Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 5–19

К 80-ЛЕТИЮ ГЛЕБА КОНСТАНТИНОВИЧА МИХАЙЛОВА

Исполнилось 80 лет со дня рождения Глеба Константиновича Михайлова – выдающегося ученого в области истории механики, гидродинамики подземных вод, крупного организатора науки.

Г.К. Михайлов родился 24 февраля 1929 г. в Тбилиси в семье инженеров, с 1935 г. проживает в Москве. В эвакуации в Ташкенте кончил досрочно полную среднюю школу, в 14-летнем возрасте в 1943 г. поступил в находившийся тогда в Ташкенте Московский институт инженеров водного хозяйства (Московский гидромелиоративный институт). Вернувшись в Москву, окончил с отличием институт (1948), аспирантуру при этом институте (1951), там же защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1952). В те же годы он окончил пять курсов механико-математического факультета Московского университета (по заочному отделению).

После окончания аспирантуры Г.К. был приглашен Пелагеей Яковлевной Кочиной, которая была одним из официальных оппонентов по его кандидатской диссертации, в Институт механики Академии наук СССР. С тех пор деятельность Г.К. непрерывно связана с Академией наук. В 1951–1965 гг. он работал научным сотрудником в Институте механики АН, затем в Институте проблем механики АН (с 1968 г. по совместительству). Наряду с плодотворной научной работой, Г.К. принимал активное участие в общественной жизни Института механики АН, неоднократно избирался членом профкома института, в течение свыше шести лет был его председателем.

В 1968–1973 гг. Г.К. заведовал кафедрой высшей математики Всесоюзного заочного инженерно-строительного института.

В 1973 г. главный редактор Реферативного журнала "Механика" Леонид Иванович Седов пригласил Глеба Константиновича на основную работу в ВИНИТИ, где он занимает с 1992 г. должность заведующего отделом механики. В издании РЖ "Механика" Г.К. участвует с 1953 г., являясь с 1961 г. членом его редколлегии, в 1970–1999 гг. – заместителем главного редактора, с 2000 г. – главным редактором. По случаю 50-летия ВИНИТИ он награжден памятным знаком "За заслуги".

Г.К. Михайлов ведет исключительно большую научно-организационную работу. В 1956 г. при Академии наук был создан Национальный комитет СССР по теоретической и прикладной механике (ныне Российский Национальный комитет), который возглавил Николай Иванович Мусхелишвили. Г.К. вошел в состав первых его 48 членов и был тогда же избран ученым секретарем комитета; с тех пор неизменно переизбирается в этой должности вот уже свыше 50 лет. В рамках деятельности этого комитета Г.К. принимал, в частности, самое непосредственное участие в организации и проведении Всесоюзных и затем Всероссийских съездов по теоретической и прикладной механике (в 1960, 1964 и 1968 гг. в Москве, в 1976 – в Киеве, в 1981 – в Алма-Ате, в 1986 – в Ташкенте и в 1991 – снова в Москве, в 2001 – в Перми и в 2006 – в Нижнем Новгороде).

Поступила 12.12.2008

В 1955 г. научным сотрудникам Академии наук была разрешена, после практически пятнадцатилетнего перерыва, переписка с иностранными учеными. Глеб Константинович тотчас воспользовался этим обстоятельством и первым установил связи с находящимися в эмиграции выдающимися русскими учеными Д.П. Рябушинским и С.П.Тимошенко, с которыми он впоследствии встречался.

После вхождения в 1956 г. ученых-механиков нашей страны в Международный союз теоретической и прикладной механики (IUTAM), Г.К. принимает участие в деятельности этого союза, в 1974–1982 гг. состоял членом Комитета конгрессов ИЮТАМа, с 1976 г. состоит членом Генеральной ассамблеи ИЮТАМа. Г.К. принимал большое участие в организации и проведении на территории СССР международных симпозиумов ИЮТАМа: по теории нелинейных колебаний (Киев, 1961), по приложениям теории функций в механике сплошной среды (Тбилиси, 1963), по неустановившимся течениям воды при больших скоростях (Ленинград, 1971) и по теории оболочек (Тбилиси, 1978), в 1972 г. готовил – в качестве генерального секретаря – проходивший в Москве XIII Международный конгресс по теоретической и прикладной механике.

В результате многогранной научно-организационной деятельности Глебу Константиновичу посчастливилось лично общаться практически со всеми крупнейшими учеными-механиками России второй половины XX века, а также со многими выдающимися зарубежными учеными – Б.Будянским, А.Буземаном, Я.Ден-Гартогом, П.Жерменом, В.Т.Койтером, сэром Джеймсом Лайтхиллом, М.Руа, И.Н. Снеддоном, Н.Хоффом, Г.Шлихтингом и др.

Г.К. Михайлов является автором более 160 работ, опубликованных в авторитетных отечественных и зарубежных изданиях. Первоначальные исследования Г.К. посвящены подземной гидродинамике – вопросам фильтрации воды в земляных плотинах и движению грунтовых вод, полученные результаты положили начало циклу исследований в этой области. С середины 50-х годов научные интересы Г.К. сместились в область истории механики. В начале 60-х годов Г.К. впервые привел в порядок, описал и частично издал латинские рукописи Леонарда Эйлера, хранившиеся в течение полутора веков в неразобранном виде в Архиве Академии наук СССР. К этой работе его привлек академик В.И. Смирнов.

В 70-е годы в сферу интересов Г.К. вошла история механики систем переменной массы, Г.К. обнаружил относящиеся к началу и середине XIX века зарубежные публикации, перевернувшие существовавшие до того представления о развитии этого раздела механики. Признание приоритетов зарубежной науки не поощрялось официальной идеологией. Важнейшей для Г.К. оказалась поддержка его исследований Аркадием Александровичем Космодемьянским, крупнейшим специалистом в области механики переменной массы, и великим ракетостроителем, генеральным конструктором Валентином Петровичем Глушко.

Ученая степень доктора физико-математических наук была присвоена Глебу Константиновичу на основе успешной защиты диссертации “Развитие основ динамики систем переменного состава и теории реактивного движения” в Совете математико-механического факультета Ленинградского университета в 1980/81 г.

Важнейшей заслугой Г.К. Михайлова в области истории науки является исследование творчества Леонарда Эйлера и Даниила Бернулли. В течение четверти века Г.К. регулярно работает каждый год в Базеле, принимая участие в подготовке очередных томов давно уже издающихся “Полного собрания трудов” Л.Эйлера и

"Собрания сочинений математиков и физиков семьи Бернулли". Эта трудоемкая работа связана с тщательным анализом латинских и французских сочинений и писем обоих великих ученых и всесторонним комментированием их содержания (на немецком или английском языке).

Отмечая "выдающийся вклад в развитие отечественной истории механики и исследования творчества Леонарда Эйлера", Пермский университет наградил Г.К. медалью имени Л.Эйлера "За заслуги".

В 1984 г. Глеб Константинович Михайлов был избран членом-корреспондентом Международной Академии истории науки по представлению американских и швейцарских коллег, а в 2005 г. стал действительным членом этой Академии.

Важной составляющей научной деятельности Г.К. Михайлова было и остается научное редактирование и рецензирование. С 1952 г. Г.К. привлекался в качестве научного редактора Гостехиздатом (Физматгизом), Издательством АН СССР. Позже занимался редакционно-издательской деятельностью и в крупных зарубежных издательствах (Springer в ФРГ, North-Holland в Нидерландах, Hemisphere в США). В 1968 – 1972 гг. участвовал – в качестве редактора и соавтора – в издании трехтомной "Механики в СССР за 50 лет". С 1982 г. является членом Международного редакционного совета "Полного собрания трудов" Леонарда Эйлера (Швейцария), входит в состав редколлегии ряда журналов и сборников, в том числе "Исследования по истории физики и механики" (с 1985 г.), в 1988-1997 гг. состоял членом редакционного совета ведущего международного журнала по истории точных наук "Archive for History of Exact Sciences" (Springer).

Более 50 редакторских работ и опубликованных рецензий следует добавить к основному списку его публикаций: редактирование трудов конференций, симпозиумов, съездов, юбилейных сборников статей, рецензирование книг и статей отечественных и зарубежных авторов. Надо отметить, что некоторые рецензии Г.К. носят остро критический характер.

В последние десятилетия, в качестве хобби, Глеб Константинович увлекся генеалогией, избран членом Русского генеалогического общества (С.Петербург) и Историко-родословного общества (Москва). Этой тематике посвящены его обширные публикации по родословию потомков Эйлера и князей Оболенских, с председателем Семейного союза которых князем С.С.Оболенским Г.К. близко знаком. Генеалогические изыскания Г.К. связали его и с судьбой Воронцовского дворца в Петербурге, в котором до 1917 г. располагался знаменитый Пажеский корпус – высшее военно-учебное заведение России. Вместе с известным меценатом бароном Эдуардом фон Фальц-Фейном и академиком Д.С.Лихачевым, Г.К. входил в состав международного Попечительского совета, озабоченного судьбой дворца, который возглавлял глава Объединения рода Романовых князь Николай Романович Романов.

Громадная широта интересов, всесторонняя эрудиция, знание иностранных языков (английского, немецкого, французского, а также латыни), открытость и доброжелательность позволили Глебу Константиновичу поддерживать многолетние тесные научные контакты с ведущими зарубежными специалистами. В частности, дружеские отношения связывали Г.К. на протяжении десятков лет с крупнейшим историком механики профессором Клиффордом Трусделлом (США).

По линии научно-организационной, научной и педагогической деятельности Г.К. систематически выезжал с 1957 г. за границу, посетив Австралию, Австрию, Англию, Бельгию, Германию, Данию, Израиль, Индию, Испанию, Италию, Канаду, Лихтенштейн, Нидерланды, Польшу, Румынию, США, Францию, Чехословакию, Швейцарию и Японию. Г.К. принимал за рубежом участие в ряде международных конгрессов по теоретической и прикладной механике, по истории науки, в многочисленных научных симпозиумах и заседаниях ИЮТАМа; в 1970 г. – в качестве "визитинг-профессора" – читал лекции по гидродинамике подземных вод во Флиндерсовском университете (Австралия); в 1990 г. – по приглашению сэра Джеймса Лайтхилла – был гостем-исследователем Лондонского Королевского общества.

У Г.К. Михайлова три сына. Все они окончили Московский университет (по математике, биологии и механике), теперь же старший из них – Андрей – священник Русской Православной церкви, второй – Кирилл – ученый-арахнолог (крупный специалист по паукам), а третий – Кузьма – менеджер.

Глеб Константинович Михайлов полон сил и энергии, обогащен мудростью прожитых лет, "мои года, мое богатство", является выдающимся авторитетом среди механиков.

По случаю своего 80-летия Г.К. получил множество сердечных поздравлений со всех концов России, от Петербурга и Краснодара до Якутска и Владивостока, из ближнего зарубежья – Армении, Белоруссии, Грузии, Узбекистана, Украины и из дальнего зарубежья – Бельгии, США и Швейцарии.

Редколлегия и редакция журнала присоединяются ко всем этим поздравлениям и от души желают Глебу Константиновичу крепкого здоровья, счастья, многих успехов на благо нашей науки.

Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, А. А. Маркин,
Н. М. Матченко, Ю. В. Немировский, Ю. Н. Радаев.

80th ANNIVERSARY OF GLEB KONSTANTINOVICH MIKHAILOV

Gleb Mikhailov, an outstanding scientist working in the history of mechanics, hydrodynamics of ground water and a prominent organizer of scientific research, is 80 years old.

Gleb Mikhailov was born on the 24^{th} of February 1929 in Tbilisi to a family of engineers. Since 1935 he has lived in Moscow. Being evacuated to Tashkent during the Second World War, he entered Moscow Water Transport Engineering Institute in 1943 at the age of 14 and graduated with honors in 1948. He finished the School of graduate studies at that institute in 1951, and a year later got a degree of candidate of technical sciences (DSc). A the same time he completed five years of studies at the Mechanics and Mathematics Department of Moscow State University by correspondence.

After his graduate studies he was invited by Pelageya Kochina, his former examiner at the final doctorate examination, to the Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR, and his subsequent career was inalienable from the Academy of Sciences. He worked as researcher at the Institute of Mechanics from 1951 to 1965, then at the Institute of Mechanics Problems (part-time since 1968). Besides prolific scientific work he was actively involved in the social life of the Institute of Mechanics, was among the Institute's trade union leaders and headed the trade union for over six years.

From 1968 to 1973 Gleb Mikhailov was head of Department of Advanced Mathematics of the All-Union Extramural Construction Engineering Institute.

In 1973 Leonid Sedov, editor-in-chief of the of the *Mekhanika* abstracts journal, invited Mikhailov to join VINITI, The All-Union Institute for Scientific and Technical Information where he has been head of the mechanics department since 1992. Mikhailov has been participating in the publication since 1953. He was a member of the editorial board since 1961, deputy editor-in-chief from 1970 to 1999, and editor-in-chief since 2000. He was decorated with a distinguishing sign for merit on the occasion of the 50^{th} anniversary of VINITI.

Gleb Mikhailov makes an exceptionally big contribution to organizing scientific work. In 1956 the Academy of Sciences set up the National Committee of the USSR on Theoretical and Applied Mechanics, now the Russian National Committee headed by Nikolai Muskhelishvili. Gleb Mikhailov was among its first 48 members and was elected Learned Secretary from the onset. He has been re-elected for the position for over 50 years. As part of the Committee's activity, Mihailov took part in organizing Al—Union and later Russian national congresses on theoretical and applied mechanics (1960, 1964 and 1968 in Moscow, 1976 in Kiev, 1981 in Alma-Ata, 1986 in Tashkent, back in Moscow again in 1991, 2001 in Perm and 2006 in Nizhny Novgorod.

In 1955 after a nearly 15-year ban researchers of the Academy of Sciences were granted permission to correspond with foreign scientists. Gleb Mikhailov immediately used the opportunity and established contacts with outstanding Russian émigré scientists Ryabushinsky and Timoshenko whom he subsequently met in person.

After mechanics scientists of our country joined the International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM) in 1956, Mikhailov get involved in the activities of the Union. In 1974-1982 he is a member of the IUTAM Congress Committee, and a member of the IUTAM General assembly since 1976. Mikhailov assisted in organizing and conducting

Поступила 12.12.2008

IUTAM International symposia in the USSR: a symposium on non-linear vibrations (Kiev, 1961), on application of theory of functions in continuum mechanics (Tbilisi, 1964), on high speed unstable water currents (Leningrad 1971), and on theory of shells. In 1972 he was preparing the XIII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics in Moscow as its secretary general.

As the result of the versatile and organizational activity Gleb Miklhailov was lucky to meet in person practically all notorious mechanics scientists of Russia of the second half of the 20^{th} century and also eminent foreign scientists such as B. Budyansky, A. Buzeman, J.P. den Hartog, P. Jermain, V.T. Keuter, James Lighthill, M. Roy, I.N. Sneddon, H. Hoff, G. Schlichting et al.

Gleb Mikhailov is the author of over 160 works published by reputable national and foreign publishers. His initial papers dealt with ground water hydrodynamics: the issues of water filtration in earth dams and the movement of ground water launched a series of research in that area. In the mid 1950s his academic interests shifted towards the history of mechanics. In early 1960s Gleb Mikhailov has systemized, described and partially published the Latin manuscripts by Leonard Euler that had been kept in the archives of the Academy pf Sciences of the USSR for over a century and a half. He was engaged in this work by academician V. Smirnov.

In the 1970 Mikhailov interests encompassed the history of mechanics of variable mass systems. He discovered foreign publications dating back to early and middle 19^{th} century that radically changed the existing opinions about the development of that branch of mechanics. The recognition of foreign science priorities was not encouraged by the official ideology of the time. The crucial support of Mikhailov's research came from Arkady Kosmodemyansky, a famous expert in variable mass mechanics, and a great missile constructor Valentin Glushko.

The doctorate degree in Physics and Mathematics was conferred on Gleb Mikhailov for his thesis "The Development of the Foundations of Variable Content System Dynamics and the Theory of Reaction Motion" defended at the Department of Mathematics and Physics of Leningrad University in 1980-81.

Mikhailov's greatest contribution to history of science id the study of Leonard Euler and Daniil Bernulli's heritage. For a quarter of a century Gleb Mikhailov regularly visited Basel preparing forthcoming volumes of the Complete Works by Leonard Euler and The Collection of Works by the Physicists and Mathematicians of the Bernulli Family. This time-consuming work is connected with a thorough analysis of papers and letters of the two great scientists in Latin and French and making comprehensive commentaries in German or English.

Perm university distinguished Mikhailov's "outstanding contribution to the development of history of mechanics and the study of Leonard Euler" and awarded him the L. Euler Medal.

In 1984 Gleb Mikhailov was elected corresponding member of the International Academy of the History of Science at the proposal by his American and Swiss colleagues, and in 2005 became its full member.

An important component of Mikhailov's academic career is editing and reviewing. He was science editor since 1952 at *Gostekhizdat* (*Fizmatgiz*), an Academy of Sciences publishing house. Later he was involved in publishing in large foreign publishers such as Springer in Germany, North-Holland in the Netherlands, Hemisphere in the USA. In 1968-72 Mikhailov was a co-author and editor of the three-volume "50 Years of Mechanics in the USSR". Since

1982 he has been a member of the International editorial council of the Collected Works by Leonard Euler (Switzerland). Mikhailov is also a member of editorial boards of a number journals and collections including "Studies of History of Physics and Mechanics" (since 1985). In 1988-97 he was in the editorial board of the world's leading international journal Archive for History of Exact Sciences (*Springer Verlag*).

Over fifty editorial works and published reviews should be added to the main list of his publications including editing proceedings of conferences, symposia, conventions, anniversary collections of articles, and reviews of Russian and foreign authors' papers. Some of his reviews are sharply critical.

In the past decades Gleb Mikhailov made genealogy his hobby and has become a member of the Russian Genealogical Society in St Petersburg and Historical and Lineage Society in Moscow. He has a lot of publications on the ancestry of Euler's and Princes Obolensky's descendents. His genealogical studies have connected him to the history of the Vorontsov Palace in St Petersburg which until 1917 hosted the famous Page Corps, a military higher education in Russia. Mikhailov was a member of the guardian council alongside with academician D. Likhachev and the famous beneficiary Baron Eduard von Falz-Fein who were concerned with the future of the palace. The board was chaired by Prince Nikolai Romanov, head of the Romanov's Kin association.

An immense scope of interests, encyclical erudition, knowledge of languages (English, German, French and Latin), openness and candor allowed Gleb Mikhailov to support long-time contacts with the leading experts aboard. Decades of friendly relations with professor Clifford Trusdell, USA, just one example.

As part of his administration and lecturing activity Gleb Mikhailov has traveled abroad since 1957 visiting Australia, Austria, Britain, Belgium, Germany, Denmark, Israel, India, Spain, Italy, Canada, Lichtenstein, the Netherlands, Poland, Rumania, the USA, France, Czechoslovakia, Switzerland, and Japan. Gleb Mikhailov took part in a number of international conventions on theoretical applied mechanics, history of science, in numerous scientific symposia and meeting of the IUTAM. IN the 1970s as a visiting professor he was lecturing in Flinders University in Australia. In 1990 at the invitation of Sir James Lighthill he was a guest researcher at the Royal Society of London.

Gleb Mikhailov has three sons, they are all Moscow university graduates in mathematics, biology and mechanics. The eldest son Andrey is now a Russian Orthodox priest, the second son is an arachnologist, an expert in spiders, the youngest Kuzma is a manager.

Gleb Mikhailov is enthusiastic and vibrant, with the wisdom of the past years he is a great authority among mechanics scientists.

Gleb Mikhailov's 80^{th} birthday brought him an abundance of congratulations from all over Russia, from St Petersburg and Krasnodar to Yakutsk and Vladivostok; from neighboring countries of Armenia, Belarus, Georgia, Uzbekistan, Ukraine as well as from far lands such as Belgium, the USA and Switzerland.

The editorial board of the journal are joining the chorus of congratulations and wish Gleb Konstantinovich a lot of good luck, strong health and many more achievements for the sake of our science.

D. D. Ivlev, D. M. Klimov, Y. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov, A. A. Markin,
N. M. Matchenko, Yu. V. Nemirovsky, Yu. N. Radayev.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ Г. К. МИХАЙЛОВА [1]

1951

1. К задаче о фильтрации в анизотропных земляных плотинах трапецоидального профиля на горизонтальном водоупоре // Доклады АН СССР, 1951, т. 80, № 4, с. 553–556.

2. Теоретическое определение градиентов в потоке грунтовых вод близ дренажа // Гидротехника и мелиорация, 1951, № 8, с. 72–75.

1952

3. К геометрии фиктивного грунта // Прикладная математика и механика, 1952, т. 16, № 4, с. 511–512.

4. О фильтрации в трапецоидальных плотинах на горизонтальном водоупоре // Гидротехника и мелиорация, 1952, № 1, с. 33–42

5. О вычислении критических глубин в трапецоидальных каналах // Гидротехника и мелиорация, 1952, № 8, с. 19–22

6 Фильтрация в трапецоидальной перемычке при отсутствии испарения // Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. Москва: Гостехиздат, 1952, с. 349–357 (2-е изд., перераб. и доп. Физматгиз, 1977, с. 284–289).

1953

7. О фильтрации в трапецоидальных плотинах с вертикальным верховым откосом // Прикладная математика и механика, 1953, т. 17, № 2, с. 189–199.

8. Применение модели предельно анизотропных грунтов для оценки решений некоторых краевых задач о движении потока грунтовых вод по водоупору // Инженерный сборник, 1953, т. 15, с. 159–168.

1954

9. Упрощение способа расчета фильтрации в однородно-анизотропном грунте // Инженерный сборник, 1954, т. 19, с. 159–160.

1955

10. Леонард Эйлер // Известия АН СССР, Отделение техн. наук, 1955, № 1, с. 3–26.

1956

11. Строгое решение задачи об истечении грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с более тяжелой жидкостью // Доклады АН СССР, 1956, т. 110, № 6, с. 945–948.

12. О максимальных градиентах близ дренажа земляных плотин // Известия АН СССР, Отделение техн. наук, 1956, № 2, с. 109–112.

1957

13. Étude hydrodynamique de l'écoulement potentiel permanent plan d'un liquide à surface libre à travers une digue homogène rectangulaire en tenant compte de la capillarité du milieu // Actes, IX^{e} Congr. intern. méc. appl. (Bruxelles, 1956), t.1, 1957, c. 127–135.

14. О фильтрации в прямоугольной перемычке при весьма большой высоте капиллярного поднятия // Доклады АН СССР, 1957, т. 114, № 4, с. 725–728.

---

[1] Сюда, как правило, не включены аннотации докладов, статьи из разделов "хроника", рецензии, газетные статьи и т.п.

15. К переезду Леонарда Эйлера в Петербург (по материалам ранней переписки Л.Эйлера с Д.Бернулли и другим источникам) // Известия АН СССР, Отделение техн. наук, 1957, № 3, с. 10–37.

16. Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР (Общее описание и заметки по механике) // Историко-математические исследования, 1957, вып.10, с. 67–94.

1958

17. On Leonhard Euler's Unpublished Notes and Manuscripts on Mechanics // Proc. 3rd Congr. Theor. and Appl. Mech. (Bangalore, 1957), с. 19–24.

18. On Two Approximate Methods in the Theory of Non-Uniform Ground-Water Flow Along a Plane Impermeable Base // Там же, с. 175–188.

19. Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР // Леонард Эйлер. М.: АН СССР, 1958, с. 47–79 (соавтор В.И. Смирнов).

1959

20. Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler // Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers. Berlin: Akademie-Verlag, 1959, с. 256–280.

21. К классификации задач теории установившегося движения грунтовых вод в вертикальной плоскости // Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1959, t. 5(9), № 1-2, с. 125–134.

22. Программа по истории механики. Москва: МГУ, 1959, 12 с.; также в сб.: Программы по истории физико-математических наук. Москва: МГУ, 1959, с. 20–27.

1960

23. К истории применения закона живых сил к истечению воды из сосудов // Вопросы истории естествознания и техники, 1960, вып.10, с. 56–59.

24. The History of Applying the Law of Kinetic Energy to the Flow of Water from Vessels (D.Bernoulli and L.Euler) // Actes IX^{e} Congr. intern. hist. sci. (Barcelona–Madrid, 1959), vol.2: Communicaciones libres. Barcelona–Paris, с. 221.

1961

25. К вопросу о влиянии капиллярности на приток жидкости в пористой среде к прямолинейному откосу пористого массива // Проблемы механики сплошной среды. Москва: АН СССР, 1961, с. 250–255; на англ. яз.: Problems of Continuum Mechanics. Philadelphia, PA: SIAM, 1961, с. 275–281.

1962

26. Научные труды [Л.Эйлера] / Описание // Рукописные материалы Л.Эйлера в Архиве Академии наук СССР, т. 1: Научное описание (Тр. Архива АН СССР, вып.17). Москва–Ленинград: АН СССР, 1962, с. 27–119.

27. On Some Problems of Hydrodynamics of Porous Media in an Electrical Field // Applied Mechanics / Proc. 10th Intern. Congr. Appl. Mech. (Stresa, 1960). Amsterdam–New York: Elsevier, 1962, с. 193–194.

28. Критические замечания о книге Н.Д. Моисеева “Очерки развития механики” (М.: МГУ, 1961) // Известия АН СССР, Отделение техн. наук, Мех. и машиностр., 1962, № 2, с. 165–175.

29. По поводу исследований Э.П. Коваленко о неустановившемся движении воды в открытых руслах // Инж.-физ. ж., 1962, т. 5, № 8, с. 130–132 = Известия АН СССР, Отделение техн. наук, Мех. и машиностр., 1962, № 4, с. 183–184 (соавторы В.А.Архангельский, Н.А.Картвелишвили).

1964

30. Великий корифей науки (к 400-летию со дня рождения Галилео Галилея) // Пресс-бюро “Правды”: Бюллетень для городских газет, 7 февраля 1964, № 9.

1965

31. Основные представления о движении грунтовых вод. Гидравлика грунтовых вод. Гидродинамика грунтовых вод // Богомолов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика. Москва: Стройиздат, 1965, с. 440–486 (2-е изд., перераб. и доп., 1972, с. 443–487).

32. Восьмой год космической эры // Пресс-бюро “Правды”: Бюллетень для городских газет, 2 апреля 1965, № 15.

1967

33. Механика // Союз Советских Социалистических Республик, 1917–1967, Энциклопедический справочник. Москва: Сов. Энциклопедия, 1967, с. 299–301.

34. О неединственности решения некоторых задач теории фильтрации при наличии электроосмоса // Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, 1967, № 5, с. 180.

1968

35. On Some Two-Dimensional Problems of Steady Ground-Water Flow to Point Drains in a Given External Field // J. Math. and Phys. Sci. (India), 1968, vol.2, № 2, c. 174–182.

1969

36. III Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике (Москва, 25 января – 1 февраля 1968 г.) // Успехи матем. наук, 1969, т. 24, вып.1(145), с. 201–217 (соавторы И.И.Ворович, А.Д.Мышкис, В.И.Юдович).

1970

37. Движение жидкостей и газов в пористых средах // Механика в СССР за 50 лет, т. 2: Механика жидкости и газа. Москва: Физматлит, 1970, с. 585–648 (соавтор В.Н.Николаевский).

