - z^2}{w} = \lim_{w\to 0}\frac{2zw + w^2}{w} = 2z$$

（b）$e^z = ex + iy = e^x(\cos y + i\sin y) = u + iv$ とすると $u = e^x\cos y$, $v = e^x\sin y$

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} == e^x\cos y + ie^x\sin y = e^x((\cos y + i\sin y) = e^z$$

（c）$\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r = u + iv$ とすると $u = \ln r$, $v = \theta$

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \ln r}{\partial x} + i\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ より $\dfrac{\partial \ln r}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$．$y=r\sin\theta$ の両辺を x で偏微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x}&=\frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta+r\frac{\partial \sin\theta}{\partial x}\\ 0&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\theta+r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{xy}{r^2}+x\frac{\partial\theta}{\partial x}\\ \text{よって}\ \frac{\partial\theta}{\partial x}&=-\frac{y}{r^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

これらを代入して

$$\frac{d\ln z}{dz}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{z}$$

(d)

$$\frac{d}{dz}\cos z=\frac{d}{dz}\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\frac{1}{2}(ie^{iz}-ie^{-iz})=-\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=-\sin z$$

(e) $w=\arctan z$ と置くと，$z=\tan w=\dfrac{(e^{iw}-e^{-iw})}{i(e^{iw}+e^{-iw})}$．$e^{iw}=t$ として，

$$\begin{aligned}z&=\frac{(t-(1/t))}{i(t+(1/t))}=\frac{t^2-1}{i(t^2+1)}\\ i(t^2+1)z&=t^2-1\\ t^2(iz-1)&=-(iz+1)\\ t^2=e^{2iw}&=\frac{1+iz}{1-iz}\\ \text{(両辺の対数をとって)}\quad 2iw&=\ln(1+iz)-\ln(1-iz)\\ \text{(両辺を } z \text{ で微分)}\quad 2i\frac{dw}{dz}&=\frac{i}{1+iz}-\frac{(-i)}{1-iz}\\ \frac{dw}{dz}&=\frac{1}{2i}\left[\frac{i(1-iz)}{1+z^2}+\frac{i(1+iz)}{1+z^2}\right]=\frac{1}{1+z^2}\end{aligned}$$

5. $f(z)$ は正則なので，$f(z)$ の実部を u，虚部を v として，コーシー・リーマンの関係式が成立する．

$$\frac{\partial}{\partial x}u=\frac{\partial}{\partial y}v\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}u=-\frac{\partial}{\partial x}v\ .$$

一方，$f(z)$ は常に実数であると $v=0$．よって

$$\frac{\partial}{\partial x}u=0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}u=0\ .$$

u は x, y の両方について定数となり，$f(z)=u$ も定数となる．

6. コーシ・リーマンの関係式が成立するので

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v\ .$$

最初の式を x で偏微分して

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}v = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}v = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}u$$

y で偏微分して

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}v = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}v = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}v$$

よって

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u(x,y) = 0\ ,\quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]v(x,y) = 0$$

が成立する.

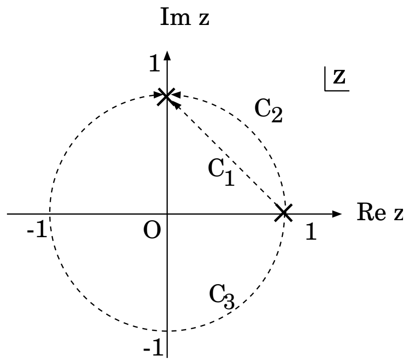
第 21 章

複素積分

21.1 複素関数の積分

実数関数の定積分，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，では積分する範囲 $a \to b$ は一意的に決まっていた．しかし複素関数の積分の場合，複素数 z_1 から z_2 の積分とした場合に，道筋はいくらでもあるので経路を指定しなければならない．よって線積分の取り扱いが必要となる．

例）$f(z) = 1/z$ の $z_1 = 1 \to z_2 = i$ への積分



経路 1.　C_1： $z = 1 + (-1+i)t\ (0 \le t \le 1) \longrightarrow dz = (-1+i)dt$

$$\int_{C_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{1}{z(t)}\frac{dz(t)}{dt}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{[1+(-1+i)t]}(-1+i)\,dt$$
$$= \ln[1+(-1+i)t]\Big|_0^1 = \ln i - \ln 1 = \frac{\pi}{2}i$$

経路 2.　C_2： $z = e^{i\theta}\ (0 \le \theta \le \pi/2) \longrightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta$

$$\int_{C_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{z(\theta)}\frac{dz(\theta)}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta = \frac{\pi}{2}i$$

経路 3.　C_2： $z = e^{-i\phi}\ (0 \le \phi \le 3\pi/2) \longrightarrow dz = -ie^{-i\phi}d\phi$

$$\int_{C_3} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{3\pi/2} \frac{1}{z(\phi)}\frac{dz(\phi)}{d\phi}\,d\phi = \int_0^{3\pi/2} \frac{1}{e^{-i\phi}}(-i)e^{-i\phi}d\phi = -\frac{3\pi}{2}i$$

この結果にも現われているように，一般に経路によって積分の値は異なる．

- 経路を逆にたどる積分は，元の経路の複素積分の符号 (+−) を変えた値になる．
- 経路の始点と終点が同じになる場合を周回積分という．記法：$\oint_c f(z)dz$

21.2　コーシーの積分定理

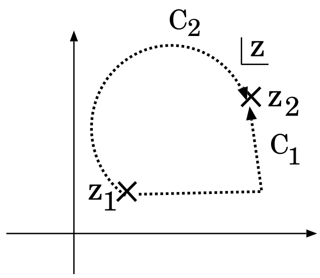
「単連結な領域 D で正則 (微分可能) な複素関数 $f(z)$ に対し，D 内の任意の閉曲線 C での周回積分は 0 になる.」

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

[**証明**] 複素数を $z = x + iy$ とし，$f(z)$ を実部 u と虚部 v にわける；

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C [(udx - vdy) + i(vdx + udy)] \\
&\quad \text{(ストークスの定理を用いて)} \\
&= \int\int_S \left[\left(-\frac{\partial}{\partial y}udxdy - \frac{\partial}{\partial x}vdxdy\right) + i\left(-\frac{\partial}{\partial y}vdxdy + \frac{\partial}{\partial x}udxdy\right)\right] \\
&= \int\int_S \left[-\left(\frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial x}v\right) - i\left(\frac{\partial}{\partial y}v - \frac{\partial}{\partial x}u\right)\right] dxdy \\
&= 0 \ \ \text{(コーシー・リーマンの関係式より)}
\end{aligned}$$



- この定理から，$f(z)$ が正則な領域内での積分は経路によらないことがわかる．

$$0 = \oint_{C_1+(-C_2)} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$$

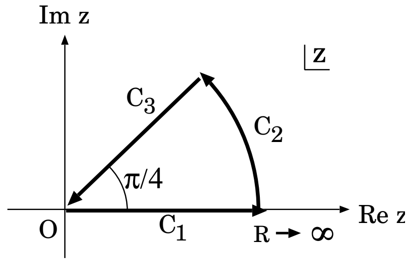
よって

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

<u>複素積分による積分計算の例</u>

$\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ と $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ を e^{iz^2} を図の積分路で計算することにより求める．経路 ($C = C_1 + C_2 + C_3$) に囲まれた領域では e^{iz^2} は正則なので，コーシーの定理より

$$0 = \oint_C e^{iz^2}\,dz = \oint_{C_1} e^{iz^2}\,dz + \oint_{C_2} e^{iz^2}\,dz + \oint_{C_3} e^{iz^2}\,dz$$



各経路上では

$$C_1 : z = x \quad (x = 0 \to R)\ ,\ dz = dx$$
$$C_2 : z = Re^{i\theta} \quad (\theta = 0 \to \pi/4)\ ,\ dz = iRe^{i\theta}d\theta$$
$$C_3 : z = te^{i\pi/4} \quad (t = R \to 0)\ ,\ dz = e^{i\pi/4}dt$$

よって

$$0 = \lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R e^{ix^2}dx + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta + \int_R^0 e^{it^2e^{i\pi/2}}e^{i\pi/4}dt\right]$$
$$= \int_0^\infty \cos(x^2)dx + i\int_0^\infty \sin(x^2)dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/4} e^{iR^2\cos 2\theta}\underline{e^{-R^2\sin 2\theta}}iRe^{i\theta}d\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

下線の部分を含んだ積分は $R \to \infty$ で 0 になる．実部と虚部がそれぞれ 0 になることから，

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

21.3　留数定理

複素関数 $f(z)$ が $0 < |z - z_0| < r$ の領域で正則のとき，$|z - z_0| < r$ の領域内での z_0 を内部に含む任意の閉曲線 C に対して，**留数**

$$\mathrm{Res}[f]_{z=z_0} \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

は常に同じ値となる．

例) $f(z) = (z - z_0)^n$ の場合，経路 C を $z = z_0 + Re^{it}$ $(t = 0 \sim 2\pi)$ ととれば，

$$\mathrm{Res}[f]_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (z - z_0)^n dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} (Re^{it})^n iRe^{it}dt$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} iR^{n+1}e^{i(n+1)t}dt = \begin{cases} 0 & (n \neq -1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

閉曲線 C 内に $f(z)$ の特異点 (関数の値が無限大や不定となる点) $z_1,\ z_2, \ldots z_n$ が存在するとき，

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}[f]_{z=z_k}$$

これより，留数がわかれば積分の値が求められる．

留数の求め方

$z = z_0$ が $f(z)$ の k 位の極であり，$0 < |z - z_0| < R$ で $f(z)$ が正則な場合，$f(z)$ は以下のように表わすことができる；

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + g(z)\ .$$

ここで $g(z)$ は $|z - z_0| < R$ で正則な関数である．このとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f]_{z=z_0} &= \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \left[\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + g(z)\right] dz \\
&\quad (\text{前の結果とコーシーの定理より}) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{a_{-1}}{(z-z_0)}dz = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)]
\end{aligned}$$

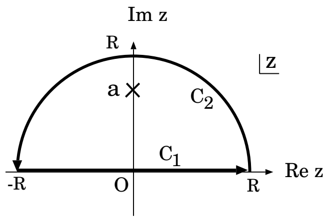
すなわち，留数を求めるには上の極限を求めればよい．

留数を用いた積分計算の例

1)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx$　(a は正の実数定数)

この積分は $x=a\tan\theta$ と置換積分することでも求められるが，複素積分を用いても計算できる．求める積分の値を得るために，まず次の経路による複素積分を考える．

$$\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z^2+a^2}\,dz$$
$$=\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{(z-ai)(z+ai)}\,dz$$



経路を実軸上の部分 ($C_1: z=x$ ($x=-R\to R$)) と半円周上の部分 ($C_2: z=Re^{i\theta}$ ($\theta=0\to\pi$)) にわけ，$R\to\infty$ の極限を考えると

$$\int_{C_1}\frac{1}{z^2+a^2}\,dz=\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+a^2}\,dx\longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\,dx$$
$$\int_{C_2}\frac{1}{z^2+a^2}\,dz=\int_{0}^{\pi}\frac{1}{R^2e^{2i\theta}+a^2}iRe^{i\theta}\,d\theta\longrightarrow 0$$

よって $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z^2+a^2}\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx$．一方，留数定理より

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z^2+a^2}\,dz=\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{(z-ai)(z+ai)}\,dz$$
$$=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+a^2}\right]\Bigg|_{z=ai}=2\pi i\lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{1}{(z-ai)(z+ai)}=\frac{\pi}{a}$$

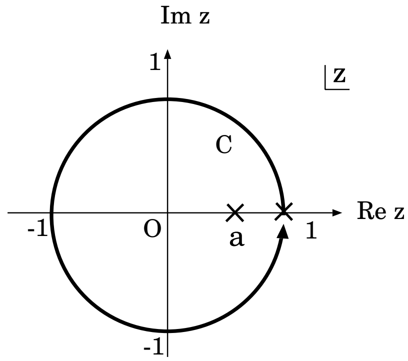
以上から $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}$.

同様の手順で $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+a^4}dx$ など，置換積分では計算が困難な積分も実行できる．

2)　$\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta$　(a は $0\le a<1$ の実数)

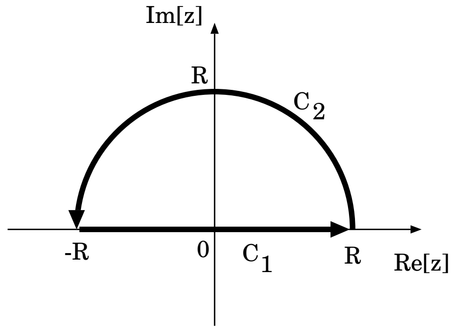
$e^{i\theta}=z$ と置くと，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$，$dz=izd\theta$．積分路 C を図のようにとれば

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}\, d\theta \\
&= \oint_C \frac{1}{[1-a(z+\frac{1}{z})+a^2]}\frac{dz}{iz} \\
&= \oint_C \frac{i}{[az^2-(1+a^2)z+a]}dz \\
&= \oint_C \frac{i}{a(z-a)(z-1/a)}dz \\
&= 2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{i}{a(z-a)(z-1/a)}]\bigg|_{z=a} \\
&= 2\pi i\,\lim_{z\to a}(z-a)\frac{i}{a(z-a)(z-1/a)} = \frac{2\pi}{1-a^2}
\end{aligned}
$$



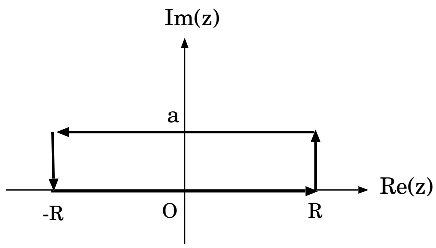
21.4　演習問題

1. 積分 $I = \int_C z dz$ を以下の経路の場合につき求めよ：
   (a) 原点から点 $z = 1 + i$ までを直線的に進む経路
   (b) 原点から実軸上を $z = 1$ まで進んだ後，虚軸と平行な直線上を $z = 1 + i$ までを直線的に進む経路
   (c) 原点から虚軸上を $z = i$ まで進んだ後，実軸と平行な直線上を $z = 1 + i$ までを直線的に進む経路
2. 原点を中心とする半径 1 の円を反時計回りに一周する経路を C として，積分 $I = \oint_C z^n dz$ を以下の場合につき求めよ：
   (a) n が 0 以上の整数のとき
   (b) $n = -1$ のとき
   (c) n が –2 以下の整数のとき
3. 積分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx \ (k > 0)$ を以下のようにして求めよ：
   (a) 正の実数 R に対して、複素平面上で $z = -R$ と $z = R$ を結ぶ直線 (C_1) と原点を中心とする半径 R の円の上半分 (C_2) とで閉じた経路をつくり、その経路での e^{ikz} の複素積分を求めよ
   (b) (C_2) での積分を、$z = Re^{i\theta}$ とおいて表し、$R \to \infty$ でのその値を求めよ
   (c) I を求めよ



4. $f(z) = e^{-z^2}$ を図の経路で積分し，$R \to \infty$ として以下を示せ.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}$$



5. 次の積分を求めよ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$$

6. 次の積分を求めよ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1-2x\cos\theta+x^2)}dx \qquad (0<\theta<\pi)$$

7. 次の積分を求めよ．ただし p は $|p|<1$ を満たす実数である．

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+p\cos\theta}d\theta$$

8. 実数 a が 0 でないとき，次の積分を求めよ

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x-i\epsilon)}dx$$

9. I_1+iI_2 を考えて次の積分 I_1 と I_2 を求めよ．ただし n は正の整数とする．

$$I_1=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta, \qquad I_2=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta-\sin\theta)d\theta$$

10. 次の積分を求めよ

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx \quad (a,m>0),$$

21.5　解答例

1.

(a) 経路を $C: z=(1+i)t\ (t=0\to 1)$ ととると，$dz=(1+i)dt$ よって

$$\int_C z dz=\int_0^1 (1+i)t(1+i)dt=(1+i)^2\int_0^1 tdt=(1+2i-1)\frac{1}{2}=i$$

(b) 経路を $C=C_1+C_2$, $C_1: z=t\ (t=0\to 1)$，$C_2: z=1+is\ (s=0\to 1)$ ととると，C_1 上で $dz=dt$，C_2 上で $dz=ids$ よって

$$\int_C zdz=\int_{C_1} zdz+\int_{C_2} zdz=\int_0^1 tdt+\int_0^1 (1+is)ids=\frac{1}{2}+i-\frac{1}{2}=i$$

(c) 経路を $C=C_1+C_2$, $C_1: z=it\ (t=0\to 1)$，$C_2: z=s+i\ (s=0\to 1)$ ととると，C_1 上で $dz=idt$，C_2 上で $dz=ds$ よって

$$\int_C zdz=\int_{C_1} zdz+\int_{C_2} zdz=\int_0^1 itidt+\int_0^1 (s+i)ds=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+i=i$$

2. 経路を $C: z=e^{i\theta}\ (\theta=0\to 2\pi)$ ととると，$dz=ie^{i\theta}d\theta$.

(a) n が 0 以上の整数で

$$\begin{aligned}\int_C z^n dz&=\int_0^{2\pi}(e^{i\theta})^n ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta\\&=i\int_0^{2\pi}\left(\cos[(n+1)\theta]+i\sin[(n+1)\theta]\right)d\theta=0\end{aligned}$$

(b) $n=-1$ で

$$\int_C z^n dz=\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi} id\theta=2\pi i$$

(c) n が -2 以下の整数では，$n=-m$ と置いて $m\geq 2$,

$$\begin{aligned}\int_C z^n dz&=\int_0^{2\pi}(e^{i\theta})^{-m} ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi} e^{-i(m-1)\theta}d\theta\\&=i\int_0^{2\pi}\left(\cos[(m-1)\theta]-i\sin[(m-1)\theta]\right)d\theta=0\end{aligned}$$

3.

(a) 複素関数 e^{ikz} は任意の z で正則である．問題の積分は周回積分なので，コーシーの定理より積分の値は 0 となる．

(b) $C_2: z=Re^{i\theta}\ (\theta=0\to\pi)$ で $dz=iRe^{i\theta}d\theta$,

$$\begin{aligned}\int_{C_2} e^{ikz}dz&=\int_0^{\pi} e^{ikRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta=\int_0^{\pi} e^{ikR(\cos\theta+i\sin\theta)}iRe^{i\theta}d\theta\\&=\int_0^{\pi} iRe^{ikR\cos\theta}e^{-kR\sin\theta}e^{i\theta}d\theta\end{aligned}$$

ここで $|e^{ikR\cos\theta}| = |e^{i\theta}| = 1$ である．$k > 0$，$0 < \theta < \pi$ なので $-kR\sin\theta < 0$．$R \to \infty$ の極限では $Re^{-kR\sin\theta} \to 0$．よって，この積分の値は 0 になる．

(c) 経路 C_1 上では $z = x$ $(x = -\infty \to \infty)$，$dz = dx$ ととれるので $\displaystyle\int_{C_1} e^{ikz}dz = I$．(a), (b) の結果より

$$0 = \int_C e^{ikz}dz = \int_{C_1} e^{ikz}dz + \int_{C_2} e^{ikz}dz = I + 0$$

よって，$I = 0$ となる．

4. 問題の経路を以下のように表す

経路	$z =$	変数の範囲	$dz =$
C_1	x	$-R \to R$	dx
C_2	$R + it$	$0 \to a$	idt
C_3	$p + ia$	$R \to -R$	dp
C_4	$-R + is$	$a \to 0$	ids

関数 e^{-z^2} は任意の z で正則なので，コーシーの定理より周回積分すると 0 になる．

$$\oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} e^{-z^2}dz = 0$$

一方

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} e^{-z^2}dz &= \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx \to \sqrt{\pi} \quad (R \to \infty) \\
\int_{C_2} e^{-z^2}dz &= \int_0^a e^{-(R+it)^2} idt = ie^{-R^2}\int_0^a e^{-2iRt}e^{t^2}dt \to 0 \quad (R \to \infty) \\
\int_{C_3} e^{-z^2}dz &= \int_R^{-R} e^{-(p+ia)^2}dp = \int_R^{-R} e^{-p^2}e^{-2iap}e^{a^2}dp \\
&= e^{a^2}\int_R^{-R} e^{-p^2}\left[\cos(2ap) - i\sin(2ap)\right]dp \\
&= e^{a^2}\int_R^{-R} e^{-p^2}\cos(2ap)dp \qquad (e^{-p^2}\sin(2ap)\text{ は奇関数}) \\
&\to -e^{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2ax)dx \quad (R \to \infty,\ p = x\text{ と置き換えた．}) \\
\int_{C_4} e^{-z^2}dz &= \int_a^0 e^{-(R+is)^2} ids = -ie^{-R^2}\int_0^a e^{-2iRs}e^{s^2}ds \to 0 \quad (R \to \infty)
\end{aligned}$$

以上から

$$0 = \sqrt{\pi} + 0 - e^{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2ax)dx + 0$$

$$(\text{ よって}) \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2ax)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2ax)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}$$

5. 問 3 と同じ経路 $(R \to \infty)$ での関数 $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$ の積分を考える．この関数は $z = \pm i, \pm 3i$ を一位の極に持ち，経路内には $z = i, 3i$ が存在するので，留数定理より

$$\int_{C_1+C_2} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}dz = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\right]_{z=i} + 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\right]_{z=3i}$$
$$= 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} + 2\pi i \lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$$
$$= 2\pi i\left[\frac{1}{2i(-1+9)} + \frac{1}{(-9+1)6i}\right] = \pi\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right] = \frac{\pi}{12}$$

一方，

$$\int_{C_1} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$$
$$\int_{C_2} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}dz = \int_{0}^{\pi} \frac{1}{(R^2e^{2i\theta}+1)(R^2e^{2i\theta}+9)}iRe^{i\theta}d\theta \to 0 \quad (R\to\infty)$$

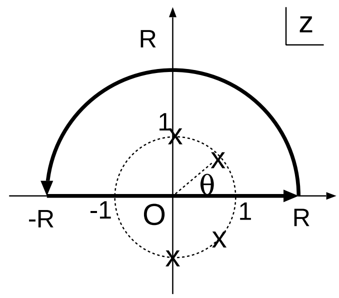
よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx = \frac{\pi}{12}$$

6.

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1-2x\cos\theta+x^2)}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x-i)(x+i)(x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta})}dx$$

よって被積分関数は $z = \pm i$, $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ を一位の極に持つ．



図のような積分路をとり，$R \to \infty$ の極限を考えると，経路に囲まれた領域内では $z = i$, $e^{i\theta}$ に一位の極があるので，留数定理より

$$I = 2\pi i \mathrm{Res}[f]|_{z=i} + 2\pi i \mathrm{Res}[f]|_{z=e^{i\theta}} \quad (f \text{ は被積分関数})$$

$$\mathrm{Res}[f]|_{z=i} = \frac{-1}{2i(i-e^{i\theta})(i-e^{-i\theta})} = \frac{-1}{2i[-1-i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+1]} = \frac{-1}{2i(-i)2\cos\theta}$$
$$\mathrm{Res}[f]|_{z=e^{i\theta}} = \frac{e^{2i\theta}}{(e^{i\theta}+i)(e^{i\theta}-i)(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} = \frac{e^{2i\theta}}{(e^{2i\theta}+1)2i\sin\theta}$$
$$= \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})2i\sin\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{4i\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{4i\sin\theta} + \frac{1}{4\cos\theta}$$

これらから計算して

$$I = 2\pi i\left[\frac{-1}{4\cos\theta} + \frac{1}{4i\sin\theta} + \frac{1}{4\cos\theta}\right] = \frac{\pi}{2\sin\theta}$$

7. 本文の計算例 2) の経路を考えると

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+p\cos\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+(p/2)(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}d\theta=\oint_C\frac{1}{1+(p/2)(z+\frac{1}{z})}\frac{dz}{iz}$$
$$=\frac{2}{ip}\oint_C\frac{1}{(2/p)z+z^2+1}dz$$

方程式 $z^2+(2/p)z+1=0$ の解は $\frac{1}{p}[-1\pm\sqrt{1-p^2}]$ で与えられる．$\alpha=\frac{1}{p}[-1+\sqrt{1-p^2}]$, $\beta=\frac{1}{p}[-1-\sqrt{1-p^2}]$ と置くと，$|\beta|>1$．$f(x)=x^2+(2/p)x+1$ (x は実数) とすると，$f(1)f(-1)=(2+\frac{2}{p})(2-\frac{2}{p})=4(1-\frac{1}{p^2})<0$ よって，$f(x)=0$ は $-1<x<1$ の間に必ず解を持つので $|\alpha|<1$．以上から，経路 C 内には α だけが 1 位の極として存在する．

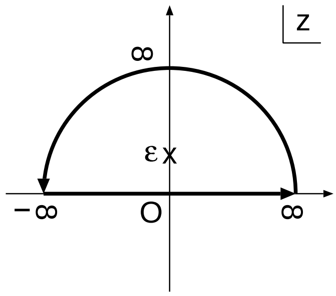
$$\oint_C\frac{1}{(2/p)z+z^2+1}dz=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(2/p)z+z^2+1}\right]_{z=\alpha}=2\pi i\lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$
$$=\frac{2\pi i}{(\alpha-\beta)}=\frac{2\pi i}{(2/p)\sqrt{1-p^2}}$$

よって

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+p\cos\theta}d\theta=\frac{2}{ip}\frac{2\pi i}{(2/p)\sqrt{1-p^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-p^2}}$$

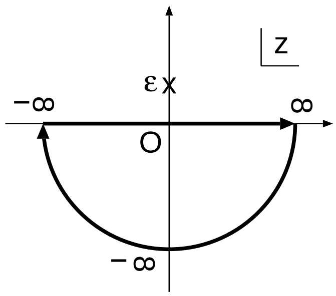
8. $f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z-i\epsilon}$ とすると，これは $z=i\epsilon$ に一位の極を持つ

$a>0$ のとき: 図の積分路で $f(z)$ を積分すると



$$\oint_C f(z)dz$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x-i\epsilon}dx+\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{iaR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}-i\epsilon}iRe^{i\theta}d\theta$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x-i\epsilon}dx+0$$
$$=2\pi i\mathrm{Res}[f]_{z=i\epsilon}=2\pi i\lim_{z\to i\epsilon}e^{iaz}$$
$$=2\pi ie^{-\epsilon a}\to 1\quad(\epsilon\to 0)$$

$a<0$ のとき: 図の積分路で $f(z)$ を積分すると



$$\oint_C f(z)dz$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x-i\epsilon}dx+\lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi}\frac{e^{iaR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}-i\epsilon}iRe^{i\theta}d\theta$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x-i\epsilon}dx+0$$

$=0$　($f(z)$ は積分経路で囲まれた領域内で正則なので)

よって

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x-i\epsilon}dx=\begin{cases}1 & (a>0)\\ 0 & (a<0)\end{cases}$$

9.

$$
\begin{aligned}
I_1 + iI_2 &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[\cos(n\theta - \sin\theta) + i\sin(n\theta - \sin\theta)]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} e^{i(n\theta - \sin\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{e^{-i\theta}} d\theta
\end{aligned}
$$

$z = e^{-i\theta}$ とおくと，$dz = -ie^{-i\theta}d\theta$ より，経路 C を複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円周を反時計まわりに一周する曲線にとれば，

$$
\begin{aligned}
I_1 + iI_2 &= -\oint_C \frac{1}{z^n} e^z \frac{i}{z} dz = -i\oint_C \frac{e^z}{z^{n+1}} dz = -i\frac{2\pi i}{n!} \lim_{z\to 0} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n+1}\frac{e^z}{z^{n+1}}\right] \\
&= \frac{2\pi}{n!} \lim_{z\to 0} e^z = \frac{2\pi}{n!}
\end{aligned}
$$

よって，両辺の実部と虚部を比較して $I_1 = 2\pi/n!$，$I_2 = 0$.