1972

38. Механика сплошной среды (XIX век) // История механики с конца XVIII века до середины XX века. Москва: Наука, 1972, с. 46–85.

39. Гидроаэродинамика (XX век) // Там же, с. 281–307.

1974

40. К истории динамики систем переменного состава и теории реактивного движения (до начала второй мировой войны). Москва, Институт проблем механики АН СССР, 1974, препр. № 49, 106 с.

1975

41. К истории динамики систем переменного состава // Известия АН СССР, Механика твердого тела, 1975, № 5, с. 41–51; на англ. яз.: Mechanics of Solids (MTT), 1976, vol.10 (1975), № 5, c. 32–40.

42. Первые сто лет развития небесной механики тел переменного состава // Тр. Моск. ин-та хим. машиностр., 1975, № 65, с. 122–133.

1976

43. Ранние этапы развития теории реактивного движения и динамики ракет // Космические исследования, 1976, т. 14, № 6, с. 896–908; на англ. яз.: Cosmic Research, 1977, vol.14 (1976), № 6, с. 764–774.

1978

44. Современное состояние и задачи истории механики // Современные проблемы теоретической и прикладной механики / Труды IV Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (Киев, 1976). Киев: Наукова Думка, 1978, с. 168–185; на англ. яз. см. 1981.

1981

45. К истории изучения эффекта Робинса–Магнуса // Исследования по истории механики. Москва, Наука, 1981, с. 208–232.

46. History of Mechanics: Present State and Problems // Advances in Theoretical and Applied Mechanics. Moscow: Mir Publ., 1981, с. 148–165.

1983

47. Вклад последних двадцати пяти лет в развитие истории механики // Исследования по истории механики. Москва: Наука, 1983, с. 6–30 (соавтор: А.Т.Григорьян).

48. Leonhard Euler und die Entwicklung der theoretischen Hydraulik im zweiten Viertel des 18. Jahrhunderts // Leonhard Euler, 1707–1783 / Beiträge zu Leben und Werk. Basel: Birkhäuser, 1983, с. 229–241.

49. Д.П.Рябушинский – основатель первого аэродинамического института в Кучине (под Москвой). Москва: ВИНИТИ, 1983 (Деп.6523-83), 15 с.

1984

50. The Dynamics of Mechanical Systems with Variable Masses as Developed at Cambridge during the Second Half of the Nineteenth Century // Bull. Inst. Math. and Its Appl., 1984, vol. 20, № 1-2, с. 13–20.

51. Leonhard Euler und das Entstehen der klassischen Mechanik // Z. angew. Math. und Mech., 1984, vol. 64, № 2, с. 73–82 (соавторы G.Schmidt, L.I.Sedov).

52. Валентин Валентинович Ведерников (к 80-летию со дня рождения) // Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, 1984, № 6, с. 181–183 (соавторы П.Я.Кочина, О.Ф.Васильев).

53. К исповеди старого профессора [рецензия на книгу: А.А. Космодемьянский. Очерки по истории механики. Москва, 1982] // Успехи механики (Варшава), 1984, т. 7, № 2, с. 117–125.

1985

54. Становление динамики систем с переменными массами в исследованиях по небесной механике // Исследования по истории физики и механики. Москва: Наука, 1985, с. 233–254.

55. К истории задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях Гесса и Ковалевской и их геометрического моделирования (по поводу двух неопубликованных писем Н.Е.Жуковского Ф.Клейну) // Историко-математические исследования, 1985, вып. 28, с. 223–246 (соавтор С.Я.Степанов).

56. Леонард Эйлер и его вклад в развитие рациональной механики // Успехи механики (Варшава), 1985, т. 8, № 1, с. 3–58.

57. Euler und die Entwicklung der Mechanik // Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Mathematik, Naturwissenschaften, Technik, 1985, № 1, c. 64–82.

1986

58. Георг Букуа и начала динамики систем с переменными массами // Исследования по истории физики и механики. Москва: Наука, 1986, с. 191–238.

1987

59. "Математические начала натуральной философии" Ньютона (к 300-летию первой публикации) // Механика и научно-технический прогресс, т. 1: Общая и прикладная механика. Москва: Наука, 1987, с. 274–290; на англ. яз. см. 1990.

60. Динамика тел переменной массы (переменного состава) в трудах И.В.Мещерского // История механики в России. Киев: Наукова думка, 1987, с. 291–295.

1988

61. Основы механики и гидродинамики в трудах Л.Эйлера // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Москва: Наука, 1988, с. 166–179 (соавтор Л.И.Седов).

62. Родословная роспись потомков Леонарда Эйлера // Там же, с. 383–467 (соавторы Э.Н.Амбургер, И.Р.Геккер).

63. Ранние представления о природе реакции вытекающей струи и движения ракет // Вопросы истории естествознания и техники, 1988, № 1, с. 108–116.

64. К трехсотлетию "Математических начал натуральной философии" Ньютона // Успехи механики (Варшава), 1988, т. 11, № 3, с. 127–175 (соавтор: В.С.Кирсанов).

1989

65. Академик В.И. Вернадский и начало работ по истории науки в Академии наук СССР // Очерки по истории естествознания и техники (Киев), 1989, № 36, с. 37–48.

1990

66. К истории задачи о движении свободно брошенных тел на вращающейся Земле, I // Исследования по истории физики и механики. Москва: Наука, 1990, с. 93–121 (соавтор С.Р.Филонович).

67. Newton's "Principia" (to the tercentenary of the first edition) // General and Applied Mechanics, vol.1. New York e. a.: Hemisphere Publ., 1990, c. 274–290.

1991

68. Лидер советских механиков [к столетию со дня рождения академика Н.И.Мусхелишвили] // Вестник АН СССР, 1991, № 5, с. 77–81.

69. Основатель Аэродинамического института [Д.П.Рябушинский] // Там же, № 11, с.81–91; также в сб.: Российская наука в лицах, кн. 1. М.: Academia, 2003, с. 380–391.

1993

70. On N.I. Muskhelishvili's Place in the World of Science and Mathematics // Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis / Proc. Intern. Symposium Dedicated to the Centenary of Acad. N.Muskhelishvili (Tbilisi, 1991). Tbilisi: Metsniereba, 1993, c. 67–74 (соавтор J.R.M.Radok).

1994

71. Die Nachkommen Leonhard Eulers in den ersten sechs Generationen // Basler Z. Geschichte und Altertumskunde, 1994, Bd.94, с. 163–238 (соавторы E.Amburger, I.Hecker).

72. Hydrodynamics and Hydraulics // Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, vol.2. London–New York: Routledge, 1994, с. 1006–1022 (Repr.: Johns Hopkins Univ. Press, 2003).

73. [Биографические заметки:] Абрамович Г.Н., Александров А.Я., Блехман И.И., Вольмир А.С., Ворович И.И., Гольденвейзер А.Л., Гуревич М.И., Диментберг Ф.М., Идельсон Н.И // Российская Еврейская Энциклопедия, т. 1 (изд.2, испр. и доп.): Биографии / А–К. Москва: РАЕН–Эпос, 1994.

1995

74. 1594: Die Familie Euler wird in Basel eingebürgert // Basler Stadtbuch 1994. Basel: Ch. Merian, 1995, с. 21–24.

75. Der Zwist um die zweite Ehe Leonhard Eulers // Fellmann E. Leonhard Euler. Reinbek: Rowohlt, 1995, с. 112–116; на англ. яз.: The Discord About Leonhard Euler's Second Marriage (Basel: Birkhäuser, 2007, с. 124–129).

76. [Биографические заметки:] Кибель И.А., Лейбензон Л.С., Лойцянский Л.Г., Лурье А.И., Пановко Я.Г., Рабинович И.М., Ройтенберг Я.Н // Российская Еврейская Энциклопедия, т. 2: Биографии / К–Р. Москва: РАЕН–Эпос, 1995.

1996

77. Судьба профессора И.А.Рубинского – одного из создателей ЦАГИ // Вестник РАН, 1996, т. 66, № 2, с. 158–164 (соавтор В.Н.Бычков).

78. Профессор Александр Петрович Фан-дер-Флит (1870–1941) // Персонажи Российской истории (история и современность) / Тезисы III Всероссийской заочной научной конференции. Санкт-Петербург: Нестор, 1996, с. 146–151.

79. Князья Оболенские // Дворянские роды Российской Империи, т. 3: Князья. Москва: Ликоминвест, 1996, с. 240–255.

80. Early Studies on the Outflow of Water from Vessels and Daniel Bernoulli's "Exercitationes quaedam mathematicae" // Bernoulli D. Werke, Bd. 1. Basel e.a.: Birkhäuser, 1996, с. 199–255.

1997

81. Профессор Дмитрий Павлович Рузский / Биографический очерк // Научно-техн. ведомости СПб. Гос. техн. ун-та (СПбГТУ), 1997, № 3, с. 100–106.

82. [Биографические заметки:] Рубинский И.А. (соавтор В.Н.Бычков), Фан-дер-Флит А.П // Русское зарубежье / Золотая книга эмиграции / Первая треть XX века / Энцикл. биогр. словарь. Москва: РОССПЭН, 1997, с. 550–552, 645–646.

83. [Биографические заметки:] Франкль Ф.И., Хаскинд М.Д., Чарный И.А., Шапиро Г.С., Шерман Д.И // Российская Еврейская Энциклопедия, т. 3: Биографии / С–Я. Москва: РАЕН–Эпос, 1997.

84. Династические игры [Кому на Руси нужен принц Георг Гогенцоллерн?]// Радонеж (Москва), май 1997, № 9(53), с. 8–9,11.

1998

85. Зарождение и развитие механики в России и в Москве // Развитие инженерного дела в Москве. Исторические очерки. М.: Российская Инженерная академия, 1998, с. 378–387.

86. Самозванство // Дворянский вестник (Москва), июль 1998, № 7(50), с. 6; также: Союз дворян (Париж), № 68, с. 7–10.

87. [Вводные статьи, комментарии и общая редакция] // L.Euleri Opera omnia, ser. IVA, vol.2: Briefwechsel mit Johann (I) Bernoulli und Niklaus (I) Bernoulli. Basel: Birkhäuser, 1998, x+747 с. (соавтор E.A.Fellmann).

1999

88. К 275-летию Российской Академии наук // Прикладная математика и механика, 1999, т. 63, № 4, с. 531–537; на англ. яз.: J. Appl. Math. and Mech., 1999, 63:4, 511–516.

89. Становление гидравлики и гидродинамики в трудах петербургских академиков (XVIII век) // Известия РАН, Механика жидкости и газа, 1999, № 6, с. 7–26; на англ. яз.: Fluid Dynamics, 1999, vol.34, № 6, 787–800.

90. Механика в Российской академии наук // Российская академия наук / 275 лет служения России. М.: Янус, 1999, с. 394–440.

2000

91. Клиффорд Трусделл и современная история механики // Вопросы истории естествознания и техники, 2000, № 3, с. 59–66 (соавтор А.А.Вакуленко); также в кн.: Трусделл К. Очерки по истории механики.−−М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.

92. Софья Васильевна Ковалевская (к 150-летию со дня рождения) // Прикладная математика и механика, 2000, т. 64, № 1, с. 3–7; на англ. яз.: J. Appl. Math. and Mech., 2000, 64:1, с. 1–4 (соавтор И.Г.Горячева).

2001

93. Российский Национальный комитет и Всероссийские съезды по теоретической и прикладной механике // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах, 2001, т. 7, № 2(14), с. 109–110; на англ. яз.: там же, с. 111–112.

2002

94. [Вводные статьи, комментарии и общая редакция] // Bernoulli D. Werke. Bd.5: Hydrodynamik II. Basel: Birkhäuser, 2002, xxvii+729 с.

95. К столетию со дня рождения Николая Гурьевича Четаева // Успехи механики (Москва), 2002, т.1, № 4, с. 178–184 (соавторы В.В.Румянцев, С.Я.Степанов).

96. К пятидесятилетию Реферативного журнала “Механика” // Успехи механики (Москва), 2002, т. 1, № 3, с. 177–185.

2003

97. Механика в рукописях Леонардо да Винчи (критический взгляд на тему) // Творческое наследие Леонардо да Винчи / Междунардная научная конференция (2002) / Избранные научные доклады. М.: Новая школа, 2003, с. 76–88; также: Успехи механики (Москва), 2003, т. 2, № 2, 169–181.

98. Development of Studies in the History of Elasticity Theory and Structural Mechanics // Essays on the Hystory of Mechanics. Basel e. a.: Birkhäuser, 2003, с. 21–37.

99. Elasticità e idrodinamica // Storia della scienza, vol. 7: L’Ottocento. Roma: Enciclopedia Italiana, 2003, с. 83–98.

100. К 90-летию со дня рождения Александра Юльевича Ишлинского (6 августа 1913 г. – 7 февраля 2003 г.) // Успехи механики (Москва), 2003, т. 2, № 2, 196–202 (соавторы Д.Д.Ивлев, Н.А.Парусников).

2004

101. Леонардо да Винчи – кто он ? // Природа, 2004, № 9, с. 92–96.

2005

102. Дмитрий Павлович Рябушинский (к 100-летию Кучинского аэродинамического института) // Вопросы истории естествознания и техники, 2005, № 3, с. 101–129, 202.

103. Daniel Bernoulli, "Hydrodynamica" (1738) // Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940. Amsterdam e. a.: Elsevier, 2005, с. 131–142.

104. Die Akademie der Wissenschaften von St.Petersburg in ihrer Gründungszeit // Gelehrte aus Basel an der St.Petersburger Akademie der Wissenschaften des 18. Jahrhunderts. Aachen: Shaker, 2005, с. 17–38 (соавторы A.Verdun, F.Nagel).

105. Daniel Bernoullis Leben und Werk // Там же, с. 77–87.; "Жизнь и труды Даниила Бернулли" // Шейнин О. Б. Портреты. Берлин, 2009, с. 209-220.

106. Daniel Bernoulli und seine "Hydrodynamica" // Там же, с. 135–146

2006

107. Леонард Эйлер (к 300-летию со дня рождения) // IV Поляховские чтения / Избранные труды. СПб.: ВВМ, 2006, с. 622–636.

108. The Influence of Newton's Principia on the Development of Continuum Mechanics and Rigid Body Dynamics on the Continent // Mathematisches Institut Oberwolfach, Rept 10/2006, с. 563–565.

109. [Критическая рецензия:] Профессора Московского университета 1755–2004. Биографический словарь / Рябухин А.Г., Брянцева Г.В. (авт.-сост.). М.: Изд-во Московского университета, 2005. 2 т. // Вопросы истории естествознания и техники, 2006, № 2, с. 154–162.

2007

110. Леонард Эйлер и его вклад в развитие механики // Прикладная математика и механика, 2007, т. 71, № 2, с. 179–191; на англ. яз.: J. Appl. Math. and Mech., 2007, 71:2, с. 157–167 (соавтор С.Я.Степанов).

111. Леонард Эйлер (к 300-летию со дня рождения) // Механика твердого тела (Донецк), 2007, № 37, с. 3–14.

112. Леонард Эйлер (к 300-летию со дня рождения) // Леонард Эйлер и современная наука / Материалы Международной научной конференции. Санкт-Петербург, 2007, с.12–26.

113. Некоторые замечания стороннего наблюдателя о прошедшем юбилее Казанского университета // Казанский университет, 2007, № 5 (март), с. 2.

2008

114. I contributi di Eulero allo sviluppo della Meccanica razionale // Lettera matematica Pristem, 2008, 66-67, с. 26–34.

115. Euleriana: A Short Bibliographical Note // Physica D, 2008, vol. 237, № 14-17, с. xvii–xviii.

116. Colin Maclaurin und Newtons Bewegungsgesetz in der modernen Cartesischen Koordinatenform // Mathematics Celestial and Terrestrial (Acta Historica Leopoldina, 2008, vol. 54), с. 523-532.

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 20–45

Г. К. Михайлов

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (ЖИЗНЬ, ТВОРЧЕСТВО, ВКЛАД В СТАНОВЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ МЕХАНИКИ)

Институт научно-технической информации РАН

Аннотация. Леонард Эйлер (1707-1783) – один из величайших ученых всех времен в области математики и механики. Ему принадлежит, в значительной степени, формирование математического анализа (включая теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление) в XVIII веке, а также становление всей рациональной механики и, в частности, механики твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости. Им же был создан язык и стиль современной математической литературы. Статья содержит очерк жизни Леонарда Эйлера, краткий общий обзор его трудов и более подробное изложение его вклада в становление рациональной механики

Ключевые слова: материал, механика, дифференциальные уравнения, гидродинамика, упругость, гибкие тела

УДК: 539.374

В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения одного из величайших математиков и механиков мира Леонарда Эйлера. С его трудами связано становление математического анализа (включая теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление), рациональной механики, механики твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости. Эйлеру же обязан своим становлением язык и стиль научной литературы последующих полутора-двух веков. Ниже приведен очерк жизни Леонарда Эйлера и конспективный обзор его вклада в науку.

Более подробно рассмотрено становление рациональной механики, которое связано неразрывно с трудами Леонарда Эйлера, открывшего пути для ее дальнейшего развития. Работы Эйлера по механике составляют примерно одну треть всех его

Поступила 12.12.2008

Статья подготовлена по материалам докладов автора на совместном торжественном заседании президиума Санкт-Петербургского научного центра РАН и Международной научной конференции "Леонард Эйлер и современная наука"и совместном заседании Санкт-Петербургского математического общества и Санкт-Петербургского отделения Российского Национального комитета по истории и философии науки и техники (Санкт-Петербург, май 2007 г.). Ниже в тексте в квадратных скобках даются отсылки к списку литературы, а надстрочные номера относятся к помещенным в конце статьи примечаниям. Упоминаемые в статье сочинения Л.Эйлера в библиографию, для ее сокращения, не включены. Подлинные их названия можно установить по традиционному перечню трудов Эйлера, подготовленному в начале XX века шведским историком Г.Энестрёмом [24] и воспроизведенному позже в "Трудах"Архива АН СССР [15, т. 1, с. 352-387] трудов. Надо подчеркнуть, что механика была первым серьезным увлечением Эйлера. В сохранившихся "записных книжках", которые он вел в возрасте 18–20 лет, уже содержатся подробные планы задуманных им общих трактатов по динамике точки и теории движения жидкостей. О живом интересе Эйлера к механике свидетельствует и сравнительный анализ его опубликованных сочинений, написанных им за первые 10 лет научного творчества (1726–1735). Из общего их объема, составляющего около 1800 страниц (в пересчете на страницы полного собрания его сочинений "Opera omnia"), почти $^2/_3$ посвящены механике и только $^1/_4$ высшей математике.

1. Предки Леонарда Эйлера были мелкими землевладельцами из расположенного на Боденском озере города Линдау. Этимология самой фамилии Эйлер восходит, по-видимому, к немецкому слову "Au" = заливной луг – типичному элементу топонимики окрестностей Линдау – (ср. Lindau) [27]. Прапрадед Леонарда Эйлера в самом конце XVI века переехал в Базель и основал там семью ремесленников. Однако отец Леонарда был уже пастором.

Леонард Эйлер родился в Базеле 15 апреля[1] 1707 г. и провел детство в близлежащем селении, где его отец получил приход. Здесь, в благочестивой обстановке скромного пасторского дома Леонард получил начальное воспитание, наложившее глубокий отпечаток на всю его последующую жизнь и мировоззрение. Осенью 1720 г. Леонард поступил на философский факультет Базельского университета (что по возрасту соответствовало нормам того времени). Сохранились три печатные латинские диссертации 1722 г. по логике и истории римского судопроизводства, официальным "респондентом" по которым выступал Эйлер. На титульных листах этих диссертаций впервые появляется имя Леонарда Эйлера.

В 1723 г. Леонард окончил философские классы и на годичном университетском акте 8 июня 1724 г. произнес по-латыни речь о сравнении картезианской и ньютонианской философии, получив в результате звание магистра. Затем он записался, по желанию отца, на старший – теологический факультет университета.

Начальные сведения по математике Леонард получил еще от отца. В университете на юношу обратил внимание Иоганн Бернулли – один из наиболее значительных математиков того времени. Он стал руководить его самостоятельными занятиями и, вовсе не склонный преувеличивать чужие заслуги, не случайно написал в 1726 г. о своем девятнадцатилетнем ученике: "счастливейшего дарования юноша Леонард Эйлер, от проницательности и остроты ума которого мы ожидаем самых больших успехов после ознакомления с той легкостью и изобретательностью, с которой он проник под нашим руководством в сокровенные глубины высшей математики" [21].

Посещая дом учителя, Эйлер познакомился и со старшими сыновьями знаменитого математика – Николаем и Даниилом, приглашенными в Петербург в открывавшуюся там Академию наук. При отъезде Бернулли пообещали Эйлеру, выразившему желание сопровождать их в Россию, исхлопотать и для него место в Петербургской Академии, чего они и добились к осени 1726 г.

Не решившись отправиться в далекий путь зимой, Эйлер отложил свой отъезд на весну, углубившись пока, по совету Даниила Бернулли, в изучение физиологии, профессором которой тот был первоначально назначен в Петербурге. Тем временем в Базеле освободилась кафедра физики. В число 12 претендентов на нее, среди которых были Д.Бернулли и известный ученый Я.Герман, вошел и Эйлер. Согласно тогдашним правилам претенденты на кафедру должны были представить для диспута диссертацию и прочесть пробные лекции. После этого три группы представителей профессуры и администрации университета выбирали из числа соискателей по одному кандидату для последующей жеребьевки. Эйлер представил на конкурс диссертацию "О звуке" и прочел лекцию "О причине тяготения". В результате тайного голосования "конкурсные подкомиссии" рекомендовали для жеребьевки Германа и двух других кандидатов, не оставивших следов в истории науки. 1 апреля 1727 г. бесстрастный жребий выбрал одного из этих двух случайных кандидатов. На следующий день Эйлер символически записался на медицинский факультет университета и рано утром 5 апреля оставил навсегда свою родину.

Эйлер отправился из Базеля по Рейну до Майнца, затем почтовыми он проехал в Гамбург, а оттуда к Балтийскому морю. (По пути он посетил в Марбурге знаменитого Христиана Вольфа, который отрекомендовал ему Петербург "раем ученых".) Далее Эйлер отплыл в Кронштадт и 24 мая 1727 г. прибыл в Петербург.

2. Созданием Академии наук Россия была обязана царю-преобразователю Петру I, открывшему XVIII век широкими военными действиями и многочисленными, порой противоречивыми, реформами. Начавшаяся в 1700 г. Северная война закончилась лишь спустя 21 год победой России и торжественным поднесением Петру звания Великого, Отца Отечества и Императора Всероссийского. Именно в эти годы Петру было "суждено в Европу прорубить окно". Как писал великий поэт,

Была та смутная пора,
Когда Россия молодая,
В бореньях силы напрягая,
Мужала с гением Петра.

Не получивший сам никакого систематического образования, Петр считал необходимым внедрять на Руси западную культуру и науки и пришел к мысли о создании в своей стране академии. Понятие это было в то время, как и сейчас, двойственным: оно означало как ученое общество, так и высшее учебное заведение. В январе 1724 г. Петр собственноручно внес некоторые поправки в представленный ему проект учреждения Академии, предусмотрев немалые деньги на ее содержание. Проект остался недоработанным, но о решении "учинить Академию, в которой бы учились языкам, также прочим наукам и знатным художествам [т.е. ремеслам – Г.М.] и переводили б книги", а, главное, о закреплении за будущей Академией выделенных Петром средств, было объявлено 8 февраля того же года именным указом Сената.

Петру, однако, уже не довелось увидеть свое детище: он скончался 8 февраля 1725 г.

Учреждение Академии было объявлено именным указом Екатерины I от 18 декабря 1725 г., и 7 января 1726 г. (27 декабря 1725 г. ст. ст.) состоялось ее первое торжественное публичное собрание [2].

К моменту приезда Эйлера Академия насчитывала 14 профессоров (академиков), распределенных на три класса: математический, физический и гуманитарный. Средний возраст членов Академии составлял тогда 35 лет [3]. Первоначально Д.Бернулли имел в виду, что Эйлер будет назначен при нем адъюнктом по физиологии, но фактически Эйлер сразу же был приписан к математическому классу.

Академики собирались дважды в неделю на заседания Конференции (так называлось Общее собрание академиков) и в этих заседаниях обсуждали свои научные работы. Кроме того, они обязаны были читать публичные лекции, готовить монографии или учебники и рассматривать направляемые в Академию технические и квалификационные запросы.

Эйлер сразу же активно включился в академическую жизнь. В 30-х годах он выступал в Конференции чаще всех – в среднем 10 раз в год (при общем числе 30–40 докладов). Только в 8 томах академического ежегодника "Комментарии" за 1730–1740 гг. Эйлер опубликовал 58 работ.

В январе 1731 г. Эйлер стал полноправным профессором теоретической и экспериментальной физики, а в 1733 г. получил, наконец, кафедру высшей математики. Сообразно с ростом авторитета Эйлера росло и его материальное благосостояние. Начав в 1727 г. с оклада в 300 рублей в год, он достиг к 1740 г. оклада в 1200 рублей.

Наряду с собственно научной работой, Эйлер читал лекции – сначала по физике, а позже по математике. С 1735 г. он вел большую работу в Географическом департаменте Академии по подготовке генеральной карты России. Вспоминая впоследствии об этой работе, Эйлер писал: "Я уверен, что география российская чрез мои и г. профессора Гейнзиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли" [4]. Наряду с этим Эйлер вел в течение многих лет и самостоятельные наблюдения в астрономической обсерватории. Помимо того, он привлекался к выполнению разнообразных поручений, которые Академия получала от правительственных учреждений. Так, Эйлер принимал участие в обсуждении проекта подъема большого кремлевского колокола в Москве, в экспертизах весов различных конструкций и пр. Он участвовал в разработке программы экзаменов для кадетского корпуса, сам принимал экзамены у кадетов, а также и у различных технических специалистов для определения их квалификации [5].

Неутомимая работоспособность Эйлера не знала никаких преград, и даже когда осенью 1738 г. он лишился, в результате тяжелого воспаления, правого глаза, то и это никак ее не ослабило.

В Петербурге сложился и окреп талант Эйлера. Здесь он сформировался как ученый мирового масштаба. "Такому вожделенному случаю, – писал Эйлер в 1749 г., – не только доктор Гмелин обязан всем, что сделало известным его имя, но и я, и все прочие, имевшие счастье состоять некоторое время при русской императорской Академии. Мы должны сознаться, сколько обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых только там находились. Что собственно до меня касается, то в случае неимения такого превосходного случая, я бы вынужден был главнейше прилежать к другим наукам, от которых, по всем признакам, я бы отупел только. Его королевское величество недавно меня спрашивал: где я изучал то, что знаю? Я, согласно истине, отвечал, что всем обязан моему пребыванию в петербургской Академии наук" [6].

Обстановка в Петербургской Академии в 30-х годах не была простой. Отсутствие официального регламента оставляло ее зачастую в безраздельное распоряжение советника канцелярии И.Д.Шумахера, привлеченного Петром I к созданию в Петербурге библиотеки и кунсткамеры еще задолго до создания Академии. Человек властный, искусный в интригах, Шумахер противопоставлял себя зачастую академикам, вмешивался в не касающиеся его дела и вызывал открытые протесты академиков. Однако, вместе с тем, он умело вел академический корабль по сложным петербургским волнам. Так или иначе, но обычно ладившего с начальством Эйлера удовлетворяли условия его работы в Петербурге. Но в октябре 1740 года скончалась императрица Анна Иоанновна, а "при последовавшем регентстве дела начали принимать, – по выражению Эйлера, – сомнительный оборот" [7]. Вскоре бывший фаворит императрицы, регент и покровитель Академии Э.И.Бирон был арестован и осужден на четвертование, замененное пожизненным заключением. В стране возникла реакция, грозившая резко сказаться на положении Академии наук, пользовавшейся расположением смещенной власти. Учитывая создавшуюся обстановку, Эйлер принял полученное им ранее приглашение прусского короля в реорганизуемую Берлинскую академию. Весной 1741 г. он обратился с ходатайством о расторжении незадолго до того обновленного контракта. Получив разрешение на льготных условиях, с назначением пенсии и званием почетного члена Академии, Эйлер 19 июня 1741 г. покинул Петербург и 25 июля 1741 г. прибыл в Берлин.

3. Предшественником Академии наук в Берлине было созданное там по инициативе Лейбница в 1700 г. Научное общество, влачившее жалкое существование. В 1740 г. на трон вступил Фридрих II, нареченный впоследствии в Пруссии Великим. Претендовавший на просвещенный абсолютизм, Фридрих задумал создать в Берлине блестящую Академию наук, распорядившись о приглашении в нее крупнейших ученых и, в частности, Леонарда Эйлера – “великого алгебраиста”. Оформление новой Академии ожидало окончания Силезских войн. Украсив Академию Эйлером, король не собирался привлекать его к ее руководству, подбирая для этого кандидата в кругах французских просветителей. Наконец, в 1745 г. подходящий президент был найден. Им оказался француз Мопертюи, прославившийся незадолго до того градусными измерениями дуги меридиана в Лапландии.

Новая Берлинская академия, названная Академией наук и словесности (Académie des sciences et belles-lettres), начала фактически работать в конце 1745 г. Непосредственную связь Академии с королем осуществлял Мопертюи. Академия была разделена на четыре класса: физический (“экспериментальной философии”), математический, философский (“спекулятивной философии”) и филологический. 3 февраля 1746 г. Эйлер был назначен директором математического класса. Как и в Петербурге, Эйлер выступал в Академии около 10 раз в год с научными докладами и привлекался одновременно к различным техническим экспертизам. Так, Эйлер занимался вопросами гидравлических машин, артиллерии, картографии, участвовал в разработке улучшения судоходных каналов и водоснабжения королевского дворца, в рассмотрении технических аспектов солеварения, проектов лотерей и пр. Большую работу вел Эйлер по контролю над изданием календарей, приносивших определенный доход Академии. Он занимался и различными другими научно-административными делами, связанными с академической обсерваторией, ботаническим садом и т. п. [8].

Тем не менее, находясь в деловом контакте с Фридрихом II, Эйлер постоянно оставался инородным телом в ближайшем окружении “короля-философа”, не ценившего отвлеченных математических изысканий и не раз насмехавшегося в своих стихах над лишенным салонного блеска великим математиком.

После смерти Мопертюи (1759) Эйлер остался в Берлинской академии едва ли не ее фактическим руководителем. Однако Фридрих II так и не пожелал назначить Эйлера президентом. В результате Академия осталась (на 175 лет!) вовсе без президента, а общее руководство ею взял на себя пока лично Фридрих II.

В создавшейся обстановке Эйлер решил вернуться в Петербург. К тому же, в 1764–1765 гг. у него возникли разногласия с руководством Академии по поводу ведения ее финансовых дел. Наконец, 2 февраля 1766 г. Эйлер обратился к королю с просьбой отпустить его, на что получил согласие лишь через три месяца.

Заблаговременно ликвидировав свое разросшееся недвижимое имущество, Эйлер покинул Берлин вместе со своей большой семьей 9 июня 1766 г. и 28 июля прибыл в Петербург. Путешествие его было триумфальным – по пути Эйлер был гостем польского короля в Варшаве и герцога Курляндского в Митаве (теперь Елгава), а в Риге ему была выделена почетная охрана.

Прежде чем говорить о втором петербургском периоде жизни Эйлера необходимо подчеркнуть, что в течение 25 лет его наиболее активной творческой жизни, проведенных в Берлине, он постоянно поддерживал теснейшие деловые связи и с Петербургской Академией наук. Число научных статей (не считая отдельных книг), опубликованных за эти четверть века в Берлине и Петербурге, составляет, соответственно, около 130 и 100. В Берлине у Эйлера одно время стажировались и жили прикомандированные к нему из Петербурга русские ученики. Как и раньше, он привлекался к различного рода экспертизам и к разрешению всяких сложных ученых и внутриакадемических вопросов. На Эйлере лежала в значительной степени обязанность подбора кадров для Петербурга. Можно смело сказать, что в течение четверти века Эйлер являлся своего рода центрально-европейским филиалом Петербургской Академии наук. "Я до сих пор работал для императорской Академии, – писал он сам в 1760 г. в Россию, – не как отсутствующий член, но наверное также много, как бы я состоял там налицо" [9].

4. Леонард Эйлер был принят в Петербурге в 1766 г. с большим почетом. Екатерина II назначила Эйлеру оклад размером в 3000 рублей в год, выдала 3000 рублей на переезд и 8000 рублей на покупку дома. Старший его сын Иоганн-Альбрехт, ставший уже в возрасте 20 лет членом Берлинской академии, был принят в Петербургскую Академию наук профессором физики с окладом 1000 рублей в год, а с 1769 г. стал конференц-секретарем Академии. В первые же дни по приезде в Петербург императрица благосклонно выслушала соображения Эйлера о путях усовершенствования работы Академии. 10 ноября 1766 г., вместо ранее управлявшей академическими делами Канцелярии, была учреждена Комиссия под дирекцией графа В.Г.Орлова "для разбора и приведения в лучшее состояние всех академических департаментов". В состав Комиссии вошли шесть академиков, в том числе отец и сын Эйлеры. В марте 1767 г. Эйлеру, совместно с его учеником С. Я. Румовским, было поручено общее руководство Географическим департаментом Академии, которому правительство придавало большое значение. Казалось бы, что, наконец, Эйлер получил реальную возможность влиять на общеакадемическую политику. Однако вскоре Екатерина II утратила интерес к прогрессивным реформам, и Академия наук стала лишаться своих призрачных академических свобод. Взаимоотношения Эйлера с Орловым стали тоже осложняться. Дело кончилось прошением Эйлера об увольнении его из состава Комиссии и от руководства Географическим департаментом.

Все эти события разворачивались на фоне постепенной утраты Эйлером зрения. Еще осенью 1766 г. у него произошла резкая потеря зрения на левый глаз. Осенью 1771 г. Эйлеру удалили катаракту с левого глаза, но это не привело к успеху. В результате практически все 17 лет своего второго пребывания в Петербурге Эйлер был полуслепым и мог писать лишь мелом на большой грифельной доске. Ему читали нужные сочинения, он производил в уме выкладки, диктовал и кое-что набрасывал на своей грифельной доске, оставляя оформление работ помощникам [10]. Но такова была сила его гения, что, избавившись от необходимости самостоятельно переписывать получаемые им результаты, Эйлер выполнил за эти годы невероятное количество исследований, хотя и не содержавших, как правило, таких фундаментальных результатов, которые характеризовали его предшествовавшие труды. Наряду с этим, Эйлера по-прежнему продолжали еще привлекать в 70-х годах к различным экспертизам. Так, например, в 1776 г. он входил в комиссию по рассмотрению проекта моста через р. Неву, составленного И.П.Кулибиным.

В последний год жизни Эйлера обстоятельства ему вновь улыбнулись. Директором Академии была назначена княгиня Е.Р.Дашкова, проявившая положительный интерес к делам Академии и личное уважение к Эйлеру. Однако для последнего это было уже прощанием с Академией. 18 сентября 1783 г. 76-летний Эйлер, как всегда, занимался математическими исследованиями, беседовал за обедом о незадолго до того открытой седьмой планете, а вечером за чаем шутил с внуком. Неожиданно со словами "я умираю" он потерял сознание и через несколько часов, по меткому выражению панегириста, "прекратил вычислять и жить".

5. Научное наследие Леонарда Эйлера поистине необозримо. Среди его трудов находятся работы по всем разделам чистой и прикладной математики того времени, по механике, астрономии, физике, теории музыки, философии.

Наиболее значительны, конечно, заслуги Эйлера в развитии математического анализа (включая теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление) и рациональной механики.

В ту эпоху, когда Эйлер вступил на ученое поприще, в математике уже были заложены основы замечательного аппарата дифференциального и интегрального исчисления. Перед математикой и механикой стояла задача всесторонней разработки этого аппарата и применения его для исследования разнообразных задач. Однако ни в самой математике, ни, тем более, в механике не существовало еще никакой общей системы. Требовалось использовать богатейшие возможности математического анализа и поднять теоретические и прикладные разделы высшей математики от состояния совокупности отдельных искусных приемов и решенных задач до уровня систематически построенной совершенной науки. Решению этой задачи и было посвящено, главным образом, творчество Эйлера.

Известным завершением этой программы применительно к математическому анализу явился классический курс Эйлера, состоящий из трех частей – "аналитическая трилогия", как его назвал крупнейший знаток математического наследия Эйлера А.П.Юшкевич. В эту шеститомную "трилогию", объемом около 3000 страниц, входят два тома "Введения в анализ бесконечно малых" (1748), "Наставление по дифференциальному исчислению, с его применением к анализу конечных и к учению о рядах" (1755) и три тома "Наставления по интегральному исчислению" (1768–1770), содержащего и методы интегрирования дифференциальных уравнений. Этот блестящий курс, переведенный в наше время и на русский язык, не имеет аналогов среди сочинений XVIII в. Множество изложенных здесь Эйлером результатов принадлежит ему самому, и почти все они вошли в золотой фонд достижений математического анализа.

Наряду с "аналитической трилогией" Эйлера следует упомянуть и его "Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума" (1744) – первый трактат по вариационному исчислению.

Помимо знаменитых руководств по математическому анализу, Эйлеру принадлежат также два тома "Введения в арифметику" (1738–1740) для академической гимназии и выдержавшее около 30 изданий на шести европейских языках двухтомное "Полное руководство по алгебре" (1768–1769), включающее теорию алгебраических уравнений и Диофантов анализ.

Среди конкретных результатов, принадлежащих Эйлеру в математическом анализе, отметим методы решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Он исследовал также некоторые решения довольно общего линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, частными случаями которого являются уравнения Бесселя, Лежандра и гипергеометрическое уравнение. Эйлер развил методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, возродившиеся в наше время в связи с интенсивным развитием вычислительной математики. Он заложил общие подходы в вариационном исчислении и указал дифференциальное уравнение (названное позже его именем), определяющее условия экстремума функционала. Эйлер начал исследование ряда важных специальных функций (например, B− и Γ-функции, функций Бесселя первого рода, ζ-функции действительного аргумента). Он внес фундаментальный вклад и в развитие теории аналитических функций и теории чисел. Наконец, даже многие общепринятые в наши дни математические обозначения (такие как π, e, i, обратные тригонометрические функции и др.) закрепились в математике благодаря Эйлеру.

Не все полученные Эйлером результаты были обоснованы им надлежащим образом, да и не все они могли быть обоснованы средствами XVIII в. Но надо отметить, что даже отдельные подвергавшиеся в течение многих десятилетий резкой критике места его работ, – такие, как например, использование расходящихся рядов, – представляются современному исследователю весьма глубокими. Содержательность некоторых других нечетко сформулированных представлений Эйлера стала очевидна также только в наше время. Так, например, обстоит дело с общими представлениями Эйлера о понятии функции, от которых, как подчеркивал А.П.Юшкевич, “нити протягиваются к новейшим методам XX в., к обобщенным функциям С.Л.Соболева и Л.Шварца”; “здесь, – добавляет Юшкевич, – как и в суммировании расходящихся рядов, Эйлер проявил гораздо большую прозорливость и смелость мысли, чем многие его современники” [19].

Выдающийся вклад был внесен Эйлером в формирование рациональной механики, о чем подробнее пойдет речь ниже (см. п.п. 10 и сл.). В 1736 г. Эйлер опубликовал двухтомную “Механику”, в которой дал аналитическое изложение динамики точки, открыв тем самым широкий путь для дальнейших исследований. В 1752 г. была опубликована его историческая работа “Открытие нового принципа механики”, в которой Эйлер приложил ньютоновы законы динамики, записанные в неподвижных декартовых координатах, к элементу сплошной среды, что дало ему возможность построить основы динамики твердого тела и гидродинамику идеальной жидкости – первый из разделов разросшейся в XIX веке механики сплошной среды. Впоследствии (1776) Эйлер впервые выписал шесть уравнений движения произвольного тела, присоединив к законам количества движения законы момента количеств движения.

В значительной степени с трудами Эйлера связано развитие в середине XVIII века небесной механики, включая теорию возмущений планетных движений и теорию движения Луны.

В области прикладной механики Эйлеру принадлежат фундаментальные исследования по теории корабля, устойчивости упругих стержней, теории трения и др.

Не оставил стороной Эйлер и проблемы физики XVIII века [11].

Имя Эйлера навечно вошло в историю математики и механики. Достаточно сказать, что "Математическая энциклопедия" (1985) содержит 20 статей, непосредственно объясняющих различные понятия, связанные с именем Эйлера (критерии, методы, многочлены, подстановки, постоянные, теоремы, уравнения, формулы, функции и т. п.).

Задел, оставленный Эйлером в математике и механике, оказался настолько велик, что стимулировал математическую мысль на протяжении нескольких поколений. Влиянию сочинений Эйлера на последующие поколения в значительной мере способствовала и введенная им манера изложения материала.

В "Трактате по небесной механике" Лаплас писал, что Эйлер "благодаря своим открытиям во всех областях анализа и совершенству, внесенному им в язык, может считаться отцом современного анализа" [34, т. 5, с. 162]. М.В.Остроградский заметил по поводу этих слов Лапласа: "Это звание отца вполне заслужено, так как именно Эйлер создал современный анализ и сформировал нынешний язык математики. Пусть обратятся к трудам предшествующих и современных ему математиков, пусть почитают Паскаля, Лейбница, всех Бернулли, Клеро, Даламбера и других. Это чтение покажется утомительным, как чтение трудов, язык которых устарел, а последовательность и способ выражения мыслей нам чужды. При этом окажется нужным уделять больше внимания форме, в которой преподносятся идеи, чем самим идеям. И если теперь больше не пишут так, как писали эти столь заслуженно знаменитые люди, если мы отошли от их манеры трактовки вопросов, то это потому, что Эйлер увлек за собой последующие поколения и научил их думать и писать так, как думал и писал он сам. Чтение его работ является самым легким и самым полезным делом. Он присоединил славу великого преобразователя к заслугам весьма понятного и весьма изящного автора" [10].

Подлинные труды Эйлера интенсивно изучали на протяжении всего XIX века, и они продолжали оказывать прямое влияние на воспитание математиков и развитие математики даже в начале XX века. Академик В.И.Смирнов вспоминал, например, что в годы его учебы в Петербургском университете некоторые экзаменаторы еще спрашивали о том, в каком именно сочинении Эйлера находятся те или иные его результаты.

Эйлер остается, пожалуй, единственным ученым середины XVIII в., работы которого легко читаются и в наши дни.

6. Общий объем сочинений Эйлера громаден. Свыше 800 его опубликованных научных работ составляют около 30000 печатных страниц и складываются в основном из следующего: 600 статей в периодических изданиях и сборниках Петербургской Академии наук[12], 130 статей в "Мемуарах" Берлинской академии и изданных в Берлине сборниках, 30 статей в разных журналах Европы, 15 мемуаров, удостоенных премий и поощрений Парижской Академии наук, и 40 книг отдельных сочинений [13].

"Полное собрание трудов" Эйлера (Opera omnia) издается под эгидой Швейцарского общества естествоиспытателей (Schweizerische Naturforschende Gesellschaft) вот уже в течение века. Первоначально оно планировалось в трех сериях. На сегодня завершена публикация первой серии (математика), составившей 29 томов объемом 14 тысяч страниц in-4°, и третьей серии (физика и разное), составившей 12 томов объемом 5 тысяч страниц. Из 31 тома второй серии (механика и астрономия), объемом 11 тысяч страниц, вышло в свет 29 томов, а недостающие два тома находятся в процессе подготовки к печати. Таким образом, эта часть издания, первый том которого был опубликован еще в 1911 г., близка к завершению.

В 1970-х годах Швейцарское общество естествоиспытателей (преобразованное позже в Швейцарскую Академию естественных наук) приступило совместно с Академией наук СССР, являющейся обладательницей основной части рукописного архива Эйлера, к изданию четвертой серии его “Полного собрания трудов”, которая первоначально предполагалась состоящей из двух частей: научная переписка (IV-A) и неопубликованные рукописи (IV-B). На сегодня запланировано ориентировочно 8–10 томов научной переписки, а обсуждение судьбы серии IV-B приостановлено в связи с прекращением финансирования издания швейцарскими властями (вместо этого обсуждается вопрос о сканировании всех рукописей Эйлера и вынесении их в Интернет, вне рамок “Opera omnia”). Первый том серии IV-A вышел в свет в 1976 г. и содержит аннотированный перечень всей сохранившейся переписки Эйлера, составляющей свыше 1000 писем Эйлера и почти 2000 писем его корреспондентов, среди которых находятся практически все крупнейшие ученые того времени. (Вся сохранившаяся переписка носит научный и деловой характер, личная переписка Эйлера, к сожалению, не сохранилась.) Кроме того, вышло еще три тома этой серии: переписка Эйлера с французскими математиками Клеро, Даламбером и Лагранжем (1980), с Фридрихом II и Мопертюи (1986) и с Иоганном Бернулли (1998). Сейчас ведется интенсивная работа по завершению подготовки к изданию всей серии IV-A.

Анализ научной переписки Эйлера дает много важных и интересных деталей для характеристики эпохи и для понимания развития математики и механики в середине XVIII века. Сам Эйлер писал в 1765 г. по поводу своей ученой корреспонденции, что “если бы кто-нибудь захотел взять на себя труд ее прочитать, в ней нашли бы много важных мест, публикация которых больше соответствовала бы вкусам публики, чем глубочайшие разработки” [22, т. 1, с. 259].

7. Значение Эйлера для Петербургской Академии наук и становления всего математического естествознания огромно. Петербургская Академия наук оказала своему скончавшемуся старейшине достойные почести, в 1786 г. его бюст был установлен на мраморной колонне в зале заседаний Академии против кресла президента. Однако, как это иногда бывает, вскоре даже могила Эйлера была утеряна. Лишь через полвека ее случайно обнаружили вновь, и в 1837 г. на нее был возложен величественный гранитный камень со скромной латинской надписью “Леонарду Эйлеру Петербургская академия”. По случаю 250-летия со дня рождения Эйлера его захоронение было перенесено в некрополь Александро-Невской лавры.

В 1945 г. президент Академии наук СССР С.И.Вавилов писал, что “вместе с Петром 1 и Ломоносовым Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность” [1].

К 150-летию со времени своего основания (1879) Петербургская Академия наук озаботилась приобретением хорошего портрета Леонарда Эйлера. Для этой цели была заказана копия находящегося в Швейцарии портрета работы Гандмана. По случаю 50-летия Пулковской обсерватории Академия передала этот превосходный портрет обсерватории, где он и находился до Великой Отечественной войны. Во время войны портрет пропал, а в 1972 г. будущий директор Института физики атмосферы РАН князь Г.С.Голицын приобрел в одном из комиссионных магазинов Ленинграда за бесценок некий портрет “неизвестного”, в котором он сразу узнал Эйлера. Отреставрировав портрет, Г.С.Голицын поместил его в своем кабинете. Автор случайно узнал об этом портрете и сразу же идентифицировал его с пропавшим академическим портретом [2].

Жизни и творчеству Эйлера посвящена колоссальная литература. Годовщины дня его рождения и кончины систематически отмечались – с постоянно нарастающим размахом, – начиная с 1884 года. Годовщина смерти великого ученого была отмечена в 1983 г. также и ЮНЕСКО. Материалы многих из этих юбилейных мероприятий публиковались в виде отдельных сборников [5, 6, 7, 14, 29, 30, 35, 38, 44].

Из последних работ, посвященных общему обзору жизни и деятельности Эйлера, стоит отметить немецкую монографию Э. Фелльмана (1995), переведенную теперь и на английский язык [28]. К юбилейным торжествам 2007 г. был приурочен также выпуск посвященного Эйлеру комикса [31].

Анализ научных трудов Эйлера можно найти, помимо общих сочинений и отдельных статей, во вводных очерках к отдельным томам "Opera omnia". В 2007 году Математическая ассоциация Америки выпустила еще шесть томов, посвященных трудам Эйлера [25, 26, 36, 39, 40, 41], один из которых является переводом русского сборника [14].

В Интернете имеется сайт (www.math.dartmouth.edu/∼euler)(дата обращения 15.01.2009), на который вынесены сочинения Эйлера и сопутствующие им материалы. Швейцарский сайт (www.euler.ch)(дата обращения 15.01.2009) посвящен больше биографии и генеалогии потомков Эйлера.

8. Добавим еще несколько слов о семье Эйлера. 7 января 1734 г. (27 декабря 1733 г. ст. ст.) он женился на дочери академического живописца Катарине Гзелль. От этого брака у него родилось много детей, но выросли из них только пятеро – три сына и две дочери. После смерти Катарины Эйлер женился вторично, чтобы обеспечить себе независимость от детей. Это обстоятельство, лишавшее детей ожидаемого ими наследства, вызвало у них, конечно, взрыв возмущения, о чем мы узнали из сохранившихся писем И.-А.Эйлера [28, с. 124–129].

Сыновья Эйлера остались в России. Старший – Иоганн-Альбрехт был, как сказано, конференц-секретарем Академии, второй сын – Карл стал лейб-медиком, а младший – Христофор дослужился до чина генерал-лейтенанта артиллерии.

Внук Леонарда Эйлера генерал А.Х.Эйлер был в 1846 г. возведен в потомственное российское дворянство с присвоением герба. Прямые потомки Леонарда Эйлера дали России на протяжении полутора веков ряд крупных военных и государственных деятелей.

Одна из дочерей И.-А.Эйлера вышла замуж за будущего академика Николая Фуса – ближайшего ученика и помощника Эйлера, сменившего своего тестя на посту непременного секретаря Петербургской академии. После него этот пост занял его сын – правнук Эйлера академик Павел Николаевич Фус. В результате научное делопроизводство и практическое руководство в Академии наук находились в течение 86 лет в руках наследников Эйлера.

Фамилия Эйлеров не перевелась и доныне: прямые потомки Леонарда Эйлера, с гордостью носящие эту фамилию, живут в Петербурге, Москве и Швейцарии (куда они попали после переворота 1917 года) [14].

К сожалению, личный архив Леонарда Эйлера, принадлежавшие ему вещи, семейные бумаги, включая обширную переписку с отцом, не сохранились. Возможно, многое из этого было утрачено еще в начале XIX века, а меньшая часть в начале XX века.

9. Основные исходные понятия механики и законы движения были подытожены и четко сформулированы в "Началах" Ньютона (1687). Однако у Ньютона не доставало еще многих существенных элементов, прежде всего, для построения механики системы, твердого тела и сплошной среды. Главным сдерживающим препятствием оставалось и то, что "Начала" были изложены с помощью геометрического метода древних, не открывавшего пути для дальнейшего продвижения. Первая попытка изложить всю динамику в несколько более простом и систематическом виде, с использованием элементов математического анализа, была предпринята Якобом Германом в его "Форономии" (1715/16).

Молодой Эйлер направил поначалу свои усилия на упорядочение динамики точки и последовательное переложение ее на язык математического анализа. Свои первые замыслы Эйлер реализовал в "Механике" (1736), которая была опубликована в двух томах в качестве "Приложения" к "Комментариям" Петербургской Академии наук.

В общем примечании к первой главе первого тома "Механики" Эйлер поместил общий план построения всей механики, как она представлялась ему в середине 30-х годов: "Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, – тем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел. По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, предоставленные сами себе, продолжают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т.е. силы" [18, с. 89–90].

Прежде чем говорить об отдельных результатах Эйлера в механике, сделаем одно общее замечание о месте его работ в ряду трудов его современников. Среди близких Эйлеру по возрасту ученых-механиков первого ранга надо назвать Даниила Бернулли, Клеро и Даламбера. Первое место в этой плеяде, безусловно, занимал Даламбер, а среди младших современников Эйлера – Лагранж. Но Лагранж и его "Аналитическая механика" олицетворяют собой уже следующий за Эйлером этап в математизации механики. С Даламбером у Эйлера сложились сложные отношения. Исследования Даламбера пересекались с работами Эйлера практически во всех разделах механики. Особенно тесно переплетались они в динамике твердого тела, в подходах к построению гидродинамики идеальной жидкости и в теории колебания струн. Даламбер был, бесспорно, гениальнейшим соперником Эйлера в механике. Ему принадлежали выдающиеся идеи, часто опережавшие исследования Эйлера, но Даламбер пользовался устаревшим тяжеловесным математическим языком, и его идеи были выражены в труднодоступной неясной форме. Эйлер же придал новый строгий стиль изложению точных наук. В результате для большинства конкурирующих работ Эйлера и Даламбера будущее осталось за работами Эйлера [16].

10. В "Механике" Эйлер впервые систематически изложил динамику свободной материальной точки и точки, находящейся на заданной кривой или поверхности. Им было последовательно изучено движение точки в случае отсутствия сопротивления (в пустоте) и в сопротивляющейся среде. Исследование проведено в естественных координатах, связанных с траекторией движения. Говоря о механике системы, следует отметить, что Эйлер не посвятил ей, как таковой, ни одной самостоятельной работы, хотя, конечно, многократно рассматривал различные задачи динамики механических систем и включил этот раздел в свой первоначальный план изложения всей механики. Для объяснения причины этой непоследовательности напомним, что общий метод исследования механических систем был предложен Даламбером в его "Трактате по динамике" (1743). Не входя в подробности, отметим, что Эйлер уже в 30-х годах располагал предпосылками достаточно общего метода, эквивалентного принципу Даламбера, и развивал в последующем свой подход к задачам динамики механических систем в духе идей Ньютона вполне самостоятельно. Вероятно, именно поэтому Эйлер не ссылался никогда на "принцип Даламбера" и, в то же время, никогда не излагал идею своего общего подхода в качестве отдельного метода, чтобы не входить в приоритетный спор с Даламбером.

Отметим один частный результат Эйлера, относящийся к механике относительного движения, изложенный в сочинении "О движении тел на подвижных поверхностях" (1746), где Эйлер получил впервые, одновременно с Д.Бернулли, закон сохранения момента количества движения. При решении задач Эйлер систематически вычислял здесь абсолютные ускорения в составном движении (в горизонтальной плоскости), разлагая их вдоль направлений относительного и переносного движения. В этих разложениях легко усматриваются относительное, переносное и дополнительное (кориолисово) ускорения. Аналогичные разложения абсолютных ускорений Эйлер широко использовал позже при исследовании течения воды во вращающихся трубах. Однако Эйлер не заметил в структуре этих разложений общего свойства, обнаруженного впоследствии Кориолисом. Пример дифференциального уравнения движения системы n тел появляется у Эйлера во второй половине 40-х годов при исследовании задачи о движении системы шарнирно соединенных жестких стержней на гладкой горизонтальной плоскости (1751).