10. 問 3 と同じ経路 $(R \to \infty)$ での関数 $\dfrac{e^{imz}}{(z^2+a^2)}$ の積分を考える．この関数は $z = \pm ai$ を一位の極に持ち，経路内には $z = ai$ が存在するので，留数定理より

$$
\oint_{C_1+C_2} \frac{e^{imz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{e^{imz}}{(z^2+a^2)}\right]_{z=ai} = 2\pi i \frac{e^{-ma}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-ma}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} \frac{e^{imz}}{z^2+a^2} dz &= \int_{-infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x^2+a^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(mx) + i\sin(mx)}{x^2+a^2} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+a^2} \\
\int_{C_2} \frac{e^{imz}}{z^2+a^2} dz &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{imRe^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} iRe^{i\theta} d\theta = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{imR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} iRe^{i\theta} d\theta \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{imR\cos\theta} e^{-mR\sin\theta}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} iRe^{i\theta} d\theta = 0
\end{aligned}
$$

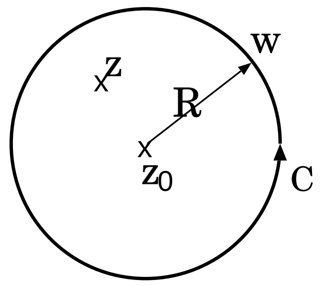
よって

$$
\int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}
$$

第 22 章

関数の展開，解析接続

22.1　コーシーの積分公式



領域 $|z - z_0| \leq R$ 内で正則な複素関数 $f(z)$ に対し，閉曲線 $C : |w - z_0| = R$ での次の周回積分を考える

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}2\pi i \lim_{w\to z}\left[(w-z)\frac{f(w)}{w-z}\right] = f(z)$$

これをコーシーの積分公式という．

この両辺を z で微分していくと

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw \\ f''(z) &= \frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}dw \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \end{aligned}$$

すなわち，正則な関数は何回でも微分可能である．

22.2　複素関数のテーラー展開

コーシーの公式で，領域 $|z - z_0| < R$ 内の任意の点 z と C 上の積分変数 w につき $|w - z_0| = R > |z - z_0|$ なので，

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(w-z_0)}\frac{1}{[1-\frac{z-z_0}{w-z_0}]} = \frac{1}{(w-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

これをコーシーの公式に代入して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$$

よって (当然ながら) 実数関数のテーラー展開と同じ形になる．

22.3　複素関数のローラン展開

領域 $0 < R_1 < |z-z_0| < R_2$ で正則な関数 $f(z)$ に対して

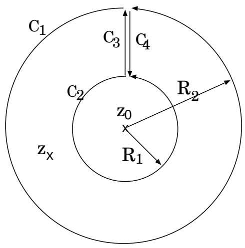
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1+(-C_2)+C_3+C_4} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\tilde{w})}{\tilde{w}-z}d\tilde{w}$$

C_1 上の点 w では $|w-z_0| > |z-z_0|$ より

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{(w-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

C_2 上の点 $\tilde{w}$ では $|\tilde{w}-z_0| < |z-z_0|$ より

$$\frac{1}{\tilde{w}-z} = \frac{-1}{(z-z_0)}\frac{1}{1-\frac{\tilde{w}-z_0}{z-z_0}} = \frac{-1}{(z-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tilde{w}-z_0}{z-z_0}\right)^n$$



これらから以下の展開が得られる．

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\oint_{C_2} f(\tilde{w})\,(\tilde{w}-z_0)^{k-1}dw\right]\frac{1}{(z-z_0)^k}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\ ,$$

ここで　$a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C (w-z_0)^{-(n+1)} f(w)dw\ .$

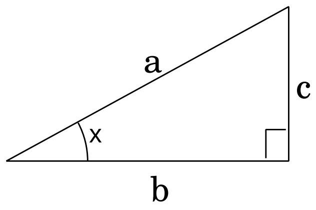
実際の展開式の計算は，ここに述べた積分を使う公式を使うよりもテーラー展開の結果を組み合わせて計算する方が早い．

例)

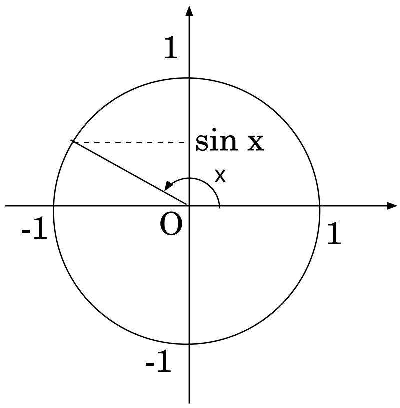
$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-2}$$

22.4 解析接続

三角関数 $\sin x$ を例として考えてみる．最初に習った sin の定義は直角三角形での辺の比であった．



角 x について，$\sin x = \dfrac{c}{a}$．このとき x の範囲は $0 < x < \pi/2$ でのみ定義されている．次に単位円上の点の y 座標として定義することにより，任意の実数 x に対して $\sin x$ が定義できる．



さらに複素関数での定義により，任意の複素数 $z = x + iy$ についても $\sin z$ が定義できた．

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}] = \frac{1}{2i}[e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}] \\ &= \frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right]\end{aligned}$$

このように関数の定義域を拡張することを解析接続という．解析接続の方法にはいろいろあるが，もとの狭い定義域での関数の値や性質と新しく定義しなおした関数に矛盾が無ければどのような方法を用いてもよい．

22.5 演習問題

1. 次の関数の展開を求めよ．

   a) $\sinh x$: x は実数とし，$x = 0$ を中心とした Taylor 展開

   b) e^z : $z = 1$ を中心とした Taylor 展開

   c) $\displaystyle\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$: x は実数とし，$x = 0$ を中心とした Taylor 展開

   d) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$: $z = 1$ を中心とした Laurent 展開

   e) $\dfrac{\cos z}{z}$: $z = 0$ を中心とした Laurent 展開

   f) $z^2 e^{-1/z}$: $z = 0$ を中心とした Laurent 展開

2. Gamma 関数 $\Gamma(z)$ は $\mathrm{Re}(z) > 0$ なる複素数に対しては $\Gamma(z) \equiv \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ で定義されており，$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を満たしている．
   (a) $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$ なる複素数に対しても上の関係式を用いて $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ と定義した場合に $\Gamma(-1/2)$ を求めよ．$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．
   (b) 同様の手続きを用いて $z \neq -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ なる複素数 z に対しても $\Gamma(z)$ を定義した場合に，$z = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ は 1 位の極になることを示せ．

3. 複素関数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ について，以下の問いに答えよ．
   (a) $f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2)$ を示せ．
   (b) 変数の複素数 z を実数 x にとるとき，$f(x)$ は e^x のテーラー展開になっていることを示せ．（これで $f(z)$ が指数関数の複素数への解析接続となっていることがわかる．）

22.6　解答例

1.

(a) $\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ に指数関数のテーラー展開を代入する．

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^n}{n!} - \frac{(-x)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{2}\frac{x^n}{n!}$$

(n が奇数のときのみ残る)

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(b)

$$e^z = e\, e^{z-1} = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}$$

(c)

$$\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\xi^2)^n}{n!}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x \xi^{2n}d\xi$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

(d)

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{\{(z-1)+1\}(z-1)\{(z-1)-1\}}$$
$$= \frac{1}{(z-1)\{(z-1)^2-1\}}$$
$$= \frac{-1}{(z-1)}\frac{1}{[1-(z-1)^2]} = \frac{-1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}[(z-1)^2]^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{2n-1}$$

(e)

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

(f)

$$z^2 e^{-1/z} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{-1}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{2-n}$$

2.

（a）$\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ に $z = -(1/2)$ を代入して，

$$\Gamma[-\frac{1}{2}] = \frac{\Gamma(-(1/2)+1)}{-(1/2)} = -2\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}$$

（b）$-(n+1) < \mathrm{Re}[z] < -n$ のとき，

$$\Gamma[z] = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{1}{z}\frac{\Gamma(z+2)}{(z+1)} = \cdots = \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n)}\Gamma(z+n+1)$$

$\mathrm{Re}[z+n+1] > 0$ なので $\Gamma(z+n+1)$ は問題に与えられている定義で求めることができ，有限の値をとる．上の式から $\Gamma(z)$ が $z = 0, -1, -2, \cdots, -n$ を一位の極に持つ．

3.

（a）4.3 節を参照.

（b）$z = x$ (x は実数) と置くと $f(x) = \displaystyle\sum_{n}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$．これは e^x のテーラー展開と一致している．

第 23 章

クロネッカーの δ，ディラックの δ 関数

23.1　クロネッカーの δ

クロネッカーの δ は以下で定義される．

$$\text{定義：　整数 } n,\, m \text{ に対し}\qquad \delta_{nm} \equiv \begin{cases} 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

たとえば次の計算を行なうと

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos[(n-m)x] + i \sin[(n-m)x]) dx \\ &= \begin{cases} \left. \frac{\sin[(n-m)x]}{n-m} - i \frac{\cos[(n-m)x]}{n-m} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \neq m) \\ \left. x + iC(\text{定数}) \right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n = m) \end{cases} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \delta_{nm}$$

23.2　ディラックの δ 関数

次の性質を満たすもの $\delta(x-a)$ をディラックの δ 関数とよぶ．

$$\begin{gathered} \text{任意の連続関数 } f(x) \text{ に対し}\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-a) dx = f(a) \\ \text{かつ，} x \neq a \text{ のとき}\quad \delta(x-a) = 0 \end{gathered}$$

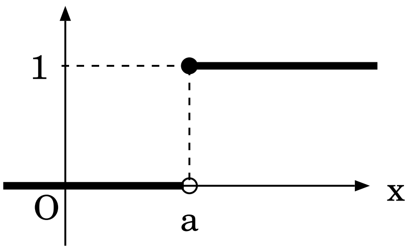
δ 関数は数学的に厳密な意味での関数ではないが[*1]，物理では非常によく用いられる．物理的なイメージとしては，質量 1 の質点の密度を考えればよい．質点には大きさが無いが (体積 $= 0$)．質点の存

[*1] 超関数とよばれるものの一種である．

在する位置での密度は (質量 $=1)/0$ で無限大となる．一方，質点の位置以外には質量は無いので，密度は 0 である．空間全体で密度を積分すれば，その空間内の全質量が得られるが，この質点が一つだけある場合その値は質点の質量，すなわち 1 になる．δ 関数を表わす一つの方法

$$\text{階段関数}\quad \theta(x-a)=\begin{cases}1 & (x\geq a\ \text{のとき})\\ 0 & (x<a\ \text{のとき})\end{cases}$$

を考え，その微分 $d\theta/dx$ と任意の連続関数 $f(x)$ との積の積分を計算すると



$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{dx}\theta(x-a)dx &= f(x)\theta(x-a)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\theta(x-a)dx \\ &= f(\infty) - \int_a^{\infty} f'(x)dx = f(\infty) - [f(\infty)-f(a)] = f(a)\end{aligned}$$

となり，また $x=a$ 以外では $\theta(x-a)$ は定数の連続関数なので微分は 0．よって

$$\delta(x-a)=\frac{d}{dx}\theta(x-a)$$

と表すことができる．

多次元での δ 関数は $\delta^3(\vec{r})$，$\delta^4(\vec{r},t)$ のように書かれ，

$$\begin{aligned}\delta^3(\vec{r}) &= \delta(x)\delta(y)\delta(z)\ , \\ \delta^4(\vec{r},t) &= \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)\end{aligned}$$

のように各座標ごとの δ 関数の積で表される．

23.3　演習問題

1. 次の計算を行え

   a) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^3}\delta_{k2}$　　b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{mk}\delta_{kn}$

   c) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2\delta(2x-7)\,dx$　　d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\delta(x^2-4)\,dx$

2. ディラックの δ 関数に関する以下の性質が成立することを，関係式の両辺に任意の関数 $f(x)$ をかけて $x=-\infty\to\infty$ の区間で積分し，その結果が両辺で等しくなることから示せ．

   a) $\delta(x)=\delta(-x)$　　b) $x\delta(x)=0$

   c) $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$　(a は 0 でない実数定数)　　d) $x\delta'(x)+\delta(x)=0$

3. 任意の微分可能な関数 $f(x)$ について $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\,dx=-f'(a)$ を示せ．ここで $\delta'(x-a)=\dfrac{d}{dx}\delta(x-a)$ である．

23.4 解答例

1.

(a) δ_{k2} は $k=2$ のときだけ 1，あとの場合は 0 なので

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^3}\delta_{k2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

(b) δ_{kn} は $k=n$ のときだけ 1，あとの場合は 0 なので

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{mk}\delta_{kn} = \delta_{mn}$$

(c) $2x-7=y$ とおくと $x=\dfrac{y+7}{2}$，$2dx=dy$ なので

$$\int_0^\infty x^2\delta(2x-7)\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{y+7}{2}\right)^2 \delta(y)\frac{1}{2}dy = \left(\frac{7}{2}\right)^2\frac{1}{2} = \frac{49}{8}$$

(d) $x^2-4=(x-2)(x+2)$ なので， $x=\pm2$ のときに δ 関数の中が 0 になる．$x=-2$ のときは $x-2=-4$，$x=2$ のときは $x+2=4$ となるので，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty x^2\delta(x^2-4)\,dx &= \int_{-\infty}^\infty x^2\delta\left((x-2)(x+2)\right)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^0 x^2\delta\left(-4(x+2)\right)\,dx + \int_0^\infty x^2\delta\left((x-2)4\right)\,dx \\
&\quad (-4(x+2)=y \text{ とおく})\quad (4(x-2)=z \text{ とおく}) \\
&= \int_\infty^{-8}\left(\frac{y}{-4}-2\right)^2\delta(y)(-\frac{1}{4})dy + \int_{-8}^\infty\left(\frac{z}{4}+2\right)^2\delta(z)\frac{1}{4}dz \\
&= 1+1=2
\end{aligned}$$

2.

(a) 定義より，任意の関数 $f(x)$ に対し

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

一方，$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(-x)dx$ で $x=-t$ と置くと $dx=-dt$，

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(-x)dx = \int_\infty^{-\infty} f(-t)\delta(t)(-dt) = \int_{-\infty}^\infty f(-t)\delta(t)dt = f(-0) = f(0)$$

よって任意の関数 $f(x)$ に対し結果が一致するので $\delta(x)=\delta(-x)$．

（b）任意の関数 $f(x)$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)x)\,\delta(x)dx = f(0)\,0 = 0$$

よって任意の関数 $f(x)$ に対し結果が 0 になるので $x\delta(x) = 0$.

（c）$a > 0$ のとき $ax = t$ と置くと $adx = dt$,

$$\begin{aligned}
a > 0 \text{ のとき} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{t}{a})\delta(t)\frac{1}{a}dt = \frac{f(0)}{a} \\
a < 0 \text{ のとき} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx &= \int_{\infty}^{-\infty} f(\frac{t}{a})\delta(t)\frac{1}{a}dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{t}{a})\delta(t)\frac{1}{a}dt = -\frac{f(0)}{a}
\end{aligned}$$

よって $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$

（d）

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[x\delta'(x) + \delta(x)]dx &= [f(x)x\delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)x)'\delta(x)dx + f(0) \\
&= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x)x + f(x))\delta(x)dx + f(0) \\
&= 0 - 0 - f(0) + f(0) = 0
\end{aligned}$$

よって任意の関数 $f(x)$ に対し結果が 0 になるので $x\delta'(x) + \delta(x) = 0$.

(別解)

(b) の結果より $0 = x\delta(x)$．両辺を x で微分して

$$0 = (x\delta(x))' = x\delta'(x) + \delta(x)$$

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = \Big[f(x)\delta(x-a)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-a)dx = -f'(a)$$

第 24 章

フーリエ解析

24.1　フーリエ級数

テーラー展開では関数 $f(x)$ を $\{x^n\} = \{1, x, x^2, \cdots\}$ の和で表わした.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

同様のことが $\{\sin(nx)\}$, $\{\cos(nx)\}$ やその他の関数の集合を用いてもできる．$-\pi < x < \pi$ で定義された関数 $f(x)$ が (sin, cos をまとめて扱うために) e^{inx} を用いて,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad (C_n \text{ は } x \text{ に依存しない係数})$$

と表わせたとし，C_n を求める．両辺に e^{-imx} をかけて $-\pi$ から π の区間で積分すると

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}e^{-imx}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi\delta_{nm} = 2\pi C_m\end{aligned}$$

よって $C_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$．まとめて以下をフーリエ級数展開とよぶ.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \ , \quad C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

例 1　: $f(x) = x \ \ (-\pi < x < \pi)$，$C_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx$

$n \neq 0$ では

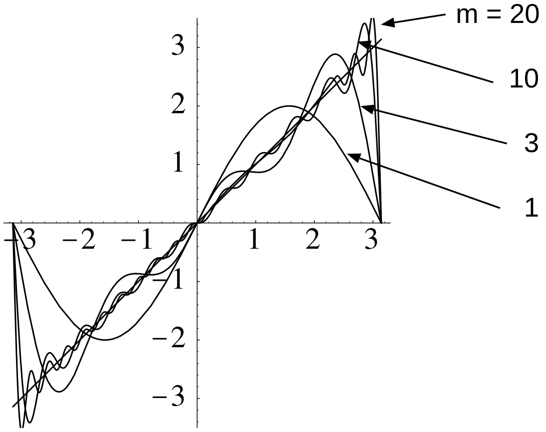
$$\begin{aligned}C_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{x}{(-in)}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{(-in)}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{i}{(n)}(\pi e^{-in\pi} - (-\pi)e^{in\pi}) - \frac{i}{(n)}\delta_{n0}\right) = \frac{i}{n}(-1)^n\end{aligned}$$

$n = 0$ では

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

よって

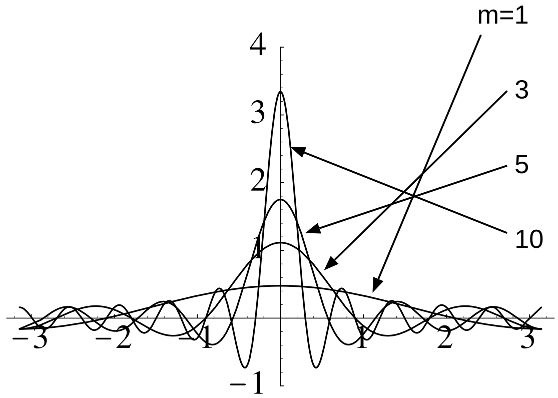
$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{i}{n}(-1)^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n e^{inx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{i}{n}(-1)^n e^{-inx} + \frac{i}{n}(-1)^n e^{inx}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n}(e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) \end{aligned}$$



$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)$ (第 m 項までの和) のグラフ

例 2　: $\delta(x)$　$(-\pi < x < \pi)$, $C_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)e^{-inx}dx = \dfrac{1}{2\pi}$ なので

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{inx} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(e^{inx} + e^{-inx})\right] = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cos(nx)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{\pi} \end{aligned}$$



$$\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos(nx)}{\pi}$$ (第 m 項までの和) のグラフ

関数 $f(x)$ の定義域を $-\pi < x < \pi$ から $-L < x < L$ に変えた場合，$2L$ を周期とする $\{e^{i\pi nx/L}\}$ での展開を考えればよい．

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\pi nx/L}\ ,\quad C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\pi nx/L}\ dx$$

24.2　フーリエ変換

$-\infty < x < \infty$ で定義された関数 $f(x)$ を扱うには，$\{e^{ikx}\}$ (k は任意の実数) での展開を考える．和を積分に直し，係数の規格化を適当にとって

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}C(k)e^{ikx}\ dk\ ,\quad C(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\ dx$$

これをフーリエ変換という．

例 1　: $f(x)=a$ (a は定数)

$$C(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ae^{-ikx}\ dx=a\sqrt{2\pi}\delta(k)$$

例 2　: $f(x)=\delta(x-a)$

$$C(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)e^{-ikx}\ dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ika}$$

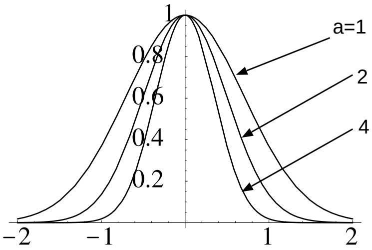
よって

$$\delta(x-a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ika}e^{ikx}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-a)}dk$$

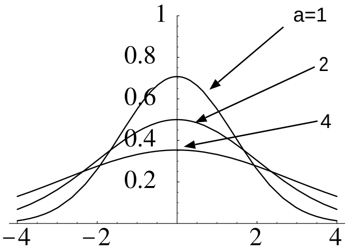
例 3　: $f(x)=e^{-ax^2}$ (a は $a>0$ の定数)

$$C(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-ikx}\ dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(x+ik/2a)^2}e^{-k^2/4a}\ dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-k^2/4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/4a}$$



e^{-ax^2}



$\dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/4a}$

<u>多次元でのフーリエ変換</u>

多次元の場合は一つの次元ごとに別の変数でフーリエ変換を行なう．たとえば関数 $f(x,y,z)$ のフーリエ変換は以下で定義できる．

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(k_x,k_y,k_z) e^{ixk_x} e^{iyk_y} e^{izk_z} dk_x dk_y dk_z \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k}\ , \quad \vec{k} = (k_x,k_y,k_z)\ , \quad \vec{r} = (x,y,z)
\end{aligned}$$

24.3 演習問題

1. 次の関数のフーリエ級数展開を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

2. $f(x) = |\sin x|$ のフーリエ級数展開を求めよ。

3. $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$ について

(a) $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

(b) 上の結果で $x = \pi$ と置くことにより以下を示せ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

4. $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ について

(a) $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(b) 上の結果を利用して以下を示せ:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

5. 次の関数のフーリエ変換を求め，その $a \to \infty$ での極限を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} a & (|x| \leq \frac{1}{2a}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{2a}) \end{cases} \quad (a > 0)$$

6. 関数 $f(x)$, $g(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \ , \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

と表わされるとき，以下の関数 $h(x)$ のフーリエ変換を求めよ．

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt$$

7. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(k)$ とする時に，以下の等式が成立することを示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk$$

24.4 解答例

1. フーリエ級数の係数 C_n を求める．

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (n=0) \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^{\pi} = \dfrac{i}{2\pi n}[(-1)^n - 1] & (n \neq 0) \end{cases}$$

よって

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{i}{2\pi n}[(-1)^n - 1]e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2\pi n}[(-1)^n - 1]e^{inx}$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2\pi n}[(-1)^n - 1]2i\sin(nx) = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2i)}{2\pi(2m+1)}2i\sin[(2m+1)x]$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)}\sin[(2m+1)x]$$

2.

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|e^{-inx}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\{\cos(nx) - i\sin(nx)\}dx$$

($|\sin x|\cos x$ は偶関数，$|\sin x|\sin x$ は奇関数なので)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |\sin x|\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos(nx)dx$$

(三角関数の積を和にする公式を用いて)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \{\sin[(1+n)x] + \sin[(1-n)x]\}dx$$
$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(2x)dx = 0\ ,$$
$$(n \neq \pm 1)\ C_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[-\frac{\cos(1+n)x}{(1+n)}\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{\cos(1-n)x}{(1-n)}\right]_0^{\pi}\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1-(-1)^{n+1}}{1+n} + \frac{1-(-1)^{1-n}}{1-n}\right\} = \frac{[1+(-1)^n]}{2\pi}\frac{2}{(1-n^2)}$$

よって n が奇数のとき $C_n = 0$．これらをまとめて

$$|\sin x| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi[(1-(2k)^2]}e^{2ikx} = \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{2}{\pi[(1-(2k)^2]}e^{2ikx} + \frac{2}{\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)}[e^{-2ikx} + e^{2ikx}] = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(2kx)}{\pi(1-4k^2)}$$

3.

（a）$C_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx$．$n=0$ のとき $C_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \dfrac{\pi^3}{3}$．$n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\right) \\ &= -\frac{2}{n\pi}\left(\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right) = \frac{2}{n^2}(-1)^n \end{aligned}$$

よって

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}(-1)^n[e^{inx} + e^{-inx}] = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx)$$

（b）上で求めた式で $x=\pi$ とおけば

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos(k\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}$$

よって　$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left[\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right] = \frac{\pi^2}{6}$$

4.

（a）$C_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}|x|dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}xdx = \dfrac{\pi}{2}$．$n \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|[\cos(nx) - i\sin(nx)]dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx = 0 + \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

よって n が偶数のとき $C_n = 0$.

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2}{\pi(2k+1)^2}[e^{-i(2k+1)x} + e^{i(2k+1)x}] \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos[(2k+1)x] \end{aligned}$$

（b）(a) の結果に $x=0$ を代入して，

$$0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx} dk$ とすると

$$\begin{aligned} C(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2a}^{1/2a} a e^{-ikx} dx \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1/2a} \cos(kx) dx = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^{1/2a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k} \sin\left(\frac{k}{2a} \right) \end{aligned}$$

$a \to \infty$ での極限は，$k \neq 0$ のとき，

$$\lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k} \sin\left(\frac{k}{2a} \right) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k/2a)}{(k/2a)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$k = 0$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2a}^{1/2a} a dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

となって，$k \neq 0$ のときと一致する．このとき元の関数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x)$$

となる．

6.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) e^{-ikx} dt dx \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-ik(x-t)} g(t) e^{-ikt} dx dt \\ (x - t = x' \text{ として}) \ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ikt} dt \right) = F(k) G(k) \end{aligned}$$

これを「たたみこみ (convolution)」という．

7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$ を代入すると

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)^* e^{-iwx} dw \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) F(w)^* e^{i(k-w)x} dx dk dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) F(w)^* \delta(k - w) dk dw = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) F(k)^* dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \end{aligned}$$

第 25 章

グリーン関数

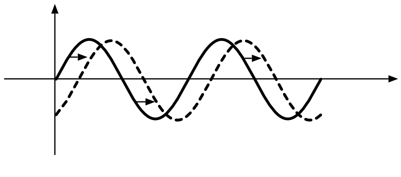
25.1　物理によく出てくる微分方程式

物理の様々な分野で以下の偏微分方程式が現れる．3 次元座標 $\vec{r} = (x, y, z)$ とラプラシアン $\Delta \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\text{ラプラス方程式} \Delta\phi(\vec{r}) &= 0 \\
\text{ポアソン方程式} \Delta\phi(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) \\
\text{ヘルムホルツ型方程式} \left[\Delta + \mu^2\right] \phi(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) \\
\text{波動方程式} \left[\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \psi(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t) \quad (v \text{ は波の速さ}) \\
\text{拡散方程式} \left[\Delta - \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial t}\right] \psi(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t)
\end{aligned}
$$

波動方程式の導出

波を表す式を考える．原点での $\sin(\omega t)$ という変位が x 軸の正の方向へ速さ v で伝わっていくとする．原点から x 離れた点では，時間が x/v だけ前での原点の変位が伝わっているので，正弦波の式は以下で与えられる．



$$\sin[\omega(t - \frac{x}{v})]$$

より複雑な形の波でも，原点から x 離れた点には時間が x/v だけ前での原点の変位が伝わっていることを考えると，その波を表す式は $f(t - x/v)$ の形になるはずである．逆の方向に進む波では $g(t + x/v)$ の形になる．これらの一般的な波の式が満たすべき関係を求めよう．関数 f と g はなめらかな連続関数であるとして，微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f(t - \frac{x}{v}) = f'(t - \frac{x}{v}), \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t - \frac{x}{v}) = f''(t - \frac{x}{v}) \ , \\
\frac{\partial}{\partial x} f(t - \frac{x}{v}) = -\frac{1}{v} f'(t - \frac{x}{v}), \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t - \frac{x}{v}) = \frac{1}{v^2} f''(t - \frac{x}{v})
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f-\frac{\partial^2}{\partial x^2}f=\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]f=0$$

が成立する．同じ式が．関数 g についても成立する．これから，速さ v の一般の波の式 $\phi(x,t)$ が満たすべき方程式として，以下の波動方程式を得る．

$$\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\phi(x,t)=0$$

この方程式の一般解は，関数 η と ξ を 2 回微分可能な任意の 1 変数関数として

$$\phi(x,t)=A\eta(x-vt)+B\xi(x+vt)$$

で与えられる．ここで A, B は任意の定数である．

3 次元空間を伝わる波の場合の波動方程式は以下のようになる．

$$\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi(x,y,z,t)=\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right]=0$$

ここで Δ はラプラシアンとよばれ

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である．ϕ が時間によらない場合 $(\partial\phi/\partial t=0)$ は，$\Delta\phi=0$ というラプラス方程式になる．

元の正弦波の式 $\sin[\omega(t-x/v)]$ に戻り，これを複素関数

$$\Psi(x,t)=e^{-i\omega(t-\frac{x}{v})}$$

に拡張する．光の波の場合を考えると光の速さは c (約 3 億 m/s) である．振動数 ν と角振動数 ω の間には $2\pi\nu=\omega$ の関係があり，波長 λ と c, ν の間には $c=\nu\lambda$ の関係がある．原子レベル以下のミクロの世界では粒子性と波動性の両方が現れることから，光の波は光の粒子 (光子) によって伝えられると考えると，光子のエネルギーは $E=h\nu=\hbar\omega$ で与えられ (h はプランク定数で，$\hbar=h/(2\pi)$)，その運動量の大きさはエネルギーと $E=cp$ の関係にある．これらから $\Psi(x,t)$ は以下のように表される．

$$\Psi(x,t)=e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})}=e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

この式が，光子以外の一般の粒子でも成立すると考えよう．粒子の速さが光速に比べて小さい場合は非相対論的な関係，$E=\frac{1}{2}mv^2=p^2/(2m)$ が成立している．

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}=-i\frac{E}{\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}=-\frac{p^2}{\hbar^2}e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

より，以下の微分方程式が成立する．

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)$$

この方程式はシュレーディンガー方程式とよばれ，ミクロな世界を記述する量子力学の基本的な方程式である．数学的には拡散方程式になっている．3 次元での場合は以下のようになる．

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right]\Psi(x,y,z,t)=0$$

粒子の速さが光速に近い場合は相対論的な関係式 $E^2=c^2p^2+m^2c^4$ を用いる．粒子が静止している場合，$p=0$ なので有名な関係式 $E=mc^2$ が得られる．

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t)=-\frac{E^2}{\hbar^2}\Psi(x,t)$$

なので，この場合に成立する微分方程式は

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t)=-\hbar^2c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)+m^2c^4\Psi(x,t)=-\hbar^2c^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Psi(x,t)$$

となる．3 次元の場合にまとめると以下のようになる．

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Psi(x,y,z,t)=0$$

この方程式はクライン・ゴルドン方程式とよばれる．Ψ が時間によらない場合 $(\partial\Psi/\partial t=0)$，数学的にはヘルムホルツ型方程式になる．

25.2　グリーン関数

たとえば，波動方程式 $\left[\Delta-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)$ を解くために，まず次の方程式を考える．

$$\left[\Delta-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]G(\vec{r},t\,;\vec{r}',t')=\delta^4(\vec{r}-\vec{r}',t-t')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\delta(t-t')$$

もし，この方程式の解 $G(\vec{r},t\,;\vec{r}',t')$ が得られたならば，一般の場合の $\rho(\vec{r},t)$ に対して次の計算をすると

$$\psi(\vec{r},t)=\int\rho(\vec{r}',t')G(\vec{r},t\,;\vec{r}',t')d^3\vec{r}'dt'$$

得られた関数 $\psi(\vec{r},t)$ は

$$\begin{aligned}\left[\Delta-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi(\vec{r},t)&=\left[\Delta-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\int\rho(\vec{r}',t')G(\vec{r},t\,;\vec{r}',t')d^3\vec{r}'dt'\\&=\int\rho(\vec{r}',t')\left[\Delta-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]G(\vec{r},t\,;\vec{r}',t')d^3\vec{r}'dt'\\&=\int\rho(\vec{r}',t')\delta^4(\vec{r}-\vec{r}',t-t')d^3\vec{r}'dt'=\rho(\vec{r},t)\end{aligned}$$