Развитие механики систем с конечным числом степеней свободы было тесно связано в первой половине XVIII века с теорией колебаний. Не останавливаясь специально на этом важном для общей истории динамики ее разделе, необходимо отметить, что в 30-х и начале 40-х годов Эйлер (наряду с Даниилом и Иоганном Бернулли) внес существенный вклад и в его развитие. Большое значение имело для развития теории колебаний открытие Эйлером способа интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В частности, уже в 1739 г. на примере синусоидально возбуждаемого осциллятора Эйлер открыл явление резонанса (1750).

С середины 40-х годов Эйлер посвящает много работ небесной механике. Основное место здесь занимают различные аспекты задачи трех тел – теория движения Луны, теория возмущения планетных движений и, наконец, с 60-х годов, собственно задача трех тел в чистом виде. Наряду с этим Эйлеру принадлежат, конечно, и исследования методов определения невозмущенных орбит, в том числе кометных орбит, для которых он получил, например, известное уравнение, выражающее интервал времени через сумму радиус-векторов и хорду и остававшееся до последнего времени основой вычисления параболических орбит. Вклад Эйлера в становление и развитие небесной механики весьма значителен. Однако часто в современной литературе методы Эйлера связываются с именами других ученых, которые лишь усовершенствовали его методы. Кроме того, надо сказать, что история небесной механики в XVIII веке вообще до сих пор не изучена должным образом. Обычно уже в XIX веке исследователи не обращались к источникам, предшествовавшим "Трактату по небесной механике"

Лапласа, обобщившему основные достижения того времени в этой области. Впрочем, сам Лаплас высоко ценил вклад Эйлера в небесную механику и, особенно, в теорию движения планет.

Действительно, можно считать, что теория возмущений планетных движений ведет свое начало от мемуаров Эйлера о неравенствах в движениях Юпитера и Сатурна, представленного на конкурс Парижской Академии наук в 1747 г. (1749). Эти мемуары Эйлера, вместе с трактатом Даламбера о предварении равноденствий и нутации земной оси (опубликованном в Париже в том же году) и “Теорией Луны” Клеро (представленной на конкурс Петербургской Академии наук в 1750 г. и опубликованной в 1752 г.), может по справедливости считаться отправной точкой всей современной небесной механики (если не принимать, конечно, во внимание “Начала” Ньютона). Заметим, что в этой и других работах Эйлера конца 40-х годов уже содержится идея метода вариации элементов, развитого им подробнее в последующих трудах.

Любопытно, что в 40-х годах Эйлер стал сомневаться в строгой справедливости закона Ньютона всемирного тяготения. Это сомнение опиралось как на некоторые общие соображения, так и на отдельные ошибки, допущенные Эйлером в вычислениях планетных возмущений. И только выполненное Клеро (в только что упомянутом сочинении) исследование движения апогея Луны убедило Эйлера в точности закона Ньютона. В дальнейшем Эйлер продолжил исследования движений Юпитера и Сатурна, представив следующие свои мемуары на эту тему Парижской академии в 1752 г. Как подчеркнул М.Ф.Субботин, “развитая им здесь идея нахождения возмущенных значений эксцентриситетов и долгот перигелиев . . . является, по существу, зародышем теории представления вековых возмущений в тригонометрической форме, . . . развитой позднее Лагранжем” [16, с. 299] [17]. В последующем Эйлер внес много других усовершенствований в теорию возмущений. Так, например, ему принадлежит эффективный численный метод интегрирования уравнений возмущенных движений в прямоугольных координатах. Отметим еще большой цикл работ Эйлера по внедрению в теорию планетных возмущений мощных методов, развитых в теории движения Луны.

Первые исследования Эйлера о движении Луны подытожены в его берлинской монографии (1753). На основе развитой здесь теории Тобиасом Майером были вычислены таблицы Луны, удостоенные впоследствии Британским парламентом денежной премии (с выплатой $^1/_{10}$ части суммы Эйлеру). Но наиболее интересна вторая теория движения Луны Эйлера (1772), опубликованная в Петербурге. Первоначально она не привлекла широкого внимания астрономов вследствие своей сложности. Но через 100 лет этой теорией заинтересовался Хилл, который развил заложенные в ней идеи и опубликовал в 1870-х годах две работы, ставшие одним из важнейших источников дальнейшего прогресса всей небесной механики. Записанные Эйлером в прямоугольных координатах, уравнения движения Луны оказались типичными для теории нелинейных колебаний, и продолженные Хиллом исследования Эйлера по методам их интегрирования внесли значительный вклад в общую теорию нелинейных колебаний.

Необходимо отметить участие Эйлера в начальной разработке первого интегрального вариационного принципа механики – принципа наименьшего действия, первоначально высказанного в нечеткой, но претенциозной форме президентом Берлинской академии Мопертюи. Эйлеру принадлежит, по существу, первая строгая формулировка этого принципа для движения материальной точки, вместе с разработанным им аппаратом вариационного исчисления. Однако в том виде, который носил принцип наименьшего действия у Эйлера, он еще не был пригоден для решения новых задач механики. Дальнейший прогресс был достигнут после обобщения принципа Лагранжем на механические системы, за которым последовала в XIX в. разработка классических интегральных вариационных принципов, переросших в конечном итоге рамки самой механики.

11. Выдающийся вклад был внесен Эйлером в создание общей теории движения твердого тела. Первоначально, в конце 30-х годов, при подготовке своей "Корабельной науки" (1749), напечатанной в Петербурге, Эйлер занимался некоторыми частными задачами динамики твердого тела. В этом большом двухтомном сочинении мы находим разложение движения корабля на поступательное и вращательное, попытку расчета малых колебаний корабля на воде, продвинутое учение об устойчивости равновесия плавающих тел, элементы учения о моментах инерции.

К общей теории движения твердого тела Эйлер вернулся в 1749–1750 гг. Известным побуждением к тому послужили, по-видимому, исследования Даламбера, вошедшие в его трактат о предварении равноденствий и нутации земной оси и содержавшие определенные подходы к теории вращения твердого тела. Первый решающий шаг для построения динамики твердого тела был совершен Эйлером в мемуаре "Открытие нового принципа механики" (1752). Здесь Эйлер изложил "общий и фундаментальный принцип всей механики", который по существу заключался в применении основного закона динамики (второго закона Ньютона) для каждой бесконечно малой частицы в проекциях на оси неподвижной системы координат:

$$Md^2x = Pdt^2, \quad Md^2y = Qdt^2, \quad Md^2z = Rdt^2,$$

где M – масса частицы, а P, Q и R – составляющие внешних сил (Эйлер записывает эти уравнения с коэффициентом 2 в левой их части, что объясняется применявшейся тогда системой физических единиц, в которой ускорения безразмерны, а скорости измеряются специальным образом). В своих мемуарах Эйлер писал, что "именно на этом единственном принципе должны быть основаны все другие принципы, как те, которые уже получены в механике и гидравлике и которыми пользуются сейчас для определения движения твердых и жидких тел, так также и те, которые пока еще неизвестны и которые нам нужны для развития как указанных выше случаев твердых тел, так и многих других, которые относятся к жидким телам".

Итак, новый принцип Эйлера включал выделение элементарной частицы из сплошной среды и применение к ней основного закона Ньютона, записанного в проекциях на оси неподвижной системы координат. Сейчас трудно себе даже представить тот импульс, который придала механике эта работа Эйлера, которая кажется нам сегодня самоочевидной. Но именно она открыла самый простой и естественный путь для построения динамики твердого тела и, главное, механики сплошной среды [15].

Справедливости ради надо отметить, что запись основного закона динамики в проекциях на оси неподвижной системы координат применительно к изучению движения материальной точки была предложена в качестве самостоятельного "принципа" механики еще Маклореном в его "Трактате о флюксиях" (1742) [37]. В 40-х годах такая запись уравнений движения уже использовалась рядом ученых, в том числе и самим Эйлером. Однако никому до Эйлера не пришла в голову мысль о том, что эти дифференциальные уравнения, будучи выписаны для произвольного элемента среды (или тела), непосредственно приводят к математической формулировке общих задач механики. (Необходимость независимого привлечения также и закона момента количества движения была, по-видимому, осознана Эйлером значительно позже.)

На основании этого подхода Эйлер вывел сразу же общие уравнения вращения твердого тела, однако представил их первоначально в малоудобной для исследования форме, отнесенной к неподвижной системе координат, вводя моменты инерции тела (относительно неподвижных осей), которые меняются в процессе движения тела.

В 1755 г. Сегнер опубликовал небольшое сочинение, посвященное исследованию свободных осей вращения произвольных тел. Понятие свободной оси вращения использовалось Эйлером ранее в его “Корабельной науке”, но там он не утверждал еще, что каждое тело, как это установил Сегнер, имеет три взаимно перпендикулярные оси свободного вращения. По признанию Эйлера, ознакомление с работой Сегнера побудило его вернуться к изучению вращения твердых тел и дало в руки путеводную нить для построения компактной общей теории. В результате, в своих работах по теории вращения твердых тел, относящихся к концу 50-х годов (но опубликованных в “Мемуарах” Берлинской академии лишь в 1765 г.), Эйлер использовал в качестве основной системы координат главные оси инерции тела, являющиеся свободными осями вращения, и придал общим динамическим уравнения ставшую ныне классической (с точностью до обозначений) форму:

$$dx+\frac{c-b}{a}yzdt=\frac{Pdt}{Ma},\quad dy+\frac{a-c}{b}xzdt=\frac{Qdt}{Mb},\quad dz+\frac{b-a}{c}xydt=\frac{Rdt}{Mc}.$$

Здесь M – масса, a, b, c – главные центральные моменты инерции тела (обозначавшиеся у Эйлера через aa, bb и cc), P, Q, R – моменты внешних сил (Эйлер записывает эти уравнения с коэффициентом $2g$ в правой их части, что объясняется уже упоминавшимся выше использованием отличной от современной системы физических единиц). Тогда же Эйлер исследовал и первый знаменитый случай интегрируемости в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки – центра масс. Эйлеру принадлежит, наконец, и разработка кинематики твердого тела, включая вывод обеих форм кинематических уравнений вращения (одну из которых иногда называют уравнением Пуассона), а равно и развернутое учение о моментах инерции (геометрия масс), за исключением, впрочем, построения эллипсоида инерции.

Завершением основного этапа исследований Эйлера по динамике твердого тела явился его трактат “Теория движения твердых тел” (1765), который он закончил в 1760 г. и считал третьим томом своей “Механики”. Эйлер продолжал заниматься динамикой твердого тела и в последующие годы. В частности, в его сочинении “Новый метод определения движения твердых тел” (1776) впервые выписаны совместно шесть уравнений движения произвольного тела, представляющие законы количества движения и момента количеств движения:

$$\int dM\frac{d^2x}{dt^2}=P,\quad \int zdM\frac{d^2y}{dt^2}-\int ydM\frac{d^2z}{dt^2}=S,$$

$$\int dM\frac{d^2y}{dt^2}=Q,\quad \int xdM\frac{d^2z}{dt^2}-\int zdM\frac{d^2x}{dt^2}=T,$$

$$\int dM\frac{d^2z}{dt^2} = R, \quad \int ydM\frac{d^2x}{dt^2} - \int xdM\frac{d^2y}{dt^2} = U.$$

(У Эйлера эти уравнения записаны с дополнительным коэффициентом в правой их части, как и в приведенной выше системе уравнений). Клиффорд Трусделл считает это место у Эйлера первым в истории механики появлением обоих этих законов в качестве "*фундаментальных, общих и независимых законов механики* для всех видов движений всех видов тел". В связи с этим Трусделл предложил называть совокупность этих законов "*законами механики* Эйлера" [42, с. 260].

12. Эйлеру принадлежит разработка фундаментальных основ механики жидкости и газа. Интерес Эйлера к задачам движения жидкости проявился еще в юношеские годы. Под влиянием Иоганна Бернулли он использовал тогда при исследовании истечения жидкости из сосудов закон живых сил, воспользовавшись наряду с этим применявшейся уже ранее гипотезой плоских сечений и соответствующей ей формой условия неразрывности. Свои результаты Эйлер доложил Петербургской академии в двадцатилетнем возрасте в августе 1727 г., через две недели после аналогичного доклада Даниила Бернулли. Результаты обоих авторов совпали, и в этой деликатной ситуации Эйлер уступил право публикации полученных результатов своему старшему товарищу, полностью прекратив свои собственные исследования в этой области на четверть века.

Только в середине XX века автор обнаружил и опубликовал рукопись Эйлера 1727 года [15, т. 2, с. 253–280/542–571], содержащую те же результаты, что и полученные Даниилом Бернулли. Любопытно что набросанный Эйлером еще в Базеле проспект трактата о движении жидкости схож с планом последующей "Гидродинамики" Даниила Бернулли (1738). Более того, Эйлер оказал большое влияние и на подготовку "Гидравлики" Иоганна Бернулли (1743) [9].

Сам Эйлер вернулся к общим проблемам движения жидкости лишь в начале 50-х годов, уже после публикации "Гидродинамики" Даниила Бернулли (1738) и "Гидравлики" Иоганна Бернулли (1743). К этому времени Эйлер выработал окончательно два необходимых для общего построения гидродинамики представления: четкое понятие о давлении в текущей жидкости и простую формулировку основного закона динамики (закона импульса) для элементарной частицы среды. Данное Эйлером определение давления явилось рафинированным завершением эволюции этого понятия, возникшего в 1730 г. у Даниила Бернулли и усовершенствованного отчасти Иоганном Бернулли.

Первые подходы к выводу общих континуальных уравнений движения жидкости были предприняты в самом конце 40-х годов Даламбером. Свои гидродинамические исследования он представил в конце 1749 г. на конкурс Берлинской академии и позже опубликовал в Париже (1752). Наряду с соображениями о сопротивлении жидкостей, в его сочинении содержалось рассмотрение непрерывного поля скоростей и вывод дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости в некоторых случаях. Хотя и насыщенное новыми идеями, сочинение Даламбера не доводило исследования до общих уравнений движения жидкости. Более того, написанное в свойственном Даламберу нечетком и непоследовательном стиле, сочинение это трудно для чтения и понимания. Изучавший его тщательно, Трусделл писал: "Ясность и прямота, которых мы ожидали на основании введения к сочинению, нигде не обнаруживаются, и я признаюсь, что мне стоило громадного труда проследить, насколько это удалось, за действительным содержанием работы, – труда, облегчению которого не послужили многочисленные опечатки в основных результатах" [43, с. LI]. Подчеркнутые Трусделлом недостатки работы Даламбера не лишили ее, конечно, ценности, особенно для Эйлера, который имел возможность ознакомиться с ней в Берлине еще в 1750 г.

Именно Эйлеру удалось построить, с присущей ему ясностью и четкостью, всю систему уравнений континуального движения идеальной жидкости. При этом он опирался на свой упомянутый выше "новый принцип механики". Первые результаты Эйлера по общей теории движения жидкости относятся, по-видимому, к 1752 г. Два его основные фундаментальные сочинения по гидростатике и гидродинамике, относящиеся к 1753–1755 гг., опубликованы в 1757 г. в "Мемуарах" Берлинской академии.

В первом из этих сочинений (1757) Эйлер обобщил результаты Клеро и придал изложению гидро- и аэростатики ту форму, которая сохранилась, в основном, и до наших дней. Он вводит понятие давления p, измеряемого высотой столба однородной жидкости, указывает на зависимость давления, по крайней мере, от плотности и температуры и дает затем вывод общего уравнения равновесия жидкостей и газов:

$dp = q\ (P\ dx + Q\ dy + R\ dz)$.

Эйлер понимает в приведенном уравнении под p высоту столба однородной жидкости, т. е. отношение давления к выбранной им постоянной величине, а под q – соответствующую безразмерную плотность; компоненты массовых сил отнесены здесь к ускорению силы тяжести. Использованная здесь система единиц несколько отличается от той, которая применялась Эйлером при первоначальном изложении им "нового принципа механики".

Затем Эйлер вводит понятие потенциала сил s и, переписав общее уравнение равновесия в виде $dp = q\ ds$, указывает на постоянство давления, плотности и температуры на поверхностях уровня потенциала s. Потом он выводит общие зависимости применительно к случаю идеального газа, рассматривает действующие на погруженное тело силы и переходит к подробному рассмотрению различных случаев равновесия жидкостей и газов. Здесь он получает, в частности, известную барометрическую формулу для изотермической атмосферы, а также высказывает соображение о том, что при постоянном объеме температуру целесообразно определять пропорциональной давлению газа.

Второе свое сочинение – "Общие законы движения жидкостей" (1757) [18] – Эйлер начинает с общей постановки задач теории движения идеальной жидкости. Затем из обычного для нашего времени рассмотрения элементарного жидкого параллелепипеда выводятся общие уравнения гидродинамики и уравнение неразрывности для сжимаемых жидкостей:

$$P - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$Q - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$R - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qu}{\partial x} + \frac{\partial qv}{\partial y} + \frac{\partial qw}{\partial z} = 0.$$

Здесь p – давление, q – плотность, P, Q и R – массовые силы. В оригинальной записи Эйлера эти уравнения отличаются только обозначением частных производных. Вместо введенного позже Лежандром и Якоби и принятого сейчас обозначения частных производных через круглое "∂" Эйлер использовал прямое "d" и для отличия от полных производных частные производные он записывал в круглых скобках. Например, частная производная $\partial p/\partial x$ в записи Эйлера выглядела как (dp/dx).

Эйлер добавляет тут же, что к этим четырем уравнениям следует добавить пятое, которое дает связь между давлением, плотностью и дополнительной физической величиной, которая влияет на давление и под которой подразумевается, вообще говоря, температура. Полученные в результате пять уравнений, говорит Эйлер, “заключают в себе всю теорию движения жидкости”.

Вслед за приведенным выводом основных уравнений гидродинамики Эйлер вводит потенциалы сил S и скорости W и получает формулу

$$dp = q\,(dS - d\Pi - u\,du - v\,dv - w\,dw), \text{где} \quad \Pi = \frac{\partial W}{\partial t},$$

и соответствующие интегралы для случая несжимаемой жидкости, а также, вообще, для баротропных процессов – интегралы, носящие сегодня обычно название интегралов Лагранжа–Коши. Эйлер специально оговаривает здесь существование непотенциальных течений жидкости, приводя в качестве примера один случай вихревого вращения несжимаемой жидкости в отсутствии массовых сил. Заканчивается сочинение исследованием отдельных частных случаев и замечанием, что полученные уравнения переводят задачи движения жидкости из области механики в область математического анализа. При чтении этого сочинения особенно поражают (свойственные и большинству других работ Эйлера) ясность и простота изложения мыслей. Трудно, порой, поверить, что его отделяет от нас уже два с половиной века [19].

Вслед за первыми тремя работами Эйлера по механике жидкости и газа последовали многие другие его сочинения, посвященные гидродинамике и теории распространения звука. Завершением и обобщением их явилась большая работа (516 с.), относящаяся уже к концу 60-х годов и опубликованная в четырех частях в 1769–1772 гг. в “Новых комментариях” Петербургской Академии наук. Первая ее часть включает рассмотрение общих свойств жидкостей и газов, вывод общих уравнений равновесия и исследование частных случаев равновесия в поле силы тяжести и центральных сил. Во второй части выведена система общих уравнений гидродинамики идеальной жидкости и рассмотрены подробнее случаи движения несжимаемых жидкостей, в том числе потенциального течения. Последняя глава посвящена определению движения жидкости по заданному начальному состоянию; здесь, в частности, выведены общие уравнения гидродинамики в так называемых переменных Лагранжа – материальных переменных. Отметим, что эти переменные были указаны Лагранжу Эйлером в его письме от 1 января 1760 г., опубликованном Лагранжем в 1762 г. вместе со своими собственными связанными с этим исследованиями. В третьей части работы Эйлер рассматривает течение в трубах постоянного и переменного сечения, расчет подъема воды при помощи насосов и течения под действием разности температур. Последняя часть является обобщением многочисленных предыдущих исследований Эйлера по акустике и теории духовых музыкальных инструментов [20].

Таким образом, Эйлер заложил основы всей гидродинамики идеальной жидкости, за исключением сверхзвуковой аэродинамики, зародившейся на столетие позже и развившейся уже в XX веке. Не обладая общим понятием напряжения, введенным Коши в 1823 г., Эйлер не смог, конечно, перейти к изучению более сложных моделей механики сплошной среды – вязкой жидкости и упругого тела. Однако многое для дальнейшего развития механики сплошной среды было Эйлером подготовлено.

13. Осветив несколько подробнее две блестящие страницы в творчестве Эйлера – создание им теории движения твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости, остановимся теперь коротко на его работах по механике гибких и упругих тел. Задачами механики упругих тел (стержней) Эйлер заинтересовался еще в ранней молодости. Любопытно, что в одной маленькой заметке, написанной Эйлером еще в Базеле, но опубликованной лишь посмертно (1862), Трусделл обнаружил первый вывод закона изгиба стержней Якоба Бернулли из закона Гука для растяжения волокон – результат, не замеченный самим Эйлером и переоткрытый им затем заново значительно позже. Не останавливаясь на важных работах Эйлера (и Даниила Бернулли) о поперечных колебаниях стержней, перейдем к знаменитым исследованиям Эйлера о равновесных формах упругих стержней и их продольном изгибе. Эти исследования были инициированы открытием свойства экстремальности упругой энергии изогнутых стержней, обнаруженного Даниилом Бернулли (1742.). Относящиеся сюда классические результаты Эйлера были опубликованы им в 1744 г. в виде специального приложения “Об упругих кривых” к его трактату по вариационному исчислению (1744). Здесь были проанализированы 9 возможных типов равновесных форм (первоначально прямолинейного) стержня прямоугольного сечения, изогнутого под действием приложенной к его концам силы и момента. Здесь же содержится, по существу, и общая формула для критической силы при продольном изгибе стержня. Сам Эйлер, впрочем, применил эту формулу только для случая стержня с шарнирно опертыми концами. В последующем Эйлер неоднократно возвращался к вопросу о продольном изгибе колонн, и последние его исследования в этой области, относящиеся к концу 70-х годов, посвящены продольному изгибу колонн под действием их собственного веса. В ряде работ по этой проблеме (1780) Эйлер последовательно преодолевал встречавшиеся трудности, получив, в конце концов, правильное решение.

Активное участие принял Эйлер в дискуссии о колебаниях струны. По существу, задача о малых поперечных колебаниях струны (и о распространении звука) была первой задачей динамики систем с бесконечным числом степеней свободы. Примечательно, что эта задача начала изучаться задолго до того, как была разработана динамика систем с конечным числом степеней свободы. Классическое волновое уравнение колебаний струны получил в 1746 г. Даламбер (опубликовано в 1749 г.). Тогда же он нашел и его решение, содержащее две произвольные функции от аргументов $(ct{+}x)$ и $(ct\text{-}x)$. Однако Даламбер произвольно ограничил класс функций, входящих в решение волнового уравнения, некоторыми условиями “непрерывности” и “гладкости”. Эйлер занялся исследованием волнового уравнения сразу же вслед за Даламбером и подчеркнул, что общее решение задачи о струне должно включать функции значительно более широкого класса – произвольные кусочно-гладкие функции. Третий активный участник дискуссии о колебаниях струны – Даниил Бернулли включился в нее также почти с самого ее начала. Бернулли возражал против абстрактных рассуждений Даламбера и Эйлера о произвольных функциях и считал, что колебания струны проще и естественнее представлять как суперпозицию простых гармонических колебаний. Дискуссия о характере решений волнового уравнения продолжалась много лет (позже в нее включился и Лагранж) и оказала большое влияние на последующее развитие методов математической физики и, в известной мере, теории функций действительного переменного.

Укажем еще на относящиеся к 70-м годам обобщающие исследования Эйлера по механике гибких и упругих (одномерных) тел. Здесь им были получены общие уравнения равновесия и движения деформируемой линии (и плоскости) без специальных предположений о природе ее материала и о малости деформаций. При этом Эйлер рассматривал действующие в сечениях поперечные силы, предвосхитив представление о касательных напряжениях. Наконец, к этим же годам относится введение Эйлером физической характеристики материала, вполне эквивалентной модулю Юнга, и тем самым отделение в задачах теории упругости упругих свойств материала от формы рассматриваемого тела.

14. В приведенном очерке практически вовсе не затронуты сочинения Эйлера по прикладной механике. В историческом аспекте они, конечно, уступают его исследованиям в области математики и рациональной механики, но и в развитии прикладной механики Эйлер оставил глубокий след. Эйлер занимался вопросами сухого трения (в частности, его имя носит формула для расчета трения каната, обернутого вокруг круглого вала). Ему принадлежат интересные работы по общей теории машин, а также по расчету различных конкретных машин, механизмов и приборов (например, весов). Заслуживает специального упоминания исследование Эйлером формы зубчатых колес. Цикл работ посвящен Эйлером гидравлическим двигателям и, в частности, теории колеса Сегнера – прообраза реактивной гидравлической турбины

Глубокие исследования были проведены Эйлером по теории корабля. После выпуска упомянутой выше двухтомной "Корабельной науки" (1749) он изучал различные системы движителей, в том числе гидрореактивные движители, выведя для последних некоторые сохраняющие значение и до наших дней расчетные формулы. Эйлеру принадлежат также некоторые результаты по строительной механике корабля. Наконец, Эйлер выпустил написанное по-французски практическое руководство по кораблестроению и вождению кораблей (1773). Замечательно, что это руководство было переиздано затем в Париже, использовалось там в качестве учебного пособия, а также было переведено на английский, итальянский и русский языки.

Возвращаясь к программе построения механики, предложенной Эйлером в молодости, надо отметить, что он построил на протяжении своей жизни три из намеченных им шести общих разделов механики: сюда относятся аналитически изложенная механика точки (n^{o}1), механика твердого тела (n^{o}2) и гидродинамика (n^{o}6). В учение о гибких телах (n^{o}3) и в механику системы (n^{o}5) Эйлер внес фундаментальный вклад, наряду с другими учеными. Что же касается теории упругости (n^{o}4), которой он посвятил ряд важных исследований, то она была создана лишь в XIX веке. Отвечая в целом на поставленный вопрос, можно сказать, что Эйлер блестяще справился с той грандиозной программой, которую он поставил пред собой в первом томе “Механики” (1736), не сознавая еще ее невероятной трудности. Эйлеру мы в большей степени, чем кому-либо другому, обязаны уяснением основ механики.

Примечания:

1. Здесь и далее все даты приведены по новому, григорианскому стилю.

2. О создании и первом периоде деятельности Петербургской Академии наук см. [4].

3. Постепенно средний возраст членов Академии рос, удвоившись за 250 лет.

4. См. [22, т. 2, с. 86]. Русский перевод цитирован по П.П.Пекарскому [12, с. 255].

5. Источниками для изучения деятельности Эйлера в Петербургской Академии наук служат, помимо новейших исследований, три тома “Протоколов” Академической конференции за 1726–1803 гг. [13] и 10 томов “Материалов” для истории Академии наук в 1716–1760 гг. [8]. См. также описание материалов Эйлера в Архиве Академии наук [15, т. 1].

6. См. [22, т. 2, с. 182]. Русский перевод цитирован по П.П.Пекарскому [12, с. 265].

7. Приведены слова Эйлера из его автобиографии [11]. Русский перевод автобиографии Эйлера и некоторых других его биографических материалов XVIII в. см. в [3].

8. Сохранились и опубликованы краткие извлечения из протоколов Берлинской Академии наук за 1746–1766 гг. [23]. Опубликовано также описание хранящихся в Берлинской академии документов Эйлера [32].

9. См. [22, т. 1, с. 162]. Русский перевод цитирован по П.П.Пекарскому [12, с. 279].

10. Среди помощников Эйлера тех лет отметим его старшего сына Иоганна-Альбрехта и особенно уроженца Базеля Николая Фуса, специально приехавшего для этой цели по рекомендации Д.Бернулли в Петербург и вошедшего впоследствии в семью Эйлера.

11. Особое место в наследии Эйлера представляют три тома его “Писем к немецкой принцессе о разных физических и философских материях”, написанных в 1760–1762 гг. для наставления одной из дальних кузин Фридриха II и первоначально не предназначенных для печати. Выпущенные в трех томах (1768–1772) “Письма” эти выдержали в конце XVIII и начале XIX вв. около 40 изданий на 9 европейских языках, а недавно были переизданы в новом русском переводе в академической серии “Классики науки” (2002). Эти “Письма” представляют собой энциклопедию естествознания середины XVIII века, но собственно философская часть их подверглась сразу же после их публикации жесткой критике в прогрессивных ученых кругах. Так, Даламбер писал Лагранжу по поводу “Писем” Эйлера: “Вы были правы, говоря, что он не должен был печатать это сочинение ради своей же чести. Невероятно, чтобы такой великий гений в геометрии и анализе, как он, был в метафизике настолько ниже самого младшего школьника (le plus petit écolier), – чтобы не сказать – таким плоским и нелепым. Это дает право повторить: Non omnia eidem Dii dedere [Не всё Боги дают одному и тому же]” [33]. Одновременно, впрочем, надо помнить, что, некоторые аспекты философско-физических представлений Эйлера безусловно оказали влияние на формирование последующей немецкой философии и, в частности, философии Канта.

12. За первые 50 лет издательской деятельности Петербургской Академии наук Эйлеру принадлежит 60% всех ее публикаций по чистой и прикладной математике, а за 100 лет – 40%. Любопытно, что статьи Эйлера печатались непрерывно в каждом

томе основного академического журнала, неоднократно менявшего свое название, на протяжении ста лет (с 1729 до 1830 г.).

13. Большинство петербургских статей Эйлера написаны по-латыни, а берлинских – по-французски. Наиболее полная для своего времени библиография трудов Л.Эйлера была составлена Г.Энестрёмом [24]. Его указатель воспроизведен, с сокращенными описаниями, в посвященном материалам Эйлера сборнике [15, т. 1, с. 352–387].

14. Родословная роспись потомков Леонарда Эйлера была опубликована в юбилейном сборнике [14], а позже также в дополненном виде [20].

15. Многое для понимания величия вклада Эйлера в становление рациональной механики сделал в середине XX века выдающийся американский историк механики Клиффорд Трусделл. Ему принадлежит ряд фундаментальных исследований, частично отраженных в его монографии [42], и обширнейшие (по несколько сотен страниц) предисловия к томам "Полного собрания трудов" (Opera omnia) Эйлера, посвященным гидродинамике и механике гибких и деформируемых тел (тт. 11/2, 12 и 13 второй серии).

16. Характерной для Эйлера была острота ума, которая позволяла ему на основании малейшего намека возводить стройную и совершенную теорию. Это позволяло ему достигать блестящих успехов, в том числе и использовав нечетко сформулированные мысли современников. С другой стороны, в молодости Эйлера отличала безграничная вера в бесспорность аналитических выкладок, приводившая его изредка к неверным, парадоксальным заключениям. Об этих ошибках молодости он сам предпочитал позже не вспоминать. Бесспорно, Эйлер всегда оставался глубоким аналитиком, не склонным к эксперименту. В физической интуиции он уступал некоторым своим современникам и, прежде всего, Даниилу Бернулли.

17. М.Ф.Субботину [16] принадлежит, пожалуй, наиболее полный разбор исследований Эйлера по небесной механике. Подробный их анализ был проведен недавно А.Верденом для подготовленных им к печати небесномеханических томов "Полного собрания трудов"Л.Эйлера (II-26 и 27).

18. Недавно опубликован русский перевод этой классической работы Эйлера [17].

19. В 2007 году во Франции была проведена большая международная конференция, посвященная 250-летию уравнений гидродинамики. Труды ее опубликованы в в специальном выпуске журнала "Physica D" (август 2008). Они содержат как обстоятельный анализ становления гидродинамики идеальной жидкости, так и разбор современных ее проблем.

20. Любопытно, что ни здесь, ни в мемуарах Эйлера 50-х годов нет анализа так называемого парадокса Даламбера, заключающегося в отсутствии гидродинамического сопротивления тел в потенциальном потоке. По существу же этот парадокс был впервые обнаружен Эйлером еще при комментировании подготовленного им немецкого перевода "Новых основ артиллерии" Бенджамина Робинса (1745), на что неоднократно обращали внимание позднейшие исследователи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вавилов, С. В. Очерк развития физики в Академии наук СССР за 220 лет / С. В. Вавилов // Собр. соч. Т. 3. – М. : АН СССР, 1956. – С. 533.

[2] Голицын, Г. С. Портрет “неизвестного” : к 300-летию Леонарда Эйлера / Г. С. Голицын // Природа. – 2007. - № 6. – С. 61-64.

[3] Копелевич, Ю. Х. Материалы для биографии Л. Эйлера / Ю. Х. Копелевич // Историко-математические исследования. Вып. 10. – 1957. – С. 9-65.

[4] Копелевич, Ю. Х. Основание Петербургской Академии наук / Ю. Х. Копелевич. – Ленинград [СПб.]: Наука, 1977.

[5] Леонард Эйлер и современная наука : материалы Международной научной конференции. – СПб ., 2007.

[6] Леонард Эйлер : сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР. – М. : АН СССР, 1958.

[7] Леонард Эйлер : сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. – М. ; Ленинград [СПб.] : АН СССР, 1935.

[8] Материалы для истории Императорской Академии наук : в 10 т. – СПб. : Имп. Академия наук, 1885-1900.

[9] Михайлов, Г. К. Становление гидравлики и гидродинамики в трудах петербургских академиков (XVIII век) / Г. К. Михайлов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1999. – № 6. – С. 7-26.

[10] Остроградский, М. В. Педагогическое наследие, документы о жизни и деятельности / М. В. Остроградский. – М. : Физматгиз, 1961. – С. 307-308.

[11] Пекарский, П. П. Екатерина II и Эйлер / П. П. Пекарский // Записки Академии наук. – 1864. – Т. 6, ч. 1. – С. 59-92.

[12] Пекарский, П. П. История Императорской Академии наук в Петербурге. Т. 1 / П. П. Пекарский.– СПб. : Имп. Академия наук, 1870.

[13] Протоколы заседаний Конференции Императорской Академии наук : в 4 т. – СПб. : Имп. Академия наук, 1897-1911.

[14] Развитие идей Л. Эйлера и современная наука : сборник статей. – М. : Наука, 1988.

[15] Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР : в 2 т. – М. ; Ленинград [СПб.] : АН СССР, 1962-1965. – (Труды Архива АН СССР). – Вып. 17 ; Вып. 20.

[16] Субботин, М. Ф. Астрономические работы Л. Эйлера / М. Ф. Субботин // Леонард Эйлер. – М. : АН СССР, 1958. – С. 268-376.

[17] Эйлер, Л. Общие законы движения жидкостей / Л. Эйлер // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1999. – № 6. – С. 26-54.

[18] Эйлер, Л. Основы динамики точки. Первые главы из “Механики” и из “Теории движения твердых тел” / Л. Эйлер. – М. ; Ленинград [СПб.] : Гостехиздат, 1938.

[19] Юшкевич, А. П. Леонард Эйлер / А. П. Юшкевич. – М. : Знание , 1982.

[20] Amburger E. Die Nachkommen Leonhard Eulers in den ersten sechs Generationen / Amburger E ., Hecker I ., Michajlow G. // Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. 1994. – Bd. 94. – С. 163-238.

[21] Bernoulli, J. Continuatio materiae de trajectoriis reciprocis / J. Bernoulli // Acta eruditorum. – 1727. – Suppl. 9, sect. 6 = Opera omnia. – 1742. – P. 600-616.

[22] Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel L. Eulers. 3 T. – Berlin : Akademie-Verl ., 1959-1976.

[23] Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746-1766. – Berlin : Akademie-Verl ., 1957.

[24] Eneström, G. Verzeichnis der Schriften L. Eulers / G. Eneström // Jahresber.– Deutsch. Math. -Verein. Ergänzungsb. 4. –Lief. 1-2. – S. 1910-1913.

[25] Euler and Modern Science. Transl. from Russian. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer., 2007.

[26] Euler at 300 : An Appreciation. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer ., 2007.

[27] Euler, K. Das Geschlecht Euler-Schölpi / K. Euler. Giessen : Schmitz, 1955.

[28] Fellmann, E. Leonhard Euler | E. Fellmann. – Basel e. a. : Birkhäuser, 2007.

[29] Festakt und wissenschaftliche Konferenz aus Anlass des 200. Todestages von L. Euler. – Berlin : Akademie-Verlag, 1985.

[30] Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages L. Eulers. – Leipzig ; Berlin : Teubner, 1907.

[31] Heyne, A. K. Leonhard Euler : Ein Mann, mit dem man rechnen kann / Heyne A. K ., Pini E. S. – Basel e. a. : Birkhäuser, 2007.

[32] L. Eulers Wirken an der Berliner Akademie der Wissenschaften 1741-1766. – Berlin: Akademie-Verlag, 1984.

[33] Lagrange, J. L. Œuvres. T. 13 / J. L. Lagrange. – Paris: Gauthier-Villars, 1882. – C. 147-148.

[34] Laplace, P. S. Traité de mécanique céleste | P. S. Laplace. – Paris : Huzard-Courcier, 1825.

[35] Leonhard Euler, 1707-1783 : Beiträge zu Leben und Werk. – Basel : Birkhäuser, 1983.

[36] Leonhard Euler : Life, Work and Legacy. – Amsterdam e. a. : Elsevier, 2007.

[37] Mikhailov, G. K. Colin Maclaurin und Newtons Bewegungsgesetz in der modernen Cartesischen Koordinatenform / G. K. Mikhailov // Mathematics Celestial and Terrestrial (Acta historica Leopoldina. – 2008. – № . 54. – P. 523-532.

[38] Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages L. Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. – Berlin : Akademie-Verlag, 1959.

[39] Sandifer, C. E. The Eearly Mathematics of L. Euler / C. E. Sandifer. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer ., 2007.

[40] Sandifer, C. E. How Euler Did It / C. E. Sandifer. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer ., 2007.

[41] The Genius of Euler : Reflections on His Life and Work. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer. 2007.

[42] Truesdell, C. Essays in the History of Mechanics / C. Truesdell. – Berlin e. a. : Springer-Verlag, 1968.

[43] Truesdell, C. Rational Fluid Mechanics, 1687-1765 / C. Truesdell // L. Euler, Opera omnia. Vol. 11-12. – Zurich: Füssli, 1954. – P. VII-CXXV.

[44] Zum Werk Leonhard Eulers : Vorträge des Euler-Kolloquiums. – Birkhäuser, 1984.

G. K. Mikhailov

HIS LIFE, WORK, AND CONTRIBUTION TO THE FORMATION OF RATIONAL MECHANICS

All-Russian Institute for Scientific and Technical Information, RAS

Abstract. Leonhard Euler (1707-1783) is one of the greatest scientists of all times in the field of mathematics and mechanics. It is largely through his work mathematical analysis (including the theory of differential equations and the calculus of variations) came into being during the 18th century, the whole rational mechanics and, particularly, rigid body mechanics and the hydrodynamics of an ideal fluid became established and the language and style of modern scientific literature was created. The following essay gives a Leonhard Euler's biographical sketch, a short general review of his work and a more detailed analysis of his contribution to the formation of rational mechanics.

Keywords: Material, mechanics, the differential equations, hydrodynamics, elasticity, flexible bodies

Глеб Константинович Михайлов

доктор физико-математических наук, профессор Института научно-технической информации РАН, г. Москва

`e-mail:` gkmikh@mail.ru

Gleb Konstantinovich Mikhailov

doctor of sciences, professor of All-Russian Institute for Scientific and Technical Information, RAS, Moscow

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 46–75

Г. К. Михайлов

ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ

Институт научно-технической информации РАН

Аннотация. Автор вспоминает о своей переписке с двумя находившимися в эмиграции русскими учеными – Д.П.Рябушинским (1882-1962) и С.П.Тимошенко (1878–1972), об академике Н.И.Мусхелишвили (1891–1976), о личных контактах с академиком Л.И.Седовым (1907–1999), о своей бурной общественной деятельности в Институте механики Академии наук СССР в конце 50-х – начале 60-х годов и о драматической судьбе своей докторской диссертации в Московском и Ленинградском университетах.

Ключевые слова: гидродинамика, упругость, история механики, космонавтика

УДК: 539.374

О начале моей переписке с иностранными учеными (К переписке с Д. П. Рябушинским и С. П. Тимошенко)

Как известно, советские ученые были лишены в 1940-х годах права переписки с иностранными коллегами. Лишь в марте 1955 г. директора академических институтов получили официальное разрешение на пересылку за рубеж опубликованной в СССР научной литературы. При этом книги должны были пересылаться не непосредственно по почте, а направляться с официальным письмом, подтверждающим отсутствие в них сведений, нежелательных для оглашения за рубежом, в Фундаментальную библиотеку общественных наук АН СССР. При этой библиотеке был создан специальный отдел, осуществлявший пересылку литературы за границу. В том же году научным сотрудникам Академии наук была особым постановлением разрешена личная переписка с иностранными учеными, однако каждое такое письмо должно было просматриваться и визироваться директором академического института по принадлежности и направляться администрацией института в открытом виде с соответствующим сопроводительным письмом в ту же Фундаментальную библиотеку, где осуществлялся контроль и конвертование всех писем. Лишь в феврале 1967 г. сотрудникам Академии наук разрешили переписку с зарубежными коллегами непосредственно по почте, но инструкция строго ограничивала содержание такой переписки восемью пунктами: оттиски и находящиеся в свободной продаже книги, просьбы о присылке оттисков и зарубежной научной литературы, поздравления к юбилеям и в связи с награждениями, благодарности за поздравления, а также за присылку книг и оказанный за рубежом прием, запросы статей и рецензий для академических журналов. Письма, касающиеся всех остальных вопросов (например, зарубежных поездок, участия в издании зарубежных журналов и пр.), должны

Поступила 12.12.2008

были по-прежнему согласовываться с администрацией институтов или других академических инстанций[1].

В 1955 г. в "Известиях" Академии наук СССР вышла моя первая статья по истории механики, и я не преминул послать ее выдающимся русским ученым-эмигрантам Дмитрию Павловичу Рябушинскому (1882–1962) и Степану Прокофьевичу Тимошенко (1878–1972), от которых я получил тотчас же благодарственные ответы, послужившие началом последующей переписки.

Несколько слов о выдающемся гидроаэродинамике и основателе знаменитого подмосковного Кучинского аэродинамического института (1904), членекорреспонденте Парижской Академии наук Д.П.Рябушинском.

В 1918 г. он озаботился национализацией своего Кучинского аэродинамисческого института. Осенью того же года ему удалось, с большим трудом и при активной поддержке Российской Академии наук, получить официальное разрешение на выезд в заграничную научную командировку. Перед отъездом он был ненадолго арестован и, не будучи уверен в сохранении жизни, составил научное завещание с напутствием о дальнейшем развитии работ в Кучинском институте. Из командировки он, естественно, уже больше не вернулся и поселился навсегда в Париже.

Однако Д.П.Рябушинский оставался в течение всей жизни горячим патриотом своей Родины. В 1945 г., в связи с широко проводившимися торжествами по случаю 220-летия Академии наук СССР, Д.П.Рябушинский переслал в дар Академии большую фотографию обнаруженного им во французских архивах подлинного письма Петра Великого Парижской Академии наук[2]. Свою сопроводительную записку президенту Академии наук он завершил следующими словами: "За 27 лет пребывания вне пределов нашей Родины, я неизменно преследовал две цели: I – участие, по мере моих сил, в увеличении русского вклада в мировую науку, II – хранение, отстаивание значения и содействие увеличению, несмотря ни на какую преходящую обстановку, наших отечественных культурных ценностей".

Наряду с собственно научной и педагогической деятельностью, Д.П.Рябушинский участвовал и в общекультурной жизни русской эмиграции. Так, он был президентом Русского общества философии науки и Ассоциации по сохранению русских культурных ценностей за рубежом. Будучи патриотом России, он активно работал в этой ассоциации до последних дней жизни, поскольку считал весьма важной основную ее задачу – просмотр безнадзорных архивов распадающихся русских семей и отбор ценных материалов с целью подготовки их для передачи в официальные архивы, преимущественно голландские, которые считались тогда более надежными. Овдовев в 1952 г., Рябушинский жил последние годы очень одиноко, много сил отдавая этой деятельности. Когда я, – единственный из граждан СССР, – посетил Рябушинского (в марте 1960 года) в его расположенной в бельэтаже квартире в 15-м квартале Парижа, я нашел все кресла в комнатах заваленными папками с подлежащими разбору бумагами.

---

[1]Любопытно, что приведенные здесь сведения о порядке сношения советских ученых с иностранцами я видел опубликованными только в предисловии к изданной в Германии переписке нашего выдающегося историка науки А.П.Юшкевича с его немецким коллегой К.Фогелем, начавшейся именно в 1955 г. (Мюнхен, 1997).

[2]Присланная Д.П.Рябушинским фотография, наряду с прочими раритетами, украшала в течение долгих лет кабинет директора Архива Академии наук СССР Г.А.Князева (1887–1969) в Ленинграде.

Те годы были периодом триумфа советской космонавтики, и Д.П.Рябушинский гордился достижениями своей родины. На мой вопрос о том, не хотел бы он ее посетить на склоне лет, Рябушинский ответил отрицательно. "Во-первых, я не французский подданный, а лицо без гражданства, что ставит меня в двусмысленное положение, – с грустью сказал он. – А, во-вторых, последние мои родственники в России погибли, по-видимому, еще в 20-х годах, и мне было бы тяжело увидеть еще раз ставшие чужими места, которые дороги моей памяти".

В 1963 г. в Тбилиси предполагалось провести Международный симпозиум по приложениям теории функций в механике сплошной среды, и, участвуя в его организации, я подготовил запрос о приглашении на него Рябушинского. Но это оказалось запоздалым актом. Дмитрий Павлович скончался в Париже 27 августа 1962 г., не дожив двух месяцев до своего восьмидесятилетия. Прах его покоится на знаменитом русском кладбище в Сент-Женевьев-де-Буа под Парижем, неподалеку от построенного там Альбертом Александровичем Бенуа (1888–1960) храма, в окружении могил многих выдающихся сынов русского народа.

Судьба научного наследия Д.П.Рябушинского в нашей стране достойна сожаления. Кучинский институт был загублен, а имя Дмитрия Павловича было на протяжении десятков лет под запретом. И только выдающийся историк космонавтики Н.А.Рынин (1877–1942) успел включить в 1929 г. обзор трудов Рябушинского по интересовавшей его тематике во второй том своей замечательной энциклопедии "Межпланетные сообщения".

В 1950 г. на широкий экран советского кино был выпущен художественный фильм "Жуковский", в котором Д.П.Рябушинский был представлен попросту в оскорбительном свете. (Дмитрий Павлович говорил мне, что он отказался смотреть этот удостоенный первой премии на Карловарском фестивале и демонстрировавшийся за рубежом фильм, равно как и не уступил советам друзей подать в суд на авторов фильма.) И даже некролог Рябушинского, опубликованный в 1962 г. в "Докладах" Парижской Академии наук, был изъят цензурой из печатавшегося тогда в СССР репринтного издания этого журнала.

Моя попытка отметить в 1982 г. столетие со дня рождения Д.П.Рябушинского в отечественной литературе не увенчалась успехом. Желание хотя бы депонировать юбилейную статью было также отклонено всемогущим Главлитом. "Спасло" статью только личное знакомство директора Института проблем механики АН СССР академика А.Ю.Ишлинского с одним из руководителей этого ведомства, с которым Александр Юльевич часто играл в шахматы, отдыхая в правительственном санатории. В ответ на звонок по "кремлевскому" телефону, который имелся тогда в кабинете у Ишлинского, как у депутата Верховного Совета СССР, этот деятель разрешил депонировать статью, ... но ни в коем случае не к 100-летию, а лишь "просто так" – на следующий год. Уже после "перестройки" статья эта была перепечатана, в слегка переработанной и снабженной фотографиями форме, в 1991 г. в "Вестнике" АН СССР, а затем в сильно расширенном виде в "Вопросах истории естествознания и техники" (2005, № 3).

В 1990-х годах ситуация в России изменилась, появилось много статей и книг, посвященных династии Рябушинских и отдельным ее представителям. В сентябре 1994 г. были проведены международные торжества по случаю 90-летия Кучинского Аэродинамического института, на которые были приглашены потомки Дмитрия Павловича; в 2002 г. Центральный Дом ученых Российской Академии наук провел торжественное заседание, приуроченное к 120-летию со дня рождения Д.П.Рябушинского; в сентябре 2004 г. в Научно-мемориальном музее Н.Е.Жуковского состоялось организованное при участии ряда ведущих научных учреждений страны "Торжественное заседание, посвященное 100-летию создания Аэродинамического института Д.П.Рябушинского в Кучино"; в 2006 г. была организована лекция о Д.П.Рябушинском в Институте механики МГУ им. М.В.Ломоносова, в рамках цикла "Выдающиеся ученые - математики и механики" (на всех этих мероприятиях я выступал с юбилейными докладами).

Сегодня имя выдающегося русского ученого Дмитрия Павловича Рябушинского полностью возвращено его родине. Обсуждался и вопрос о передаче России находящихся во Франции остатков его личного архива. Эти бумаги находятся у его правнука князя Степана Георгиевича Белосельского-Белозерского. Я ознакомился с ними на месте в 2004 и 2005 г., но они оказались отражающими лишь небольшую часть жизни и деятельности Д.П.Рябушинского и находящимися, к тому же, в плачевном состоянии. Так или иначе, Российская Академия наук готова принять все эти документы на вечное хранение в своем Архиве.

О моей, начавшейся в 1955 г. переписке со Степаном Прокофьевичем Тимошенко писать здесь подробно не буду, так как она подробно отражена в моем "Послесловии" к готовящемуся новому изданию "Воспоминаний" С.П.Тимошенко (надеюсь, что они будут, наконец, выпущены в свет в этом году издательством "Вузовская книга"). Отмечу только, что в июне 1958 г. С.П.Тимошенко совершил, в качестве частного лица, свою первую поездку в СССР. Приехав в Москву и не получив еще номера в "Метрополе", он позвонил мне сразу же из гостиничного бюро "Интуриста" и выразил пожелание немедленно посетить Институт механики АН СССР, чем поставил меня в крайне затруднительное положение. Посещение иностранцем, да еще "белоэмигрантом", академического института требовало обязательного разрешения отдела науки ЦК КПСС. Под благовидным предлогом я уклонился от немедленной встречи и, согласовав вопрос с директором института членом-корреспондентом АН СССР А.А.Ильюшиным, отправился вечером в гостиницу вместе с двумя другими членами-корреспондентами Академии – В.З.Власовым и В.В.Соколовским. Благодаря тому, что Степан Прокофьевич обратился по приезде в Москву сначала именно ко мне, я оказался его сопровождающим на все дни его пребывания в городе. Впоследствии С.П.Тимошенко опубликовал в Париже свои "Воспоминания" (1963), которые безуспешно пытался мне переслать (их неукоснительно задерживала цензура). В 1964 г. я все же получил на одну ночь книгу от украинского академика Г.Н.Савина (которому ее подарил в Мюнхене сам Тимошенко). В целом очень интересные "Воспоминания" вызвали тогда у советских ученых острую реакцию в связи с резкой антисоветской направленностью отдельных комментариев автора. Я был, в частности, искренне возмущен тем, как он квалифицировал мою роль при нем во время его посещения Москвы. "Про себя я решил, – писал он, – что он [т.е. я – Г.М.] должно быть был представителем коммунистической партии" (кстати, я даже не был тогда коммунистом). В сентябре 1964 г. я написал Степану Прокофьевичу длинное письмо, в котором высказал ему все свои чувства. Естественно, было бессмысленно согласовывать это письмо с директором Института механики, и я попросту опустил его в почтовый ящик, вопреки действовавшей тогда инструкции. Мало надеясь на то, что письмо дойдет до адресата и еще меньше на то, что он мне ответит, я получил вскоре “примирительное” письмо от С.П.Тимошенко, после которого наша переписка продолжилась.

В декабрьском выпуске “Известий АН СССР” по Отделению технических наук была опубликована небольшая статья, приуроченная к 80-летию С.П.Тимошенко, чему он был приятно удивлен (писали мы эту статью с А.И.Лурье). Я подготовил тогда также приветственный адрес Степану Прокофьевичу от имени Академии наук СССР, получив одобрение на текст адреса от президента Академии академика А.Н.Несмеянова. Адрес был красиво набран золотым шрифтом в академической типографии, но в последний момент президент его не подписал, и Академия ограничилась лишь приветственной телеграммой (по-видимому, “директивные органы” не одобрили посылки приветственного адреса “белоэмигранту”, хотя он и был великим ученым и патриотом).

Не останавливаясь на остальном, отсылаю читателя к упомянутому мной выше “Послесловию” к предстоящему изданию “Воспоминаний” Степана Прокофьевича, где будут опубликованы и некоторые письма из моей с ним переписки.

О Николае Ивановиче Мусхелишвили

В 1956 году права Академии наук СССР на прямое международное сотрудничество были существенно расширены, и Академия вошла через созданные при ней для этой цели национальные комитеты в ряд ведущих международных научных организаций. В связи с этим был учрежден и Национальный комитет СССР по теоретической и прикладной механике, первым председателем которого по инициативе группы членов Академии, в которую входили, в частности, М.В.Келдыш и М.А.Лаврентьев, был избран Николай Иванович Мусхелишвили. Мне посчастливилось сотрудничать с Николаем Ивановичем при создании и в последующей работе этого комитета в качестве ученого секретаря на протяжении двадцати лет[3]. Национальный комитет по механике был с самого начала задуман как полностью самоуправляющаяся организация ведущих ученых-механиков страны, основанная на выборности ее членов и всего руководства. Освященная авторитетом Николая Ивановича, традиция эта сохранилась и до наших дней, хотя все остальные созданные в конце 50-х годов национальные комитеты прекратили свое существование или переродились в чисто административные органы при соответствующих Отделениях Академии наук. Быть членом основанного Николаем Ивановичем Мусхелишвили Национального комитета по механике – до сих пор высокая честь, которой добиваются многие ученые-механики страны, и если первоначально в составе Комитета было всего 48 человек, то сейчас в него входят свыше 350 ученых.