となって，求める方程式の解になっている．このような関数 $G(\vec{r},t\,;\vec{r}',t')$ をグリーン関数という．

25.3 湯川ポテンシャル

クライン・ゴルドン方程式の静的な場合のグリーン関数を求める．以下，簡単のため $c = \hbar = 1$ とする (自然単位系),

$$[\Delta - m^2]G(\vec{r}) = -\delta^3(\vec{r})$$

フーリエ変換による表示: $G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \tilde{G}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{k}$，$\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{k}$ を代入

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \tilde{G}(\vec{k})[\vec{k}^2 + m^2]e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{k} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{k}$$

両辺が等しいことから $\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{[\vec{k}^2 + m^2]}$．これを代入して $G(\vec{r})$ を求める．

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{[\vec{k}^2 + m^2]}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{(k^2+m^2)}e^{ikr\cos\theta}k^2\sin\theta d\phi d\theta dk$$

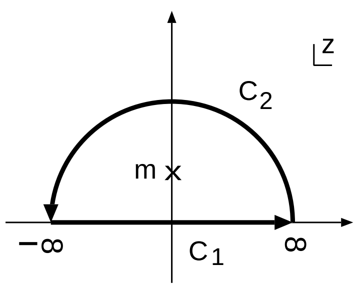
($k = |\vec{k}|$, $r = |\vec{r}|$, θ は $\vec{k}$ と $\vec{r}$ のなす角度．) ϕ 積分は簡単に実行できる．θ 積分を行なうために $\cos\theta = s$ と置くと $-\sin\theta d\theta = ds$

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_{-1}^1\frac{k^2}{(k^2+m^2)}e^{ikrs}dsdk = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\frac{k^2}{(k^2+m^2)}\left[\frac{e^{ikrs}}{ikr}\right]_{s=-1}^{s=1}dk \\ &= \frac{1}{4\pi^2 ri}\int_0^\infty\frac{k}{(k^2+m^2)}[e^{ikr} - e^{-ikr}]dk = \frac{1}{4\pi^2 ri}\int_0^\infty\frac{k}{(k^2+m^2)}2i\sin(kr)dk \end{aligned}$$

$I = \int_0^\infty \frac{2ik}{(k^2+m^2)}\sin(kr)dk$ として，図の経路 $C_1 + C_2$ での複素積分

$$\oint_{C_1+C_2}\frac{ze^{irz}}{z^2+m^2}dz$$

を考える．



$$\begin{aligned} \oint_{C_1+C_2}\frac{ze^{irz}}{z^2+m^2}dz &= \int_{-\infty}^\infty\frac{xe^{irx}}{x^2+m^2}dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi\frac{Re^{i\xi}}{R^2e^{2i\xi}+m^2}e^{irR(\cos\xi + i\sin\xi)}iRe^{i\xi}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^\infty\frac{ix\sin(rx)}{x^2+m^2}dx + 0 = \int_0^\infty\frac{2ix\sin(rx)}{x^2+m^2}dx = I \end{aligned}$$

一方，$z = \pm im$ が被積分関数の一位の極なので，留数定理より

$$\oint_{C_1+C_2} \frac{ze^{irz}}{z^2+m^2}dz = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{ze^{irz}}{z^2+m^2}\right]_{z=im} = i\pi e^{-mr}$$

以上から

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2 ri} i\pi e^{-mr} = \frac{1}{4\pi r} e^{-mr}$$

これは 質量 m の粒子が媒介する力のポテンシャル (湯川ポテンシャル) を表わしており，$m = 0$ の場合 (光子，重力子) では $\dfrac{1}{4\pi r}$ というクーロンポテンシャルに一致する．

25.4 演習問題

1. 一次元波動方程式 $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] f(x,t) = 0$ において，解 $f(x,t)$ に以下のフーリエ変換を代入し，$\tilde{f}(k,\omega) \neq 0$ のとき k と ω の間に成り立つべき条件を求めよ．

$$f(x,t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\int \tilde{f}(k,\omega)e^{ikx}e^{i\omega t}dkd\omega$$

2. 一次元拡散方程式のグリーン関数 $G(x,t)$ は次の方程式を満たす:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial t}\right] G(x,t) = \delta(x)\delta(t).$$

ここで μ は実数の定数である．解 $G(x,t)$ に以下のフーリエ変換を代入し，$\tilde{G}(k,\omega)$ を求めよ．

$$G(x,t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\int \tilde{G}(k,\omega)e^{ikx}e^{-i\omega t}dkd\omega,$$
$$\delta(x)\delta(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}dk\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}d\omega\right).$$

3. $G(x,t) = \frac{-1}{4\pi^2}\int\int \frac{e^{ikx}e^{-i\omega t}}{[k^2 - \left(\frac{i\omega}{\mu^2}\right)]}dkd\omega$ $(\mu > 0)$ に対し，次の計算を行なえ:

(a) ω について $-\infty$ から ∞ まで積分を行なって，以下を示せ．

$$G(x,t) = -\frac{\mu^2}{2\pi}\int \theta(t)e^{-\mu^2k^2t}e^{ikx}dk.$$

ここで $\theta(t)$ は $t \geq 0$ で 1，$t < 0$ で 0 となる関数である．

(b) k について $-\infty$ から ∞ まで積分を行なって，以下を示せ．

$$G(x,t) = -\frac{\theta(t)\mu}{2\sqrt{t\pi}}e^{-x^2/(4\mu^2t)}$$

4. 3 次元波動方程式の Green 関数 G は次の方程式を満たす:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] G(x,y,z,t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$$

ここで c は実数の定数で，波動の速さに相当する．

(a) $G(x,y,z,t)$ に以下のフーリエ変換を代入し、$\tilde{G}(k_x,k_y,k_z,\omega)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} &G(x,y,z,t) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int\int\int\int \tilde{G}(k_x,k_y,k_z,\omega)e^{ik_xx}e^{ik_yy}e^{ik_zz}e^{-i\omega t}dk_xdk_ydk_zd\omega \end{aligned}$$

(b) 得られた $\tilde{G}(k_x,k_y,k_z,\omega)$ から $G(x,y,z,t)$ を求めよ．

25.5 解答例

1. 一次元波動方程式にフーリエ変換 $f(x,t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\int \tilde{f}(k,\omega)e^{ikx}e^{i\omega t}dkd\omega$ を代入して

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] f(x,t) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\int \tilde{f}(k,\omega)e^{ikx}e^{i\omega t}dkd\omega \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\int \tilde{f}(k,\omega)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] e^{ikx}e^{i\omega t}dkd\omega \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\int \tilde{f}(k,\omega)[(ik)^2 - \frac{1}{v^2}(i\omega)^2]e^{ikx}e^{i\omega t}dkd\omega \\
&= -\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\int \tilde{f}(k,\omega)[k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}]e^{ikx}e^{i\omega t}dkd\omega
\end{aligned}$$

$\tilde{f} \neq 0$ でこの方程式が成立するには,

$$k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \ \rightarrow \omega = \pm vk$$

2. 方程式: $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial t}\right] G(x,t) = \delta(x)\delta(t)$. に問題で与えられたフーリエ変換を代入すると

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial t}\right] \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int\int \tilde{G}(k,\omega)e^{ikx}e^{-i\omega t}dkd\omega &= \left(\frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}dk\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}d\omega\right) \\
\frac{1}{2\pi}\int\int \tilde{G}(k,\omega)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial t}\right] e^{ikx}e^{-i\omega t}dkd\omega &= \frac{1}{4\pi^2}\int\int e^{ikx}e^{-i\omega t}dkd\omega \\
\frac{1}{2\pi}\int\int \tilde{G}(k,\omega)\left[(ik)^2 - \frac{(-i\omega)}{\mu^2}\right] e^{ikx}e^{-i\omega t}dkd\omega &= \frac{1}{4\pi^2}\int\int e^{ikx}e^{-i\omega t}dkd\omega \\
-\frac{1}{2\pi}\int\int \tilde{G}(k,\omega)\left[k^2 - \frac{(i\omega)}{\mu^2}\right] e^{ikx}e^{-i\omega t}dkd\omega &= \frac{1}{4\pi^2}\int\int e^{ikx}e^{-i\omega t}dkd\omega
\end{aligned}$$

よって

$$\tilde{G}(k,\omega) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)\frac{1}{k^2 - \frac{(i\omega)}{\mu^2}}$$

3.

(a)

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= \frac{-1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}e^{-i\omega t}}{[k^2 - \frac{(i\omega)}{\mu^2}]}dkd\omega = \frac{-i\mu^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}e^{-i\omega t}}{[\omega + i\mu^2k^2]}dkd\omega \\
&= \frac{-i\mu^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{[\omega + i\mu^2k^2]}d\omega\right]e^{ikx}dk
\end{aligned}$$

[ ] 内の積分を考える．$\omega = -y$ と置くと

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{[\omega + i\mu^2k^2]}d\omega = \int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{ity}}{[-y + i\mu^2k^2]}(-dy) = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ity}}{[y - i\mu^2k^2]}dy$$

この積分は複素積分の章での演習問題 8 の解答例で $x \to y$, $a \to t$, $\epsilon \to \mu^2 k^2$ と置いた場合に相当し，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ity}}{[y - i\mu^2 k^2]} dy = \theta(t) 2\pi i e^{-\mu^2 k^2 t}$$

よって

$$G(x,t) = \frac{-i\mu^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} [-\theta(t) 2\pi i e^{-\mu^2 k^2 t}] e^{ikx} dk = -\frac{\mu^2}{2\pi} \int \theta(t) e^{-\mu^2 k^2 t} e^{ikx} dk$$

（b）

$$\begin{aligned} G(x,t) &= -\frac{\mu^2}{2\pi} \int \theta(t) e^{-\mu^2 k^2 t} e^{ikx} dk = -\frac{\mu^2}{2\pi} \theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2 k^2 t} e^{ikx} dk \\ &= -\frac{\mu^2}{2\pi} \theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2 t \{k - ix/(2\mu^2 t)\}^2 - x^2/(4\mu^2 t)} dk \\ &= -\frac{\mu^2}{2\pi} \theta(t) e^{-x^2/(4\mu^2 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2 t \{k - ix/(2\mu^2 t)\}^2} dk \\ &= -\frac{\mu^2}{2\pi} \theta(t) e^{-x^2/(4\mu^2 t)} \sqrt{\frac{\pi}{\mu^2 t}} = -\frac{\theta(t)\mu}{2\sqrt{t\pi}} e^{-x^2/(4\mu^2 t)} \end{aligned}$$

(注：最後の k 積分については，複素積分の章での演習問題 4 の解答例を参考にせよ．)

4.

（a）方程式の左辺に G のフーリエ変換表示を代入すると

$$\begin{aligned} &\left[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] G(x,y,z,t) \\ &= \left[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \frac{1}{(2\pi)^2} \int\int\int\int \tilde{G}(k_x,k_y,k_z,\omega) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} dk_x dk_y dk_z d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\int\int\int \tilde{G}(k_x,k_y,k_z,\omega) \left[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} dk_x dk_y dk_z d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\int\int\int \tilde{G}(k_x,k_y,k_z,\omega) \left[-\vec{k}^2 - \frac{(-\omega^2)}{c^2}\right] e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} dk_x dk_y dk_z d\omega \end{aligned}$$

一方，右辺のデルタ関数のフーリエ変換表示は

$$-\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int\int\int\int e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} dk_x dk_y dk_z d\omega$$

両者が等しくなるには

$$\tilde{G}(k_x,k_y,k_z,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\vec{k}^2 - (\omega^2/c^2)}$$

(b)

$$G(x,y,z,t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int\int\int\int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\vec{k}^2 - (\omega^2/c^2)} e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} dk_x dk_y dk_z d\omega$$

まず k_x, k_y, k_z についての積分を行う．これは湯川ポテンシャルでの計算で $m^2 = -\omega^2/c^2$ すなわち $m = \pm i\omega/c$ としたもの (この置き換えをして良いことを示す必要があるが，計算の簡略化のため省略する) に $1/(2\pi)$ をかけたものと同じなので，$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ として

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int\int\int \frac{1}{\vec{k}^2 - (\omega^2/c^2)} e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} dk_x dk_y dk_z = \frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{4\pi r} e^{\pm i\omega r/c} e^{-i\omega t}$$

これを ω で積分して

$$\begin{aligned} G(x,y,z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{4\pi r} e^{\pm i\omega r/c} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{(4\pi r)} \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t \pm r/c)} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r} \delta(t \pm \frac{r}{c}) \end{aligned}$$

第 IV 部

大学中級レベル B
(微分方程式)

第 26 章

微分方程式の一般論

26.1 微分方程式と解の一意性

13.1 章の復習からはじめる．1 変数関数 $f(x)$ とその微分 $(f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)\ \ldots,)$ の間に成立する関係式

$$F(x, f, f', f'', \ldots) = 0$$

を常微分方程式といい，関係式を満たす関数 f を求めることを微分方程式を解くという．微分方程式に現れる f の n 回微分で，最高の n の値を階数という．

$$\text{1 階常微分方程式の例: } \frac{d}{dx}f(x) = kf(x) \quad (k \text{ は定数})$$
$$\text{2 階常微分方程式の例: } m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -m\omega^2 x(t) - \eta\frac{d}{dt}x(t) \quad (m,\ \omega,\ \eta \text{ は定数})$$

n 階常微分方程式の解は n 個の条件（$f(x_0) = f_0$，$f'(x_1) = f_1$，$f''(x_2) = f_2, \ldots$）を与えれば一意的に決まる．

まず，1 階常微分方程式の場合を考え，微分方程式を変形して以下の形に直す．

$$\frac{d}{dt}f(t) = G(f(t), t)$$

$t = t_0$ での初期条件 $f(t_0) = f_0$ (f_0 は定数) が与えられれば，変数 t が微小な量 Δt だけ増加すると，微分の定義から

$$f(t_0 + \Delta t) = f(t_0) + f'(t_0)\Delta t + O(\Delta t^2) = f_0 + G(f_0, t_0)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

右辺は $f_0,\ t_0,\ \Delta t$ だけで決まるので，$f(t_0 + \Delta t)$ も決定される．この手順を続けていけば，$f(t_0 + 2\Delta t)$, $f(t_0 + 3\Delta t), \ldots$ と任意の t の値での $f(t)$ が決定される．

次に連立 1 階常微分方程式を考える．

$$\frac{d}{dt}f(t) = P(f(t), g(t), t)$$
$$\frac{d}{dt}g(t) = Q(f(t), g(t), t)$$

この場合もある $t=t_0$ での条件 $f(t_0)=f_0$, $g(t_0)=g_0$ が与えられれば，

$$f(t_0+\Delta t)=f(t_0)+P(f(t_0),g(t_0),t_0)\Delta t+O(\Delta t^2)=f_0+P(f_0,g_0,t_0)\Delta t+O(\Delta t^2)$$
$$g(t_0+\Delta t)=g(t_0)+Q(f(t_0),g(t_0),t_0)\Delta t+O(\Delta t^2)=g_0+Q(f_0,g_0,t_0)\Delta t+O(\Delta t^2)$$

となって，$f(t_0+\Delta t)$, $g(t_0+\Delta t)$ が決定され，この手続きを続けていけば任意の t の値での $f(t)$, $g(t)$ が決定される．未知関数が 3 つ以上の連立 1 階常微分方程式の場合でも同様に，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f_1(t)&=G_1(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t),t)\\ \frac{d}{dt}f_2(t)&=G_2(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t),t)\\ &\vdots\\ \frac{d}{dt}f_n(t)&=G_n(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t),t)\end{aligned}$$

ある $t=t_0$ での条件 $f_1(t_0)=f_{10}$, $f_2(t_0)=f_{20}$, $\ldots$, $f_n(t_0)=f_{n0}$, が与えられれば任意の t の値での $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\ldots$, $f_n(t)$ が決定される．

次に 2 階微分方程式を考える．

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t)=G(f(t),\frac{df(t)}{dt},t)$$

ここで $\dfrac{df(t)}{dt}=g(t)$ と置くと，上の 2 階微分方程式は

$$\frac{d}{dt}f(t)=g(t)\ ,\quad \frac{d}{dt}g(t)=G(f(t),g(t),t)$$

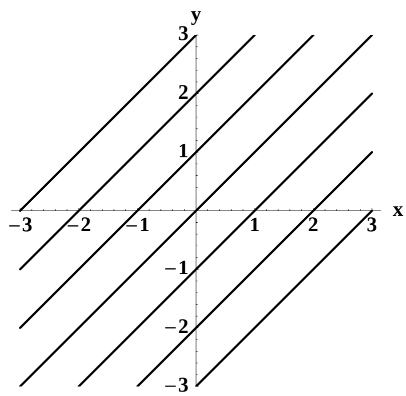
と表せて，連立 1 階常微分方程式に直すことができる．よって先ほどの議論から 2 つの条件を与えれば任意の t の値での $f(t)$ が決定される．n 階微分方程式も同様にして n 個の連立 1 階常微分方程式に直すことができるので，結局，その解は n 個の条件を与えれば一意的に決まる．

26.2　一般解，特解

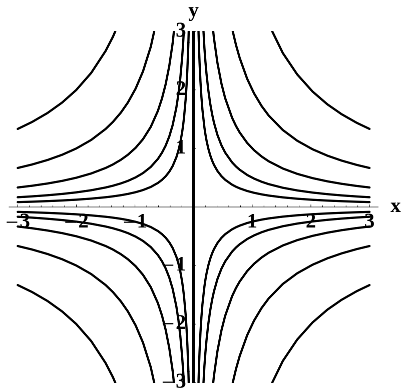
極めて簡単な例として，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=1$ を考える．これはすぐに積分できて

$$y=x+C\quad (C\ \text{は定数})$$

が解になり，定数 C の値によって解は図のように変化する．このように任意定数を含んだ解を**一般解**という．条件として x がある値のときの y の値を与えれば，定数 C が決定されて，前に説明したように解が一意的に決定される．これを**特解**という．



少しだけ複雑な例として，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ を考えると，これは変数分離法を用いて解くことができて



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$
$$\ln y = -\ln x + C = \ln\frac{e^C}{x} \qquad (C \text{ は定数})$$
$$y = \frac{A}{x} \quad (A = e^C \text{ は定数})$$

が一般解となる．例えば $x = 1$ のとき $y = 1$ という条件を与えれば，特解として $y = \dfrac{1}{x}$ が得られる．

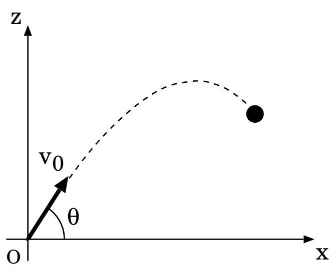
26.3　物理での応用

力学では運動方程式 $md^2/dt^2\vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}, d\vec{r}/dt, t)$ を解くことが重要である．これは $\vec{r}(t)$ は x, y, z の 3 成分をもつ関数であり，2 階の連立微分方程式なので，6 個の条件を与えれば $\vec{r}(t)$ が一意的に決定される．6 個の条件としては，ある時刻 t_0 での位置 $\vec{r}(t_0)$ と速度 $\vec{v}(t_0) = d\vec{r}/dt|_{t=t_0}$ を与えるのが一般的である．それらが与えられれば物体の運動が完全に決定される．

(例) 放物運動

質量 m の物体を初速の大きさ v_0，角度 θ $(0 < \theta < \pi/2)$ で投げた場合の物体の運動を考える．重力加速度の大きさを g とし，簡単のため空気抵抗等は無視する．

物体の出発点を原点にとり，運動の水平方向を x 軸，垂直方向を z 軸にとる．時刻 t での物体の位置を $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と表すと，運動方程式は



$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = m\frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0$$
$$m\frac{d^2}{dt^2}z(t) = -mg$$

これらの微分方程式は容易に解けて

$$x(t) = A_1 t + A_2\ ,\quad y(t) = B_1 t + B_2 \quad (A_{1,2},\ B_{1,2} \text{ は定数}),$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \quad (C_1,\ C_2 \text{ は定数})$$

初期条件は，$\dot{f} = df/dt$ として，以下のようになる．

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0 \;\; \dot{x}(0) = v_0\cos\theta\ ,\ \dot{y}(0) = 0\ ,\ \dot{z}(0) = v_0\sin\theta$$

これらを満たすには $A_2 = B_1 = B_2 = C_2 = 0$，$A_1 = v_0\cos\theta$，$C_1 = v_0\sin\theta$.

$$\text{よって}\quad x(t) = (v_0\cos\theta)t\ ,\ y(t) = 0\ ,\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\theta)t$$

26.4　演習問題

1. 次の 1 階連立微分方程式がある．

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\omega\, y(t)\ ,\quad \frac{d}{dt}y(t) = \omega\, x(t)\quad (\omega \text{ は正の実数定数})$$

これから，関数 $x(t)$ だけについての 2 階微分方程式を求めよ．また，関数 $y(t)$ だけについての 2 階微分方程式を求めよ．

2. 次の運動方程式がある．

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) + qE - \mu\frac{d}{dt}x(t)\quad (m,\ q,\ E,\ \mu \text{ は正の実数定数})$$

これから運動量 $p(t)$ と位置 $x(t)$ についての 1 階連立微分方程式を求めよ．

3. 1 階微分方程式 $\dfrac{d}{dr}V(r) = \dfrac{q}{r^2}$ (q は正の実数定数) の一般解を求めよ．また初期条件 $V(\infty) = 0$ を満たす特解を求めよ．

4. 2 階微分方程式 $m\dfrac{d^2}{dt^2}x(t) = -mg - k\dfrac{d}{dt}x(t)$ ($m,\ g,\ k$ は正の実数定数) の一般解を求めよ．また初期条件 $x(0) = h$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす特解を求めよ．
(hint: $(dx(t)/dt) + (mg/k) = f(t)$ と置く．)

5. テキストに記した放物運動につき，以下を求めよ．
   (a) 物体が描く軌跡 $z = f(x)$
   (b) 物体が最高に到達する高さ
   (c) 物体を投げた後再び物体が $z = 0$ の高さになったときの x 座標とその値が最も大きくなる角 θ
   (d) $t = 0$ での速度の代わりに位置 $(L, 0, 0)$ $(L > 0)$ を通過することを求めた場合，v_0 と θ に課せられる条件

26.5　解答例

1. $\dfrac{d}{dt}x(t) = -\omega\ y(t)$ の両辺を t で微分し，$\dfrac{d}{dt}y(t) = \omega\ x(t)$ を用いると

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega\frac{d}{dt}y(t) = -\omega(\omega\ x(t)) = -\omega^2 x(t)$$

同様に $\dfrac{d}{dt}y(t) = \omega\ y(t)$ の両辺を t で微分し，$\dfrac{d}{dt}x(t) = -\omega\ y(t)$ を用いると

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \omega\frac{d}{dt}x(t) = \omega(-\omega\ y(t)) = -\omega^2 y(t)$$

よって

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)\ ,\quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) = -\omega^2 y(t)$$

2. 運動量 $p(t)$ は $p(t) = m\dfrac{d}{dt}x(t)$ で与えられるので,

$$\frac{d}{dt}p(t) = m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) + qE - \mu\frac{d}{dt}x(t) = -kx(t) + qE - \frac{\mu}{m}p(t)$$

これらをまとめて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p(t) &= -\frac{\mu}{m}p(t) - kx(t) + qE\\ \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{1}{m}p(t)\end{aligned}$$

3. 問題の微分方程式の両辺を r で積分する

$$\begin{aligned}\int\frac{d}{dr}V(r)dr &= \int\frac{q}{r^2}dr\\ V(r) &= -\frac{q}{r} + C\quad (C\ \text{は定数})\end{aligned}$$

これが一般解となる．一般解に初期条件 $V(\infty) = 0$ を代入して

$$0 = \lim_{r\to\infty}(-\frac{q}{r} + C) = C$$

よって題意の初期条件を満たす特解は $V(r) = -\dfrac{q}{r}$.

4. $(dx(t)/dt) + (mg/k) = f(t)$ と置くと

$$\begin{aligned}m\frac{d}{dt}f(t) &= m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -mg - k\frac{d}{dt}x(t) = -kf(t)\\ \frac{1}{f(t)}\frac{d}{dt}f(t) &= -\frac{k}{m}\\ \frac{d}{dt}\ln f(t) &= -\frac{k}{m}\end{aligned}$$

両辺を t で積分して

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d}{dt}\ln f(t)dt &= \int -\frac{k}{m}dt \\
\ln f(t) &= -\frac{k}{m}t + C \quad (C \text{ は定数}) \\
f(t) &= e^{C-kt/m} = e^C e^{-kt/m} = De^{-kt/m} \quad (D = e^C \text{ は定数})
\end{aligned}
$$

これを元の $f(t)$ の式に代入し，両辺を t で積分する．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t) + \frac{mg}{k} &= De^{-kt/m} \\
\int\left(\frac{d}{dt}x(t) + \frac{mg}{k}\right)dt &= \int De^{-kt/m}dt \\
x(t) + \frac{mg}{k}t &= -\frac{m}{k}De^{-kt/m} + E \ (E \text{ は定数}) \\
x(t) &= -\frac{mg}{k}t + C_1 e^{-kt/m} + C_2 \quad (C_1,\, C_2 \text{ は定数})
\end{aligned}
$$

これが一般解となる．初期条件 $x(0) = h$，$\dot{x}(0) = 0$ を代入して

$$
\begin{aligned}
h &= x(0) = C_1 + C_2 \\
0 &= \dot{x}(0) = -\frac{mg}{k} - \frac{k}{m}C_1
\end{aligned}
$$

これを C_1, C_2 について解いて

$$
C_1 = -\frac{m^2 g}{k^2}\ ,\quad C_2 = h - C_1 = h + \frac{m^2 g}{k^2}
$$

よって，題意の初期条件を満たす特解は

$$
x(t) = -\frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}e^{-kt/m} + h + \frac{m^2 g}{k^2} = h - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-kt/m}\right)
$$

(これは速度に比例する抵抗がある場合の物体の落下を記述している．)

5.

(a) $x(t) = (v_0\cos\theta)t$ より $t = \dfrac{x}{v_0\cos\theta}$．これを $z(t)$ の式に代入して

$$
\begin{aligned}
z &= -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\theta)t = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0\cos\theta})^2 + (v_0\sin\theta)\frac{x}{v_0\cos\theta} \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + (\tan\theta)x
\end{aligned}
$$

(b) 前問の結果より

$$
\begin{aligned}
z &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + (\tan\theta)x \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x - \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}\tan\theta\right)^2 + \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(\frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}\tan\theta\right)^2 \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x - \frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}
\end{aligned}
$$

最高に到達する高さは z の最大値なので

$$\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

（c）(a) の結果で $z=0$ とおいて

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + (\tan\theta)x = x\left(\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x\right)$$

この方程式の解は $x=0$ と

$$x = \frac{\tan\theta 2v_0^2\cos^2\theta}{g} = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

（d）前問の結果を L と置いて

$$L = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \;\Rightarrow\; v_0^2\sin 2\theta = gL$$

これが v_0 と θ に課せられる条件となる.

第 27 章

1 階常微分方程式

幾種類かの 1 階常微分方程式の解法について説明する．

27.1　変数分離形

微分方程式が次の形になっている場合を変数分離形という．

$$\frac{d}{dx}f(x) = P(x)Q(f)$$

ここで P, Q は既知の関数である．この微分方程式の両辺を Q で割り，x で積分すると

$$\int \frac{1}{Q(f)}\frac{df}{dx}dx = \int P(x)dx$$
$$\int \frac{1}{Q(f)}df = \int P(x)dx$$

左辺は f だけの関数の f での積分，右辺は x だけの関数の x での積分とみなすことができるので，$1/Q$ と P の積分が実行できれば，その結果から $f(x)$ を x で表すことができる．

(例)　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

上と同様にして

$$\int ydy = -\int xdx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

整理して　$x^2 + y^2 = \tilde{C}$　($\tilde{C}$ は定数)

27.2　同次形

微分方程式が次の形になっている場合を同次形という．

$$\frac{d}{dx}y(x) = P(\frac{y}{x})$$

ここで P は既知の関数である．$y/x = f$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xf) = f + x\frac{df}{dx}$$

これを微分方程式に代入して

$$f + x\frac{df}{dx} = P(f) \Longrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{P(f) - f}{x}$$

これは変数分離形の微分方程式になり

$$\int \frac{1}{P(f) - f} df = \int \frac{1}{x} dx$$

これを解いて $f(x)$ を得てから，$y = xf(x)$ で $y(x)$ を求める．

(例)　$x^2 - y^2 + 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2 - y^2}{2xy} = -\dfrac{1 - (y/x)^2}{2(y/x)}$

$y = xf$ と置いて

$$\begin{aligned}
f + x\frac{df}{dx} &= -\frac{(1 - f^2)}{2f} \\
x\frac{df}{dx} &= -\frac{(f^2 + 1)}{2f} \\
\int \frac{2f}{f^2 + 1} df &= -\int \frac{1}{x} dx \\
\ln(f^2 + 1) &= -\ln x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
\ln(\frac{y^2}{x^2} + 1) + \ln x &= C \\
x(\frac{y^2}{x^2} + 1) &= \tilde{C} \quad (\tilde{C} \text{ は定数}) \\
x^2 + y^2 &= \tilde{C}x
\end{aligned}$$

27.3　線型微分方程式

微分方程式が次の形になっている場合を 1 階線型微分方程式という．

$$\frac{d}{dx}f(x) + P(x)f(x) = Q(x)$$

ここで P, Q は既知の関数である．線型とは，微分方程式が f, f' の一次式になっていることを意味する．上の方程式の $Q = 0$ の場合を同次といい，そうでない場合を非同次という．同次方程式の独立な二つの特解 f_1 と f_2 があった場合，

$$\frac{d}{dx}f_1(x) + P(x)f_1(x) = 0\,, \quad \frac{d}{dx}f_2(x) + P(x)f_2(x) = 0$$

これらを用いて，c_1, c_2 を任意の定数として，$c_1f_1 + c_2f_2$ もまた，その微分方程式の解になる．

$$\frac{d}{dx}[c_1f_1 + c_2f_2] + P(x)[c_1f_1 + c_2f_2] = c_1\left[\frac{d}{dx}f_1 + P(x)f_1\right] + c_2\left[\frac{d}{dx}f_2 + P(x)f_2\right] = 0$$

27.3.1　同次 1 階線型微分方程式の一般解

同次の 1 階線型微分方程式 $\dfrac{d}{dx}f(x)+P(x)f(x)=0$ は変数分離形なので，

$$\int \frac{1}{f}df = -\int P(x)dx$$
$$\ln f = -\int P(x)dx + \tilde{C}$$
$$(\tilde{C} \text{ は積分定数})$$
$$f(x) = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C \text{ は定数})$$

27.3.2　非同次 1 階線型微分方程式の一般解

1 階線型微分方程式 $\dfrac{d}{dx}f(x)+P(x)f(x)=Q(x)$ の両辺に $e^{\int P(x)dx}$ をかけると

$$e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dx}f(x)+e^{\int P(x)dx}P(x)f(x)=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}f(x)\right]=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$
$$e^{\int P(x)dx}f(x)=\int\left[e^{\int P(x)dx}Q(x)\right]dx+C \quad (C \text{ は定数})$$
$$f(x)=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int\left[e^{\int P(x)dx}Q(x)\right]dx+C\right\}$$

非同次形の特解が一つ分かっている場合はより容易に非同次形の一般解を求めることができる．その特解を $g(x)$ とし，同次形の一般解を $f(x)$ とすると

$$\frac{d}{dx}g(x)+P(x)g(x)=Q(x)\ ,\ \frac{d}{dx}f(x)+P(x)f(x)=0$$

このとき $f(x)+g(x)$ は非同次形の 1 階線型微分方程式を満たす

$$\frac{d}{dx}[f+g]+P(x)[f+g]=0+Q(x)=Q(x)$$

このとき

$$f(x)+g(x)=Ce^{-\int P(x)dx}+g(x)$$

は任意定数 C を一つ含んでいるので，1 階微分方程式の一般解である．

(例)　$\dfrac{d}{dt}v(t)+kv(t)=ae^{-t}$ (k, a は正の実数定数)

特解を見つけるために，$v(t)=be^{-t}$ (b は定数) と置いて代入してみる．

$$\frac{d}{dt}[be^{-t}]+kbe^{-t}=ae^{-t}$$
$$(-b+kb)e^{-t}=ae^{-t}$$
$$k\neq 1 \text{ のとき} \qquad b=\frac{a}{(k-1)}$$

よって $k \neq 1$ のときは $\dfrac{a}{(k-1)}e^{-t}$ が一つの特解になる．同次方程式 $\dfrac{d}{dt}v(t) + kv(t) = 0$ の一般解は Ce^{-kt} (C は任意定数) なので，元の微分方程式の一般解は

$$v(t) = \frac{a}{(k-1)}e^{-t} + Ce^{-kt}$$

$k = 1$ のときは，$v(t) = f(t)e^{-t}$ と置いて方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(t)e^{-t}] + f(t)e^{-t} &= ae^{-t} \\ \frac{df}{dt}e^{-t} - f(t)e^{-t} + f(t)e^{-t} &= ae^{-t} \\ \frac{df}{dt} &= a \\ f &= at + C \qquad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

よって，任意定数を既に一つ含んでいるので以下が一般解になる．

$$v(t) = (at + C)e^{-t}$$

27.4　演習問題

1. 次の変数分離形の微分方程式の一般解を求め，さらに初期条件 $N(0) = N_0$ を満たす特解を求めよ．(これは放射性同位元素の数の時間変化を表している．)

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\frac{1}{\tau}N(t) \quad (\tau \text{ は正の実数定数})$$

2. ロケットは燃料を燃焼させて噴射することで推進している．無重力で抵抗のない空間中を質量 m，速さ v で一方向に飛んでいるロケットが，燃料を Δm だけ後方に，ロケットに対する相対的な速さ c で噴射し，ロケットの速さが Δv だけ増えたとすると，運動量保存則から

$$\begin{aligned} mv &= -\Delta m(c - v) + (m - \Delta m)(v + \Delta v) \\ 0 &= -\Delta mc + m\Delta v - \Delta m\Delta v \end{aligned}$$

高次の微少量 $\Delta m\Delta v$ を無視して

$$\frac{c}{m} = \frac{\Delta v}{\Delta m} \to -\frac{dv}{dm} \quad (\Delta m \text{ は正の量だが，ロケットの質量は減るので } dm = -\Delta m \text{ に注意})$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{dv}{dm} = -\frac{c}{m}$$

が成立する．この微分方程式の一般解を求めよ．最初の質量を m_0，そのうち燃料分を ϵm_0 $(0 < \epsilon < 1)$ とし，初速 0 とした場合に，燃料を全て放出したときのロケットの速さを求めよ．

3. 次の変数分離形の微分方程式の一般解を求め，さらに初期条件 $r(0) = 1$ を満たす特解を求めよ．

$$\cos\theta + r\sin\theta\frac{d\theta}{dr} = 0$$

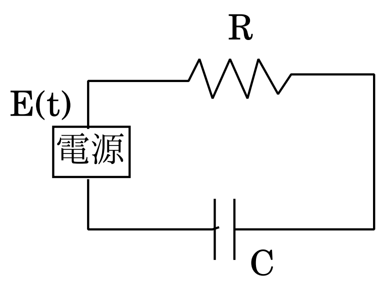
4. 次の同次形の微分方程式の一般解を求め，それが xy 座標でどのような曲線を描くかを述べよ．

$$(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$$

5. 図のように，起電力 $E(t) = E_0e^{-kt}$ (V) $(k > 0)$ の電源と，R (Ω) の抵抗，静電容量 C (F) のコンデンサーを直列につないだ回路がある．コンデンサーに蓄えられている電荷を Q とすると，回路に流れる電流 I は $I = \dfrac{dQ}{dt}$ で与えられるので，

$$E(t) = RI + \frac{Q}{C} = R\frac{d}{dt}Q(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

が成立する．$kRC \neq 1$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．また，$Q(0) = 0$ を満たす特解を求めよ．



27.5　解答例

1. 問題の微分方程式は変数分離形なので

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}N(t) &= -\frac{1}{\tau}N(t) \\
\int \frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}dt &= -\int \frac{1}{\tau}dt \\
\int \frac{1}{N}dN &= -\int \frac{1}{\tau}dt \\
\ln N &= -\frac{t}{\tau} + C \quad (C \text{ は定数}) \\
N(t) &= e^C e^{-t/\tau}
\end{aligned}
$$

初期条件 $N(0) = N_0$ を代入して

$$
N_0 = N(0) = e^C
$$

よって求める特解は $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$.

2. 問題の微分方程式 $\dfrac{dv}{dm} = -\dfrac{c}{m}$ の両辺を m で積分して

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dv}{dm}dm &= \int -\frac{c}{m}dm \\
v(m) &= -c\ln m + A \quad (A \text{ は定数})
\end{aligned}
$$

これが一般解となる．初期条件 $v(m_0) = 0$ より $A = c\ln m_0$．これを代入して

$$
v(m) = -c\ln m + c\ln m_0 = c\ln(\frac{m_0}{m})
$$

燃料を全て放出したとき，ロケットの質量は $(1-\epsilon)m_0$ なので，そのときの速さは

$$
v((1-\epsilon)m_0) = c\ln(\frac{m_0}{(1-\epsilon)m_0}) = -c\ln(1-\epsilon)
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\cos\theta + r\sin\theta\frac{d\theta}{dr} &= 0 \\
1 + r\tan\theta\frac{d\theta}{dr} &= 0 \\
\tan\theta\frac{d\theta}{dr} &= -\frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

両辺を r で積分して

$$
\begin{aligned}
\int \tan\theta\frac{d\theta}{dr}dr &= -\int \frac{1}{r}dr \\
\int \tan\theta d\theta &= -\ln r + C \quad (C \text{ は定数}) \\
-\ln(\cos\theta) &= -\ln r + C \\
r &= A\cos\theta \quad (A \text{ は定数})
\end{aligned}
$$

これが一般解となる．初期条件 $r(0) = 1$ より

$$1 = r(0) = A\cos 0 = A$$

よって初期条件を満たす特解は $r(\theta) = \cos\theta$，または $\theta(r) = \arccos(r)$.

4. 問題の微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2(y/x)}{1 - (y/x)^2}$$

と変形できて同次形である．$y/x = f$ とおいて $\dfrac{dy}{dx} = f + x\dfrac{df}{dx}$ から

$$\begin{aligned}
f + x\frac{df}{dx} &= \frac{2f}{1 - f^2} \\
x\frac{df}{dx} &= \frac{2f}{1 - f^2} - f = \frac{f + f^3}{1 - f^2} \\
\int \frac{(1 - f^2)}{(f^3 + f)} df &= \int \frac{1}{x} dx \\
\int \left[\frac{1}{f} - \frac{2f}{f^2 + 1}\right] df &= \ln x + C \quad (C \text{ は定数}) \\
\ln f - \ln(f^2 + 1) &= \ln x + C \\
\ln\left(\frac{f}{f^2 + 1}\right) &= \ln x + C \\
\frac{f}{f^2 + 1} &= Ax \quad (A \text{ は定数})
\end{aligned}$$

$f = y/x$ を代入して

$$\begin{aligned}
\frac{(y/x)}{(y/x)^2 + 1} &= Ax \\
\frac{xy}{x^2 + y^2} &= Ax \\
x^2 + y^2 &= 2qy \quad (q = 1/(2A) \text{ は定数}) \\
x^2 + (y - q)^2 &= q^2
\end{aligned}$$

点 $(0, q)$ を中心とする半径 q の円を描く．

5. 問題の微分方程式は

$$\frac{d}{dt}Q(t) + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{E_0}{R}e^{-kt}$$

であり，1 階線型微分方程式である．特解を得るために $Q(t) = Xe^{-kt}$ (X は未知定数) を代入してみると

$$\begin{aligned}
-kXe^{-kt} + \frac{X}{RC}e^{-kt} &= \frac{E_0}{R}e^{-kt} \\
\left(\frac{1}{RC} - k\right)X &= \frac{E_0}{R} \\
X &= \frac{RC}{(1 - kRC)}\frac{E_0}{R} = \frac{CE_0}{(1 - kRC)}
\end{aligned}$$

よって $Q_1(t) = \dfrac{CE_0}{(1-kRC)}e^{-kt}$ が一つの特解となる．微分方程式 $\dfrac{d}{dt}Q(t) + \dfrac{Q(t)}{RC} = 0$ は変数分離形なので容易に解けて，一般解 $Q_2(t)$ は

$$Q_2(t) = Ae^{-t/(RC)} \quad (A \text{ は定数})$$

で与えられる．元の微分方程式の一般解は $Q_1(t)$ と $Q_2(t)$ から

$$Q(t) = Ae^{-t/(RC)} + \frac{CE_0}{(1-kRC)}e^{-kt} \quad (A \text{ は定数})$$

で与えられる．$Q(0) = 0$ を満たす特解は

$$0 = Q(0) = A + \frac{CE_0}{(1-kRC)} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{CE_0}{(1-kRC)}$$

より，以下で与えられる．

$$Q(t) = \frac{CE_0}{(1-kRC)}(e^{-kt} - e^{-t/(RC)})$$

第 28 章

2 階常微分方程式

数学的には様々な 2 階常微分方程式があるが，ここでは力学によく現れる種類の 2 階常微分方程式について説明する．力学での運動方程式は時間 t を変数とする位置 $\vec{r}(t)$ についての 2 階常微分方程式であり，質点の質量を m とし，それに加わる力を $\vec{F}$ とすると，最も一般的には $\vec{F}$ は時間 t，位置 $\vec{r}(t)$，速度 $\vec{v}(t)$，その他の外部要因 (重力場，電場，磁場，外力など) の関数なので

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}, K) \quad (K \text{ は外部要因をまとめて表したもの})$$

となる．以下，力の方向を x 軸にとり，簡単のため 1 次元での運動のみを考え，いくつかの例について 2 階常微分方程式としての運動方程式の解について紹介する．

28.1　一定の力の場合，または力が無い場合

一様な重力 (mg) や電場による力 (qE) の下での運動，または自由な質点の運動の場合である．このとき $F = f$ (f は定数) となる．(自由な質点の運動の場合は $f = 0$．)

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = f\ .$$

これらは両辺を時間について 2 回積分するだけで微分方程式が解けて

$$x(t) = \frac{f}{2m}t^2 + C_1 t + C_2$$

積分定数 C_1，C_2 はある時刻 t_0 での位置 $x(t_0)$ と速度 $\dot{x}(t_0)$ ($\dot{x} = dx/dt$) を与えれば決まる．

28.2　一定の力に加えて速度に比例した抵抗が働く場合

速度に比例した抵抗は $-\mu\frac{dx}{dt}$ (μ は正の実数定数) と表されるので，運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = f - \mu\frac{dx}{dt}$$

$\dfrac{dx}{dt} = v(t)$ と置けば，

$$m\frac{d}{dt}v(t) = f - \mu v(t)$$

となり，1 階の線型微分方程式になる．これは $v(t) - \dfrac{f}{\mu} = h(t)$ と置けば

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\frac{\mu}{m}h(t)$$

という変数分離形に変形できる．一般解は

$$h(t) = C_1 e^{-\mu t/m} \ \Rightarrow v(t) = C_1 e^{-\mu t/m} + \frac{f}{\mu} \quad (C_1 \text{ は任意の定数})$$

これをもう一度 t で積分して

$$x(t) = -\frac{mC_1}{\mu}e^{-\mu t/m} + \frac{f}{\mu}t + C_2 = \tilde{C}_1 e^{-\mu t/m} + \frac{f}{\mu}t + C_2 \quad (\tilde{C}_1,\ C_2 \text{ は任意の定数})$$

28.3　単振動

バネにつながれた質点のように，力が x に比例し，その方向が原点に引き戻そうとする向きの場合，比例定数を k $(k > 0)$ として運動方程式は以下のようになる．

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) \ \Rightarrow \ \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t) \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

2 回微分すると自分自身に $-\omega^2$ をかけたものになることから，特解として $\sin(\omega t)$，$\cos(\omega t)$ をとることができる．そこで C_1，C_2 を任意の実数定数として

$$x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\ \sin(\omega t + \phi)$$
$$(\text{ただし } \sin\phi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\ ,\ \cos\phi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}})$$

は，この 2 階微分方程式を満たし，かつ任意定数を二つ含むことから一般解になっている．この形から分かるように解は周期 $2\pi/\omega$ で振動し，単振動とよばれる．

別の解法としては，$x(t) = Ce^{\lambda t}$ (C, λ は定数) を微分方程式に代入すると

$$\lambda^2 Ce^{\lambda t} = -\omega^2 Ce^{\lambda t} \ \Rightarrow \ \lambda^2 = -\omega^2 \ \Rightarrow \ \lambda = \pm i\omega$$

よって

$$x(t) = \tilde{C}_1 e^{i\omega t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega t} \quad (\tilde{C}_1,\ \tilde{C}_2 \text{ は任意の複素数の定数})$$

が一般解となる．このままでは位置 $x(t)$ が複素数になるが，物理的に適切な初期条件を与えることで，$x(t)$ が実数となるように $\tilde{C}_1$，$\tilde{C}_2$ が決定される．

28.4　単振動に速度に比例する抵抗が加わる場合 (減衰振動)

運動方程式は以下のようになる

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) - \mu\frac{d}{dt}x(t) \ \Rightarrow \ m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \mu\frac{d}{dt}x(t) + kx(t) = 0$$

このように $\ddot{x}$，$\dot{x}$，x について一次の式であり，係数が定数である 2 階常微分方程式を定数係数 2 階線型常微分方程式という．2 階常微分方程式であるので，独立な特解 (互いに比例関係にない特解) を二つ求めることができれば，それらを $x_1(t)$，$x_2(t)$ として

$$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意の定数})$$

が一般解になる．特解を求めるために $x(t) = e^{\lambda t}$ と置いて代入してみると，

$$(m\lambda^2 + \mu\lambda + k)e^{\lambda t} = 0$$

よって $m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0$ を満たす λ のときに特解になる．この 2 次方程式を特性方程式という．

i) $\mu^2 - 4mk < 0$ のとき
特性方程式の根は $\frac{1}{2m}[-\mu \pm i\sqrt{4mk - \mu^2}]$ である．$\frac{\mu}{2m} = \alpha$，$\frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m} = \omega$ として $\lambda = -\alpha \pm i\omega$ が特性方程式の解なので，

$$x(t) = C_1e^{-\alpha t + i\omega t} + C_2e^{-\alpha t - i\omega t} = e^{-\alpha t}\left[C_1e^{i\omega t} + C_2e^{-i\omega t}\right] \ (C_1,\ C_2 \text{ は複素数定数})$$

が一般解となる．[ ] 内の部分は単振動の解と同じ形であり，その振幅が時間とともに $e^{-\alpha t}$ で小さくなっていく．これを減衰振動という．

ii) $\mu^2 - 4mk > 0$ のとき
$\frac{\sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m} = \beta$ として $\lambda = -\alpha \pm \beta$ が特性方程式の解なので，

$$x(t) = C_1e^{-\alpha t + \beta t} + C_2e^{-\alpha t - \beta t} = e^{-\alpha t}\left[C_1e^{\beta t} + C_2e^{-\beta t}\right] \ (C_1,\ C_2 \text{ は実数定数})$$

が一般解となる．

iii) $\mu^2 - 4mk = 0$ のとき
$\lambda = -\frac{\mu}{2m}$ は重根となるが，この場合 $te^{\lambda t}$ も特解の一つになる．

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}(te^{\lambda t}) + \mu\frac{d}{dt}(te^{\lambda t}) + k(te^{\lambda t}) &= m(2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 te^{\lambda t}) + \mu(e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}) + k(te^{\lambda t}) \\ &= (m\lambda^2 + \mu\lambda + k)(te^{\lambda t}) + (2m\lambda + \mu)e^{\lambda t} = 0 \end{aligned}$$

よって一般解は

$$x(t) = (C_1t + C_2)e^{-\mu t/(2m)} \ (C_1,\ C_2 \text{ は任意の実数の定数})$$

28.5 単振動に外から強制的に振動する力が加わる場合 (強制振動)

単振動に外力 $f\cos(\gamma t)$ (f，γ は正の実数定数) が加わると，運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) + f\cos(\gamma t)$$

この一般解は，$m\dfrac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t)$ を満たす単振動の一般解に上の方程式の特解を加えれば得られる．特解を求めるため $x(t) = A\cos(\gamma t)$ と置いて代入すると

$$-mA\gamma^2\cos(\gamma t) = -kA\cos(\gamma t) + f\cos(\gamma t) \ \Rightarrow\ (k - m\gamma^2)A = f$$

よって $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \neq \gamma^2$ のとき $A = \dfrac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}$ となって，一般解は

$$x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + \frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t)$$

$\omega = \gamma$ の場合，特解を求めるためまず元の方程式を

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = -\omega^2 z(t) + \frac{f}{m}e^{i\omega t}$$

の実数部分と考えて，この微分方程式に $z(t) = y(t)e^{i\omega t}$ と置いて代入する．

$$[\ddot{y} + 2i\omega\dot{y} - \omega^2 y]e^{i\omega t} = -\omega^2 ye^{i\omega t} + \frac{f}{m}e^{i\omega t}$$
$$\ddot{y} + 2i\omega\dot{y} = \frac{f}{m}$$

最も簡単な解として $y = Ct$ の形をとると $y = -\dfrac{if}{2m\omega}t$．これから

$$\mathrm{Re}\left[-\frac{if}{2m\omega}te^{i\omega t}\right] = \frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t)$$

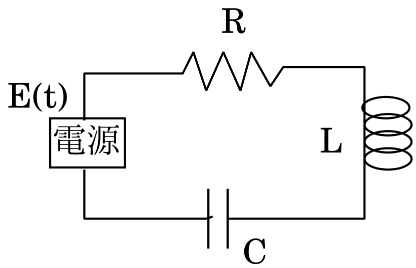
よって一般解は

$$x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + \frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t)$$

この場合，最後の項の振幅は時間に比例して大きくなっていく．これを共鳴という．

28.6　演習問題

1. 一様な重力 (重力加速度 g) と速度の二乗に比例した抵抗が働く下での物体の鉛直方向の運動を考える．以下の問いに答えよ．
   (a) 物体を投げ上げてから最高点に達するまでの運動方程式を求めよ．
   (b) 投げ上げる地点の高さを 0，初速を v_0 として (a) で求めた運動方程式を解け．
   (c) 物体が到達する最高点を求めよ．
   (d) 物体が落下している場合の運動方程式を求めよ．
   (e) 高さ h から初速 0 で落下させた場合に (d) で求めた運動方程式を解け．
2. 単振動の一般解
$$x(t) = \tilde{C}_1 e^{i\omega t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega t} \quad (\tilde{C}_1,\ \tilde{C}_2 \text{ は任意の複素数の定数})$$
   に初期条件 $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = v_0$ を課した場合の $\tilde{C}_1$，$\tilde{C}_2$ を求めよ．
3. 単振動に速度に比例する抵抗が加わる場合で，初期条件として $x(0) = A > 0$，$\dot{x}(0) = 0$ を取る場合，以下のそれぞれの場合で振動のグラフの概形を描け．
   (a)　$\mu^2 - 4mk < 0$　(b)　$\mu^2 - 4mk > 0$　(c)　$\mu^2 - 4mk = 0$
4. 単振動に速度に比例する抵抗が加わる場合で $\mu^2 - 4mk < 0$ のとき，$x(t)$ の極大値は一周期ごとにどれだけ小さくなるかを求めよ．
5. 強制振動の場合において，初期条件として $x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = v_0 > 0$ を取り，
   $0 \neq \omega - \gamma = 2\epsilon \ll \omega + \gamma$ とした場合の解を求めよ．また，その概形を描け．
6. 図のように電源と R (Ω) の抵抗，インダクタンス L (H) のコイル，静電容量 C (F) のコンデンサーを直列につないだ回路がある．回路に流れる電流 I とコンデンサーに蓄えられる電荷 Q とは $I = \dfrac{dQ}{dt}$ の関係があるので，
$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$



   の両辺を t で微分して
$$R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = \frac{dE}{dt}$$
   が成立する．このとき，以下の問いに答えよ．
   (a) $E = V_0$ (一定) のとき，初期条件 $I(0) = 0$，$Q(0) = 0$ の下で I についての微分方程式を解け．
   (b) $E(t) = V_0 \cos(\omega t)$ のとき，解として $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ の形を仮定して微分方程式に代入し，I_0 と ϕ を求めよ．

28.7　解答例

1.

(a) 物体の質量を m とする．物体には鉛直下向きに mg の重力がはたらく．物体が上昇している間は速度の二乗に比例する抵抗が下向きに働くので，その比例定数を k $(k>0)$ とする．鉛直方向を z 軸にとり，上向きを正として，時刻 t での物体の高さを $z(t)$ とすると運動方程式は

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -mg - k\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2$$

となる．

(b) $\dfrac{dz}{dt} = v$ とおくと，上で求めた微分方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\left(v^2 + \frac{mg}{k}\right)$$

となる．これは変数分離形の 1 階微分方程式なので

$$\int \frac{1}{v^2 + (mg/k)}dv = -\int \frac{k}{m}dt$$

$v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tan\theta$ と置くと，$dv = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$．これを左辺に代入して

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(mg/k)(\tan^2\theta + 1)}\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta &= -\frac{k}{m}t + C \quad (C \text{ は定数}) \\
\sqrt{\frac{k}{mg}}\int d\theta &= -\frac{k}{m}t + C \\
\theta &= -\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C_1 \quad (C_1 \text{ は定数})
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
v(t) &= \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C_1\right) \\
z(t) &= \int v(t)dt = \sqrt{\frac{mg}{k}}\int \tan\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C_1\right)dt \\
&= \frac{m}{k}\ln\cos\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C_1\right) + C_2 \quad (C_2 \text{ は定数})
\end{aligned}$$

C_1, C_2 は初期条件から決まって

$$\begin{aligned}
v_0 = v(0) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan C_1 \quad &\Rightarrow \quad C_1 = \arctan\left(v_0\sqrt{\frac{k}{mg}}\right) \\
0 = z(0) = \frac{m}{k}\ln\cos C_1 + C_2 \quad &\Rightarrow \quad C_2 = -\frac{m}{k}\ln\cos C_1
\end{aligned}$$

（c）最高点では $v=0$ となる．そのときの時刻を t_1 とすれば

$$0=\sqrt{\frac{mg}{k}}\tan\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t_1+C_1\right)\quad\Rightarrow\quad t_1=\sqrt{\frac{m}{kg}}C_1$$

これを z の式に代入して

$$z(t_1)=\frac{m}{k}\ln\cos\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t_1+C_1\right)+C_2=C_2$$

（d）(a) の場合と抵抗の向きが逆なので

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2}=-mg+k\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2$$

（e）(b) と同様にして $k\to -k$ とすると

$$\int\frac{1}{v^2-(mg/k)}dv=\int\frac{k}{m}dt$$

$v=\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tanh u$ と置くと，$dv=\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\dfrac{1}{\cosh^2 u}du$．これを左辺に代入して

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(mg/k)(\tanh^2 u-1)}\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{1}{\cosh^2 u}du&=\frac{k}{m}t+C\quad(C\text{ は定数})\\-\sqrt{\frac{k}{mg}}\int du&=\frac{k}{m}t+C\\u&=-\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_1\quad(C_1\text{ は定数})\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}v(t)&=\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_1\right)\\z(t)&=\int v(t)dt=\sqrt{\frac{mg}{k}}\int\tanh\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_1\right)dt\\&=-\frac{m}{k}\ln\cosh\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_1\right)+C_2\quad(C_2\text{ は定数})\end{aligned}$$

C_1, C_2 は初期条件から決まって

$$\begin{aligned}0=v(0)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh C_1&\quad\Rightarrow\quad C_1=0\\h=z(0)=-\frac{m}{k}\ln\cosh C_1+C_2&\quad\Rightarrow\quad C_2=h\end{aligned}$$

2. $x(t) = \tilde{C}_1 e^{i\omega t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega t}$ に初期条件 $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = v_0$ を代入して

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \\ v_0 &= \dot{x}(0) = i\omega\,(C_1 - C_2) \end{aligned}$$

この方程式を $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ について解いて

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)\ ,\quad C_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)$$

3. テキストにある結果から

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}\Big[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\Big] & (\mu^2 - 4mk < 0) \\ (C_1 t + C_2)e^{-\mu t/(2m)} & (\mu^2 - 4mk = 0) \\ e^{-\alpha t}\Big[C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\Big] & (\mu^2 - 4mk > 0) \end{cases}$$

ここで $\alpha = \dfrac{\mu}{2m}$, $\omega = \dfrac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}$ $(\mu^2 - 4mk < 0)$, $\beta = \dfrac{\sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}$ $(\mu^2 - 4mk > 0)$ である．初期条件 $x(0) = A > 0$，$\dot{x}(0) = 0$ を代入して

(a) $\mu^2 - 4mk < 0$ のとき $A = C_1 + C_2$ ， $0 = (i\omega - \alpha)C_1 - (i\omega + \alpha)C_2$ よって $C_1 = \dfrac{(i\omega + \alpha)A}{2i\omega}$ ，$C_2 = \dfrac{(i\omega - \alpha)A}{2i\omega}$ となり

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{(i\omega + \alpha)A}{2i\omega}e^{i\omega t} + \frac{(i\omega - \alpha)A}{2i\omega}e^{-i\omega t}\right] = Ae^{-\alpha t}\left[\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right]$$

(b) $\mu^2 - 4mk = 0$ のとき $A = C_2$ ， $0 = C_1 - \dfrac{\mu}{2m}C_2$

よって $C_1 = \dfrac{\mu}{2m}A$ ， $C_2 = A$ となり

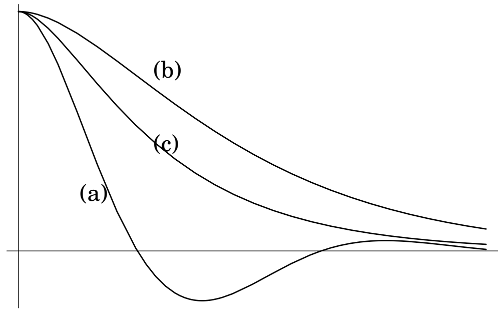
$$x(t) = A(\frac{\mu}{2m}t + 1)e^{-\mu t/(2m)}$$

(c) $\mu^2 - 4mk > 0$ のとき $A = C_1 + C_2$ ， $0 = (\beta - \alpha)C_1 - (\beta + \alpha)C_2$

よって $C_1 = \dfrac{(\alpha + \beta)A}{2\beta}$ ， $C_2 = \dfrac{(-\alpha + \beta)A}{2\beta}$ となり

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{(\alpha + \beta)A}{2\beta}e^{\beta t} + \frac{(-\alpha + \beta)A}{2\beta}e^{-\beta t}\right] = Ae^{-\alpha t}\left[\cosh(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sinh(\beta t)\right]$$

それぞれの場合のグラフの概形は以下のようになる．



4. 題意の場合の一般解は，テキストの結果から

$$e^{-\alpha t}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right]$$

で与えられる．この [　　] 内は $\dfrac{2\pi}{\omega}$ を周期とする関数であるので，1 周期毎に全体の振幅は $e^{-2\pi\alpha/\omega}$ 倍だけ小さくなる．

5. 強制振動の場合の一般解はテキストより

$$x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + \frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t) \qquad (\omega \neq \gamma)$$

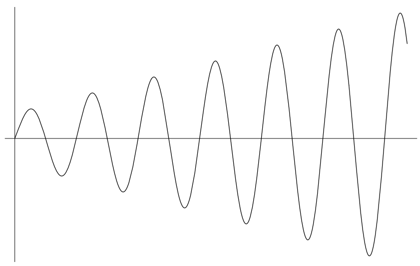
これに初期条件 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 > 0$ を代入して

$$0 = C_1 + \frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\ , \quad v_0 = \omega C_2$$

よって

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t) \\
&= -\frac{f}{2m\epsilon(2\omega-2\epsilon)}\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{f}{2m\epsilon(2\omega-2\epsilon)}\cos((\omega-2\epsilon)t) \\
&\simeq -\frac{f(1+(\epsilon/\omega))}{4m\epsilon\omega}\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{f(1+(\epsilon/\omega))}{4m\epsilon\omega}(\cos(\omega t) + 2\epsilon t\sin(\omega t)) \\
&= \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{ft}{2m\omega}\sin(\omega t) = \left[\frac{v_0}{\omega} + \frac{ft}{2m\omega}\right]\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

グラフの概形は以下のようになる



6.