Комитет с самого своего основания развил под руководством Николая Ивановича большую международную и внутрисоюзную деятельность. В 1956 г. комитет вступил в Международный союз теоретической и прикладной механики (ИЮТАМ), и Н.И. был избран в состав Бюро ИЮТАМа. Возглавив в 1956 г. первую небольшую советскую делегацию на IX Международный конгресс по механике в Брюсселе, Н.И. озаботился подготовкой представительной делегации на следующий, X Международный конгресс по механике, который состоялся в 1960 г. в Стрезе (Северная Италия). Одновременно, под непосредственным руководством Н.И., был созван первый Всесоюзный съезд

[3]Первоначально меня рекомендовал Николаю Ивановичу член-корреспондент АН СССР В.В.Соколовский, знавший меня по работе в иностранной комиссии ученого совета Института механики АН СССР, в которой я также был ученым секретарем.

по теоретической и прикладной механике (Москва, 27.01–03.02.1960). В работе съезда приняли участие свыше 2000 наших ученых, преподавателей и инженеров, а также иностранные гости из 10 зарубежных стран, включая таких крупных ученых как Го Юн-хуай, В.Т.Койтер, В.Новацкий, В.Ольшак, В.Прагер, М.Руа, Н.Хофф. Вспоминаю (со слов Н.И.) относящийся к этому съезду случай, связанный с получением санкции "директивных органов" на приглашение иностранцев. Николай Иванович отправился на прием к ведавшему тогда этими вопросами секретарю ЦК КПСС Н.А.Мухитдинову. Последовал стандартный вопрос: "А что это даст нашей стране?". По заведенной бюрократической традиции следовало представить надуманное пространное обоснование экономической целесообразности вносимого предложения. Но Н.И. ошеломил ответственного собеседника нестандартным ответом, сказав, что это, в общем-то, ничего конкретного не даст, но ученые должны общаться, и так принято в цивилизованном мире. Санкция была получена.

Благодаря последовательности и энергии Н.И. в 1964 и 1968 гг. в Москве были проведены два следующих всесоюзных съезда по механике, в работе последнего из которых приняли участие около 7000 человек, и в те же годы представительные советские делегации выезжали на международные конгрессы по механике в Мюнхен и Стэнфорд (США). В 1972 г. XIII Международный конгресс по механике был проведен по предложению Н.И. в Москве. IV Всесоюзный съезд по механике состоялся через четыре года в 1976 г. в Киеве. По состоянию здоровья Н.И. не смог уже на нем присутствовать и был избран, по инициативе участников съезда, его почетным председателем.

Научный авторитет Николая Ивановича был чрезвычайно высок как у нас в стране, так и за рубежом. Там его труды стали особенно широко известны благодаря опубликованному в Нидерландах в 1953 г. английскому переводу двух его классических монографий – по математической теории упругости и по сингулярным интегральным уравнениям. Перевод этот был выполнен австралийским профессором Райнером Радоком, специально изучившим для этого русский язык. Впоследствии он стал частым гостем Николая Ивановича и нашей страны. Начиная с конца 40-х годов, Н.И. стал сравнительно часто выезжать за границу, и благодаря его личному обаянию и владению европейскими языками (особенно французским) у него появился широкий круг личных зарубежных связей.

В 1961 г. Николаю Ивановичу исполнялось 70 лет. Было решено посвятить этой юбилейной дате международный сборник научных работ по проблемам механики сплошной среды. В то время это было у нас еще в новинку. Принять участие в сборнике выразили согласие ведущие ученые нашей страны, а также Австралии, Великобритании, Индии, Италии, Китая, Нидерландов, Польши, США и Швеции. По инициативе профессора Р.Радока, поддержанной ответственным редактором сборника академиком М.А.Лаврентьевым, книгу было решено издать параллельно и на английском языке в США. Дело не обошлось без затруднений. Статьи для сборника были заказаны в конце 1959 года, и весной 1960 года все они были пересланы мною для перевода в США. Но 1 мая 1960 г. над территорией СССР был сбит американский самолет-разведчик, и через несколько дней после этого начальник Управления внешних сношений АН СССР С.Г.Корнеев вызвал меня для выяснения того, на каком основании я переслал весь сборник в США (хотя разрешения на пересылку каждой отдельной статьи и были мной оформлены через Главлит).

Г. К. Михайлов и Н. И. Мусхелишвили (Тбилиси, 1963 г.)

Ссылки на устное согласование вопроса М.А.Лаврентьевым в "директивных органах" его не удовлетворили, а рукопись сборника уже находилась в Америке. К счастью, именно в этот момент М.А.Лаврентьев находился в Москве, и я буквально перехватил его на пороге здания Президиума Академии наук. На мой вопрос о том, не пора ли мне уже "сушить сухари", М.А. вполне серьезно ответил: "Пожалуй, не стоит". Пользовавшийся тогда высоким авторитетом "в верхах" М.А., по-видимому, без труда урегулировал этот вопрос. Но к осени возникли трудности с другой стороны. Посланная мною в КНР английская верстка статей китайских авторов не возвращалась, несмотря на повторные письменные напоминания и телеграммы. Наконец, уже в начале 1961 года я получил короткую телеграмму от лидера китайских ученых-механиков Цянь Сюэ-сеня, бывшего ранее одним из ведущих научных консультантов-ракетчиков США. Телеграмма гласила, что статьи китайских авторов не могут быть напечатаны в Америке. Но сборник к этому времени уже был готов, как на русском, так и на английском языке, и, что наиболее примечательно, оба варианта сборника – русский и английский – были вручены юбиляру одновременно в день его рождения на торжественном собрании в Тбилиси. Вторую, концертную часть этого собрания вел Ираклий Андроников.

В известном смысле продолжением этих юбилейных торжеств явился проведенный в Тбилиси в 1963 г. Международный симпозиум ИЮТАМа по приложениям теории функций в механике сплошной среды. Принимая решение об организации этого симпозиума именно в Тбилиси, Международный союз признал исключительную роль возглавлявшейся Н.И.Мусхелишвили грузинской математической школы в развитии этой области науки. Среди генеральных докладчиков симпозиума были М.В.Келдыш, В.Т.Койтер (Нидерланды), Н.И.Мусхелишвили, Л.И.Седов и И.Н.Снеддон (Шотландия). Имена этих ученых, каждый из которых является членом нескольких национальных академий наук, говорят сами за себя.

К 80-летию Н.И.Мусхелишвили международная научная общественность подготовила еще один юбилейный сборник в его честь, в котором приняли участие, помимо представителей перечисленных выше стран, также ученые Болгарии, обеих Германий, Дании, Румынии и Франции, а в Тбилиси было проведено грандиозное, едва ли не единственное в своем роде, чествование ученого в незадолго перед тем открытом зале Грузинской филармонии. Николай Иванович сидел в зале в почетном ряду между президентом АН СССР М.В.Келдышем и первым секретарем ЦК Компартии Грузии В.П.Мжаванадзе.

Несмотря на всемирное признание, Н.И.Мусхелишвили отличался исключительной скромностью и не придавал особого значения внешнему блеску. Так, будучи президентом Грузинской Академии наук, он ездил на "Волге", не желая использовать предлагавшуюся ему тогда более представительную машину. Он объяснял это тем, что обычной "Волги" ему совершенно достаточно, а другая машина может вызвать только ненужную зависть у недоброжелателей. Вспоминаю совершенно курьезный случай. Я заехал к Н.И. в гостиницу "Москва", где он всегда останавливался, приезжая в столицу. Вскоре он должен был ехать в Президиум АН СССР, куда собирался и я. "Если Вы с машиной, то я поеду с Вами", – говорит Н.И. "Но я на старом маленьком 'Запорожце', на котором Вам едва ли удобно и прилично ехать", – возражаю я. "Не имеет значения", – парирует Н.И., и мы едем. Подъезжая к главному зданию Президиума, вижу группу грузинских ученых (может быть, ожидающих Н.И.). Они видят в лобовое стекло Николая Ивановича и сначала делают решительное движение к нашей машине. Тем временем дверь "Запорожца" открывается, и Н.И. с большим трудом начинает выбираться из автомобильчика. Грузинская группа стушевывается, в полном смущении от этой сцены, делает вид, что она Мусхелишвили не заметила, и ретируется в сторону от подъезда.

Николай Иванович обладал исключительным тактом и авторитетом, что обеспечивало обычно на всех проводимых им заседаниях спокойную деловую обстановку. Вопросы, находящиеся в его личной компетенции, он решал всегда сам четко и быстро. Если же какой-либо организационный вопрос оказывался неподготовленным и вызывал бурные споры, Н.И. не стеснялся обращаться тут же за советом и помощью к "начальству". Так, однажды, на заседании президиума Национального комитета по механике возник острый спор о возможности реализации одного из обсуждавшихся предложений. Молча выслушав спорящих, Н.И. снял трубку телефона, попросил его соединить с М.В.Келдышем, который был в то время президентом АН СССР, и обратился к нему: "Слава [так он его звал], у нас здесь возникла проблема ...". Вопрос был мгновенно решен. В другой раз, в Тбилиси, в президентском кабинете у Н.И. возник очень горячий спор о размещении советских и иностранных участников проводившегося Николаем Ивановичем в 1963 г. международного симпозиума. Академик-секретарь Грузинской Академии наук С.В.Дурмишидзе убеждал, что, ввиду недостатка гостиничного фонда города, всех иностранных участников симпозиума надо расселить в одной привилегированной гостинице, а всех советских участников – в других гостиницах. Против этого категорически возражал я, как ученый секретарь оргкомитета симпозиума, считая, что это как этически, так и политически неприемлемо. Точно так же, молча, Н.И. снял трубку местного правительственного телефона и, обращаясь к первому секретарю ЦК Компартии Грузии В.П.Мжаванадзе, сказал, что престиж мероприятия требует выделения некоторого дополнительного количества мест в сверхперегруженной интуристовской гостинице. Соответствующая гарантия была сразу же получена, и небольшая часть советских ученых была размещена вместе с иностранцами. В обоих приведенных случаях решающим фактором был личный авторитет Николая Ивановича, который старался редко обременять руководство сложными вопросами.

Распространившееся позже среди ученого руководства стремление “числиться” во многих комитетах, советах и комиссиях, не принимая практически никакого участия в их работе, не коснулось Николая Ивановича. В Тбилиси он возглавлял созданные при его ближайшем участии Грузинскую Академию наук и Тбилисский математический институт, а в Москву приезжал обычно на заседания президиума АН СССР и президиума нашего Национального комитета. При всей своей занятости, как в Тбилиси, так и в Москве, Н.И. никогда не перепоручал никому ответственных дел Национального комитета и неукоснительно председательствовал во всех заседаниях его президиума. С другой стороны, его отличало отсутствие мелочной опеки своих помощников и полное доверие к ним, после того как они проходили некоторый “испытательный срок”. Так, после обсуждения каких-либо дел комитета в самых общих чертах, он полностью доверял мне их дальнейшее согласование от его имени (включая, фактически, подделку его подписи). В связи с этим вспоминаю случай, когда Л.И.Седов попросил меня обратиться с письмом по интересующему его, но несколько щепетильному вопросу непосредственно от имени Н.И., сославшись на то, что ему известно, что Н.И. мне такие действия разрешает. На это мне пришлось возразить, что Н.И. мне именно потому и доверяет, что я никогда не позволяю себе делать то, что, с моей точки зрения, он мог бы не поддержать. Любопытно, что это доверие распространялось и на неформальные дела. Так, на проходившем в 1963 г. в Тбилиси Международном симпозиуме ИЮТАМа Н.И. возглавлял небольшой его научный комитет, включавший крупнейших зарубежных ученых. Давая обед в честь членов этого комитета у себя дома, Н.И. поручил мне быть за столом “тамадой”, что было высокой честью, но и трудной обязанностью, так как требовало не только бойкого произнесения на английском языке витиеватых тостов в грузинском стиле, но и установления очередности, в которой надо величать всех гостей. В 1990 году я был в Шотландии в гостях у И.Н.Снеддона, с которым мы с теплотой вспоминали этот, состоявшийся за четверть века до того, обед у незабвенного Николая Ивановича. Тогда я поднял лишь последний тост за Снеддона, сославшись на то, что он сидел рядом с очаровательной племянницей Н.И. и мог поэтому подождать (я счел неприличным чествовать последним действительно наименее авторитетного гостя).

Только один раз у Николая Ивановича промелькнуло недоверие ко мне. В конце 60-х – начале 70-х годов возникла острая, вызванная личными симпатиями и антипатиями, дискуссия вокруг работ В.З.Партона по теории упругости и механике разрушения. И вот, однажды, по приезде в Москву, Н.И. встречает меня впервые строгим взглядом, без тени свойственной ему улыбки, и спрашивает, как я мог подписать от его имени положительный отзыв об одной из работ Партона. Я ответил, что об этом и речи не могло быть, я такого отзыва и в глаза не видел. Лицо Н.И. расплылось в улыбке. “Я тоже считал, что Вы этого сделать не могли, – сказал он, – но мне на Вас наговорили”.

Интересы своих тбилисских и московских сотрудников и помощников Николай Иванович всегда защищал. Даже попытки вмешательства в дела Национального комитета по механике со стороны “директивных органов” неукоснительно пресекались им – в форме крайне мягкой, но безапелляционной. Так, однажды была предпринята попытка отстранить меня “неконституционным” образом от дел в нашем Национальном комитете именно через эти органы. На соответствующее представление, сделанное Николаю Ивановичу в Отделе науки ЦК, он отреагировал только спокойным замечанием, что я занимаю выборную должность и ничего тут не поделаешь.

На протяжении многих лет я регулярно встречался с Николаем Ивановичем во время его приездов в Москву и моих частых поездок к нему в Тбилиси. Поездки эти, как правило, не вызывали возражений в Институте проблем механики. Но однажды директор института А.Ю.Ишлинский, с которым у меня были в тот период неровные отношения, попытался отказать мне в командировке, мотивируя это тем, что ему непонятно, зачем мне лететь в Тбилиси. Я объяснил, что систематически встречаюсь с Н.И. для обсуждения текущих дел Национального комитета, но Александр Юльевич решил тут же позвонить Н.И. и спросить его, зачем я ему нужен. Я не слышал ответа Николая Ивановича, но из реакции А.Ю. понял, что Н.И. сказал ему, что не знает, какие именно вопросы надо сейчас решать, но раз я собрался в Тбилиси, значит, у меня есть в этом нужда. Изобразив снисходительность к моей "необоснованной"просьбе, Ишлинский санкционировал командировку.

Крайне ответственно и щепетильно относился Николай Иванович к своему личному научному творчеству. Число опубликованных его работ невелико, и все они предельно отшлифованы. Невозможно себе представить, чтобы Н.И. поставил, как это сейчас широко принято у многих высокопоставленных ученых, свою фамилию, в качестве автора или соавтора, на какой-либо доклад или научную статью, подготовленные его учениками или помощниками. Все корректуры Н.И. читал всегда сам; в более молодые годы каждый раз при чтении корректур он проверял и всю библиографию de visu. Вспоминаю, как он расстроился, когда при последнем переиздании своей монографии по теории упругости доверил сравнительно молодому и, безусловно, грамотному Г.И.Баренблатту внести в свой текст незначительную редакционную правку с целью модернизации изложения. Последний, как он говорил позже, передоверил эту работу своему сотруднику. При окончательном чтении верстки Н.И. обнаружил, что его текст был местами испорчен, и он ликвидировал на этом последнем этапе всю внесенную правку. При переиздании монографии по сингулярным интегральным уравнениям в 1968 г. находящийся уже в преклонных годах Н.И. показал мне последнюю корректуру библиографии к ней. Когда же я посоветовал ему внести ряд уточнений, он безоговорочно все их принял и немедленно поручил издательству внести сверхнормативную правку за авторский счет.

К сожалению, взаимоотношения между учеными, даже очень крупными, не всегда идеальны. Свои обиды Николай Иванович обычно от окружающих скрывал. Со мной он бывал, однако, иногда откровенен. Так, я помню его обиду на Л.И.Седова, когда последний поступил бестактно, не предложив в 1964 году оставить Н.И. на второй срок в составе Бюро ИЮТАМа, предвидя, что при этом он сам войдет в состав Бюро. В результате Седов оставался в составе Бюро в течение 20 лет (1964–1984), так что ИЮТАМ был вынужден, для исправления создавшейся ситуации, специально изменить свой устав, ограничив срок пребывания ученых в составе Бюро.

Перед очередным отчетно-выборным собранием Национального комитета по механике в 1972 г. среди группы членов комитета возникли острые и не слишком принципиальные трения. При исключительной внутренней порядочности Николая Ивановича это было воспринято им как недостаток его руководства – неспособность справиться с эмоциями своих младших коллег, и он решил подать в отставку, о чем и сообщил в частной беседе М.В.Келдышу. Тогда Келдыш взялся сам провести отчетно-выборное собрание, которое было созвано в конференц-зале Президиума АН СССР. Отчет о деятельности комитета был единодушно одобрен. Никто не решился сделать какие-либо замечания в присутствии Келдыша, несмотря на неоднократные предложения председательствующего высказываться. После утверждения отчета Н.И. снял свою кандидатуру с выборов на следующий срок. Однако Келдыш публично обратился к нему от себя лично и от имени всех присутствующих с просьбой остаться председателем комитета. Эту просьбу Н.И. уважил, и инцидент был исчерпан.

Замечательно, что, спускаясь после заседания по парадной лестнице здания Президиума Академии наук, я услышал, как один из уважаемых мной ученых жаловался собеседнику на то, что на заседании не дали никому высказаться, "а ведь есть так много требующих решения проблем" (никогда не повышавшего голоса М.В.Келдыша боялись все, даже и самые бойкие скандалисты!).

По отношению к людям, даже враждебно к нему настроенным, Николай Иванович вел себя неизменно корректно. Так, он оставался всегда внешне лоялен даже к известному и талантливому ученому-механику А.А.Ильюшину, который в мрачные годы торжества лысенковщины сравнивал плоскую задачу теории упругости – основную область работ Н.И. – с "менделизмом-морганизмом". Вспоминаю еще одного видного грузинского математика – В.Д.Купрадзе, постоянного оппонента Н.И. Последний санкционировал выдвижение этого ученого на одну почетную должность, чем вызвал мое удивление. "Пусть он получит удовлетворение от этого назначения, – пояснил мне Н.И., – а мне это не помешает. Лучше я поддержу его, чем он будет говорить, что я его преследую".

Принадлежавший к старой грузинской дворянской семье Мусхеловых (как они числились в сенатском департаменте герольдии) и воспитанный еще в дореволюционном обществе, Николай Иванович был галантным кавалером и неизменно пользовался благорасположением дам. Он был всегда внимателен к женщинам на работе и ценил как их труд, так и изящество. "Красота – это дар природы, – говорил он, – так же как и какой-нибудь талант. Но почему за талант в работе официально доплачивают, а за красоту нет? Это несправедливо!"

Николай Иванович был прост в жизни, любил небольшое застолье и мягкую шутку. Круг его близких друзей был не широк, но постоянен. В Москве он часто навещал М.В.Келдыша, был близок с М.А.Лаврентьевым, который уступал ему всегда свою московскую "вице-президентскую" машину. В гостинице "Москва" я неоднократно видел у него президента Армянской Академии наук академика В.А.Амбарцумяна (выросшего, кстати, тоже в Тбилиси).

Как настоящий грузин, Н.И. всегда выпивал стакан-другой вина за обедом. При этом он довольно много курил. Однако в последнее время заботливая жена – Рузанна Фадеевна, которой Н.И. старался подчиняться, стала его в этом ограничивать. Впрочем, сам он считал, как и многие врачи, что в 80 лет уже поздно менять привычки и образ жизни. Поэтому в эти годы, когда к Н.И. приходили его ученики (особенно часто я встречал у него дома Г.Ф.Манджавидзе) он выпивал тайком от жены лишнюю рюмку и прятал себе в карман пару "контрабандных" сигарет.

В последние годы, когда Н.И. отошел от руководства Грузинской Академией наук, передав его своему ближайшему ученику академику И.Н.Векуа, у него едва ли не впервые в жизни появился досуг. Он любил отдыхать, читая французские романы. Когда при очередном моем посещении Н.И. в Тбилиси весной 1976 г. мы разговорились о не слишком большой, но изысканной его научной библиотеке и о моих занятиях историей науки, он пообещал подарить мне редкую монографию П.Дюэма об истоках статики, но добавил, что должен сначала ее еще раз перечитать, так как просматривал ее лишь полвека тому назад. Но Н.И. так и не успел дочитать заново Дюэма. Эта книга хранится теперь, вместе со всей научной библиотекой Н.И., в посвященном ему специальном музее в Тбилиси. Но за несколько лет до этого Николай Иванович подарил мне с соответствующей надписью три тома известных “Писем” Эйлера к немецкой принцессе, изданных в Петербурге на французском языке в XVIII веке. Книги эти были подарены им когда-то его первой, рано скончавшейся жене, посвящение которой – на грузинском языке – также хранит их титульный лист.

Кончина Николая Ивановича наступила внезапно 15 июля 1976 года (от разрыва недиагностированной аневризмы), и я хорошо помню полную растерянность моих сотрудников, когда мне позвонили днем от М.В.Келдыша с сообщением о том, что Николая Ивановича больше нет с нами.

Грузинский обычай требует нескольких дней прощания с покойным у него дома, и близкие посещают его дом несколько раз до похорон. Я вынужден был использовать все доступные возможности, чтобы достать в тот летний день билет на ближайший самолет в Тбилиси. Ведь надо было прилететь, по крайней мере, накануне похорон, чтобы попрощаться с Николаем Ивановичем у него дома. Помню, что прямо из аэропорта я поехал вечером на проспект Ильи Чавчавадзе, где жил Н.И. Вокруг дома и на лестнице стояла большая толпа народа, и в этот момент подъехал кортеж машин с тремя руководителями республики, включая Э.А.Шеварднадзе, приехавшими также для прощания с Николаем Ивановичем. Меня подтолкнули друзья, и я поднялся в квартиру Н.И. по заполненной людьми лестнице непосредственно вслед за начальством. Выразив соболезнование вдове и сыну Н.И., я преклонил колено у гроба. Пока я спускался вниз по лестнице, “беспроволочный телеграф” уже передал об этом моем поступке, и мои грузинские друзья высоко оценили его. На следующий день в большом, убранном преимущественно в бледно-зеленые тона зале Грузия, вместе со всей отечественной наукой, прощалась со своим замечательным сыном. Еще из Москвы я заказал, через моих тбилисских коллег, красивый венок от Национального комитета, который уже стоял в зале. Поднявшись, как представитель Москвы, на возвышение для почетных гостей, я встретил пронзительный взгляд Э.А.Шеварднадзе, уже второй раз сталкивавшегося с неизвестным ему бородатым субъектом высокого роста (очевидно, никто из его ближайшего окружения не знал, кто я такой).

Через несколько лет в городе был установлен памятник Николаю Ивановичу.

Столетие со дня рождения Н.И.Мусхелишвили торжественно отмечалось в Тбилиси в июне 1991 года при участии президента Грузии Звиада Гамсахурдиа. К юбилейным торжествам был приурочен Международный симпозиум по механике сплошной среды и родственным вопросам анализа. В нем принял участие и прилетевший в Тбилиси мой друг Райнер Радок, с которым мы представили совместный доклад “О месте Н.И.Мусхелишвили в мире науки и математики”.

Прах Николая Ивановича покоится в национальном пантеоне Тбилиси у церкви св. Давида на одноименной горе (Мтацминда), возвышающейся над городом. Память о Николае Ивановиче сохранится на века, доколе будут стоять эти грузинские святыни.

Некоторые штрихи к неофициальному портрету Л.И.Седова

Мне довелось сотрудничать с Леонидом Ивановичем в течение свыше полувека в Реферативном журнале “Механика” и в Национальном комитете СССР по теоретической и прикладной механике. Ниже описаны некоторые, по разным причинам более ярко запомнившиеся мне, хотя и второстепенные, контакты с Л.И.Седовым. По “классической” традиции воспоминания о юбиляре приводятся в ключе “Я и юбиляр”.

При организации в 1952 году Реферативного журнала Л.И., назначенный его главным редактором, пригласил меня – по рекомендации П.Я.Кочиной – к сотрудничеству в редакции. Будучи инженером по образованию, я защитил к тому времени кандидатскую диссертацию по гидродинамике грунтовых вод, и Пелагея Яковлевна взяла меня к себе в Институт механики. Относясь ко мне вполне положительно, Л.И., тем не менее, называл меня тогда часто “сотрудником без высшего образования”, считая настоящим высшим образованием только университетское.

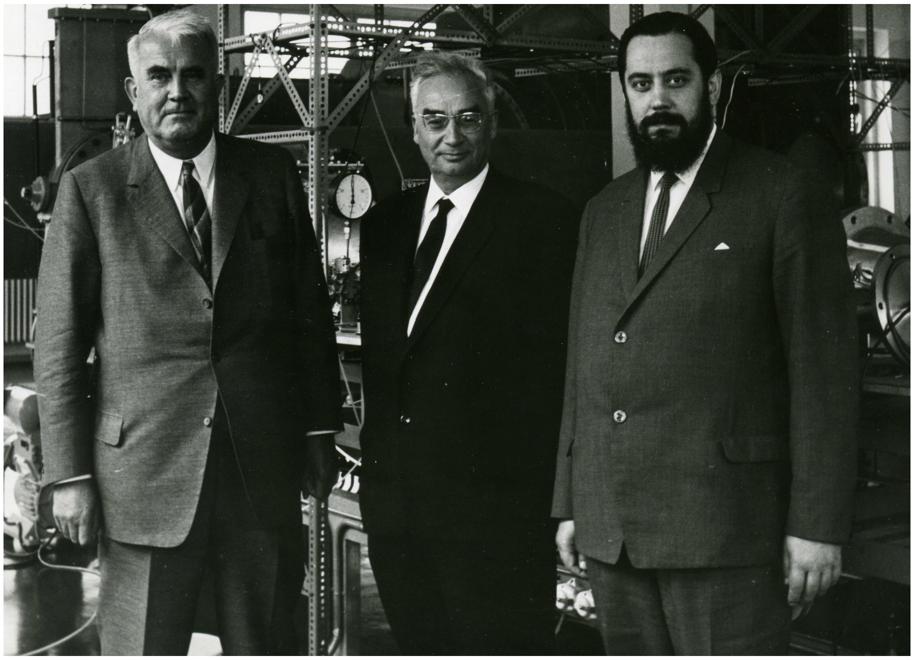
В 1960-х годах я часто бывал с Л.И.Седовым вдвоем в зарубежных командировках. Бывали забавные случаи. Валюты Академия наук выдавала нам на поездки ничтожно мало, и мы экономили на всем, чтобы купить за границей какие-нибудь подарки для своих близких (в Советском Союзе ведь ничего интересного тогда купить было невозможно!). Естественно, мы брали с собой “сухой паек”, чтобы не тратиться на еду. Вспоминаю одно из возвращений из Франции. Мы сидим в парижском аэропорту и ждем посадки, примерно через час нас будут кормить в самолете. Голодный академик обращается ко мне: “Г.К., а у Вас еще что-нибудь поесть осталось?”. Я отвечаю: “Есть один плавленый сырок”. “Давайте, очень есть хочется”. В другой раз готовимся к регистрации на самолет, вылетающий в Москву из ФРГ. Ввиду большого объема и веса покупок боимся за излишний вес багажа и распихиваем все по карманам костюмов и пальто. Становимся нелепо толстыми. Сдаем чемоданы, и выясняется, что мы перестарались: они весят меньше разрешенной нормы. Мы в страшном расстройстве: идти с дико набитыми карманами страшно неудобно и некрасиво.