(a) $E = V_0$ (一定) の場合 $\dfrac{dE}{dt} = 0$．よって微分方程式は

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

で与えられる．これは減衰振動の場合と同じ形の微分方程式なのでテキストで $m \to L$, $\mu \to R$, $k \to \dfrac{1}{C}$ と置き換えればよい．ただし，初期条件 $I(0) = 0$, $Q(0) = 0$ は $RI + L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{Q}{C} = V_0$ から $\left.\dfrac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{V_0}{L}$ を用いる．

（b）$E=V_0\cos(\omega t)$ の場合 $\dfrac{dE}{dt}=-V_0\omega\sin(\omega t)$．よって微分方程式は

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=-V_0\sin(\omega t)$$

で与えられる．これに $I=I_0\cos(\omega t+\phi)$ を代入して

$$\begin{aligned}
-\omega^2LI_0\cos(\omega t+\phi)-\omega RI_0\sin(\omega t+\phi)+\frac{I_0}{C}\cos(\omega t+\phi)&=-V_0\omega\sin(\omega t)\\
\left(\frac{1}{C}-\omega^2L\right)\cos(\omega t+\phi)-\omega R\sin(\omega t+\phi)&=-\frac{V_0}{I_0}\omega\sin(\omega t)\\
\sqrt{\{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2\}}\ \sin(\omega t+\phi+\theta)&=-\frac{V_0}{I_0}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

ここで

$$\sin\theta=\frac{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}\ ,\quad \cos\theta=\frac{-R}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}$$

である．任意の t で右辺と左辺が一致するには

$$I_0=-\frac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}\ ,\quad \phi=-\theta$$

第 29 章

連立微分方程式

物理では位置や運動量，力，電場，磁場など重要な物理量がベクトル量であることが多い．それらの間の関係式が微分方程式で表されることがよくあるが，その結果ある成分が別の成分に影響を与えることがある．この場合成分毎の微分方程式は独立でなく，連立微分方程式となる．ベクトル間の関係式でなくとも，解の一意性の時に示したように 2 階の微分方程式を 1 階の連立微分方程式と見なすことができたりすることもある．あるいは座標の変数変換で，元の座標とは見かけが異なる形の連立微分方程式にすることによって物理的意味を顕わにすることもある．ここでは，物理におけるこれらの例を紹介していく．

29.1　ベクトル間の関係式

電荷 q を持つ粒子が速度 $\vec{v}$ で磁場 $\vec{B}$ 中を運動するとローレンツ力 $q\vec{v}\times\vec{B}$ が働く．この状況での粒子の運動方程式を考える．磁場を $\vec{B}=(0,0,B)$ にとる．

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)=q\frac{d}{dt}\vec{r}\times\vec{B}$$

成分に直すと

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=qB\frac{dy}{dt}\ ,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-qB\frac{dx}{dt}\ ,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

z 成分についての微分方程式は容易に解けて，他の二つと独立である．

$$z(t)=C_{1z}t+C_{2z}\ ,\quad (C_{1z}，C_{2z}\ \text{は定数})$$

x，y 成分についての微分方程式を速度ベクトルについての微分方程式にすると

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{qB}{m}v_y\ ,\quad \frac{dv_y}{dt}=-\frac{qB}{m}v_x$$

$\dfrac{qB}{m}=\omega$ と置き，これらをさらに t で微分して

$$\frac{d^2v_x}{dt^2}=\omega\frac{dv_y}{dt}=-\omega^2v_x\ ,\quad \frac{d^2v_y}{dt^2}=-\omega\frac{dv_x}{dt}=-\omega^2v_y$$

これらは共に単振動の微分方程式である．速度の初期条件を $\vec{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ とすると，

$$v_x(t) = v_{0x}\cos(\omega t) + C_{1x}\sin(\omega t)\ , \quad v_y(t) = v_{0y}\cos(\omega t) + C_{1y}\sin(\omega t)\ , \quad v_z(t) = v_{0z}$$

が得られ，さらに速度ベクトルについての微分方程式から $C_{1x} = v_{0y}$，$C_{1y} = -v_{0x}$ となる．位置の初期条件を $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$ とすると，

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{v_{0y}}{\omega}[\cos(\omega t) - 1]\ ,\ y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{v_{0x}}{\omega}[\cos(\omega t) - 1]\ ,\ z(t) = v_{0z}t$$

となる．これは，xy 平面での点 $-\dfrac{1}{\omega}(v_{0y}, v_{0x})$ を中心に半径 $\dfrac{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}}{\omega}$ の円を描きながら z 方向に速度 v_{0z} で一様に進む螺旋運動である．

29.2　高階微分方程式からの連立微分方程式

バネ定数 k のバネでつながれた質点の運動を考える．これはよく知られた単振動の運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ で表されるが，見方を変えて位置と運動量の間の関係を調べてみる．この系の力学的エネルギーを H とすると，H は運動エネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2$ と位置エネルギー $\dfrac{1}{2}kx^2$ の和であるが，速度 v の代わりに運動量 $p = mv$ を使うと以下のように表され，H は運動量 p と位置 x の関数と見なすことができる．

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

運動量の定義と元の運動方程式から

$$p = m\frac{dx}{dt}\ , \quad \frac{dp}{dt} = -kx$$

が得られるが，これを以下のように書き直すことができる

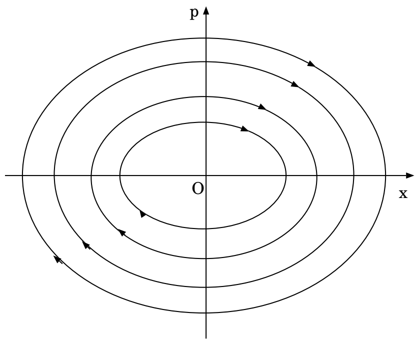
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\ , \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

今は単振動から上の関係式を導いたが，実際にはより一般的な系でも，系の全エネルギーを位置と運動量の関数としてあらわした H(ハミルトニアンとよばれる) についてこの関係が成立し，ハミルトン方程式または正準方程式とよばれる．(より詳しくは解析力学で学ぶ．) この方程式から，ハミルトニアンが与えられれば位置と運動量の時間変化がわかり，系の運動が決定される．

単振動の場合 $\dot{x} = \dfrac{p}{m}$, $\dot{p} = -kx$ から xp 平面上に図のような軌跡を描くことができる．初期条件は xp 平面上の一点として与えることができ，そこを通る楕円がこの系の運動を記述する．その楕円は

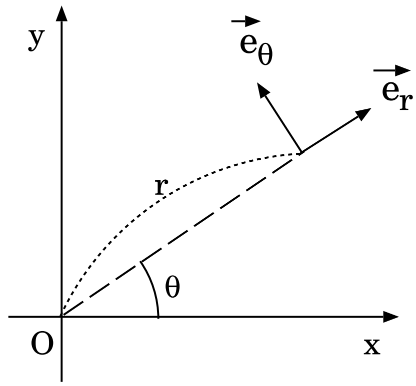
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = (\text{一定})$$

で与えられ，xp 平面上の等エネルギー線 (面) となる



一般に一つの質点は位置 (x, y, z) と運動量 (p_x, p_y, p_z) 合わせて 6 つの自由度を持つ．n 個の質点では $6n$ 個の自由度があり，これら全てを合わせた $6n$ 次元の空間を考え，それを物理での位相空間とよぶ．力学的な状態の変化は位相空間中での 1 点から別の点への移動とととらえることができる．

29.3　座標変換と連立微分方程式



$z =$ (一定) の平面内で運動している質点の運動を考え，直交座標から円筒座標への座標変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，$z = z$ を行う．r が増加する方向の単位ベクトルを $\vec{e}_r$，それに垂直で θ が増加する方向の単位ベクトルを $\vec{e}_\theta$ とする．これらは x，y 軸の正の方向の単位ベクトル $\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$ と以下の関係がある．

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

速度，加速度を r，θ，$\vec{e}_r$，$\vec{e}_\theta$ を用いて表す．

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta} \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y = (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta})\vec{e}_x + (dotr\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta})\vec{e}_y \\ &= \dot{r}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) + r\dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

加速度は

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta\dot{\theta} - r\cos\theta(\dot{\theta})^2 - r\sin\theta\ddot{\theta} \\ \ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\cos\theta\dot{\theta} - r\sin\theta(\dot{\theta})^2 + r\cos\theta\ddot{\theta} \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y \\ &= [\ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta\dot{\theta} - r\cos\theta(\dot{\theta})^2 - r\sin\theta\ddot{\theta}]\vec{e}_x + [\ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\cos\theta\dot{\theta} - r\sin\theta(\dot{\theta})^2 + r\cos\theta\ddot{\theta}]\vec{e}_y \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

力 $\vec{F}$ も $\vec{e}_r$ と $\vec{e}_\theta$ に分解して

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y = F_x(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + F_y(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta)\\ &= (F_x\cos\theta + F_y\sin\theta)\vec{e}_r + (-F_x\sin\theta + F_y\cos\theta)\vec{e}_\theta \equiv F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

運動方程式は以下のようになる．

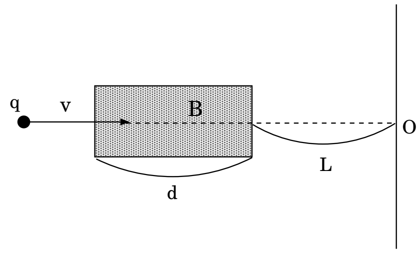
$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \ , \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta$$

力の向きが $\vec{e}_r$ に平行な場合を中心力といい，その場合は $F_\theta = 0$ なので，$mr^2\dot{\theta} = \ell$ とおけば ℓ は一定となり，これは z 軸回りの角運動量が保存されることを表す．このとき $\dot{\theta} = \dfrac{\ell}{mr^2}$ を代入して，運動方程式は以下の形の微分方程式になる．

$$m[\ddot{r} - r\left(\frac{\ell}{mr^2}\right)^2] = m[\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m^2r^3}] = F_r$$

29.4 演習問題

1. 質量 m，電荷 $q > 0$ を持つ質点が速さ v で図のように磁場のある領域に入射した．その領域には質点の最初の進行方向と垂直な向き (紙面の表から裏) に一定の大きさの磁場 B がかけられており，領域の長さは d である．質点が領域を出てから水平方向に距離 L だけ離れた位置に到達したとき，垂直方向には最初の位置からどれだけずれているかを求めよ．



2. 原点からの距離に比例した引力 ($\vec{F} = -m\omega_0^2\vec{r}$) を受けて運動している点電荷 (質量 m，電荷 q) に磁場 $\vec{B} = (0, 0, B)$ を加えた．
   (a) 点電荷の運動方程式を求めよ．
   (b) z 方向の運動方程式を解け．(微分方程式の一般解を求めよ．)
   (c) 運動方程式に $x = A_1 \cos(\omega t + \delta)$，$y = A_2 \sin(\omega t + \delta)$ を代入し，ω と ω_0 の間の関係を求めよ．
3. 一様な重力場の下で鉛直方向に運動する質点につき，その高さ x と運動量 p が xp 平面で描く軌道を示せ．
4. 単振動に速度に比例する小さな抵抗が加わる場合 ($\mu^2 - 4mk < 0$) で，初期条件として $x(0) = A > 0$，$\dot{x}(0) = 0$ を取る．このとき x と p が xp 平面で描く軌道を示せ．
5. xy 平面内で原点を中心とした半径 r_0 の円軌道上を常に原点に向かう方向の力を受けて質点が運動している．力の大きさが $\dfrac{A}{r^2}$ (A は正の実数定数) で表されるとき，軌道半径の三乗が円運動の周期の二乗に比例することを示せ．(ケプラーの第三法則)
6. 平面内の運動で $F_\theta = 0$ とする．このとき $mr^2\dot{\theta} = \ell$，$u = \dfrac{1}{r}$ と置き，以下の問いに答えよ．
   (a) $\dot{r}$ を $\dfrac{du}{d\theta}$ と ℓ を用いて表せ．
   (b) $\ddot{r}$ を u，$\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$ と ℓ を用いて表せ．
   (c) r についての微分方程式を m，u，$\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$ と ℓ を用いて表せ．
   (d) 質点の力学的エネルギーを E，位置エネルギーを U とし，$F_r = -\dfrac{d}{dr}U(r)$ と表されるとき，以下を示して E が保存することを示せ．

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{\ell^2}(E - U)$$

29.5 解答例

1. 磁場の向きを z 軸にとると磁場 $\vec{B} = (0, 0, B)$ となってテキストと同じ設定になる．質点が磁場中に突入した時刻を $t = 0$ にとり，座標軸の原点を適当にとれば初期条件を $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$, $\dot{\vec{r}}(0) = (v, 0, 0)$ として一般性を失わない．テキストの結果を用いて，磁場中での質点の位置は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{v}{\omega}\sin(\omega t) \\
y(t) &= -\frac{v}{\omega}[\cos(\omega t) - 1] \\
z(t) &= 0
\end{aligned}
$$

磁場の端に達したとき $x = d$ なので，その時刻を t_1 とすると

$$
d = x(t_1) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t_1) \quad , \quad \omega = \frac{qB}{m}
$$

$d \geq v/\omega = mv/(qB)$ の場合，質点は $x > d$ に届かない．以下 $d < mv/(qB)$ とする．上の式から $\sin(\omega t_1) = \dfrac{d\omega}{v}$．よって

$$
\begin{aligned}
y(t_1) &= -\frac{v}{\omega}[\cos(\omega t_1) - 1] = -\frac{v}{\omega}[\sqrt{1 - (\frac{d\omega}{v})^2} - 1] \\
z(t_1) &= 0
\end{aligned}
$$

また，時刻 t_1 での速度は

$$
\begin{aligned}
v_x(t_1) &= v\cos(\omega t_1) = v\sqrt{1 - (\frac{d\omega}{v})^2} \\
v_y(t_1) &= v\sin(\omega t_1) = d\omega \\
v_z(t_1) &= 0
\end{aligned}
$$

磁場の領域から脱出後は質点は力を受けずに等速直線運動を行う．$x = d + L$ に達する時刻を $t_1 + t_2$ とすると，

$$
v_x(t_1)t_2 = L \ \Rightarrow \ t_2 = \frac{L}{v_x(t_1)} = \frac{L}{v\sqrt{1 - (\frac{d\omega}{v})^2}}
$$

これらから，時刻 $t_1 + t_2$ での質点の y 座標は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
y(t_1) + v_y(t_1)t_2 &= -\frac{v}{\omega}[\sqrt{1 - (\frac{d\omega}{v})^2} - 1] + d\omega\frac{L}{v\sqrt{1 - (\frac{d\omega}{v})^2}} \\
(\ \frac{dw}{v} \ll 1 \text{ のとき }) &\simeq \frac{v}{\omega}\frac{1}{2}(\frac{d\omega}{v})^2 + \frac{d\omega L}{v}[1 + \frac{1}{2}(\frac{d\omega}{v})^2] \\
&= \frac{d\omega L}{v} + \frac{1}{2}[\frac{v}{\omega} + \frac{d\omega L}{v}](\frac{d\omega}{v})^2
\end{aligned}
$$

2.

(a)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{r} + q\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}$$

成分で表すと

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -m\omega_0^2 x + q(\frac{dy}{dt}B_z - \frac{dz}{dt}B_y) = -m\omega_0^2 x + qB\frac{dy}{dt}\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= -m\omega_0^2 y + q(\frac{dz}{dt}B_x - \frac{dx}{dt}B_z) = -m\omega_0^2 y - qB\frac{dx}{dt}\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= -m\omega_0^2 z + q(\frac{dx}{dt}B_y - \frac{dy}{dt}B_x) = -m\omega_0^2 z
\end{aligned}$$

(b) z 方向の運動方程式は単振動のものと同じなので，一般解は

$$z(t) = C_1^z e^{i\omega_0 t} + C_2^z e^{-i\omega_0 t} \quad (C_1^z,\, C_2^z \text{ は定数})$$

(c) x, y 方向の運動方程式に $x = A_1\cos(\omega t+\delta)$，$y = A_2\sin(\omega t+\delta)$ を代入して

$$\begin{aligned}
-\omega^2 A_1\cos(\omega t+\delta) &= -\omega_0^2 A_1\cos(\omega t+\delta) + \frac{qB\omega}{m}A_2\cos(\omega t+\delta)\\
-\omega^2 A_2\sin(\omega t+\delta) &= -\omega_0^2 A_2\sin(\omega t+\delta) + \frac{qB\omega}{m}A_1\sin(\omega t+\delta)
\end{aligned}$$

A_1, A_2 に対する方程式に直すと

$$\begin{pmatrix} \omega^2-\omega_0^2 & \frac{qB\omega}{m} \\ \frac{qB\omega}{m} & \omega^2-\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これが自明でない解をもつには行列式の値が 0 でなくてはならない

$$0 = \begin{vmatrix} \omega^2-\omega_0^2 & \frac{qB\omega}{m} \\ \frac{qB\omega}{m} & \omega^2-\omega_0^2 \end{vmatrix} = (\omega^2-\omega_0^2)^2 - \left(\frac{qB\omega}{m}\right)^2$$

よって

$$\omega^2-\omega_0^2 = \pm\frac{qB\omega}{m}$$

(これは磁場中での電子のスペクトルが 2 準位に分かれる Zeeman 効果の古典的な説明の一部である．)

3. 鉛直方向 (上向きが正) の運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mg$．一方，運動量は $p = m\dfrac{dx}{dt}$ で与えられるので，運動方程式は

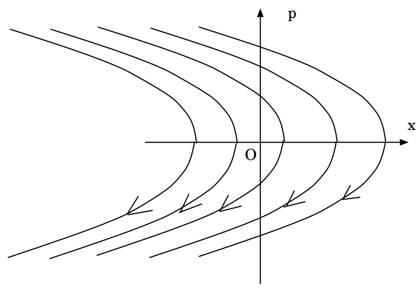
$$\frac{dp}{dt} = -mg\ ,\quad p = m\frac{dx}{dt}$$

という連立微分方程式で表される．これは容易に解けて

$$p(t) = -mgt + p_0\ ,\quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{p_0}{m}t + x_0$$

ここで p_0, x_0 はそれぞれ $t=0$ での運動量と高さである．t を消去して

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{p_0-p}{mg}\right)^2 + \frac{p_0}{m}\left(\frac{p_0-p}{mg}\right) + x_0 \\
&= -\frac{g}{2}\left(\frac{p_0-p}{mg} - \frac{p_0}{mg}\right)^2 + \frac{g}{2}\left(\frac{p_0}{mg}\right)^2 + x_0 \\
&= -\frac{1}{2m^2g}(p^2-p_0^2) + x_0
\end{aligned}
$$



4. 減衰振動での結果より

$$
x(t) = e^{-\alpha t}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right] \quad (C_1,\ \tilde{C}_2 \text{ は任意の複素数の定数})
$$

$$
\alpha = \frac{\mu}{2m}\ ,\quad \omega = \frac{\sqrt{4mk-\mu^2}}{2m}
$$

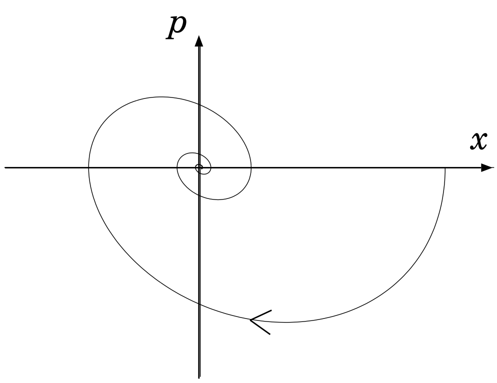
初期条件 $x(0)=A>0$，$\dot{x}(0)=0$ を代入して

$$
\begin{aligned}
&A = x(0) = C_1 + C_2 \\
&0 = \dot{x}(0) = (i\omega-\alpha)C_1 - (i\omega+\alpha)C_2 = i\omega(C_1-C_2) - \alpha(C_1+C_2) \\
&\Rightarrow\quad C_1 = \frac{1}{2}\left(A - i\frac{\alpha A}{\omega}\right)\ ,\quad C_2 = \frac{1}{2}\left(A + i\frac{\alpha A}{\omega}\right)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{-\alpha t}\left[\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right] \\
p(t) &= m\dot{x}(t) = -mA\frac{(\omega^2+\alpha^2)}{\omega}e^{-\alpha t}\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

図のような螺旋を描く.



5. テキスト中の円筒座標への座標変換についての説明より，問題の場合の運動方程式は

$$m[\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m^2 r^3}] = -\frac{A}{r^2} \quad , \quad \ell = m r^2 \dot{\theta}$$

題意より質点は原点を中心とした半径 r_0 の円軌道上を運動しているので $\dot{r} = \ddot{r} = 0$．よって

$$\begin{aligned} -\frac{\ell^2}{m r_0^3} &= -\frac{A}{r_0^2} \\ (m r_0^2 \dot{\theta})^2 \frac{1}{m r_0^3} &= \frac{A}{r_0^2} \\ r_0^3 &= \frac{A}{4\pi^2 m}\left(\frac{2\pi}{\dot{\theta}}\right)^2 = \frac{A}{4\pi^2 m} T^2 \quad (T = 2\pi/\dot{\theta} \text{ は周期}) \end{aligned}$$

よって軌道半径の三乗は円運動の周期の二乗に比例する．

6.

(a)

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{\ell}{mr^2} = -\frac{\ell}{m}\frac{du}{d\theta}$$

(b)

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = -\frac{\ell}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{\ell}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\ell u^2}{m} = -\left(\frac{\ell u}{m}\right)^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

(c) r についての運動方程式は

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\left[-\left(\frac{\ell u}{m}\right)^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - r\left(\frac{\ell}{mr^2}\right)^2\right] = -\frac{\ell^2 u^2}{m}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]$$

(d) (c) の結果に $F_r = -\dfrac{dU}{dr}$ を代入して

$$\begin{aligned} -\frac{\ell^2 u^2}{m}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] &= -\frac{dU}{dr} = -\frac{dU}{du}\frac{du}{dr} = u^2 \frac{dU}{du} \\ \frac{\ell^2}{m}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] &= -\frac{dU}{du} \\ \text{両辺に } \frac{du}{d\theta} \text{ をかけて} \qquad \frac{\ell^2}{m}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\frac{du}{d\theta} &= -\frac{dU}{du}\frac{du}{d\theta} \\ \frac{\ell^2}{2m}\frac{d}{d\theta}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] &= -\frac{dU}{d\theta} \\ \text{両辺を } \theta \text{ で積分} \qquad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 &= \frac{2m}{\ell^2}(C - U) \quad (C \text{ は定数}) \end{aligned}$$

一方，力学的エネルギー E の定義から

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U = \frac{m}{2}\left[\frac{\ell^2}{m^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\ell u^2}{m}\right)^2\right] + U$$

$$E - U = \frac{\ell^2}{2m}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{\ell^2}(E - U)$$

先ほどの結果と比べて $E = C$ (定数) となるので，E は保存する．

第 30 章

微分方程式の級数解

線型微分方程式

$$f^{(n)}(x) + P_1(x) f^{(n-1)}(x) + \cdots + P_{n-1}(x) f'(x) + P_n(x) f(x) = Q(x)$$

の場合は，解として $f(x) = \sum_{k=0} a_k (x-a)^k$ という級数の形を仮定して微分方程式に代入し，係数 a_k の一般的な形を求めることで微分方程式を解く方法が有効になることが多い．以下，この方法について説明する．

30.1 正則点，特異点

上の微分方程式で係数となる関数 $P_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ と $Q(x)$ が $x = a$ で正則 (無限回微分可能で，$x = a$ のまわりでテーラー展開できる) な場合，$x = a$ を正則点といい，微分方程式の解は $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ という形で表すことができる．

(例) 単振動の微分方程式: $\dfrac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega^2 x(t) = 0$

係数は全て定数なので，任意の t で正則である．$t = 0$ のまわりの解を考え，$x(t) = \sum_{k=0} a_k t^k$ と置いて代入すると

$$\sum_{k=2} k(k-1) a_k t^{k-2} + \omega^2 \sum_{k=0} a_k t^k = 0$$

$$\text{第一項で } k-2 = s \text{ と置いて} \sum_{s=0} (s+2)(s+1) a_{s+2} t^s + \omega^2 \sum_{k=0} a_k t^k = 0$$

$$\text{第一項で } s = k \text{ と置き直して整理} \sum_{k=0} [(k+2)(k+1) a_{k+2} + \omega^2 a_k] t^k = 0$$

よって，$a_{k+2} = -\dfrac{\omega^2}{(k+2)(k+1)} a_k$ という漸化式が成立すればよい．k が偶数のときと奇数の場合に分けて

$$a_{2n} = -\frac{\omega^2}{(2n)(2n-1)} a_{2n-2} = \cdots = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0$$

$$a_{2n+1} = -\frac{\omega^2}{(2n+1)(2n)} a_{2n-1} = \cdots = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_1$$

よって

$$x(t) = \sum_{n=0} \left[(-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0 t^{2n} + (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_1 t^{2n+1} \right] = a_0 \cos(\omega t) + \frac{a_1}{\omega} \sin(\omega t)$$

未定の定数 a_0，a_1/ω を C_1，C_2 と置き直せば，以前に得た単振動の一般解になっている．$Q(x) = 0$ の場合，係数となる関数 $P_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ と $Q(x)$ の中で $x = a$ で正則でないものがあっても，$(x-a)P_1(x)$，$(x-a)^2 P_2(x)$，…，$(x-a)^n P_0(x)$ のすべてが正則である場合，$x = a$ を確定特異点といい， 微分方程式の解は

$$f(x) = (x-a)^s \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

という形で表すことができる．ここで s は微分方程式を解くことで得られる数であり，整数とは限らない．

(例)　$4x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x \dfrac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0$

　方程式の両辺を $4x^2$ で割って

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x^2-1}{4x^2} \right) y = 0$$

$x = 0$ が確定特異点になっている．$y = x^s \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ を元の微分方程式に代入すると

$$4x^2 \sum_{k=0} (k+s)(k+s-1) a_k x^{k+s-2} + 4x \sum_{k=0} (k+s) a_k x^{k+s-1} + (x^2-1) \sum_{k=0} a_k x^{k+s} = 0$$

$$\sum_{k=0} \left[\{4(k+s)(k+s-1) + 4(k+s) - 1\} a_k x^{k+s} + a_k x^{k+s+2} \right] = 0$$

$$(4s^2-1) a_0 x^s + \{4(s+1)^2 - 1\} a_1 x^{s+1} + \sum_{k=0} [\{4(k+s+2)^2 - 1\} a_{k+2} + a_k] x^{k+s+2} = 0$$

x の各べき乗の係数が 0 にならなければならないので，

$$4s^2 - 1 = 0 \Rightarrow s = \pm\frac{1}{2}$$

$$\{4(s+1)^2 - 1\} a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$s = \dfrac{1}{2}$ のとき，$4(k + \dfrac{1}{2})^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$

$$a_{2n} = -\frac{1}{4(2n+1)2n} a_{2n-2} = \cdots = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)!} a_0 \ , \quad a_{2n+1} = 0$$

$$y(x) = x^{1/2} \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)!} a_0 x^{2n} = 2a_0 x^{-1/2} \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \frac{2a_0}{\sqrt{x}} \sin(\frac{x}{2})$$

$s=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$4(k-\dfrac{1}{2})^2-1=4k^2-4k=4k(k-1)$

$$a_{2n}=-\frac{1}{4(2n)(2n-1)}a_{2n-2}=\cdots=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n)!}a_0\ ,\quad a_{2n+1}=0$$

$$y(x)=x^{-1/2}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n)!}a_0x^{2n}=a_0x^{-1/2}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\frac{a_0}{\sqrt{x}}\cos(\frac{x}{2})$$

よって一般解は

$$y(x)=\frac{C_1}{\sqrt{x}}\cos(\frac{x}{2})+\frac{C_2}{\sqrt{x}}\sin(\frac{x}{2})$$

30.2　漸近的振る舞いからの解の想定

例として次の微分方程式を考える

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x)+(\lambda-x^2)f(x)=0\quad(\lambda\text{ は正の定数})$$

これは単振動の運動 (調和振動子) を量子力学で扱う場合に出てくる微分方程式である．これを解くために，まず $x\to\infty$ での振る舞いを考えると $(\lambda-x^2)$ の λ は x^2 に比べて無視できる．ここで $f(x)=e^{y(x)}$ と仮定して代入すると，

$$[y''+(y')^2]e^y-x^2e^y=0\quad\Rightarrow\quad y''+(y')^2-x^2=0\ \ (\ '\text{ は }x\text{ についての微分を意味する})$$

ここで，さらに $y=ax^n$ ($x=0$ が特異点にならないよう $n\geq 0$) と置いてみると

$$n(n-1)ax^{n-2}+a^2n^2x^{2n-2}-x^2=0$$

$n>0$ で $x\to\infty$ では $|x^{n-2}|\ll|x^{2n-2}|$ なので，第一項を無視すると $n=2$，$a=\pm1/2$．$x\to\infty$ で発散しない解を得るためには $a=-1/2$ を選び，$f(x)\sim e^{-x^2/2}$ となる．よって $f(x)=u(x)e^{-x^2/2}$ とおいて元の微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}&\left[u''-2xu'-(1-x^2)u\right]e^{-x^2/2}+(\lambda-x^2)ue^{-x^2/2}=0\\&u''-2xu'+(\lambda-1)u=0\end{aligned}$$

最後に現れた u についての方程式はエルミートの微分方程式とよばれる．この微分方程式についても $u(x)=e^{z(x)}$ を代入してみると

$$[z''+(z')^2-2xz'+(\lambda-1)]e^z=0$$

$z=bx^n$ を代入して

$$bn(n-1)x^{n-2}+b^2n^2x^{2n-2}-2bnx^n+(\lambda-1)=0$$

$x \to \infty$ で $b^2n^2x^{2n-2} - 2bnx^n = 0$ となるには $n=2$，$b=1$．しかし，これでは $f(x) \sim e^{x^2}e^{-x^2/2} = e^{x^2/2}$ となり，$x \to \infty$ で発散してしまう．一方，$u(x) = \sum_{k=0} a_k x^k$ と置いて代入すると

$$\sum_{k=2} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1} ka_k x^{k-1} + (\lambda-1)\sum_{k=0} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (-2k+\lambda-1)a_k\right] x^k = 0$$

これが任意の x で成立するには

$$a_{k+2} = \frac{(2k-\lambda+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

ここで，ある整数 n のときに $2n-\lambda+1=0$ となれば，$u(x)$ は有限級数となり，前にのべた問題 ($x \to \infty$ で発散) は無くなる．よって，$x \to \infty$ で意味のある解を得るためには

$$\lambda = 2n+1 \quad (n \text{ は整数})$$

という条件が出てくる．

$n=0$ **のとき**　: $\lambda = 1$

$$u(x) = a_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = a_0 e^{-x^2/2}$$

$n=1$ **のとき**　: $\lambda = 3$

$$u(x) = a_1 x \quad \Rightarrow \quad f(x) = a_1 x e^{-x^2/2}$$

$n=2$ **のとき**　: $\lambda = 5$

$$u(x) = a_0(1-2x^2) \quad \Rightarrow \quad f(x) = a_0(1-2x^2)e^{-x^2/2}$$

$n=3$ **のとき**　: $\lambda = 7$

$$u(x) = a_1(x-\frac{2}{3}x^3) \quad \Rightarrow \quad f(x) = a_1(x-\frac{2}{3}x^3)e^{-x^2/2}$$

のように決定されていく．a_0，a_1 を適当に選んだ $u(x)$ はエルミートの多項式とよばれ，$H_n(x)$ と表される．

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2x)^{2k} \frac{(2n)!}{(2k)!(n-k)!}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2x)^{2k+1} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(n-k)!}$$

30.3 演習問題

1. 微分方程式 $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$ に解として $y=ax^2+bx+c$ を仮定して代入し，微分方程式が成立するために a，b，c が満たすべき条件を求めよ．ただし初期条件 $y(0)=-\frac{1}{2}$ を満たすものとする．
2. 微分方程式 $\frac{d}{dt}N(t)=-kN(t)$ (k は正の定数) に $N(t)=\sum_{k=0} a_k t^k$ を代入して解を求めよ．ただし，初期条件を $N(0)=N_0$ とする．
3. 次の微分方程式 (ベッセルの微分方程式) を考える．
$$x^2\frac{d^2}{dx^2}J(x)+x\frac{d}{dx}J(x)+(x^2-n^2)J(x)=0 \quad (n \text{ は 0 以上の整数})$$
   (a) $J(x)=x^s\sum_{k=0} a_k x^k$ を代入し，$s=\pm n$ であることを示せ．
   (b) $s=n$ のとき，a_k の満たすべき漸化式を求めよ．
   (c) $J(x)$ を求めよ．
4. 次の微分方程式を考える．
$$\frac{d^2}{dr^2}f(r)+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}f(r)+(\frac{\lambda}{r}-\frac{1}{4})f(r)=0$$
   (これは水素原子を量子力学で扱う場合に出てくる微分方程式の一つである．)
   (a) $f(r)$ の $r\to\infty$ での振る舞いを調べるために，$r\to\infty$ で無視できる項を落とし，それに $f(r)=e^{y(r)}$ と置いて代入することで $y(r)$ が満たす微分方程式を求めよ．
   (b) 上で求めた微分方程式に $y(r)=ar^n$ を代入し，a と n を求めよ．ただし，$f(r)$ が $r\to\infty$ で発散しないようにすること．
   (c) 上で求めた $y(r)$ を用いて，$f(r)=u(r)e^{y(r)}$ を元の微分方程式に代入し，$u(r)$ が満たすべき微分方程式を求めよ．
   (d) 上で求めた微分方程式に $u(r)=\sum_{k=0} a_k r^k$ を代入し，a_k についての漸化式を求めよ．
   (e) 上で求めた漸化式から，$u(r)$ が r の有限項の多項式になる条件を求めよ．(こうして得られる多項式をラゲールの多項式という．)

30.4 解答例

1. $y = ax^2 + bx + c$ と仮定すると，$y' = 2ax + b$，$y'' = 2a$．これらを $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ へ代入して

$$\begin{aligned} (1-x^2)(2a) - 2x(2ax+b) + 6(ax^2+bx+c) &= 0 \\ (-2a-4a+6a)x^2 + (-2b+6b)x + (2a+6c) &= 0 \\ 4bx + 2(a+3c) &= 0 \end{aligned}$$

これが任意の x で成立するには $b=0$ かつ $a+3c=0$ が条件となる．このとき $y = -3cx^2 + c$．初期条件 $y(0) = -\frac{1}{2}$ より $c = -\frac{1}{2}$．この結果から $a = \frac{3}{2}$．よって $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ が解となる．

2. $N(t) = \sum_{\ell=0} a_\ell t^\ell$ とすると $\frac{dN(t)}{dt} = \sum_{\ell=1} \ell a_\ell t^{\ell-1}$．これを微分方程式 $\frac{d}{dt}N(t) = -kN(t)$ に代入して

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1} \ell a_\ell t^{\ell-1} &= -k\sum_{\ell=0} a_\ell t^\ell \\ (\ell - 1 = s \text{ とおく})\quad & \quad\ (\ell = s \text{ とおく}) \\ \sum_{s=0}(s+1)a_{s+1}t^s &= -k\sum_{\ell=0} a_\ell t^\ell = -k\sum_{s=0} a_s t^s \\ \sum_{s=0}[(s+1)a_{s+1} + ka_s]t^s = 0 & \end{aligned}$$

これが任意の t で成立するには $(s+1)a_{s+1} + ka_s = 0$ という漸化式が成立しなければならない．このとき

$$a_s = -\frac{k}{s}a_{s-1} = \frac{(-k)^2}{s(s-1)}a_{s-2} = \cdots = \frac{(-k)^s}{s!}a_0$$

$$\text{よって}N(t) = \sum_{s=0}\frac{(-k)^s}{s!}a_0 t^s$$

初期条件 $N(0) = N_0$ より $a_0 = N_0$．これより，求める解は

$$N(t) = N_0\sum_{s=0}\frac{(-kt)^s}{s!} = N_0 e^{-kt}$$

3. 「ベッセル関数」の章を参照せよ．

4.

(a) 問題の微分方程式で $r \to \infty$ とした場合，$\frac{1}{r}$ に比例する項は無視できるとすると

$$\frac{d^2}{dr^2}f(r) - \frac{1}{4}f(r) = 0$$

これに $f(r) = e^{y(r)}$ と置いて代入すると，$f'(r) = y'e^y$，$y'' = [y'' + (y')^2]e^y$ より

$$[y'' + (y')^2]e^y - \frac{1}{4}e^y = 0 \Rightarrow y'' + (y')^2 - \frac{1}{4} = 0$$

(b) (a) の結果に $y = ar^n$ を代入する．$n \neq 0,\ 1$ では $y' = nar^{n-1}$，$y'' = n(n-1)ar^{n-2}$ より

$$n(n-1)ar^{n-2} + n^2a^2r^{2(n-1)} - \frac{1}{4} = 0$$

これが任意の r で成立するには $n-2 = 2(n-1) = 0$ (前の 2 つの項が定数) でなければならないが，この両方を満たす n は存在しない．$n = 0$ のとき，y は定数となるが，(a) で得た方程式を満たすものは $y = 0$ の自明な解しかない．$n = 1$ では，2 回微分が 0 になるので

$$a^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

よって可能な解は $y = \pm\frac{1}{2}r$ となるが，$y = \frac{1}{2}r$ のとき $e^y = e^{r/2}$ は $r \to \infty$ で発散するので採用できない．最終的に得られる解は $n = 1$，$a = -\frac{1}{2}$ の $y = -\frac{1}{2}r$.

(c) $f(r) = u(r)e^{-r/2}$ を元の微分方程式に代入する．

$$\frac{d}{dr}[u(r)e^{-r/2}] = [\frac{du}{dr} - \frac{1}{2}u]e^{-r/2}$$
$$\frac{d^2}{dr^2}[u(r)e^{-r/2}] = [\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{du}{dr} + \frac{1}{4}u]e^{-r/2}$$

を用いて

$$[\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{du}{dr} + \frac{1}{4}u]e^{-r/2} + \frac{2}{r}[\frac{du}{dr} - \frac{1}{2}u]e^{-r/2} + (\frac{\lambda}{r} - \frac{1}{4})ue^{-r/2} = 0$$
$$\frac{d^2u}{dr^2} + (\frac{2}{r} - 1)\frac{du}{dr} + \frac{(\lambda-1)}{r}u = 0$$

(d) (c) の結果に $u(r) = \sum_{k=0} a_kr^k$ を代入すると

$$\sum_{k=0} k(k-1)a_kr^{k-2} + (\frac{2}{r} - 1)\sum_{k=0} ka_kr^{k-1} + \frac{(\lambda-1)}{r}\sum_{k=0} a_kr^k = 0$$
$$\sum_{k=0} k(k-1)a_kr^{k-2} + \sum_{k=0} 2ka_kr^{k-2} - \sum_{k=0} ka_kr^{k-1} + \sum_{k=0}(\lambda-1)a_kr^{k-1} = 0$$
$$\sum_{k=0}[k(k-1) + 2k]a_kr^{k-2} + \sum_{k=0}(\lambda - 1 - k)a_kr^{k-1} = 0$$
$$\sum_{k=1} k(k+1)a_kr^{k-2} + \sum_{k=1}[\lambda - 1 - (k-1)r])a_{k-1}r^{k-2} = 0$$
$$\sum_{k=1}\{k(k+1)a_k + (\lambda - k)a_{k-1}\}r^{k-2} = 0$$

これが任意の r (ただし $r \neq 0$) で成立するには次の漸近式が成立しなければならない．

$$a_k = \frac{k-\lambda}{k(k+1)}a_{k-1}$$

(e) $u(r) = \sum_{k=0} a_kr^k$ が r の有限項の多項式になるには，(d) で求めた漸近式より，ある自然数 n で $n = \lambda$ であることが条件となる．このとき $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$ となって級数は有限項の和になる．

第Ⅴ部

大学中級レベル C
(特殊関数)

第 31 章

円筒座標，球座標

31.1　変数分離

物理に現れる偏微分方程式にはラプラシアン Δ がよく現れる．

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

偏微分方程式 $[\Delta + V(x,y,z)]\Psi(x,y,z) = 0$ を考える．$V(x,y,z)$ が x だけの関数 $F(x)$，y だけの関数 $G(x)$，z だけの関数 $H(x)$ の和で表せる場合，$V(x,y,z) = F(x) + G(y) + H(z)$，方程式の解 $\Psi(x,y,z)$ が $\Psi(x,y,z) = P(x)Q(y)R(z)$ と x だけの関数，y だけの関数，z だけの関数の積で表される (変数分離できるという) と仮定して元の方程式に代入すると

$$\begin{aligned}
&[\Delta + V(x,y,z)]\Psi(x,y,z) = 0 \\
&\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + F(x) + G(y) + H(z)\right] P(x)Q(y)R(z) = 0
\end{aligned}$$

両辺を $P(x)Q(y)R(z)$ で割って，

$$\left[\frac{1}{P(x)}\frac{d^2P(x)}{dx^2} + F(x)\right] + \left[\frac{1}{Q(y)}\frac{d^2Q(x)}{dy^2} + G(y)\right] + \left[\frac{1}{R(z)}\frac{d^2R(x)}{dz^2} + H(z)\right] = 0$$

ここで 1 変数だけの関数の偏微分は普通の微分と同じになることを用いた．この式の第一項は x だけの関数，第二項は y だけの関数，第三項は x だけの関数であるので，任意の x, y, z で等式が成立するには，それぞれが定数でなければならない．それぞれの定数を C_x, C_y, C_z とすれば，方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{d^2P(x)}{dx^2} + F(x)P(x) &= C_xP(x)\ , \\
\frac{d^2Q(y)}{dy^2} + G(y)Q(y) &= C_yQ(y)\ , \\
\frac{d^2R(z)}{dz^2} + H(z)R(z) &= C_zR(z)\ , \\
C_x + C_y + C_z &= 0\ .
\end{aligned}$$

という三つの常微分方程式と一つの条件になる．

31.2　円筒座標

x, y, z の直交座標のうち，x, y を極座標で表すことにすると

$$x = r\cos\theta\ ,\quad y = r\sin\theta\ ,\quad z = z \quad (0 \le r\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

この (r, θ, z) での座標の表示を円筒座標という．ラプラシアン Δ が円筒座標ではどう表現されるか求める．連鎖定理より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta} \\
&\quad + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta} \\
&\quad + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

よって

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ヘツムホルツ型偏微分方程式 $[\Delta + a]\Psi(x, y, z) = 0$ (a は定数) で，Δ に上式を代入し，関数 Ψ が $\Psi = R(r)F(\theta)G(z)$ と変数分離の形にかけるとして代入すると

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a\right] R(r)F(\theta)G(z) = 0$$

両辺を $R(r)F(\theta)G(z)$ で割って

$$\frac{1}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{1}{r^2F}\frac{d^2F}{d\theta^2} + \frac{1}{G}\frac{d^2G}{dz^2} + a = 0$$

第 1 項，第 2 項は r, θ のみの関数，第 3 項は z のみの関数，第 4 項は定数なので，この方程式が成立するには，C_1, C_2 を定数として次の方程式が成立しなければならない．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{1}{r^2F}\frac{d^2F}{d\theta^2}=-C_1\ ,\\
&\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dz^2}=C_2\ ,\quad -C_1+C_2+a=0
\end{aligned}
$$

2 番目の方程式は容易に解けて

$$
G(z)=B_1e^{cz}+B_2e^{-cz}\ ,\quad \text{ただし } B_1,\,B_2 \text{ は定数で，} c^2=C_2
$$

1 番目の方程式を変形して

$$
\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right]+C_1r^2=-\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\theta^2}
$$

この場合も，左辺は r だけの関数，右辺は θ だけの関数なので，それぞれ定数でなくてはならない．その定数を m^2 と置けば，以下の方程式になる．

$$
r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(C_1r^2-m^2)R=0\ ,\quad \frac{d^2F}{d\theta^2}=-m^2F
$$

よって，元の偏微分方程式が 3 つの常微分方程式で表せた．F についての方程式はすぐに解けて

$$
F=D_1e^{im\theta}+D_2e^{-im\theta}\quad (D_1,\,D_2 \text{ は定数})
$$

座標 θ で一周すると元に戻るという条件，$F(\theta)=F(\theta+2\pi)$，を満たすためには m は整数でなければならない．R についての方程式は，$\sqrt{C_1}r=s$，$R(r)=J(s)$ と置くと

$$
s^2\frac{d^2J}{ds^2}+s\frac{dJ}{ds}+(s^2-m^2)J=0
$$

となる．これをベッセルの微分方程式という．

31.3　球座標

x, y, z の直交座標を

$$
x=r\sin\theta\cos\phi\ ,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta\quad (0\le r\ ,\ 0\le\theta\le\pi\ ,\ 0\le\phi\le 2\pi)
$$

と表し，位置を (r,θ,ϕ) で指定する座標を球座標 (3 次元極座標) という．2 次元極座標の時と同様にして，ラプラシアン Δ の球座標での表現を求める．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}=\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi}=\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\frac{\partial}{\partial z}&=\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

さらに同様にして $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を求めて Δ を計算すると

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\quad (f\ \text{は任意の関数})\end{aligned}$$

ヘツムホルツ型偏微分方程式 $[\Delta+a]\Psi(x,y,z)=0$ (a は定数) で，Δ に上式を代入し，関数 f が $f=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ と変数分離の形にかけるとして代入すると

$$\begin{aligned}\Theta\Phi\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]+R\Phi\left[\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+R\Theta\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+aR\Theta\Phi=0\\ r^2\sin^2\theta\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{1}{\Theta}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+a\right\}+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0\end{aligned}$$

前と同様の議論から

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0\Rightarrow\Phi(\phi)=C_1^{\phi}e^{im\phi}+C_2^{\phi}e^{-im\phi}\quad (m\ \text{は整数})$$

さらに以下の方程式が成立する．

$$\begin{aligned}&\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]+ar^2=C^R\\ &\frac{1}{\Theta}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}\right]-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=C^{\Theta}\\ &C^R+C^{\Theta}=0\end{aligned}$$

2 番目の方程式を

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0\quad (\lambda=-C^{\Theta})$$

と書き直し，$\cos\theta=s$ と変数変換して $\Theta(\theta)=L(s)$ と置くと

$$\frac{d}{d\theta}=\frac{ds}{d\theta}\frac{d}{ds}=-\sin\theta\frac{d}{ds}\ ,\quad \frac{d^2}{d\theta^2}=\sin^2\theta\frac{d^2}{ds^2}-\cos\theta\frac{d}{ds}$$

を用いて

$$(1-s^2)\frac{d^2L}{ds^2}-2s\frac{dL}{ds}+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-s^2}\right)L=0$$

が得られる．これをルジャンドルの陪微分方程式という．

31.4　演習問題

1. 次の方程式を考える

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\Psi(x,y)=E\Psi(x,y)\quad (m,\,\hbar,\,E \text{ は定数})$$

　(a) $\Psi(x,y)=P(x)Q(y)$ と変数分離できると仮定して上の方程式に代入し，$P(x)$, $Q(y)$ が次の方程式を満たすことを示せ.

$$\frac{d^2P}{dx^2}=-k^2P\ ,\quad \frac{d^2Q}{dy^2}=-\ell^2Q\ ,\quad k^2+\ell^2=\frac{2mE}{\hbar^2}\quad (k,\,\ell \text{ は定数})$$

　(b) 境界条件 $P(0)=P(a)=0$ を満たす解 $P(x)$ を求めよ.

　(c) 境界条件 $Q(-b/2)=Q(b/2)=0$ を満たす解 $Q(y)$ を求めよ.

2. 2 次元極座標 $(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$ で $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ のそれぞれを x, y で偏微分することにより，$\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$ を求め，それらの結果を r, θ を用いて表せ.

3. 2 次元極座標 $(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$ で $\dfrac{\partial}{\partial r}$ と $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ を x, y, $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ を用いて表せ.

4. 球座標 $(x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta)$ で $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$, $\tan\phi=\dfrac{y}{x}$ のそれぞれを x, y, z で偏微分することにより $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial z}$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$, を求め，それらの結果を r, θ, ϕ を用いて表せ.

5. 球座標 $(x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta)$ で $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ を r, θ, ϕ 及びそれらの偏微分を用いて表せ.

6. 球座標 $(x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta)$ で $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を r, θ, ϕ 及びそれらの偏微分を用いて表せ.

7. 球座標 $(x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta)$ で $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を r, θ, ϕ 及びそれらの偏微分を用いて表せ.

8. 問 5, 6, 7 で求めた結果から Δf (f は関数) を計算し，

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

となることを確かめよ.

31.5　解答例

1.

(a) 問題の方程式に $\Psi(x,y)=P(x)Q(y)$ を代入して

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]P(x)Q(y) &= EP(x)Q(y) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2P}{dx^2}Q+P\frac{d^2Q}{dy^2}\right] &= EP(x)Q(y) \\ \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{dy^2} &= -\frac{2mE}{\hbar^2} \end{aligned}$$

左辺第 1 項は x だけの関数，左辺第 2 項は y だけの関数，右辺は定数なので，任意の x, y で上式が成立するには左辺第 1 項，第 2 項ともに定数でなければならない．それぞれを $-k^2$, $-\ell^2$ とすれば以下が成立する．

$$\frac{d^2P}{dx^2}=-k^2P\ ,\quad \frac{d^2Q}{dy^2}=-\ell^2Q\ ,\quad k^2+\ell^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

(b) 微分方程式 $\dfrac{d^2P}{dx^2}=-k^2P$ の一般解は $P(x)=C_1e^{ikx}+C_2e^{-ikx}$ (C_1, C_2 は定数) で与えられる．境界条件 $P(0)=P(a)=0$ より

$$C_1+C_2=0\ ,\quad C_1e^{ika}+C_2e^{-ika}=0\ \Rightarrow 0=C_1(e^{ika}-e^{-ika})=2iC_1\sin(ka)$$

自明でない解 ($C_1=C_2=0$ でない解) を得るには $\sin(ka)=0$ が必要であり，これから $k=\dfrac{n\pi}{a}$ (n は自然数) となる．以上から

$$P(x)=C\sin(\frac{n\pi x}{a})\ \ (C \text{ は定数，} n \text{ は自然数})$$

(c) (b) と同様にして，一般解は $Q(y)=D_1e^{i\ell y}+D_2e^{-i\ell x}$ (D_1, D_2 は定数) で与えられる．境界条件 $Q(-b/2)=Q(b/2)=0$ より

$$D_1e^{-i\ell b/2}+D_2e^{i\ell b/2}=0\ ,\quad D_1e^{i\ell b/2}+D_2e^{-i\ell b/2}=0$$

これらの式を行列を用いてまとめると

$$\begin{pmatrix} e^{-i\ell b/2} & e^{i\ell b/2} \\ e^{i\ell b/2} & e^{-i\ell b/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

自明でない解 ($D_1=D_2=0$ でない解) を得るには，左辺の行列の行列式が 0 でなければならない

$$0=\begin{vmatrix} e^{-i\ell b/2} & e^{i\ell b/2} \\ e^{i\ell b/2} & e^{-i\ell b/2} \end{vmatrix}=e^{-i\ell b}-e^{i\ell b}=-2i\sin(\ell b)$$

よって $\ell=\dfrac{j\pi}{b}$ (j は自然数)．このとき

$$D_1 e^{-ij\pi/2} + D_2 e^{ij\pi/2} = 0 \ \Rightarrow 0 = \ D_1(-i)^j + D_2 i^j = [(-1)^j D_1 + D_2] i^j$$

j が奇数のとき $D_1 = D_2$，偶数のとき $D_1 = -D_2$ となる．これらから

$$Q(y) = \begin{cases} D\cos(\frac{(2q-1)\pi y}{b}) \\ \\ D\sin(\frac{2q\pi y}{b}) \end{cases} \qquad (q \text{ は自然数})$$

2. $r = \sqrt{x^2+y^2}$ を x, y で偏微分して

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\theta,$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$\tan\theta = y/x$ を x で偏微分して

$$\frac{\partial}{\partial x}\tan\theta = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x})$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\cos^2\theta\frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$\tan\theta = y/x$ を y で偏微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}\tan\theta = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x})$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \cos^2\theta\frac{1}{r\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{r}$$

3. 連鎖定理を用いて

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

4. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を x, y, z で偏微分して，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{r\sin\theta\cos\phi}{r} = \sin\theta\cos\phi$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{r\sin\theta\sin\phi}{r} = \sin\theta\sin\phi$$
$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

$\tan\theta = \sqrt{x^2+y^2}/z$ を x で偏微分して，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\tan\theta &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}) \\
\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}} \\
\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \cos^2\theta\frac{r\sin\theta\cos\phi}{r\cos\theta r\sin\theta} = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}
\end{aligned}
$$

$\tan\theta = \sqrt{x^2+y^2}/z$ を y で偏微分して，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\tan\theta &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}) \\
\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}} \\
\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \cos^2\theta\frac{r\sin\theta\sin\phi}{r\cos\theta r\sin\theta} = \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}
\end{aligned}
$$

$\tan\theta = \sqrt{x^2+y^2}/z$ を z で偏微分して，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\tan\theta &= \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}) \\
\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2} \\
\frac{\partial\theta}{\partial z} &= -\cos^2\theta\frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = -\frac{\sin\theta}{r}
\end{aligned}
$$

$\tan\phi = y/x$ を x で偏微分して，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\tan\phi &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x}) \\
\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \\
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= -\cos^2\phi\frac{r\sin\theta\sin\phi}{r^2\sin^2\theta\cos^2\phi} = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}
\end{aligned}
$$

$\tan\phi = y/x$ を y で偏微分して，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\tan\phi &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x}) \\
\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{1}{x} \\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \cos^2\phi\frac{1}{r\sin\theta\cos\phi} = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}
\end{aligned}
$$

$\tan\phi = y/x$ を z で偏微分して，

$$
\frac{\partial}{\partial z}\tan\phi = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{y}{x})
$$

$$\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$$

5.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}=\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}&=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial}{\partial x})+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial}{\partial x})+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{\partial}{\partial x})\\
&=\sin\theta\cos\phi\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\right)\\
&\quad+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\left(\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\sin\theta\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}-\frac{\sin\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}\right)\\
&\quad-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\left(-\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\sin\theta\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial r}-\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}-\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\\
&=\sin^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta\cos^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\sin^2\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+2\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}\\
&\quad-2\frac{\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}-2\frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}+\frac{(\sin^2\phi+\cos^2\theta\cos^2\phi)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\\
&\quad+\left(\frac{\cos\theta\sin^2\phi}{r^2\sin\theta}-\frac{2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&\quad+\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}+\frac{\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi}=\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}&=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial}{\partial y})+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial}{\partial y})+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{\partial}{\partial y})\\
&=\sin\theta\sin\phi\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\cos\theta\sin\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\frac{\cos\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\right)\\
&\quad+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\left(\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\sin\theta\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\frac{\sin\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}\right)\\
&\quad+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\sin\theta\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \\
&\quad +2\frac{\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + 2\frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi} + \frac{(\cos^2\phi+\cos^2\theta\sin^2\phi)}{r}\frac{\partial}{\partial r} \\
&\quad + \left(-2\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi}{r^2} + \frac{\cos\theta\cos^2\phi}{r^2\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} \\
&\quad + \left(-\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2} - \frac{\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial}{\partial z}) + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial}{\partial z}) + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{\partial}{\partial z}) \\
&= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right) \\
&\quad -\frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

8. 問 5, 6, 7 の結果を合わせて

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= (\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2} \\
&\quad + \left(\frac{\cos^2\theta\cos^2\phi}{r^2} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\phi}{r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&\quad + \left(\frac{\sin^2\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\phi}{r^2\sin^2\theta}\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
&\quad + \frac{1}{r}(\sin^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta)\frac{\partial}{\partial r} \\
&\quad + \left(\frac{\cos\theta\sin^2\phi}{r^2\sin\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi}{r^2} + \frac{\cos\theta\cos^2\phi}{r^2\sin\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi}{r^2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
$$

第 32 章

ベッセル関数

32.1　ベッセルの微分方程式とその級数解

ヘルムホルツ型方程式 $[\Delta + a]\Psi(x,y,z) = 0$ でラプラシアン $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を円筒座標 (r,θ,z) で表し，変数分離して r に依存する部分から

$$x^2\frac{d^2J}{dx^2} + x\frac{dJ}{dx} + (x^2 - n^2)J = 0 \quad (n \text{ は整数})$$

というベッセルの微分方程式を得た．ここで n は n^2 の形で現れるので $n \geq 0$ としても一般性を失わない．両辺を x^2 で割ると

$$\frac{d^2J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + (1 - \frac{n^2}{x^2})J = 0$$

となって，J', J の係数が $x = 0$ に確定特異点を持つ．よって，この解 $J(x)$ を求めるため，$J(x) = x^s \sum_{k=0} a_k x^k$ $(a_0 \neq 0)$ と置いて代入してみる．

$$\frac{d^2J}{dx^2} = \sum_{k=0} a_k(k+s)(k+x-1)x^{k+s-2}\ , \quad \frac{dJ}{dx} = \sum_{k=0} a_k(k+s)x^{k+s-1}$$

をベッセルの微分方程式に代入して

$$\begin{aligned}\sum_{k=0} a_k(k+s)(k+s-1)x^{k+s} + \sum_{k=0} a_k(k+s)x^{k+s} + \sum_{k=0} a_k(x^2-n^2)x^{k+s} &= 0 \\ \sum_{k=0} a_k[(k+s)(k+s-1) + (k+s) - n^2]x^{k+s} + \sum_{k=0} a_k x^{k+s+2} &= 0 \\ \sum_{k=0} a_k[(k+s)^2 - n^2]x^{k+s} + \sum_{k=2} a_{k-2}x^{k+s} &= 0\end{aligned}$$

ここで，最後の項で $k+2 = 2,3,\ldots$ を新しく $k = 2,3,\ldots$ と置き直した．$k = 2$ から始まる級数にまとめるため，最初の項で $k = 0,1$ の部分だけを抜き出して別にすると

$$(s^2 - n^2)a_0x^s + [(s+1)^2 - n^2]a_1x^{s+1} + \sum_{k=2}[\{(k+s)^2 - n^2\}a_k + a_{k-2}]x^{k+s} = 0$$

これが任意の x で成立するには x^s, x^{s+1}, x^{s+2}, ... の各係数が 0 でなくてはならない．よって

$$(s^2-n^2)a_0=0\ ,\quad [(s+1)^2-n^2]a_1=0\ ,\quad \{(k+s)^2-n^2\}a_k+a_{k-2}=0\ (k=2,3,\ldots)$$

$a_0\neq 0$ なので最初の条件から $s=\pm n$．これを 2 番目の条件式へ代入すると

$$[(\pm n+1)^2-n^2]a_1=(\pm 2n+1)a_1=0$$

整数の n に対し $(\pm 2n+1)\neq 0$ なので $a_1=0$ でなければならない．

$s=+n\geq 0$ の場合をまず考える．第 3 番目の条件で a_k の係数は $(k+s)^2-n^2=(k+n)^2-n^2=k(k+2n)$．$k$ が偶数のとき $(k=2m)$ と奇数 $(k=2m+1)$ $(m=0,1,2,\ldots)$ の場合に分け，