Поездки за границу по линии Международного союза теоретической и прикладной механики (ИЮТАМ) были сопряжены и с другими “тонкостями”. В частности, ИЮТАМ всегда оплачивал Л.И.Седову, как члену Бюро Союза, часть расходов, которые мы формально должны были сдавать в Академию наук после нашего возвращении, иногда получали какое-то вспомоществование и другие члены делегации (отвечал за всю финансовую отчетность, конечно, я). На самом деле, часть полученных или “сэкономленных” денег мы утаивали, и они делились между членами делегации. Однажды небольшая делегация возвращалась из ФРГ, а Седов должен был ехать дальше в Данию. Мы разделили “выручку”, но Седову я выделил значительно больше денег, чем остальным, так как у него еще предстояли дальнейшие расходы. Один из членов нашей делегации – новосибирский профессор И.А.Кунин – остался этим очень недоволен (хотя я мог ему и вовсе ничего не выделять). В результате, возвращаясь через Москву, он пожаловался на меня Г.И.Баренблатту, который, в свою очередь, довел об этом до сведения С.Г.Бахтурина – в то время официального, не “засекреченного” куратора Института проблем механики по линии КГБ, которого мы все в институте (особенно в секретариате Национального комитета) хорошо знали. Последовал “допрос”: откуда взялась дополнительная валюта. “Компетентные органы” беспокоило, не подкармливают ли Седова по своим каналам западные спецслужбы. Выяснив, что это были "честно заначенные" деньги, Бахтурин успокоился и дальнейшего хода этому делу не дал. (Впоследствии я встретил на каком-то международном конгрессе за границей И.А.Кунина, к тому времени эмигрировавшего в США, и – специально в присутствии иностранцев – посетовал на его донос, едва не приведший меня к конфликту в КГБ).

Леонид Иванович в молодости и в зрелом возрасте любил быструю езду. Возвращаемся мы с ним (то ли с дачи, то ли из МГУ), направляясь в Президиум Академии наук: я на "Москвиче", он за рулем – на "Волге". Мне удается обогнать его, и мы на бешеной скорости несемся по Ленинскому проспекту. На пересечении с улицей Стасовой перед нами загорается красный светофор. Я торможу и, проскрежетав со страшным визгом несколько десятков метров, останавливаюсь посередине перекрестка. Подходит инспектор, которому я говорю, оправдываясь, что следовавшая за мной машина проехала под красный свет. "Это же оперативная машина!" – возражает инспектор. Я ему объясняю, что я с академиком ехал наперегонки, и вот он теперь меня обогнал. Тогда времена были еще "мирные", и инспектор меня отпустил. По приезде в Президиум АН я рассказываю о моей беседе с инспектором. "Это что!" – говорит Л.И. – "Вот раньше мы с Келдышем по дороге из ЦАГИ наперегонки ездили".

К 60-летию Леонида Ивановича его представили к присвоению звания Героя Социалистического Труда. Как настоящий мужчина, он имел не только поклонников, но и недругов, и, конечно, волновался, не будучи уверен, что это награждение состоится. Накануне его 60-летия у меня дома гости. Поздно вечером раздается телефонный звонок, звонит Нагуш Хачатурович Арутюнян, исполнявший в тот момент, как председатель Президиума Верховного Совета Армении, обязанности председателя Президиума Верховного Совета СССР. Он сообщает мне, что только что подписал грамоту о присвоении Л.И.Седову звания Героя, принесенную ему после сбора положенных виз Политбюро, и разрешает сообщить об этом Леониду Ивановичу. Сам он звонить Седову не будет, так как завтра пошлет ему поздравительную правительственную телеграмму. Я звоню Л.И. и поздравляю его "с высокой правительственной наградой". "С какой?" – спрашивает он. "С присвоением Вам звания Героя Социалистического Труда". "Так ведь это еще не решено!". "А мне только что звонил Арутюнян и сказал, что уже подписал соответствующую грамоту". Л.И. переспрашивает, так ли все это, и остается очень доволен. Замечательно, что звезду Героя он практически никогда не надевал, но носил с собой всегда в кармане, "на всякий случай". Помню, возвращаемся мы с ним в 1970-х годах из Киева. Тогда высшим шиком было привезти в Москву из Киева "Киевский торт", который и в Киеве не всегда легко было добыть. Идем мы по Крещатику и видим приличного вида кондитерскую. Перед входом в нее Л.И. достает из кармана (кажется, брючного) Звезду, привинчивает ее, и мы входим: торты обеспечены!

По-видимому, летом 1957 года Л.И.Седова назначили заведующим отделением механики механико-математического факультета МГУ. В числе его первых действий было отстранение И.А.Тюлиной от чтения курса истории механики, который она единолично вела после смерти Н.Д.Моисеева (1955). В середине сентября Л.И. позвонил и предложил мне взяться за чтение этого курса для студентов-механиков 5-го курса. Ни программы, ни учебников по этому курсу не существовало. Единственно, что я попросил, – это начать чтение со второй лекции, чтобы хоть как-то успеть подготовиться. Обиженная Тюлина, активно поддерживаемая парткомом факультета, попыталась отстранить меня от чтения лекций.



Г.Шлихтинг, Л.И.Седов и Г.К.Михайлов в Аэродинамической лаборатории (Гёттинген. 1967)

Вызвал меня бывший тогда деканом академик А.Н.Колмогоров, чтобы "познакомиться", и спросил, какое отношение я имею к истории механики. Я рассказал о моей совместной с академиком В.И.Смирновым работе над архивом Эйлера, что его вполне удовлетворило. Однако в дальнейшем Тюлина добилась все же через партком отстранения меня – беспартийного от чтения этого "идеологического" курса. Л.И. защитить меня не смог. Но Тюлина этой истории не забыла: поносила меня на закрытом факультетском партсобрании за мой обзорный доклад по проблемам истории механики, прочитанный на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Киев, 1976), а в 1980 г. в письме секретарю ЦК КПСС М.В.Зимянину квалифицировала мои работы как "идеологически вредные".

Леонид Иванович принял решающее участие и еще в одном моем столкновении "по партийной линии".

В связи с моей близостью к Седову, некоторые члены Национального комитета, основательно поссорившиеся с ним, предприняли попытку отстранить меня от активного участия в работе Национального комитета. На одном из отчетно-выборных собраний, уже в 80-х годах, А.С.Монин, – по-видимому, по инициативе Г.И.Баренблатта – неожиданно потребовал созвать партгруппу Национального комитета (чего никогда за предшествовавшие 30 лет не было). Председательствовавший И.Ф.Образцов согласился с этим предложением, и партгруппа приняла – при закрытом обсуждении – предложение по составу президиума Национального комитета, не включавшее моей кандидатуры. В зале заседаний во время работы партгруппы оставались немногие, в том числе и Л.И. После оглашения предложения партгруппы Л.И. спокойно предложил дописать в список для голосования и меня. Вопреки активному протесту А.С.Монина моя кандидатура была включена в список, и я прошел в состав президиума в числе первых по числу голосов, в то время как А.Ю.Ишлинский, тогда открыто поддерживавший моих недругов, едва прошел в самом конце списка. Так Л.И. помог мне в очередной раз. (С Александром Юльевичем мы впоследствии восстановили добрые, если не сказать – дружеские, отношения.)

В течение сорока с лишним лет моего сотрудничества с Л.И.Седовым претензия ко мне возникла у него только один раз. С 1964 по 1984 г. он оставался, по собственной инициативе, членом Бюро ИЮТАМа, нарушая тем самым традиции этого Международного союза, привыкшего к определенной ротации входящих в Бюро представителей национальных организаций. В результате Генеральная ассамблея ИЮТАМа сочла необходимым изменить устав Международного союза, ограничив срок пребывания ученых в составе Бюро восемью годами, и в 1984 году нашему Национальному комитету пришлось выдвинуть новую кандидатуру в состав Бюро (этой кандидатурой оказался, к неудовольствию Л.И., А.Ю.Ишлинский). По неизвестной причине Л.И. решил, что я имел какое-то отношение к принятию решения об ограничении срока пребывания ученых в Бюро ИЮТАМа, и в течение почти целого года он, без тени юмора, сообщал посещавшим его в Институте механики МГУ ученым, что Михайлов выгнал его из Бюро. Впрочем, на наших взаимоотношениях это напрямую не отразилось, и вскоре “инцидент” был начисто забыт.

Леонид Иванович был непростым человеком, со своими личными симпатиями и антипатиями. Не всегда антипатии были объективно обоснованными. Так, например, он очень не любил выдающегося американского ученого-механика и историка механики Клиффорда Трусделла, претендовавшего на фундаментальное изложение основ механики сплошной среды и тем самым “конкурировавшего” с самим Седовым. К 275-летию со дня рождения Л.Эйлера была проведена серия юбилейных мероприятий, на одном из которых был поставлен мой совместный с Седовым доклад о вкладе Эйлера в развитие механики. В подготовленном мной тексте доклада Л.И. потребовал вычеркнуть упоминание о Трусделле – крупнейшем знатоке механики Эйлера. Однако в совместной с Седовым и коллегой из ГДР статье мне удалось имя Трусделла сохранить. Трусделл, получив от меня оттиск, выразил удивление по поводу того, как мне удалось упомянуть его работы в статье с Л.И. (Трусделл был хорошо информирован о препятствиях, чинившихся Седовым при издании русского перевода его “Первоначального курса рациональной механики сплошных сред”.)

Говоря о Леониде Ивановиче, трудно не упомянуть об омрачавшей в 80-х годах обстановку в широких кругах ученых-механиков ожесточенной дискуссии между Л.И. и А.Ю.Ишлинским о силах инерции. Боюсь, что горячность Л.И. была обусловлена тогда не столько и не только природой сил инерции, а еще и сложными личными отношениями с Ишлинским, с которым он когда-то (до выборов последнего академиком) был вполне дружен.

В ноябре 1987 года отмечалось 80-летие Леонида Ивановича, и в связи с этим была созвана международная конференция, в которой приняли участие многочисленные зарубежные ученые-механики. На день рождения Л.И – 14 ноября для участников конференции и гостей был заказан грандиозный банкет в ресторане “Мир” (в здании СЭВа). Среди приглашенных иностранцев помню непременного секретаря Парижской академии наук Поля Жермена, румынского профессора Кайюса Якоба с женой, итальянца Диониджи Галлетто, с которыми я много беседовал. Все собрались в холле ресторана, а Л.И. все не было, и его не удавалось нигде найти по телефону. Ожидание затянулось более чем на час. Наконец, появился Седов. Проходя мимо меня, он коротко бросил мне: "Берите ведение банкета целиком на себя, я сам уже ничего не могу". Как выяснилось, когда он собирался дома на торжественный вечер, у его жены Гали Васильевны, одевавшей уже парадное платье, случился инсульт, и Леонид Иванович вынужден был вызвать "скорую помощь" и сопроводить ее в больницу (к тому же, впопыхах Л.И. еще и забыл вставить свой зубной протез). Мне неожиданно пришлось вести стол на русском и английском языке, да еще переводить на русский произносившиеся на французском языке речи.

Попытки Леонида Ивановича найти себе, после смерти Гали Васильевны, спутницу жизни на оставшиеся годы не увенчались успехом. В начале 90-х годов он сблизился с очень милой женщиной – Еленой Анатольевной Иваницкой, обеспечившей ему прекрасный уход и поддерживавшей его в отличной форме. Однако недоверчивость Л.И. привела к распаду этого альянса. Я выразил ему тогда мое сожаление по этому поводу.

В последние годы жизнь овдовевшего Леонида Ивановича была, к сожалению, неустроенной: дома он был одинок и лишен должного ухода. Питался, в основном, хранившимися в холодильнике обедами, которые ему приносили раз или два в неделю из университетской столовой. Стало грустно навещать его. Одним из последних "светских" выходов Л.И. было посещение им в феврале 1999 года моего юбилейного банкета в ВИНИТИ. Однако приехавшая помочь ему собраться Тоня Державина не смогла найти в его квартире даже приличной одежды и привезла его на банкет в чуть прикрытой пиджаком разорванной рубашке.

Гражданская панихида и похороны Леонида Ивановича состоялись 9 сентября 1999 года в высокоторжественной и, вместе с тем, трогательной обстановке при стечении сотен людей. Прощание проходило в главном корпусе Московского университета на Ленинских горах и на Троекуровском кладбище. Согласно православному обряду, на лоб покойного был положен молитвенный венчик.

О моей ранней общественной деятельности

Война застала меня в 1941 году закончившим только четыре класса начальной школы, и дальнейшее мое беспорядочное школьное обучение пришлось на военные годы, проведенные в эвакуации в Ташкенте. В результате я попал в институт, можно сказать, в детском возрасте – в 14 лет. Поэтому я был в то время оторван от окружавших меня сокурсников и даже не был охвачен практически обязательным для молодежи моих лет комсомолом.

Общественная моя деятельность в Московском гидромелиоративном институте, в который я поступил в 1943 г. в Ташкенте, ограничивалась активным участием в работе организованного нашим курсом Студенческого научного общества, руководителем которого был мой однокурсник, будущий академик Олег Федорович Васильев.

К традиционной для советского времени общественной работе я был привлечен сразу же после поступления в 1951 году на работу в Институт механики Академии наук СССР, куда меня пригласила после окончания аспирантуры Пелагея Яковлевна Кочина. Сначала я был избран профоргом отдела гидродинамики, но вскоре попал в институтский местком и был затем в течение почти десяти лет председателем месткома. На этом посту я проявил, может быть, по молодости значительную независимость и твердость в принятии решений.

В 1953 году директором Института механики стал член-корреспондент АН СССР Алексей Антонович Ильюшин – в прошлом, безусловно, высокоталантливый ученый-механик. К сожалению, с середины 50-х годов он был сильно развращен активной поддержкой ЦК КПСС, в 1951–1959 гг. он избирался депутатом Верховного Совета РСФСР (в 1951–1956 гг. был заместителем его председателя), в 1950–1952 гг. был ректором Ленинградского университета. В роли директора Института механики А.А.Ильюшин проявил себя властным, не терпящим возражений руководителем, вызвав отрицательные эмоции у многих ученых-механиков как внутри института, так и вне его. Будучи председателем месткома института, я также часто остро конфликтовал с А.А.Ильюшиным.

Приведу только один пример. В функции профсоюзов входило в те годы рассмотрение злободневных вопросов о распределении выдаваемой институтам жилплощади. Очевидно, в большинстве случаев вопрос решался дирекцией при естественной поддержке партийной организации, а местком лишь молчаливо визировал эти решения. В нашем институте, как и во всех других академических учреждениях, была утвержденная очередь на получение жилплощади. И вот, я узнаю, что Ильюшин решил выдать очередную поступающую квартиру своему протеже, в обход существующей очереди. Я немедленно собираю заседание месткома, и поддерживающий меня местком выносит, по моему же предложению, постановление запретить председателю месткома подписывать какие-либо документы о распределении жилплощади без предварительного одобрения на заседании месткома. Буквально на следующий день, или, может быть, через день меня вызывает Ильюшин и предлагает завизировать письмо о выделении поступившей жилплощади своему ставленнику. Я спокойно говорю, что не могу этого сделать, поскольку это запрещено мне постановлением месткома. Можете себе представить реакцию всевластного Ильюшина, прекрасно понимавшего, что провести его предложение на месткоме будет невозможно, в то время как письмо без визы месткома не имело силы.

Кадровую политику А.А.Ильюшина продемонстрирую на одном примере. Ученым секретарем он пригласил хорошо ему знакомого Ивана Сергеевича Герасимова. Об уровне его "учености"говорит следующий случай. Летом 1956 г. я был командирован в Ленинград, за неимением в институте более сведущих в деле специалистов, в НИИ им. А.Н.Крылова на конференцию по строительной механике и гидромеханике корабля. По возвращении в Москву я счел нужным доложить об этом ученому секретарю. Он меня стал расспрашивать о тематике конференции, на что я ему довольно невразумительно рассказал о проблемах кавитации, которыми занимались и у нас в институте. В заключение он меня спросил, не обсуждался ли на конференции вопрос о том, как удается современные военные суда держать на плаву. Озадаченный вопросом, я ответил ему, что это же основано просто на законе Архимеда. Реакция “ученого” секретаря была потрясающей: неужели наши тяжелые бронированные суда не тонут только согласно закону Архимеда? Впоследствии, после ухода Ильюшина из Института механики, я встретил случайно И.С.Герасимова в Государственном комитете по науке и техники, где он занимал какую-то чиновничью должность.

Обстановка в Институте механики привела к беспрецедентному решению Академии наук о создании, кажется, в 1958 г. высококомпетентной чрезвычайной комиссии для рассмотрения положения дел в институте. Председателем этой комиссии был назначен влиятельный академик Н.И.Мусхелишвили, с которым я был тесно связан с 1956 г. по работе в Национальном комитете СССР по теоретической и прикладной механике. В результате я подал в комиссию официальную бумагу под заглавием "Мнение председателя месткома о положении дел в Институте механики АН СССР", которая завершалась заключением о несоответствии А.А.Ильюшина должности директора.

Мои отношения с А.А.Ильюшиным и, само собой разумеется, безусловно его поддерживавшей парторганизацией института накалялись. На одном из закрытых партийных собраний было принято решение просить президента Академии наук А.Н.Несмеянова и секретаря Ленинградского райкома КПСС, к которому был приписан институт, перевести меня в какой-нибудь другой институт. И заместитель секретаря парторганизации Безклубенко оформил и лично передал это решение в оба адреса!

Как мне говорили друзья, на закрытых партсобраниях, мою профсоюзную деятельность открыто сравнивали с известными скандальными венгерскими событиями тех лет.

Естественно, моя "подрывная" профсоюзная деятельность в Институте механики была бы невозможна, если бы меня практически единодушно не поддерживал коллектив сотрудников (в том числе и комсомольцев!).

Надо сказать, что горком нашего Профсоюза просвещения, высшей школы и научных учреждений меня в моей борьбе с директором также полностью поддерживал. Однажды председатель горкома И.М.Кульчев даже приезжал на наше отчетно-выборное профсоюзное собрание. На каком-то этапе А.А.Ильюшин организовал написание направленной против меня погромной критики для одной из московских газет. Корреспондент, подготовивший статью, решил все же обезопасить себя и показал ее председателю горкома профсоюза. Последний, ознакомившись с проектом статьи, сказал, что имеет ограниченные возможности, но может твердо обещать, что в случае опубликования статьи этот корреспондент работать в газете уже никогда не будет. Статья так и не увидела свет!

Зимой 1958/59 года я поставил А.А.Ильюшина в затруднительное положение. Я зашел к нему в кабинет и сказал, что я уже давно возглавляю местком института и мне следовало бы поэтому вступить в КПСС. Однако, занимая заметное положение в коллективе института, я не считаю себя в праве подавать заявление о вступлении в партию без рекомендации директора института. Ильюшин оторопел, но не отказал, сказав что-то вроде того, что ему надо собраться с мыслями. Через некоторое время, встретив его в коридоре, я напомнил ему о его обещании, и он пригласил зайти к нему побеседовать. Задав мне какие-то пустяковые вопросы (о моих родителях, семье и т. п.), он, наконец, спросил меня напрямую о том, что я думаю о своем заявлении, поданном в комиссию академика Н.И.Мусхелишвили. Сославшись на то, что после того прошло уже несколько месяцев, я сказал, что не помню точных формулировок моего заявления. "Ну, а в целом, что Вы об этом думаете?" – спросил Ильюшин. "В целом все было написано там правильно", – ответил я. На этом наше собеседование закончилось, и Ильюшин отказал мне, конечно, в рекомендации. Затеяв эту игру, мне уже некуда было отступать, и я обратился за рекомендациями к ряду моих старших коллег, решив все же подать заявление о вступлении в КПСС. У меня сохранились копии рекомендаций будущих академиков Ю.Н.Работнова и В.В.Румянцева. Третью рекомендацию дал мне, насколько я помню, симпатичный секретарь горкома профсоюза В.С.Андреев. Весной 1959 г. я подал заявление о вступлении в КПСС в нашу парторганизацию. В сентябре партбюро “воздержалось” от поддержки моего заявления, но я его не забрал, и в октябре, на открытом партсобрании, мне было отказано в приеме в партию. Решение об отказе было принято почти единогласно, при одном воздержавшемся (профессор Г.С.Шапиро).

На этом же партсобрании А.А.Ильюшин задал мне один провокационный вопрос. Дело в том, что в самом конце июня 1959 г. проходили очередные выборы нашего месткома. Борьба между дирекцией и общественностью была острой, и многие “внешние” ученые живо интересовались ходом этой борьбы. Среди них был и академик Л.И.Седов. Он просил меня сообщить ему результаты выборов сразу же после подсчета голосов. Однако в этот день он должен был быть по какому-то торжественному случаю в гостях у академика И.М.Виноградова и попросил меня позвонить непосредственно домой к Виноградову и пригласить его (Седова) к телефону. Выборы показали полный провал ставленников дирекции: лишь один из них, причем умеренный, прошел в состав месткома. Доступный мне прямой телефон в институте был только у секретарши директора, которым я и воспользовался (секретарши уже не было на работе). На мой звонок к Виноградову ответил находившийся у него также в гостях М.А.Лаврентьев, который сказал, что Седов еще не приехал. Узнав же, кто звонит, с интересом стал расспрашивать меня об исходе выборов месткома, которые, как это не смешно, интересовали в создавшейся антиильюшинской обстановке многих ученых-механиков. Во время беседы с Лаврентьевым дверь в приемную директора на секунду открылась, в нее заглянул один из сотрудников, который и доложил о моем телефонном разговоре начальству. Естественно, что слушавший мою беседу сотрудник был совершенно уверен, что я говорил с Седовым – одним из “злейших врагов” Ильюшина да, к тому же, еще и беспартийным. Так вот, на открытом партсобрании Ильюшин задает мне вопрос: “А кому это Вы докладывали о результатах выборов в местком, сообщив, что в местком прошел только один чужак?”. Я со спокойной совестью ответил, что говорил ”с вице-президентом Академии наук академиком Михаилом Алексеевичем Лаврентьевым” (тогда очень влиятельным). Вслед за этим возникла пауза, напоминавшая финальную сцену гоголевского “Ревизора”, и разговор перешел на другую тему.

В те годы организацией зарубежных туристических поездок занимался Московский городской совет профессиональных союзов. Само собой разумеется, для оформления путевки необходимо было представить утвержденную райкомом КПСС характеристику-рекомендацию партбюро своего института. В 1957 г. я собирался в турпоездку в Египет, получил соответствующую рекомендацию, но поездка по каким-то причинам не состоялась. В начале 1960 г. мне неожиданно позвонили из горкома профсоюза и сообщили, что меня могут включить в тургруппу, выезжающую во Францию. Я ответил, что, конечно, не смогу получить в партбюро характеристику-рекомендацию. Однако мне было сказано, что это не моя забота, и меня отправят по старым документам. Вылет в Париж был назначен на 7 марта 1960 г. Накануне вечером я отнес в приемную райкома партии письмо, в котором я жаловался на ложные обвинения меня дирекцией и парторганизацией в неправильных, чуть ли не антисоветских, действиях месткома и сообщил, что “компетентные органы”, однако, не имеют против меня никаких материалов, поскольку я вылетаю теперь в Париж. Переполох в партбюро Института механики возник, когда я уже был во Франции. Представитель партбюро заявил, что я вылетел по подложным документам, так как партбюро необходимой для выезда за рубеж рекомендации не давало. Протест этот никакого действия, впрочем, не возымел.

Вернусь к комиссии Н.И.Мусхелишвили. Судьба ее заключения была сложной. Отказался подписать критическое заключение о деятельности А.А.Ильюшина только один член комиссии – представитель спецотдела президиума Академии наук. Однако положение Ильюшина оставалось острым. К его счастью, в декабре 1959 г. вышло постановление Совета Министров СССР "Об ограничении совместительства по службе", согласно которому ученые не могли занимать два полноставочных места. Ссылаясь на это постановление, Ильюшин отказался в 1960 г. от директорства в Институте механики, оставив за собой в качестве основного места работы кафедру теории упругости Московского университета, которую он занимал с 1946 г.

Вскоре после ухода А.А.Ильюшина из Института механики ко мне подошел в коридоре секретарь парторганизации Иван Сергеевич Цурков, который выразил сожаление по поводу случившегося со мной казуса и попросил снова подать заявление о вступлении в КПСС. Понятно, что я вынужден был это сделать, и в декабре 1960 г. был дружно принят кандидатом в члены партии. Любопытно, что и решение о приеме было принято при одном воздержавшемся (твердокаменном Безклубенко). Через год я автоматически стал полноправным членом КПСС.

Моя "яркая" общественная деятельность в Институте механики послужила причиной еще одного, последнего столкновения с начальством при закрытии Института механики и открытии в январе 1965 г. Института проблем механики. Инициатива создания нового института принадлежала, в значительной степени, Г.И.Баренблатту и Н.А.Талицких и была активно поддержана академиком А.Ю.Ишлинским, ставшим первым директором нового института (в течение недолгого времени его заместителем был Г.И.Баренблаттпроисхо). Провозглашенная цель создания нового института заключалась в организации разработки современных актуальных проблем механики, хотя скрытая цель создания нового института, вместо эквивалентной реорганизации Института механики, заключалась в возможности безболезненного отсева при этом нежелательных ученых. Разделение сотрудников Института механики на "агнцов", подлежащих переводу в Институт проблем механики, и "козлищ", этой чести не удостоенных, происходило в высокоторжественной обстановке. В расположенном в здании президиума Академии наук кабинете, предоставленном для этой цели М.А.Лаврентьевым, "тройка" в составе А.Ю.Ишлинского, Г.И.Баренблатта и Н.А.Талицких проводила собеседования с каждым приглашаемым сотрудником, высказывая свои суждения о его предстоящей работе. Когда дело дошло до меня, то мне было сказано, что меня возьмут в новый институт при выполнении мной трех условий: неучастие в руководстве общественной жизнью института, перевод меня в отдел информации к Н.А.Талицких и сосредоточение на научной работе в области теории фильтрации, без экскурсов в историю науки. Я отклонил все три условия, заявив, что участие в руководстве общественной жизнью института зависит не от меня, а от коллектива, работать в отделе информации я, как научный сотрудник, не намерен, а история науки останется в поле моих интересов. То обстоятельство, что я занимал тогда выборный пост ученого секретаря в возглавляемом Н.И.Мусхелишвили Национальном комитете СССР по теоретической и прикладной механике, при общеизвестном добром ко мне отношении Николая Ивановича, привело к тому, что в Институт проблем механики я все же был принят. И на следующий год я оказался даже в составе партбюро и месткома, хотя и не занимался уже больше свойственной мне в прошлом активной "противоначальственной" общественной деятельностью.

В заключение стоит отметить, что при создании Института проблем механики за его бортом остались многие крупные, и не очень крупные, ученые "упраздненного" института [4]. Так, бывшего директора "упраздненного" института видного аэродинамика А.А.Никольского со всем его отделом и будущего академика В.В.Румянцева приютил в Вычислительном центре АН СССР академик А.А.Дородницын.

Что касается "тройки", стоявшей у создания Института проблем механики, то она вскоре распалась. Руководство рассорилось с Н.А.Талицких, которого начали в новом институте активно травить и травили до конца его жизни, а многогранный ученый Г.И.Баренблатт, оказавшийся крайне сложным в качестве администратора, не без давления райкома КПСС, вынужден был уйти из института менее чем через год. Напротив, Александр Юльевич Ишлинский, с которым у меня в последние годы его жизни сложились прекрасные отношения, успешно возглавлял Институт проблем механики в течение четверти века, создав ему блестящую репутацию.