[$k=2m$ のとき]

$$\begin{aligned}
a_{2m}&=\frac{-1}{(2n+2m)2m}a_{2m-2}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(n+m)m}a_{2m-2}\\
&=\frac{(-1)^2}{2^4}\frac{1}{(n+m)m(n+m-1)(m-1)}a_{2(m-2)}\\
&=\cdots=\frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}}\frac{1}{(n+m)\ldots(n+m-\ell+1)m\ldots(m-\ell+1)}a_{2(m-\ell)}\\
&=\cdots=\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\frac{n!}{(n+m)!m!}a_0
\end{aligned}$$

[$k=2m+1$ のとき]

$$\begin{aligned}
a_{2m+1}&=\frac{-1}{(2n+2m+1)(2m+1)}a_{2m-1}\\
&=\frac{(-1)^m}{(2n+2m+1)(2n+2m-1)\ldots(2n+3)(2m+1)(2m-1)\ldots 3}a_1=0
\end{aligned}$$

よって

$$J(x)=\sum_{m=0}\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\frac{n!}{(n+m)!m!}a_0x^{n+2m}=n!2^na_0\sum_{m=0}\frac{(-1)^m}{(n+m)!m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

が解となる．和の前の係数 $n!2^na_0$ を除いた部分を

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+m)!m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

と記し，ベッセル関数とよぶ．

$s=-n<0$ の場合，$\{(k+s)^2-n^2\}a_k+a_{k-2}=0$ の条件は $k(k-2n)a_k+a_{k-2}=0$ となる．奇数の k については前と同じ議論で $a_k=0$ となるが，k が偶数の場合 $k=2n$ のところで $0\times a_{2n}+a_{2n-2}=0$ となるので $a_{2n-2}=0$ である．これから $a_{2n-2}=a_{2n-4}=\cdots a_2=a_0=0$ となってしまい，最初の $a_0\neq 0$ の条件と反することになるので級数解は得られない．(n が整数でない場合は解を得ることができる．)

n が整数のときのベッセルの微分方程式のもう一つの独立な解をノイマン関数といい $N_n(x)$ または $Y_n(x)$ で表す．ベッセル関数とノイマン関数の一次結合

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$$
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

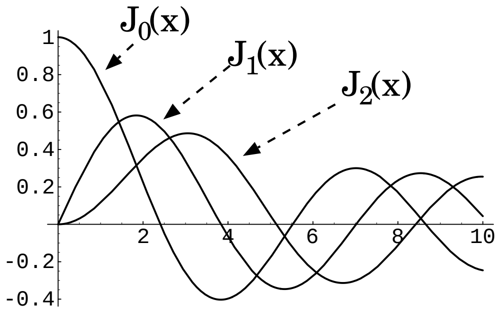
をハンケル関数という．

32.2　ベッセル関数の性質

以下，ベッセル関数 J_n の性質を調べる．ガンマ関数 (補遺を参照) を用いて $(n+m)! = \Gamma(n+m+1)$ と表し

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

をベッセル関数の定義とする．この場合 n が 0 以上の整数でなくても，負の整数以外の n で $J_n(x)$ が定義できる．以下に $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ のグラフを示す．



n が負の整数の場合は $1/\Gamma(0$ 以下の整数$) = 0$ と考えれば，$n = -\ell$ (ℓ は自然数) として

$$\begin{aligned}
J_n(x) = J_{-\ell}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\ell+m+1)m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\ell+2m} \\
&= \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\ell+m+1)m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\ell+2m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+k}}{\Gamma(k+1)(\ell+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\ell+2k} \\
&= (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\ell+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\ell+2k} = (-1)^\ell J_\ell(x)
\end{aligned}$$

で定義できる．(ここで 2 行目へ移る際に $m - \ell = k$ とした．)

32.2.1　漸化式

$x^n J_n(x)$，$x^{-n} J_n(x)$ の微分を計算すると

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = \frac{d}{dx}[x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)m!} \frac{(2n+2m)x^{2n+2m-1}}{2^{n+2m}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m)m!} \frac{x^{2n+2m-1}}{2^{n+2m-1}} = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m)m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m-1} = x^n J_{n-1}(x)$$

すなわち　$nx^{n-1}J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x)$

$$nJ_n(x) + xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = \frac{d}{dx}[x^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)m!} \frac{2mx^{2m-1}}{2^{n+2m}}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)(m-1)!} \frac{x^{2m-1}}{2^{n+2m-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(n+k+2)k!} \frac{x^{2k+1}}{2^{n+2k+1}}$$

$$= -x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+1+k+1)k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1+2k} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

すなわち　$-nx^{-(n+1)}J_n(x) + x^{-n}J_n'(x) = -x^{-n}J_{n+1}(x)$

$$-nJ_n(x) + xJ_n'(x) = -xJ_{n+1}(x)$$

これらの結果から

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad , \quad \frac{n}{x}J_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

という漸化式が得られる．後者より $J_{n+1}(x) = \dfrac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x)$ なので，$J_0(x)$ と $J_1(x)$ が分かれば，任意の自然数 n での $J_n(x)$ を求めることができる．

32.2.2　直交関係

関数 $f(x) = J_n(ax)$ は $ax = t$ とおけば，$J_n(t)$ はベッセルの微分方程式

$$t^2 \frac{d^2 f}{dt^2} + t\frac{df}{dt} + (t^2 - n^2)f = 0$$

を満たす．t を ax で置き直すと

$$a^2x^2 \frac{d^2 f}{a^2 dx^2} + ax\frac{df}{adx} + (a^2x^2 - n^2)f = 0$$

$$x\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} + (a^2 x - \frac{n^2}{x})f = \frac{d}{dx}[x\frac{df}{dx}] + (a^2 x - \frac{n^2}{x})f = 0$$

を満たす．同様にして $g(x) = J_n(bx)$ $(a \neq b)$ は次の微分方程式を満たす．

$$x\frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{dg}{dx} + (b^2 x - \frac{n^2}{x})g = \frac{d}{dx}[x\frac{dg}{dx}] + (b^2 x - \frac{n^2}{x})g = 0$$

これらより

$$g\frac{d}{dx}[x\frac{df}{dx}] - f\frac{d}{dx}[x\frac{dg}{dx}] = -(a^2 x - \frac{n^2}{x})fg + (b^2 x - \frac{n^2}{x})fg$$

$$\frac{d}{dx}[xf'g - xfg'] = (b^2 - a^2)xfg$$

両辺を p から q まで積分

$$\int_p^q \frac{d}{dx}[xf'g - xfg']dx = [xf'g - xfg']_p^q = (b^2 - a^2)\int_p^q xfgdx$$

$$[axJ_n'(ax)J_n(bx) - bxJ_n(ax)J_n'(bx)]_p^q = (b^2 - a^2)\int_p^q xJ_n(ax)J_n(bx)dx$$

ここで漸化式 $J_n'(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}
&aJ_n'(ax)J_n(bx) - bJ_n(ax)J_n'(bx) \\
&= [\frac{n}{x}J_n(ax) - aJ_{n+1}(ax)]J_n(bx) - J_n(ax)[\frac{n}{x}J_n(bx) - bJ_{n+1}(bx)] \\
&= aJ_n(ax)J_{n+1}(bx) - bJ_n(bx)J_{n+1}(ax)
\end{aligned}$$

よって

$$\int_p^q xJ_n(ax)J_n(bx)dx = \frac{1}{(b^2 - a^2)}\left[axJ_n(ax)J_{n+1}(bx) - bxJ_n(bx)J_{n+1}(ax)\right]_p^q$$

p, q を $J_n(ap) = J_n(bq) = 0$ となるように選べば右辺は 0 になる．$a = b$ の場合は，右辺で $b = a + \epsilon$ と置き，$\epsilon \to 0$ の極限をとると

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2a\epsilon}\left[axJ_n(ax)\{J_{n+1}(ax) + \epsilon xJ_{n+1}'(ax)\} - (ax + \epsilon x)\{J_n(ax) + \epsilon xJ_n(ax)'\}J_{n+1}(ax) + O(\epsilon^2)\right] \\
&= \frac{x^2}{2}[J_n(ax)J_{n+1}'(ax) - J_n'(ax)J_{n+1}(ax)] - \frac{x}{2a}J_n(ax)J_{n+1}(ax) \\
&= \frac{x^2}{2}[J_n(ax)\{J_n(ax) - \frac{(n+1)}{ax}J_{n+1}(ax)\} - \{\frac{n}{ax}J_n(ax) - J_{n+1}(ax)\}J_{n+1}(ax)] - \frac{x}{2a}J_n(ax)J_{n+1}(ax)
\end{aligned}$$

ここで $J_n(pa) = J_n(qa) = 0$ となる p, q を選べば，以下が得られる．

$$\int_p^q xJ_n(ax)J_n(ax)dx = \left[\frac{x^2}{2}\{J_{n+1}(ax)\}^2\right]_p^q \quad (\text{ただし } J_n(pa) = J_n(qa) = 0)$$

32.3　母関数

関数 $e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}$ を考え t のべきで展開する．

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{z}{2}t}e^{-\frac{z}{2t}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{zt}{2})^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-\frac{z}{2t})^m\right)$$

t^n の係数は，$k - m = n$ となる場合を全て考えると

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+n)!}\frac{1}{m!}(\frac{z}{2})^{m+n}(-\frac{z}{2})^m = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}$$

となり，$J_n(z)$ の定義と一致する．よって以下の関係が成立する．

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n$$

(t のべきは $-\infty$ から ∞ のどの値も取りうることに注意せよ．) 左辺をベッセル関数 $J_n(z)$ の母関数という．これを用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y)t^n = e^{\frac{(x+y)}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}e^{\frac{y}{2}(t-\frac{1}{t})} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)t^k\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y)t^m\right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{n-k}(y)t^n \quad (m=n-k \text{ とした})$$

となるので，t^n の係数を比較して次の関係式 (ベッセル関数の加法定理) を得る．

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{n-k}(y)$$

また，母関数で $t = e^{i\theta}$ と置くと，$t - \dfrac{1}{t} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$ より

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\theta}$$

が成立する．

32.4　球ベッセル関数

ヘルムホルツ型方程式を球座標で表して変数分離すると，動径方向 r だけに依存する関数 f が満たす微分方程式として以下を得る．

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)f = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ここで $\sqrt{r}f = g$ と置くと

$$\frac{d}{dr}f = \frac{d}{dr}\frac{g}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{dg}{dr} - \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{r^3}}$$
$$\frac{d^2}{dr^2}f = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{dg}{dr} - \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{r^3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{d^2g}{dr^2} - \frac{1}{\sqrt{r^3}}\frac{dg}{dr} + \frac{3}{4}\frac{g}{\sqrt{r^5}}$$

よって

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)f \\
&= \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{d^2g}{dr^2} - \frac{1}{\sqrt{r^3}}\frac{dg}{dr} + \frac{3}{4}\frac{g}{\sqrt{r^5}} + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{dg}{dr} - \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{r^3}}\right) + \left(1 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\frac{g}{\sqrt{r}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{1}{\sqrt{r^3}}\frac{dg}{dr} + \left(1 - \frac{n(n+1)+1/4}{r^2}\right)\frac{g}{\sqrt{r}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r}}\left[\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg}{dr} + \left(1 - \frac{(n+1/2)^2}{r^2}\right)g\right]
\end{aligned}$$

となり，g はベッセルの微分方程式で n を $n+1/2$ と置き直したものの解となる．ここで球ベッセル関数を

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z)$$

で定義すれば，これは元の微分方程式の解である．

ベッセル関数の定義に現れるガンマ関数は次の性質を持つ．(補遺参照)

$$\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$$

これを用いて $J_{1/2}(x)$ を計算してみると

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1+1/2)m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1+1/2)\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1/2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2(m+1)-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \end{aligned}$$

となって三角関数が現れ，$j_0(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ が得られる．より高次の $j_n(x)$ についても三角関数と x のべき乗の組み合わせで表すことができる．

補遺：ベータ関数とガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は，$\mathrm{Re}[z] > 0$ に対して

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

で定義され，負の整数以外の z については $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ の関係から，

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1}$$

を用いて，解析接続で定義できる．(第 22 章演習問題 2 を参照)

正の実数 x, y に対しベータ関数 $B(x,y)$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ (t = \sin^2\theta \text{ と置いて}) &= \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2(x-1)}(\cos\theta)^{2(y-1)} 2\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1} d\theta \end{aligned}$$

これを用いると

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \int_0^{\infty} e^{-s} s^{y-1} ds \\ &(t = p^2,\ s = q^2 \text{ と置く}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(2\int_0^\infty e^{-p^2} p^{2x-1} dp\right)\left(2\int_0^\infty e^{-q^2} q^{2y-1} dq\right) \\
&= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(p^2+q^2)} p^{2x-1} q^{2y-1} dp dq \\
&\quad (p = r\cos\theta,\ s = r\sin\theta \text{ と置く}) \\
&= 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r^{2(x+y-1)} (\cos\theta)^{2x-1} (\sin\theta)^{2y-1} r d\theta dr \\
&= \left(2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr\right)\left(2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1} (\cos\theta)^{2y-1} d\theta\right) \\
&= \Gamma(x+y)B(x,y)
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで $y = x$ とおけば

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} &= B(x,x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1} dt = \int_0^1 [t(1-t)]^{x-1} dt \\
&= 2\int_0^{1/2} [t(1-t)]^{x-1} dt \\
&\quad (4t(1-t) = s \text{ と置く}) \\
&= 2\int_0^1 (\frac{s}{4})^{x-1} \frac{1}{4\sqrt{1-s}} ds = 2^{1-2x} \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{1/2-1} ds \\
&= 2^{1-2x} B(x, 1/2) = 2^{1-2x} \frac{\Gamma(x)\Gamma(1/2)}{\Gamma(x+1/2)}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\Gamma(x)\Gamma(x+1/2) = 2^{1-2x}\Gamma(1/2)\Gamma(2x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)
$$

32.5　演習問題

1. ベッセル関数 $J_n(x)$ (n は整数) につき，以下を示せ.

$$J_0(0)=1\ ,\quad J_n(0)=0\ \ (n\neq 0)\ ,\quad J_n'(0)=0\ \ (|n|\neq 1)$$

2. 自然数 n に対し，以下を示せ

$$x^{-(m+n)}J_{m+n}(x)=(-1)^n\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^n\{x^{-m}J_m(x)\}$$
$$x^{m-n}J_{m-n}(x)=\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^n\{x^{m}J_m(x)\}$$

3. ベッセルの微分方程式

$$x^2\frac{d^2J}{dx^2}+x\frac{dJ}{dx}+(x^2-n^2)J=0\ \ (n \text{ は整数})$$

で $J=f(x)/\sqrt{x}$ を代入して，関数 f が次の微分方程式を満たすことを示せ.

$$f''+\left[1-\frac{(n^2-1/4)}{x^2}\right]f=0$$

さらに，$|x|\gg 1$ として $1/x^2$ に比例する項を無視し，$|x|\gg 1$ での関数 J の漸近形を求めよ.

4. ベッセル関数とその母関数との関係 $e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n$ は，関数 $f(z,t)=e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}$ のローラン展開になっている．このことから， $|w|=1$ の円周上を反時計回りにまわる経路を C として

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z,w)}{w^{n+1}}dw$$

を計算し，$J_n(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(z\sin\theta-n\theta)d\theta$ を示せ.

5. 母関数を用いて以下を示せ．ただし x, ϕ は実数である.

$$\cos(x\sin\phi)=J_0(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(x)\cos(2m\phi)$$
$$\sin(x\sin\phi)=2\sum_{m=0}^{\infty}J_{2m+1}(x)\sin[(2m+1)\phi]$$

6. $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$ を示せ.

32.6　解答例

1. 整数 n に対してベッセル関数 $J_n(x)$ の定義として以下を採用する．

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n+m)!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad (n \geq 0)\ ,\ J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) \quad (n < 0)$$

定義より

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = 1 + O(x^2)$$

よって $J_0(0) = 1$.
正の n に対して

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n+m)!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O(x^{n+2})$$

よって$J_n(0) = 0$

負の n に対しては $J_n(0) = (-1)^n J_{-n}(0) = 0$ なのでやはり $J_n(0) = 0$ が成立する．
$n = 0$ のとき，上の式より $J_0(x) = 1 + O(x^2)$ なので $J_0'(x) = O(x)$ より $J_0'(0) = 0$.
$n \geq 2$ に対して

$$J_n'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n+m)!m!}(n+2m)\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m-1} = \frac{n}{2n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} + O(x^{n+1})$$

$n \geq 2$ なので$J_n'(0) = 0$

$n \leq -2$ のとき，$n = -k$ とおくと

$$J_n(x) = (-1)^{-k} J_k(x) \implies J_n'(x) = (-1)^{-k} J_k'(x)$$

よって $J_n'(0) = 0$

2. 32.2.1 節で示した式

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)\ ,\quad \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

を用いて

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-m} J_m(x)] = -x^{-(m+1)} J_{m+1}(x)$$

$$\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^2 [x^{-m} J_m(x)] = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}[-x^{-(m+1)} J_{m+1}(x)] = (-1)^2 x^{-(m+2)} J_{m+2}(x)$$

$$\vdots$$

$$\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^n [x^{-m} J_m(x)] = (-1)^n x^{-(m+n)} J_{m+n}(x)$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^m J_m(x)] &= x^{(m-1)}J_{m-1}(x) \\
\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^2 [x^m J_m(x)] = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{(m-1)}J_{m-1}(x)] &= x^{(m-2)}J_{m-2}(x) \\
&\vdots \\
\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^n [x^m J_m(x)] &= x^{(m-n)}J_{m-n}(x)
\end{aligned}
$$

3. $J = \dfrac{f}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}f$ に対して

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}J &= x^{-1/2}\frac{df}{dx} - \frac{1}{2}x^{-3/2}f \\
\frac{d^2}{dx^2}J &= x^{-1/2}\frac{d^2 f}{dx^2} - x^{-3/2}\frac{df}{dx} + \frac{3}{4}x^{-5/2}f
\end{aligned}
$$

これらをベッセルの微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
x^2\frac{d^2 J}{dx^2} + x\frac{dJ}{dx} + (x^2 - n^2)J &= 0 \\
\left[x^{3/2}\frac{d^2 f}{dx^2} - x^{1/2}\frac{df}{dx} + \frac{3}{4}x^{-1/2}f\right] + \left[x^{1/2}\frac{df}{dx} - \frac{1}{2}x^{-1/2}f\right] + (x^2 - n^2)x^{-1/2}f &= 0 \\
\frac{d^2 f}{dx^2} - x^{-1}\frac{df}{dx} + \frac{3}{4}x^{-2}f + x^{-1}\frac{df}{dx} - \frac{1}{2}x^{-2}f + (x^2 - n^2)x^{-2}f &= 0 \\
\frac{d^2 f}{dx^2} + \left[1 - \frac{(n^2 - 1/4)}{x^2}\right]f &= 0
\end{aligned}
$$

$|x| \gg 1$ として $\dfrac{1}{x^2}$ に比例する項を無視すると

$$
\frac{d^2 f}{dx^2} + f \simeq 0
$$

この一般解は $A\sin x + B\cos x$ (A, B は定数) なので，$|x| \gg 1$ でのベッセル関数の漸近形は $J(x) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{x}}(A\sin x + B\cos x)$ となる．

4. 22.3 節で示したローラン展開を用いると

$$
e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z)t^n \ , \quad a_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}}dw
$$

$|w| = 1$ の円周上を反時計回りにまわる経路 C を $w = e^{i\theta}$ $(\theta = -\pi \to \pi)$ と表して $dw = ie^{i\theta}d\theta = iwd\theta$ より

$$
\begin{aligned}
a_n(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\frac{z}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}}{e^{i(n+1)\theta}}ie^{i\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{iz\sin\theta}}{e^{in\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\theta - n\theta)}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(z\sin\theta - n\theta)d\theta
\end{aligned}
$$

(注: 被積分関数が θ の奇関数なので $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(z\sin\theta - n\theta)d\theta = 0$.) 一方，ベッセル関数とその母関数の関係より

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$

これらから，t^n の係数を比べて

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)d\theta$$

5. ベッセル関数とその母関数の関係

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

で $t = e^{i\phi}$ とおくと

$$\begin{aligned}
e^{\frac{x}{2}(e^{i\phi}-e^{-i\phi})} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(e^{i\phi})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\phi} \\
e^{ix\sin\phi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\phi} \\
\cos(x\sin\phi) + i\sin(x\sin\phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)[\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)]
\end{aligned}$$

両辺の実部と虚部を比較して

$$\begin{aligned}
\cos(x\sin\phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\phi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)\cos(n\phi) + J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\cos(n\phi) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} J_{-k}(x)\cos(-k\phi) + J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\cos(n\phi) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_k(x)\cos(k\phi) + J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\cos(n\phi) \\
&= J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x)\cos(2m\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x\sin\phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin(n\phi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)\sin(n\phi) + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\sin(n\phi) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} J_{-k}(x)\sin(-k\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\sin(n\phi) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} J_k(x)\sin(k\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\sin(n\phi) = 2\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(x)\sin((2m+1)\phi)
\end{aligned}$$

6.

$$
\begin{aligned}
J_{-1/2}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1-1/2)m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1/2} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2(m+1/2)-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2(m+\frac{1}{2}))}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m!} x^{2m} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x
\end{aligned}
$$

第 33 章

球面調和関数

33.1　ルジャンドルの多項式

ヘルムホルツ型方程式 $[\Delta + a]\Psi(x, y, z) = 0$ でラプラシアン Δ を球座標 (r, θ, ϕ) で表し，変数分離して，ϕ のみに依存する関数 $\Phi(\phi)$ が満たす方程式

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi) = -m^2 \quad (\text{定数})$$

が得られる．これを解いて，さらに z 軸のまわりに一周すると関数は元に戻るという条件 $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ を課すと次の結果を得る．

$$\Phi(\phi) = C_1^{\phi} e^{im\phi} + C_2^{\phi} e^{-im\phi} \quad (m\ \text{は整数})$$

θ にのみ依存する関数 $\Theta(\theta)$ が満たすべき方程式は，この結果を用いると

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \quad (\lambda\ \text{は定数})$$

となる．$\cos\theta = z$ と変数変換して $\Theta(\theta) = L(z)$ と置いて

$$(1 - z^2)\frac{d^2L}{dz^2} - 2z\frac{dL}{dz} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - z^2}\right)L = 0$$

ルジャンドルの陪微分方程式が得られた．以下で，この解を求めていく．

まず $m = 0$ の場合を考える．

$$(1 - z^2)\frac{d^2L}{dz^2} - 2z\frac{dL}{dz} + \lambda L = 0$$

この 2 階常微分方程式で $z = 0$ は特異点ではないので $L(z) = \sum_{n=0} a_n z^n$ を代入する．

$$(1 - z^2)\sum_{n=2} a_n n(n-1)z^{n-2} - 2z\sum_{n=1} a_n n z^{n-1} + \lambda\sum_{n=0} a_n z^n = 0$$

$$\sum_{n=0} a_{n+2}(n+2)(n+1)z^n - \sum_{n=2} a_n n(n-1)z^n - \sum_{n=1} 2a_n n z^n + \lambda\sum_{n=0} a_n z^n = 0$$

$$(2a_2 + \lambda a_0) + (6a_3 - 2a_1 + \lambda a_1)z + \sum_{n=2}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - \{n(n-1) + 2n - \lambda\}a_n]z^n = 0$$

これから

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)} a_n$$

という関係が得られる．前の前の式の左辺第 1 項と第 2 項が 0 になるという関係もこの結果に含まれている．ここで $n \to \infty$ とすると $a_{n+2} \simeq a_n$ となり，a_n が無限に続くと $\sum_{n=0} a_n z^n$ は発散してしまう．よって，意味のある解を得るには，ある 0 以上の整数 n で $n(n+1)=\lambda$ とならねばならない．このとき $a_{n+2}=a_{n+4}=a_{n+6}=\cdots=0$ となるが，a_{n+1}, a_{n+3}, a_{n+5}, ... は $n(n+1)=\lambda$ の条件だけでは必ずしも 0 にならないので，まだ $\sum_{n=0} a_n z^n$ は発散する可能性がある．これをさけるため

$$\begin{array}{ll} n \text{ が偶数のとき} & a_1 = 0 \ \to a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0 \\ n \text{ が奇数のとき} & a_0 = 0 \ \to a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0 \end{array}$$

ととる．

係数の漸化式から $L(z)$ の一般形を求めることはできるが，より見通しよくするために次の関数を考える．

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$$

このとき，ライプニッツの法則 $\frac{d^n}{dz^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (\frac{d^k f}{dz^k})(\frac{d^{n-k} g}{dz^{n-k}})$ を用いて

$$\begin{aligned} &\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \left[(z^2-1) \frac{d}{dz} (z^2-1)^n \right] \\ &= (z^2-1) \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} (z^2-1)^n + (n+1) 2z \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} (z^2-1)^n + \frac{n(n+1)}{2} 2 \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n \end{aligned}$$

一方，[ ] 内をまず計算してから微分して

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \left[(z^2-1) \frac{d}{dz} (z^2-1)^n \right] &= \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \left[n(z^2-1)^n 2z \right] = 2n \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \left[z(z^2-1)^n \right] \\ &= 2n \left[z \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} (z^2-1)^n + (n+1) \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n \right] \end{aligned}$$

どちらも同じものを計算したので結果を等しいと置いて

$$\begin{aligned} &2n \left[z \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} (z^2-1)^n + (n+1) \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n \right] \\ &= (z^2-1) \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} (z^2-1)^n + (n+1) 2z \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} (z^2-1)^n + \frac{n(n+1)}{2} 2 \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n \end{aligned}$$

整理して

$$\begin{aligned} \{2n(n+1) - n(n+1)\} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n &= (z^2-1) \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} (z^2-1)^n + 2z \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} (z^2-1)^n \\ -n(n+1) \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n &= (1-z^2) \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} (z^2-1)^n - 2z \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} (z^2-1)^n \end{aligned}$$

両辺に $\dfrac{1}{2^n n!}$ をかけて

$$-n(n+1)P_n(z) = (1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_n(z) - 2z\frac{d}{dz}P_n(z)$$
$$(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_n(z) - 2z\frac{d}{dz}P_n(z) + n(n+1)P_n(z) = 0$$

よって $P_n(z)$ が元の微分方程式の解になっている．

$P_n(z)$ の定義から級数解を求めてみる．

$$(z^2-1)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} z^{2(n-j)}(-1)^j$$

$z^{2(n-j)}$ を z で n 階微分すると，$n-2j \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dz^n}z^{2(n-j)} &= (2n-2j)(2n-2j-1)\cdots(2n-2j-n+1)z^{n-2j}\\ &= \frac{(2n-2j)!}{(2n-2j-n)!}z^{n-2j} = \frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!}z^{n-2j}\end{aligned}$$

$n-2j<0$ では 0 になる．よって

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{1}{2^n n!}\frac{(-1)^j n!}{j!(n-j)!}\frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!}z^{n-2j} = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^j(2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!}z^{n-2j}$$

ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．(ガウスの記号) この $P_n(z)$ をルジャンドルの多項式という．

$$P_0(z) = 1\ ,\ P_1(z) = z\ ,\ P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2-1)\ ,\ P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3-3z)\ ,\ldots$$

33.2　ルジャンドルの多項式どうしの積分

前の議論で $\cos\theta = z$ と置いたことから考えられるように，ルジャンドル多項式の変数は -1 から 1 の範囲で考えられることが多い．そこで，$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx$ を求めてみる．前に求めた関係式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ を用いて

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}\{\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\}\{\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\}dx$$

$$\text{部分積分して} = \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\left[\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\}\{\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\}\right]_{-1}^{1}$$
$$-\frac{1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\}\{\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m\}dx$$

右辺第 1 項 は $(x^2-1)^n$ を x で $n-1$ 回しか微分しないので，(x^2-1) が少なくとも 1 つ以上かかったものになる．よって $x=\pm 1$ では 0 になる．部分積分をくり返せば

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx &= \frac{-1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\}\{\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m\}dx \\ &= \frac{(-1)^2}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}\{\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n\}\{\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}(x^2-1)^m\}dx \\ &= \cdots \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\{\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m\}dx\end{aligned}$$

$n \geq m$ としても一般性を失わない．最後の $\{\quad\}$ 内は x の $2m$ 次を $n+m \geq 2m$ 回微分するので，$n \neq m$ では 0 になる．$n=m$ では

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\{\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\}dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

$$\begin{aligned}(x=2t-1 \text{ とおく}) \quad &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}(2n)!\int_{0}^{1}(4t^2-4t)^n 2dt \\ &= \frac{2}{(n!)^2}(2n)!\int_0^1 t^n(1-t)^n dt = \frac{2}{(n!)^2}(2n)!B(n+1,n+1) \\ &= \frac{2}{(n!)^2}(2n)!\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{2}{(n!)^2}(2n)!\frac{n!n!}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}\end{aligned}$$

よって以下の結果を得る．

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{(2n+1)}\delta_{mn}$$

33.3　ルジャンドル多項式の母関数

ルジャンドル多項式の母関数を求める．いきなり母関数を与えて展開し，その係数がルジャンドル多項式になっていることを示してもいいが，ここでは別の方法として複素関数論を用いた方法を紹介する．複素関数論でのコーシーの積分公式を思い出すと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}dw \quad (w,\ z \text{ は複素数で，} C \text{ は } w=z \text{ の点を囲む閉曲線})$$

さらにこの両辺を z で n 回微分して

$$\frac{d^n}{dz^n}f(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ にこれをあてはめると

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{(w^2-1)^n}{(w-x)^{n+1}}dw = \frac{1}{2^n 2\pi i}\oint_C \frac{(w^2-1)^n}{(w-x)^{n+1}}dw \\ \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n 2\pi i}\oint_C \frac{(w^2-1)^n t^n}{(w-x)^{n+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{(w-x)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(w^2-1)t}{2(w-x)}\right\}^n dw\end{aligned}$$

t を十分小さくとって，$\left|\dfrac{(w^2-1)t}{2(w-x)}\right| < 1$ とする．このとき級数は収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(w^2-1)t}{2(w-x)}\right\}^n = \left[1-\frac{(w^2-1)t}{2(w-x)}\right]^{-1} = \frac{2(w-x)}{2(w-x)-(w^2-1)t} = \frac{-2(w-x)/t}{w^2-1-2(w-x)/t}$$

$w^2-1-2(w-x)/t = w^2-\dfrac{2}{t}w-1+\dfrac{2x}{t}=0$ を w についての二次方程式とみなし，その解を α, β とする

$$\alpha = \frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+1-\frac{2x}{t}} = \frac{1}{t}+\frac{1}{t}\sqrt{1-2xt+t^2}\quad,\quad \beta = \frac{1}{t}-\frac{1}{t}\sqrt{1-2xt+t^2}$$

$|t| \ll 1$ では $\sqrt{1-2xt+t^2} \simeq 1-xt$ なので $\alpha \simeq 2/t$, $\beta \simeq x$．よって C 内にある極は β だけである．

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{(w-x)}\frac{-2(w-x)/t}{[w^2-1-2(w-x)/t]}dw = -\frac{1}{\pi i t}\oint_C \frac{1}{(w-\alpha)(w-\beta)}dw \\ &= -\frac{2\pi i}{\pi i t}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(w-\alpha)(w-\beta)}\right]_{w=\beta} = -\frac{2}{t}\frac{1}{(\beta-\alpha)} = -\frac{2}{t}\frac{1}{(-2/t)\sqrt{1-2xt+t^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\end{aligned}$$

33.4　母関数の応用

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ を用いて，ルジャンドル多項式の様々な性質の導出や物理的応用ができる．以下，いくつかの例を紹介する．

ルジャンドル関数の値

母関数の関係式で $x=1$ とおき，$|t|<1$ とすると

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2\times 1\times t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

よって　$P_n(1)=1$

x を $-x$ で置き換えると

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)t^n &= \frac{1}{\sqrt{1-2(-x)t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x(-t)+(-t)^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(-1)^n t^n\end{aligned}$$

よって　$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

漸化式

母関数の関係式の両辺を t で微分

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1} = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(2t-2x)$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1} = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-1/2}(2t-2x) = (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)(n-1)t^n \\ &= P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)\right]t^n \\ (\text{右辺}) &= xP_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n\end{aligned}$$

$P_1(x) = x,\ P_0(x) = 1$ より $P_1(x) = xP_0(x)$．よって，整理して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x)\right]t^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)\right]t^n = 0$$

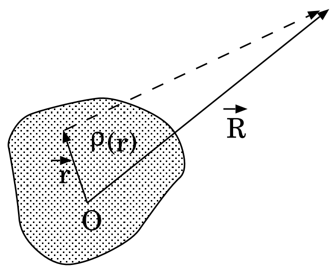
任意の t で成立するので

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

これと $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$ を用いれば，全ての n での $P_n(x)$ が計算できる．

多重極展開

物理への応用例として，空間中に電荷が電荷密度 $\rho(\vec{r})$ で分布している場合を考える．電磁気学によると，$\vec{r}$ の位置にある微小体積 dV 中にある電荷が，位置 $\vec{R}$ の地点につくる電位は以下で与えられる．



$$k\frac{\rho(\vec{r})dV}{|\vec{R}-\vec{r}|} \quad \left(k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

これを全ての空間領域で積分すれば位置 $\vec{R}$ の地点での電位が求められる．

$$\phi(\vec{R}) = \int_V k\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R}-\vec{r}|}dV$$

$\vec{R}, \vec{r}$ の大きさを，それぞれ R, r．二つのベクトルのなす角度を θ とすると

$$|\vec{R}-\vec{r}| = \sqrt{(\vec{R}-\vec{r})^2} = \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta} = R\sqrt{1-2(r/R)\cos\theta+(r/R)^2}$$

ルジャンドル多項式の母関数を用いると

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|} = \frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\theta(r/R)+(r/R)^2}} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

これを元の式に代入する．

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{R}) &= \int_V \rho(\vec{r})\frac{k}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n dV = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k}{R}\int_V \rho(\vec{r})P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n dV \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k}{R^{n+1}}\int_V \rho(\vec{r})P_n(\cos\theta)r^n r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{k}{R}\int_V \rho(\vec{r})r^2\sin\theta drd\theta d\phi + \frac{k}{R^2}\int_V \rho(\vec{r})r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta d\phi \\
&\quad + \frac{k}{R^3}\int_V \rho(\vec{r})\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}r^2\sin\theta drd\theta d\phi + \cdots
\end{aligned}$$

最後の結果の第 1 項は P_n の $n=0$ の部分の寄与であり，積分の値は領域内の全電荷量になる．電荷が 0 でない領域が限られていて $R \gg r$ の場合は第 2 項以下を無視すると，原点 O に全ての電荷が集中しているのと同じ結果を与える．同様に物理的な考察を続けていくと，第 2 項の積分は電気双極子能率，第 3 項の積分は電気四重極能率に関わる部分となる．

33.5　ルジャンドル陪関数

これまではルジャンドルの陪微分方程式

$$(1-z^2)\frac{d^2L}{dz^2} - 2z\frac{dL}{dz} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right)L = 0$$

で $m=0$ の場合を考えてきた．(注：以前のルジャンドルの陪微分方程式で $\lambda = n(n+1)$ としている．) $m \neq 0$ の場合を以下で考える．$m > 0$ として一般性を失わない．$z = \pm 1$ が特異点であるので，まず $z=1$ 付近での振る舞いを調べる．$z=1$ の近傍で $L(z) = (1-z)^s f(z)$ と置いて代入すると

$$\begin{aligned}
&(1-z^2)[s(s-1)(1-z)^{s-2}f - 2s(1-z)^{s-1}f' + (1-z)^s f''] \\
&\quad -2z[-s(1-z)^{s-1}f + (1-z)^s f'] + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right)(1-z)^s f = 0
\end{aligned}$$

ここで $1-z=t$ とし，$|t| \ll 1$ で考えると

$$t(2-t)[s(s-1)t^{s-2}f - 2st^{s-1}f' + t^s f''] - 2(1-t)[-st^{s-1}f + t^s f'] + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{t(2-t)}\right)t^s f = 0$$

t^s で割って

$$\frac{(2-t)}{t}s(s-1)f - 2s(2-t)f' + t(2-t)f'' + 2s\frac{(1-t)}{t}f - 2(1-t)f' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{t(2-t)}\right)f = 0$$

$$(1/t \text{ に関する項とそれ以外に分けて})\quad \frac{1}{t}\left[2s(s-1) + 2s - \frac{m^2}{2}\right]f + O(1) = 0$$

$|t| \ll 1$ で $1/t$ の部分が 0 ならねばならないので

$$2s(s-1) + 2s - \frac{m^2}{2} = 0 \;\Rightarrow\; s = \pm\frac{m}{2}$$

$z \to 1$ で L が発散しないよう $s = m/2$ を採用する．$z \to -1$ でも同様に考えて (元の微分方程式は $z \leftrightarrow -z$ で形が不変)，結局

$$L(z) = (1-z)^{m/2}(1+z)^{m/2}f(z) = (1-z^2)^{m/2}f(z)$$

を得る．これを元の方程式に代入して整理すると以下のようになる．

$$(1-z^2)\frac{d^2f}{dz^2} - 2(m+1)z\frac{df}{dz} + \{n(n+1) - m(m+1)\}f = 0$$

これをそのまま級数を用いて解いてもよいが，ここでは別のやり方で解を求めてみる．$m = 0$ の場合のルジャンドルの陪微分方程式を思い出すと，解は $P_n(z)$ なので

$$(1-z^2)\frac{d^2P_n}{dz^2} - 2z\frac{dP_n}{dz} + n(n+1)P_n = 0$$

この両辺を z で微分すると

$$(1-z^2)\frac{d^3P_n}{dz^3} - 2z\frac{d^2P_n}{dz^2} - 2z\frac{d^2P_n}{dz^2} - 2\frac{dP_n}{dz} + n(n+1)\frac{dP_n}{dz} = 0$$
$$(1-z^2)\frac{d^3P_n}{dz^3} - 4z\frac{d^2P_n}{dz^2} + \{n(n+1) - 2\}\frac{dP_n}{dz} = 0$$

これを見ると，$\dfrac{dP_n}{dz}$ が先ほどの微分方程式で $m = 1$ とした場合の解になっていることがわかる．数学的帰納法を用いて，f が

$$(1-z^2)\frac{d^2f}{dz^2} - 2(m+1)z\frac{df}{dz} + \{n(n+1) - m(m+1)\}f = 0$$

の解であると仮定して，両辺を z で微分すれば

$$(1-z^2)\frac{d^3f}{dz^3} - 2z\frac{d^2f}{dz^2} - 2(m+1)z\frac{d^2f}{dz^2} - 2(m+1)\frac{df}{dz} + \{n(n+1) - m(m+1)\}\frac{df}{dz} = 0$$
$$(1-z^2)\frac{d^3f}{dz^3} - 2(m+2)z\frac{d^2f}{dz^2} + \{n(n+1) - (m+1)(m+2)\}\frac{df}{dz} = 0$$

すなわち，$\dfrac{df}{dz}$ が m を一つ増やした場合の微分方程式の解になっている．よって $f(z) = \dfrac{d^m}{dz^m}P_n(z)$ とおけるので，

$$L(z) = (1-z^2)^{m/2}f(z) = (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z) \equiv P_n^m(z)$$

ここで現れた $P_n^m(z)$ がルジャンドル陪微分方程式の解 (の一つで物理に有用なもの) である．$P_n(z)$ **は** z^n **までの多項式なので，**$m \le n$ **の時のみ有効である．**負の m については $P_n(z) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$ を用いて

$$P_n^m(z) = \frac{1}{2^n n!}(1-z^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}(z^2-1)^n$$

を定義とすれば，$m \ge -n$ で有効となり，結局 m のとりうる値は $-n, -n+1, \ldots, n-1, n$ となる．

33.6　球面調和関数

これまでの結果を基に，球座標での角度座標 θ, ϕ に関する部分 $Y(\theta,\phi)$ が満たす微分方程式

$$\left[\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right] = -\lambda Y \quad (\lambda \text{ は定数})$$

の解を議論する．ϕ に依存する部分は, 定数を除いて $e^{\pm im\phi}$ (m は整数) であった, $Y(\theta,\phi) = e^{\pm im\phi}L(\theta)$ として

$$e^{\pm im\phi}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta}L\right] = -\lambda e^{\pm im\phi}L$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial L}{\partial\theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)L = 0$$

$\cos\theta = z$ として

$$(1-z^2)\frac{d^2L}{dz^2} - 2z\frac{dL}{dz} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-z^2}\right)L = 0$$

$\lambda = n(n+1)$ (n は 0 以上の整数) のとき，この解は $L(z) = P_n^m(z)$ で与えられた．よって

$$Y_n^m(\theta,\phi) = C_n^m e^{im\phi}P_n^m(\cos\theta)$$

が求める解となる．ここで C_n^m は n, m に依存する定数であり，

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{Y_n^m(\theta,\phi)\}^* Y_{n'}^{m'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \delta_{nn'}\delta_{mm'}$$

となるように決める．この Y_n^m を球面調和関数という．n は 0 以上の整数であり，m は $-n$ から n までの整数である．

33.7 演習問題

1. $z = \cos\theta$ のとき，$\dfrac{d^2}{d\theta^2} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta} = (1-z^2)\dfrac{d^2}{dz^2} - 2z\dfrac{d}{dz}$ を示せ
2. 数列 $\{a_n\}$ につき，$a_{k+2} = \dfrac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$ (n は 0 以上の整数) の関係が成立しているとき．以下の条件で $P_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0} a_k z^k$ を求めよ．
   (a) $n = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
   (b) $n = 2$, $a_0 = -1/2$, $a_1 = 0$
   (c) $n = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = -3/2$
3. $P_n(z) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$ を用いて，$n = 0, 1, 2, 3$ の場合を具体的に計算せよ．
4. $P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$ を示せ．それを用いて $P_{2n+1}(0) = 0$ を示せ．
5. $n < m$ のとき $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^m$ は $x = \pm 1$ で 0 になることを示せ．
6. $n, m = 0, 1, 2$ の範囲で $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{(2n+1)}\delta_{mn}$ を確かめよ．
7. $P_2(0)$, $P_4(0)$, $P_6(0)$ の値を求めよ．
8. $P_{2n}(0) = \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ を示せ．
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ の両辺を x で微分することから漸化式
   $P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x)$ を導け．
10. ルジャンドル多項式の漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

   と前問の結果を用いて以下を示せ．
   (a) $P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)$
   (b) $xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$
   (c) $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$
11. 前問の (c) を用いて以下を示せ．

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{(2n+1)}[P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)]$$

12. ルジャンドルの陪微分方程式に $L(z) = (1 - z^2)^{m/2} f(z)$ を代入して，f が次の微分方程式を満たすことを示せ.

$$(1 - z^2)\frac{d^2 f}{dz^2} - 2(m+1)z\frac{df}{dz} + \{n(n+1) - m(m+1)\}f = 0$$

13. ルジャンドル陪関数 P_0^0, P_1^1, P_1^0, P_1^{-1}, P_2^2, P_2^1, P_2^0, P_2^{-1}, P_2^{-2} の具体的な形を求めよ.
14. $Y_n^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^n Y_n^m(\theta, \phi)$ を示せ.
15. 球面調和関数 $Y_n^m(\theta, \phi) = C_n^m e^{im\phi} P_n^m(\cos\theta)$ で Y_1^1, Y_1^0, Y_1^{-1} の具体的な形を求めよ.

33.8 解答例

1. $z = \cos\theta$ より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} &= \frac{dz}{d\theta}\frac{d}{dz} = -\sin\theta\frac{d}{dz} \\
\frac{d^2}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\frac{d}{dz}\right) = -\cos\theta\frac{d}{dz} - \sin\theta\frac{dz}{d\theta}\frac{d^2}{dz^2} = -z\frac{d}{dz} + \sin^2\theta\frac{d^2}{dz^2} \\
&= -z\frac{d}{dz} + (1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}
\end{aligned}$$

これらを $\dfrac{d^2}{d\theta^2} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}$ へ代入して

$$\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} = -z\frac{d}{dz} + (1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - z\frac{d}{dz} = (1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 2z\frac{d}{dz}$$

2. $a_{k+2} = \dfrac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$ の関係を用いる．

(a) $n=1$ なので $k=1$ のとき $a_3 = a_{1+2} = \dfrac{1\times(1+1)-1\times(1+1)}{(1+2)\times(1+1)}a_1 = 0$．よって 3 以上の奇数の n に対して $a_n = 0$．また，$a_0 = 0$ なので偶数の n に対しても $a_n = 0$．結局 0 でないのは $a_1 = 1$ だけとなるので

$$P_1(z) = a_1 z = z$$

(b) $n=2$ なので $k=2$ のとき $a_4 = a_{2+2} = \dfrac{2\times(2+1)-2\times(2+1)}{(2+2)\times(2+1)}a_2 = 0$．よって 4 以上の偶数の n に対して $a_n = 0$．また，$a_1 = 0$ なので奇数の n に対しても $a_n = 0$．結局 0 でないのは $a_0 = -\dfrac{1}{2}$ と

$$a_2 = \frac{0\times(0+1)-2\times(2+1)}{(0+2)(0+1)}a_0 = \frac{3}{2}$$

だけとなるので

$$P_2(z) = a_2 z^2 + a_0 = \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2} = \frac{(3z^2-1)}{2}$$

(c) $n=3$ なので $k=3$ のとき $a_5 = a_{3+2} = \dfrac{3\times(3+1)-3\times(3+1)}{(3+2)\times(3+1)}a_3 = 0$．よって 5 以上の奇数の n に対して $a_n = 0$．また，$a_0 = 0$ なので偶数の n に対しても $a_n = 0$．結局 0 でないのは $a_1 = -\dfrac{3}{2}$ と

$$a_3 = \frac{1\times(1+1)-3\times(3+1)}{(1+2)(1+1)}a_1 = \frac{5}{2}$$

だけとなるので

$$P_3(z) = a_3 z^3 + a_1 z = \frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z = \frac{(5z^3-3z)}{2}$$

3.

$$
\begin{aligned}
P_0(z) &= \frac{1}{2^0 0!}(z^2-1)^0 = 1 \\
P_1(z) &= \frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dz}(z^2-1) = \frac{1}{2}2z = z \\
P_2(z) &= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dz^2}[(z^2-1)^2] = \frac{1}{8}\frac{d}{dz}[2(z^2-1)2z] = \frac{(12z^2-4)}{8} = \frac{(3z^2-1)}{2} \\
P_3(z) &= \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dz^3}[(z^2-1)^3] = \frac{1}{48}\frac{d^2}{dz^2}[6z(z^2-1)^2] = \frac{1}{48}\frac{d^2}{dz^2}[6z^5-12z^3+6z] \\
&= \frac{1}{8}\frac{d}{dz}[5z^4-6z^2+1] = \frac{1}{8}(20z^3-12z) = \frac{(5z^3-3z)}{2}
\end{aligned}
$$

4. $P_n(z) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$ の定義を用いて,

$$
P_n(-z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d(-z)^n}[(-z)^2-1]^n = (-1)^n\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n = (-1)^n P_n(z)
$$

この結果から

$$
P_{2n+1}(0) = P_{2n+1}(-0) = (-1)^{2n+1}P_{2n+1}(0) = -P_{2n+1}(0)
$$

よって $P_{2n+1}(0) = 0$

5. $(x^2-1)^m$ は (x^2-1) を m 個かけたものである．これを x で n 回微分すると，$m > n$ なので $\dfrac{d}{dx}$ が作用しない (x^2-1) が 1 個以上残る．なので微分の結果は (x^2-1) を 1 個以上因数にもつので $x = \pm 1$ で 0 になる．

6. $P_0(x) = 1$ ，$P_1(x) = x$ ，$P_2(x) = \dfrac{(3x^2-1)}{2}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} P_0(x)P_0(x)dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 = \frac{2}{2\times 0+1} \\
&\int_{-1}^{1} P_1(x)P_1(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{(2\times 1+1)} \\
&\int_{-1}^{1} P_2(x)P_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(9x^4-6x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}(9\times\frac{1}{5}-6\times\frac{1}{3}+1) = \frac{2}{5} = \frac{2}{(2\times 2+1)} \\
&\int_{-1}^{1} P_0(x)P_1(x)dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \\
&\int_{-1}^{1} P_0(x)P_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{(3x^2-1)}{2}dx = \frac{1}{2}(2-2) = 0 \\
&\int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)dx = \int_{-1}^{1} x\frac{(3x^2-1)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3x^3-x) = 0
\end{aligned}
$$

(被積分関数は奇関数なのでこの積分の値は 0 になる)

7. 漸化式 $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$ より

$$
P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{(n+1)}xP_n(x) - \frac{n}{(n+1)}P_{n-1}(x)
$$

これと $P_0(0)=0$，$P_1(0)=0$ を用いて

$$
\begin{aligned}
P_2(0) &= \frac{3}{2}\times 0\times P_1(0)-\frac{1}{2}P_0(0)=-\frac{1}{2}\\
P_4(0) &= \frac{7}{4}\times 0\times P_3(0)-\frac{3}{4}P_2(0)=\frac{3}{8}\\
P_6(0) &= \frac{11}{6}\times 0\times P_5(0)-\frac{5}{6}P_3(0)=-\frac{5}{16}
\end{aligned}
$$

8. $P_{2n}(z)$ は $P_{2n}(z)=\dfrac{1}{2^{2n}(2n)!}\dfrac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^{2n}$ で与えられる．

$$
(z^2-1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k(z^2)^k(-1)^{2n-k}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k z^{2k}(-1)^k
$$

これを z で $2n$ 回微分して $z=0$ と置いたときに，0 にならないのは $k=n$ で z^{2n} に比例する項だけである．

$$
\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}[{}_{2n}C_n z^{2n}(-1)^n]=(-1)^n{}_{2n}C_n(2n)!=(-1)^n\frac{(2n)!(2n)!}{n!n!}
$$

よって

$$
P_{2n}(0)=\frac{1}{2^{2n}(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^{2n}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{2^{2n}(2n)!}(-1)^n\frac{(2n)!(2n)!}{n!n!}=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}
$$

9. 問題にある関係式の両辺を x で微分する

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right]\\
\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n &= -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(-2t)\\
(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n &= -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-1/2}(-2t)=t\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n\\
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n-2x\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^{n+2}\\
&= P_0'(x)+P_1'(x)t+\sum_{n=1}^{\infty}P_{n+1}'(x)t^{n+1}-2xP_0'(x)t\\
&\quad -2x\sum_{n=1}^{\infty}P_n'(x)t^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}'(x)t^{n+1}\\
&= t+\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_{n+1}'(x)-2xP_n(x)+P_{n-1}'(x)\right]t^{n+1}\\
(\text{右辺}) &= t+\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)t^n
\end{aligned}
$$

よって両辺の t^{n+1} の係数を比較し，$n \geq 1$ に対して以下が成立する．

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x)$$

10. 漸化式

$$\begin{aligned}
&(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \ , \\
&P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x)
\end{aligned}$$

を用いて

(a) 漸化式 $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$ の両辺を x で微分

$$\begin{aligned}
&(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP'_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0 \\
&n\left[P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x)\right] - (2n+1)P_n(x) + P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = 0
\end{aligned}$$

問 9 の漸化式を用いて

$$\begin{aligned}
&nP_n(x) - (2n+1)P_n(x) + P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = 0 \\
&P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)
\end{aligned}$$

(b) 問 9 の漸化式から

$$\begin{aligned}
P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) &= P_n(x) \\
P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) - \left[xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)\right] &= P_n(x) \\
\text{((a) の結果より) }\ (n+1)P_n(x) - \left[xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)\right] &= P_n(x) \\
xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) &= nP_n(x)
\end{aligned}$$

(c) (a) の結果と (b) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
\left[P'_{n+1}(x) - xP'_n(x)\right] + \left[xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)\right] &= (n+1)P_n(x) + nP_n(x) \\
P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) &= (2n+1)P_n(x)
\end{aligned}$$

11. $(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$ の両辺を x で 0 から 1 まで積分する．

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (2n+1)P_n(x)\,dx &= \int_0^1 \left[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right]\,dx \\
(2n+1)\int_0^1 P_n(x)\,dx &= \left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right]_0^1 \\
&\qquad \text{(任意の 0 以上の整数 } n \text{ について } P_n(1) = 1 \text{ より)} \\
(2n+1)\int_0^1 P_n(x)\,dx &= -\left[P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)\right] \\
\int_0^1 P_n(x)\,dx &= \frac{1}{(2n+1)}\left[P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)\right]
\end{aligned}$$

12. ルジャンドルの陪微分方程式

$$(1-z^2)\frac{d^2L}{dz^2}-2z\frac{dL}{dz}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)L=0$$

に $L(z)=(1-z^2)^{m/2}f(z)$ を代入する．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}L&=\frac{m}{2}(1-z^2)^{(\frac{m}{2}-1)}(-2z)f+(1-z^2)^{\frac{m}{2}}f'\\&=-mz(1-z^2)^{(\frac{m}{2}-1)}f+(1-z^2)^{\frac{m}{2}}f'\\\frac{d^2}{dz^2}L&=-m(1-z^2)^{(\frac{m}{2}-1)}f+m(m-2)z^2(1-z^2)^{(\frac{m}{2}-2)}f-2mz(1-z^2)^{(\frac{m}{2}-1)}f'+(1-z^2)^{\frac{m}{2}}f''\end{aligned}$$

より，微分方程式の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}&(1-z^2)\Big[-m(1-z^2)^{(\frac{m}{2}-1)}f+m(m-2)z^2(1-z^2)^{(\frac{m}{2}-2)}f-2mz(1-z^2)^{(\frac{m}{2}-1)}f'\\&\qquad\qquad+(1-z^2)^{\frac{m}{2}}f''\Big]\\&-2z\left[-mz(1-z^2)^{(\frac{m}{2}-1)}f+(1-z^2)^{\frac{m}{2}}f'\right]+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)(1-z^2)^{\frac{m}{2}}f\\=&(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\Bigg[-mf+\frac{m(m-2)z^2}{1-z^2}f-2mzf'+(1-z^2)f''\\&\qquad+\frac{2mz^2}{1-z^2}f-2zf'+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)f\Bigg]\\=&(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\left[(1-z^2)f''-2(m+1)zf'+\{n(n+1)-(m^2+m)\}f\right]\\=&(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\left[(1-z^2)f''-2(m+1)zf'+\{n(n+1)-m(m+1)\}f\right]\end{aligned}$$

この右辺が 0 となるので

$$(1-z^2)f''-2(m+1)zf'+\{n(n+1)-m(m+1)\}f=0$$

13. ルジャンドル陪関数の定義として

$$P_n^m(z)=\frac{1}{2^nn!}(1-z^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}(z^2-1)^n$$

を用いて計算する．

$$\begin{aligned}P_0^0(z)&=(z^2-1)^0=1\\P_1^1(z)&=\frac{1}{2}(1-z^2)^{1/2}\frac{d^2}{dz^2}(z^2-1)=\frac{1}{2}(1-z^2)^{1/2}\frac{d}{dz}(2z)=(1-z^2)^{1/2}\\P_1^0(z)&=\frac{1}{2}\frac{d}{dz}(z^2-1)=z\\P_1^{-1}(z)&=\frac{1}{2}(1-z^2)^{-1/2}(z^2-1)=-\frac{1}{2}(1-z^2)^{1/2}\\P_2^2(z)&=\frac{1}{2^22!}(1-z^2)\frac{d^4}{dz^4}(z^2-1)^2=\frac{1}{8}(1-z^2)\frac{d^4}{dz^4}(z^4-2z^2+1)=3(1-z^2)\\P_2^1(z)&=\frac{1}{2^22!}(1-z^2)^{1/2}\frac{d^3}{dz^3}(z^2-1)^2=\frac{1}{8}(1-z^2)^{1/2}\frac{d^3}{dz^3}(z^4-2z^2+1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}(1-z^2)^{1/2}(24z) = 3z(1-z^2)^{1/2} \\
P_2^0(z) &= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dz^2}(z^2-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dz^2}(z^4-2z^2+1) = \frac{1}{8}(12z^2-4) = \frac{(3z^2-1)}{2} \\
P_2^{-1}(z) &= \frac{1}{2^2 2!}(1-z^2)^{-1/2}\frac{d}{dz}(z^2-1)^2 = \frac{1}{8}(1-z^2)^{-1/2}2(z^2-1)(2z) = -\frac{1}{2}z(1-z^2)^{1/2} \\
P_2^{-2}(z) &= \frac{1}{2^2 2!}(1-z^2)^{-1}(z^2-1)^2 = \frac{1}{8}(1-z^2)
\end{aligned}
$$

14. 球面調和関数の定義 $Y_n^m(\theta,\phi) = C_n^m e^{im\phi}P_n^m(\cos\theta)$ より

$$Y_n^m(\pi-\theta,\phi+\pi) = C_n^m e^{im(\phi+\pi)}P_n^m(\cos(\pi-\theta)) = (-1)^m C_n^m e^{im\phi}P_n^m(-\cos\theta)$$

ルジャンドル陪関数の定義 $P_n^m(z) = \dfrac{1}{2^n n!}(1-z^2)^{m/2}\dfrac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}(z^2-1)^n$ から

$$P_n^m(-z) = \frac{1}{2^n n!}(1-(-z)^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{d(-z)^{n+m}}((-z)^2-1)^n = (-1)^{n+m}P_n^m(z)$$

よって

$$Y_n^m(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-1)^m C_n^m e^{im\phi}(-1)^{n+m}P_n^m(\cos\theta) = (-1)^n Y_n^m$$

15. 問 13 の結果を用いて

$$
\begin{aligned}
Y_1^1 &= C_1^1 e^{i\phi}P_1^1(\cos\theta) = C_1^1 e^{i\phi}\sin\theta\ ,\ Y_1^0 = C_1^0 P_1^0(\cos\theta) = C_1^0\cos\theta \\
Y_1^{-1} &= C_1^{-1}e^{-i\phi}P_1^{-1}(\cos\theta) = C_1^{-1}e^{-i\phi}(-\frac{1}{2})\sin\theta = -\frac{C_1^{-1}}{2}e^{-i\phi}\sin\theta
\end{aligned}
$$

規格化条件 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{Y_n^m(\theta,\phi)\}^* Y_{n'}^{m'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \delta_{nn'}\delta_{mm'}$ を用いて係数 C_1^1, C_1^0, C_1^{-1} を求める.

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{Y_1^1(\theta,\phi)\}^* Y_1^1(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = |C_1^1|^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta d\theta d\phi \\
(\cos\theta = z\ \text{として})\ &= |C_1^1|^2 2\pi\int_{-1}^{1}(1-z^2)dz = |C_1^1|^2 4\pi(1-\frac{1}{3}) = |C_1^1|^2\frac{8\pi}{3} \\
1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{Y_1^0(\theta,\phi)\}^* Y_1^0(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = |C_1^0|^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\phi \\
&= |C_1^0|^2 2\pi\int_{-1}^{1}z^2 dz = |C_1^0|^2 4\pi\frac{1}{3} = |C_1^0|^2\frac{4\pi}{3} \\
1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{Y_1^{-1}(\theta,\phi)\}^* Y_1^{-1}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \frac{|C_1^{-1}|^2}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{|C_1^{-1}|^2}{4}2\pi\int_{-1}^{1}(1-z^2)dz = \frac{|C_1^{-1}|^2}{4}\frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

以上から

$$|C_1^1| = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\ ,\quad |C_1^0| = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\ ,\quad |C_1^{-1}| = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

規格化定数 C_n^m を正の実数にとって

$$Y_1^{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{\pm i\phi}\sin\theta\ ,\quad Y_1^{\pm 0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

索引