К драматической истории защиты моей докторской диссертации

С конца 50-х годов и до середины 60-х годов я много времени посвящал разбору и приведению в порядок рукописного наследия Леонарда Эйлера, хранившегося в Архиве Академии наук СССР в Ленинграде, работая в течение этих лет месяцами в Ленинграде. К тому же, с 1959 года началась моя интенсивная работа по подготовке Всесоюзных съездов по теоретической и прикладной механике. Все это не оставляло мне времени на собственно исследовательскую работу в области истории механики, которая стала уже основным полем моих научных интересов. Я продолжал лишь спорадически знакомиться с научной литературой конца XVIII – начала XIX века, преимущественно малоизвестной.

Вероятно, в конце 1973 или в 1974 г. я систематически просматривал в фундаментальной библиотеке МГУ сейчас практически никому не известный, но очень интересный парижский полуреферативный журнал "Bulletin scientifique de la Société philomatique". При этом я случайно наткнулся на заметку Пуассона "О движении системы тел в предположении переменности масс" (1819), в которой были выписаны уравнения движения системы тел переменной массы, которые принято было у нас тогда называть "уравнениями Мещерского". Я был настолько поражен, что не поверил своим глазам, выписал содержавшиеся в статье Пуассона уравнения и, вернувшись домой, проверил их и убедился в том, что это действительно "уравнения Мещерского". Короткая заметка Пуассона была посвящена, собственно говоря, не столько самим этим уравнениям, сколько критике работы некоего Букуа, который получил незадолго до того эти уравнения (в несколько менее общей форме) с претензией на обобщение уравнений Лагранжа. Я бросился разыскивать работы графа Георга фон Букуа, а затем занялся тщательным изучением развития механики тел переменной массы и ракетодинамики на протяжении всего XIX века. При этом открылся колоссальный пласт совершенно забытой к нашему времени научной литературы (в частности, оказалось, что задача о вертикальном подъеме ракеты в

[4]Любопытно, что первым официальным документом, в котором упоминалось закрытие Института механики, было постановление о создании некоей комиссии "в связи с упразднением Института механики".

поле силы тяжести предлагалась студентам Кембриджского университета в качестве упражнения в стабильном учебнике динамики точки уже в 1856 г.). Таким образом, были полностью перевернуты существовавшие до того представления о развитии этого раздела механики.

Отнесшийся с интересом к моим результатам А.Ю.Ишлинский разрешил опубликовать основную их часть в объемистом (106 стр.) препринте Института проблем механики АН СССР "К истории динамики систем переменного состава и теории реактивного движения (до начала второй мировой войны)" (декабрь 1974), а затем резюмирующую статью "К истории динамики систем переменного состава" в "Известиях" АН СССР (серия "Механика твердого тела", 1975, № 5).

Зимой 1974/75 г. я выступил с серией докладов по итогам моих "открытий", сначала на совместном заседании секций истории механики и истории авиации и космонавтики в Институте истории естествознания и техники Академии наук, а затем на семинаре В.В.Румянцева по аналитической механике (МГУ) и на семинаре А.Ю.Ишлинского, Д.М.Климова и Е.А.Девянина по механике систем твердых тел и гироскопов (Институт проблем механики Академии наук).

Крупнейшей советский специалист по механике тел переменной массы и ее истории А.А.Космодемьянский сказал мне в декабре 1974 г., что он и представить себе не мог, что в этой области сегодня могут быть сделаны какие-либо открытия, и одобрил оформление моих работ в качестве докторской диссертации.

В октябре 1975 г. я послал экземпляр моего препринта генеральному конструктору В.П.Глушко, причем послал на какой-то официальный адрес, вовсе не предполагая, что препринт до него дойдет. Неожиданно в Институт проблем механики прибыл от В.П.Глушко фельдегерь, передав для меня его короткое письмо и одну из его брошюр. На бланке депутата Верховного Совета СССР он писал: "Благодарю Вас за присылку Вашего интереснейшего исторического исследования 'К истории динамики систем переменного состава и теории реактивного движения', 1974 г. Многое для меня оказалось новым. Невольно вспоминаешь поговорку, что новое это хорошо забытое старое. Желаю Вам успехов. Ваш В.Глушко".

Поскольку мои результаты охватывали не только историю механики тел переменной массы, но и развитие ракетодинамики, я попытался опубликовать соответствующую статью и в журнале "Космические исследования", главным редактором которого был Л.И.Седов. Однако Леонид Иванович всячески уклонялся от ее публикации. В результате я обратился к Л.И.Седову, едва ли не единственный раз в жизни, с письмом. Написал ему, что, вот, мои исторические исследования его не интересуют, а В.П.Глушко прислал мне даже письмо по этому поводу (и приложил фотокопию письма). Немедленно последовал телефонный звонок: "С каких это пор Вы со мной общаетесь по почте? Напечатаем Вашу статью". Статья была направлена на рецензию В.П.Глушко и по его отзыву представлена к печати. Однако секретарь редколлегии журнала позвонил мне по телефону и попросил забрать статью из редакции, так как журнал не успевает своевременно публиковать даже новейшие результаты проводящихся в СССР космических исследований. Я ответил "уклончиво", порекомендовав объяснить все это рецензенту и главному редактору журнала. В результате статья вышла в свет в 1976 г.

Институт истории естествознания и техники АН СССР, под энергичным давлением И.А.Тюлиной, мои статьи по этому поводу печатать не решался, так как Тюлина обвиняла меня в идеологически вредной и антипатриотической позиции, пытаясь, к тому же, совершенно безграмотно опровергать некоторые приводимые мной бесспорные решения конкретных задач механики тел переменной массы.

Позволю себе отступление, чтобы объяснить отрицательное отношение ко мне И.А.Тюлиной. В 1957 г. Л.И.Седов, в качестве заведующего отделением механики механико-математического факультета МГУ, передал мне читавшийся ею после смерти Н.Д.Моисеева (1955) цикл лекций по истории механики для студентов 5-го курса. При активном содействии парткома университета Тюлина, однако, добилась через год возвращения ей этого "идеологического" курса от "беспартийного" Г.К.Михайлова. В 1961 г. И.А.Тюлина, совместно с Е.Н.Ракчеевым, издала "Очерки развития механики" их учителя Н.Д.Моисеева. Рукопись этого его сочинения неоднократно отвергалась "Гостехиздатом" и перерабатывалась. В результате книга была опубликована издательством МГУ лишь посмертно, под давлением секретаря парткома МГУ П.М.Огибалова, который был объявлен на титульном листе ее редактором. В 1962 г., по инициативе Н.А.Талицких, я напечатал в "Известиях Отделения технических наук АН СССР" обстоятельную рецензию на книгу Н.Д.Моисеева, подвергнув ее резкой критике. Попытки Тюлиной опубликовать где-нибудь свои возражения не увенчались успехом. Позже Тюлина обрушилась на мой пленарный доклад о современном состоянии и задачах истории механики, представленный на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Киев, 1976 г.). Опубликовать свою критику она снова нигде не смогла, но выступила с погромной "идеологической" критикой моего доклада на партийном собрании механико-математического факультета МГУ. Наконец, в 1977 г. я вынужден был дать весьма критический отзыв о рукописи И.А.Тюлиной "История и методология механики", направленной мне на рецензию издательством МГУ (при выпуске этой книги в 1979 г. Тюлина была вынуждена учесть сделанные мной в рецензии конкретные замечания и, по-видимому, под давлением издательства, даже упомянула в предисловии, "сквозь зубы", что ею "учтены некоторые замечания Г.К.Михайлова"). Такова история наших непростых отношений.

Вернемся, однако, к моей докторской диссертации. Возник вопрос о том, где мне ее защищать. А.Ю.Ишлинский предлагал представить ее в Институт проблем механики, но я неразумно уклонился от этого предложения, опасаясь отрицательной реакции входившего в состав институтского совета Г.И.Баренблатта, с которым у меня тогда были очень натянутые отношения. И я склонился к защите в совете МГУ.

Д.Е.Охоцимский, к которому я обратился в связи с этим, тщательно продумав создавшуюся ситуацию, принял диссертацию к защите в своем совете. Моя диссертация на тему "Развитие основ динамики систем переменного состава и теории реактивного движения" публично защищалась 23 декабря 1977 г. Ввиду многоаспектности диссертации были назначены 4 официальных оппонента: В.П.Глушко, А.А.Космодемьянский, В.В.Румянцев и Г.Ю.Степанов. Все они дали абсолютно положительные отзывы. Однако параллельно возникла подковерная интрига, инициированная И.А.Тюлиной при поддержке парткома МГУ. В заседании совета против меня выступили только В.П.Демин, признавшийся мне позже, что на него было оказано давление, и сама И.А.Тюлина. В связи с тем, что В.П.Глушко, прислав положительный отзыв, сам на заседание совета не приехал, был назначен еще один оппонент – Ю.А.Архангельский. Было получено много положительных отзывов на автореферат, в том числе от Л.Г.Лойцянского, А.И.Лурье, Б.В.Раушенбаха и

В.И.Феодосьева[5]. В публичной дискуссии меня поддержали, в частности, Н.Н.Моисеев и Л.И.Седов. Тем не менее, результаты голосования склонились не в мою пользу. Единственный член совета, который попытался опротестовать решение совета, на основании того, что члены совета не высказывались против диссертации во время публичной дискуссии, был В.В.Белецкий. Но поскольку результаты голосования ему выписали на бумажке (он – абсолютно глухой) лишь спустя две-три минуты, уже после открытого утверждения протокола счетной комиссии, председательствующий Д.Е.Охоцимский протест Белецкого отклонил. После оглашения решения совета в холле зала заседаний И.А.Тюлиной был преподнесен большой букет цветов!

А.Ю.Ишлинский укорил меня позже в том, что я отказался от защиты в Институте проблем механики. "У нас такого бы произойти не могло", – сказал он.

На этом закончился первый акт защиты. Все пять оппонентов письменно подтвердили, что в результате публичной защиты диссертации они не изменили данной ими ее оценки. Мои попытки добиться повторного рассмотрения диссертации в совете не увенчались успехом.

После этого мною была достигнута договоренность о новой защите диссертации в совете Ленинградского университета, председатель которого Н.Н.Поляхов отнесся ко мне весьма положительно. Формально диссертация была несколько дополнена в свете публичной дискуссии на первой защите и представлена под прежним названием. Защита состоялась 2 октября 1980 г. при официальных оппонентах А.Н.Боголюбове, Н.В.Бутенине и В.С.Новоселове. И.А.Тюлина не оставила своих стремлений провалить мою диссертацию и в Ленинграде, направив в совет соответствующий отзыв и предприняв в Ленинграде перед защитой попытки "обработать" кого-нибудь из членов тамошнего совета. Кроме того, за две недели до назначенного дня защиты, она направила письмо секретарю ЦК КПСС М.В.Зимянину с сообщением о предстоящей защите и предшествовавшем провале диссертации в Москве, объявив мою диссертацию "направленной ... на фактическое принижение роли отечественных ученых", а все мои работы по истории механики "идеологически вредными". Расчет был правильный: за две недели не разберутся, а защиту тем временем отложат. Но ВАК, куда было переслано из ЦК КПСС письмо Тюлиной, решил вернуться к этому вопросу уже после защиты.

В чем-то И.А.Тюлина преуспела. Так, ей удалось заморочить голову Н.В.Бутенину, убедив его в наличии в моей работе, по крайней мере, одной конкретной ошибки, о чем он и упомянул в первоначальном тексте своего отзыва. Объяснив своим ленинградским друзьям ошибку Бутенина, я обещал публично разгромить его. Кажется, Я.Г.Пановко передал об этом Бутенину, и Бутенин сообщил мне непосредственно перед началом заседания, что он официально вычеркнул свое замечание из отзыва, и настойчиво попросил меня, чтобы я об этом замечании на защите не говорил.

Предзащитная возня вокруг моей диссертации, однако, продолжалась. Перед защитой я встретился с влиятельным членом совета В.В.Новожиловым, который в

---

[5]В выпущенном через год учебном пособии "Основы техники ракетного полета" В.И.Феодосьев уже ссылался на разработку задач механики тел переменной массы в начале и середине XIX века, а Б.В.Раушенбах упомянул меня позже в своей посвященной Герману Оберту книге в связи с обсуждением "формулы Циолковского". Упоминания Георга Букуа вскоре появились и в некоторых учебниках (М.М.Гернет, Л.Г.Лойцянский и А.И.Лурье), а его задачам были посвящены специальные исследования (Я.Г.Пановко).

целом относился ко мне положительно (однако было известно, что близкий к нему член совета Б.В.Филиппов собирается выступать против моей работы). На эту беседу я приехал к Новожилову вместе с его ближайшим учеником К.Ф.Черныхом, который по пути говорил мне о том, что он меня активно поддержит во время защиты. Однако, связанный, по-видимому, какими-то обещаниями, Новожилов сказал, что "его люди" проголосуют за меня, но они не будут выступать в мою поддержку. На обратном пути смущенный Черных виновато объяснял мне, что после этих слов шефа он выступать на защите не сможет. Впрочем, безусловно под давлением Новожилова, и Филиппов на защите не выступил.

Защита длилась около пяти часов. Единственным оппонентом, сделавшим многочисленные мелкие замечания, был В.С.Новоселов. Я демонстративно вежливо и подробно разъяснил все его сомнения, так что он вынужден был публично подтвердить удовлетворенность моими ответами. Критические замечания Тюлиной уничтожающе убийственно прокомментировал в своем весьма эмоциональном выступлении Н.Н.Поляхов. Результаты голосования оказались положительными: 12 "за" и 4 "против".

Вслед за этим в Ленинградский университет поступило письмо из ВАКа с предложением рассмотреть на совете не обсуждавшийся на публичной защите диссертации полуотрицательный отзыв Е.Н.Ракчеева[6] и письмо И.А.Тюлиной в ЦК КПСС, к которому был приложен ее отзыв на мой пленарный доклад на Киевском съезде по теоретической и прикладной механике. Я вынужден был дать развернутый отзыв по всем этим материалам и предстать перед специально назначенной комиссией совета, чтобы ответить на возможные вопросы. Процедура эта носила, по существу, формальный характер. 9 апреля 1981 г. совет подтвердил свое предыдущее положительное решение по моей диссертации, и 28 августа ВАК, наконец, присвоил мне ученую степень доктора физико-математических наук.

Я счел необходимым информировать об окончании моих мытарств В.П.Глушко, в ответ на что получил от него "правительственную" телеграмму: "Сердечно поздравляю присвоением ученой степени доктора физико-математических наук. Желаю Вам крепкого здоровья, дальнейших успехов. В.П.Глушко".

Однажды, спустя два года, я пожаловался в личной беседе сэру Джеймсу Лайтхиллу на трудности в публикации в СССР моих работ по истории механики. Ознакомившись с одной из моих статей, он сказал, что понимает причину моих трудностей, обнаружил в статье новую для него информацию о развитии механики систем переменной массы в Кембриджском университете и предложил напечатать мой обзор по этой теме в одном из широко распространенных британских научно-популярных журналов. В результате моя статья "The Dynamics of Mechanical Systems with Variable Masses as Developed at Cambridge during the Second Half of the Nineteenth Century" увидела свет в 1984 г. в "Бюллетене" английского Института математики и ее приложений.

Впоследствии "Физматгиз" предложил мне издать на основе моей диссертации монографию, заключил со мной на этот счет договор и неоднократно продлевал его. Увы! По собственной неорганизованности, я достойную монографию так и не подготовил: "Но к лучшему стремлением своим хорошему мы иногда вредим!"

[6]Замечу, что в 1954 г. я выступал с резкой критикой Е.Н.Ракчеева – ученика Н.Д.Моисеева и сотрудника И.А.Тюлиной – при защите им в МГУ кандидатской диссертации по истории теории упругости в России.

G. K. Mikhailov

FROM MY REMINISCENCES

All-Russian Institute for Scientific and Technical Information, RAS

Abstract. The author remembers his correspondence with two emigrated Russian scientists - D.P.Riabouchinsky (1882-1962) and S.P.Timoshenko (1878-1972), academician N.I.Muskhelishvili (1891-1976), personal contacts with academician L.I.Sedov (1907-1999), author's intensive public activities in the Institute of Mechanics of the USSR Academy of Sciences in the late fifties and early sixties, dramatic fate of his doctoral thesis in the Moscow and Leningrad universities.

Keywords: Hydrodynamics, elasticity, mechanics history, astronautics

Глеб Константинович Михайлов

доктор физико-математических наук, профессор Института научно-технической информации РАН, г. Москва

`e-mail:` gkmikh@mail.ru

Gleb Konstantinovich Mikhailov

doctor of sciences, professor of All-Russian Institute for Scientific and Technical Information, RAS, Moscow

Из истории Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике[1]

Российский Национальный комитет по теоретической и прикладной механике (ранее: Национальный комитет СССР) был учрежден Постановлением Президиума Академии наук 31 августа 1956 г.

Первоначальный состав Комитета был утвержден Президиумом Академии наук СССР в 1956 г. в количестве 48 человек. В последующем пополнение Комитета происходило путем (тайных) выборов на сессиях Общего собрания Комитета (в 1961, 1965, 1972, 1976, 1983, 1985, 1987, 1995, 2001 и 2006 гг.) и по переписке в 2004 г. В настоящее время комитет насчитывает 363 члена.

Председатели:

Н. И. Мусхелишвили	1956–1976
М. А. Лаврентьев	1976–1980
И. Ф. Образцов	1981–1995
Г. Г. Черный	1995–по настоящее время

ЧЛЕНЫ-ОСНОВАТЕЛИ (48) И СТАРЕЙШИЕ ЧЛЕНЫ КОМИТЕТА
(декабрь 2008)

Члены-основатели:

И. И. Артоболевский (09.10.1905–21.09.1977)
Н. Х. Арутюнян (23.11.1912–19.01.1993)
А. А. Благонравов (01.06.1894–04.02.1975)
И. Н. Векуа (23.04.1907–02.12.1977)
В. З. Власов (24.02.1906–07.08.1958)
Л. А. Галин (28.09.1912–16.12.1981)
Н. И. Глаголев (14.03.1910–01.12.1996)
А. Л. Гольденвейзер (12.01.1911–12.01.2003)
Н. Н. Давиденков (26.03.1879–29.09.1962)
А. А. Дородницын (02.12.1910–07.06.1994)
А. А. Ильюшин (20.01.1911–31.05.1998)
А. Ю. Ишлинский (06.08.1913–07.02.2003)
М. В. Келдыш (10.02.1911–24.06.1978)
А. А. Космодемьянский (07.03.1909–08.12.1988)
П. Я. Кочина (13.05.1899–03.07.1999)
Е. А. Красильщикова (07.07.1911–25.05.1985)
М. А. Лаврентьев (19.11.1900–15.10.1980)
С. Г. Лехницкий (22.06.1909–10.09.1981)
Л. Г. Лойцянский (26.12.1900–03.11.1991)
А. И. Лурье (19.07.1901–12.02.1980)
А. И. Макаревский (16.04.1904–11.05.1979)
М. Д. Миллионщиков (16.01.1913–27.05.1973)
Г. К. Михайлов (* 24.02.1929)
Н. И. Мусхелишвили (16.02.1891–15.07.1976)

[1]http://www.ipmnet.ru/RNCTAM/ (дата обращения: 15.02.2009)

Х. М. Муштари (22.07.1900–23.01.1981)
А. И. Некрасов (09.12.1883–21.05.1957)
А. А. Никольский (13.02.1919–12.06.1976)
В. В. Новожилов (18.05.1910–14.06.1987)
В. М. Панферов (27.01.1916–16.10.1997)
Г. И. Петров (31.05.1912–13.05.1987)
Н. И. Пригоровский (01.04.1903–12.06.1988)
И. М. Рабинович (22.01.1886–28.04.1977)
Ю. Н. Работнов (24.02.1914–13.05.1985)
Х. А. Рахматулин (23.04.1909–10.01.1988)
Г. Н. Савин (01.02.1907–28.10.1975)
Л. И.Седов (14.11.1907–05.09.1999)
С. В. Серенсен (29.08.1905–02.05.1977)
Н. А. Слезкин (22.11.1905–16.12.1991)
В. В. Соколовский (17.10.1912–08.01.1978)
Л. Н. Сретенский (27.02.1902–08.08.1973)
В. В. Струминский (29.04.1914–22.02.1998)
Г. В. Ужик (15.07.1908–16.07.1964)
Ф. И. Франкль (12.03.1905–07.04.1961)
С. А. Христианович (09.11.1908–28.04.2000)
Н. А. Цытович (26.05.1900–26.04.1984)
Н. Г. Четаев (06.12.1902–17.10.1959)
К. Н. Шевченко (19.02.1904–23.07.1995)
Б. Н. Юрьев (10.11.1889–14.03.1957)

Ныне здравствующие члены-основатели:

Г.К. Михайлов

Ныне здравствующие члены Комитета, избранные в 1961 г. (5):

Сергей Александрович Амбарцумян (* 17.03.1922)
Григорий Исаакович Баренблатт (*10.07.1927)
Дмитрий Алексеевич Мельников (* 29.06.1925)
Юрий Алексеевич Митропольский (* 03.01.1917)
Горимир Горимирович Черный (* 22.01.1923)

Ныне здравствующие члены Комитета, избранные в 1965 г. (11):

Владимир Игоревич Арнольд (* 12.06.1937)
Илья Израилевич Блехман (* 29.11.1928)
Дюис Данилович Ивлев (* 06.09.1930)
Александр Васильевич Кармишин (* 02.09.1912)
Михаил Наумович Коган (* 07.11.1925)
Николай Николаевич Красовский (* 07.09.1924)
Григорий Александрович Любимов (* 23.06.1932)
Давид Рахмильевич Меркин (* 18.09.1912)

Юрий Исаакович Неймарк (* 24.11.1920)
Лев Васильевич Овсянников (* 22.04.1919)
Юрий Петрович Райзер(* 26.01.1927)

Ныне здравствующие члены Комитета, избранные в 1972 г. (17):

Олег Михайлович Белоцерковский (* 29.08.1925)
Олег Федорович Васильев (* 01.08.1925)
Самвел Самвелович Григорян (* 18.03.1930)
Александр Николаевич Гузь (* 29.01.1939)
Юрий Андреевич Демьянов (* 01.08.1931)
Васил Кабулович Кабулов (* 05.09.1921)
Дмитрий Михайлович Климов (* 13.07.1933)
Андрей Геннадиевич Куликовский (* 18.03.1933)
Гурий Иванович Марчук (* 08.06.1925)
Виктор Николаевич Николаевский (* 12.02.1935)
Владимир Васильевич Панасюк (* 27.02.1926)
Виктор Владимирович Русанов (* 02.11.1919)
Владимир Васильевич Сычёв (* 28.01.1924)
Геннадий Петрович Черепанов (* 08.01.1937)
Феликс Леонидович Черноусько (* 16.05.1938)
Тимур Магомедович Энеев (* 23.09.1924)
Юрий Львович Якимов (* 11.03.1931)

Старейшие члены Национального комитета:

Александр Васильевич Кармишин (* 02.09.1912) – 1965
Давид Рахмильевич Меркин (* 18.09.1912) – 1965
Георгий Сергеевич Бюшгенс (* 16.09.1916) – 1983
Юрий Алексеевич Митропольский (* 03.01.1917) – 1961
Игорь Михайлович Кирко (* 16.04.1918) – 1983

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 76–80

Д. Д. Ивлев

КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ И ДОСТИЖЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе водится определение коэффициента интенсивности статической неопределимости, характеризующего "уровень" статической неопределимости напряженного состояния. Рассмотрено изменение коэффициента статической неопределимости при выполнении в теле условия пластичности Треска и условия пластичности Мизеса. Отметим, что изменение напряженного состояния при выполнения условия пластичности Треска рассматривалось в работах [2, 3].

Ключевые слова: пластичность, идеальная, полная, упругость, напряжения, предел текучести, коэффициент, интенсивность, статическая определимость

УДК: 539.374

1. Напряженное состояние характеризуется тензором напряжений σ_{ij}, обозначим главные напряжения

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \tag{1}$$

Главные касательные напряжения, согласно (1), имеют вид

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \geq 0,\ \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \leq 0,\ \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \geq 0. \tag{2}$$

Имеет место

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0. \tag{3}$$

Напряженное состояние может быть охарактеризовано при помощи кругов Мора (рис. 1). Параметр Лоде характеризует взаимное положение кругов Мора (рис.1)

$$\lambda = \frac{AB}{AC} = tg\alpha = \frac{\sigma_2 - {}^1\!/_2\,(\sigma_1 + \sigma_3)}{{}^1\!/_2\,(\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}. \tag{4}$$

Состояние полной пластичности, статической определимости достигается при выполнении двух условий:

$$|\lambda| = \pm 1,\ \alpha = \pm\frac{\pi}{4},\ \sigma_1 = \sigma_2,\ \sigma_2 = \sigma_3, \tag{5}$$

Поступила 15.01.2009

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \tag{6}$$

где k – предел текучести при сдвиге.

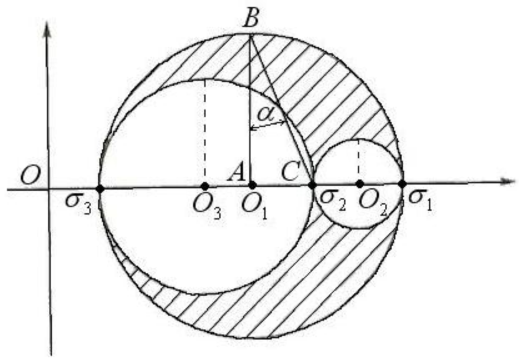


Рис. 1.

Условия (5), (6) по отдельности являются необходимыми, в совокупности условия (5), (6) определяют предельное, статически определимое соотношение полной пластичности. Отметим, что при условиях (5) любое предельное условие $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ приводит к полному предельному состоянию [4].

Отметим также, что при условии (5) могут быть развиты статически неопределимые соотношения теории упругости [1].

При $|\lambda| < 1$ имеет место статическая неопределимость, в этом случае заштрихованная площадь на рис. 1 отлична от нуля. Это обстоятельство может быть положено в основу определения коэффициента интенсивности статической неопределимости Δ, характеризующего относительную величину "уровня" статической неопределимости

$$\Delta = \frac{S_{13} - S_{12} - S_{23}}{S_{13}}, \tag{7}$$

где S_{ij} – площадь круга с диаметром $\sigma_i - \sigma_j$ (рис. 1).

Из (2), (7) следует

$$\Delta = \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2 - \tau_3^2}{\tau_2^2}. \tag{8}$$

Из (3), (8) получим

$$\Delta = \frac{2\tau_1\tau_3}{\tau_2^2}. \tag{9}$$

Согласно (2), при $\Delta = 0$ имеет место (5).

Максимальное значение

$$\Delta_{\max} = 1/2, \ 0 \le \Delta \le 1/2, \tag{10}$$

имеет место при $\tau_1 = \tau_3 = {}^1\!/_2\,|\tau_2|$.

Согласно (4), (9) получим

$$\lambda^2 = 1 - 2\Delta,\ \ \Delta = \frac{1}{2}(1 - \lambda^2). \tag{11}$$

На рис. 2 показана зависимость $\Delta - \lambda$

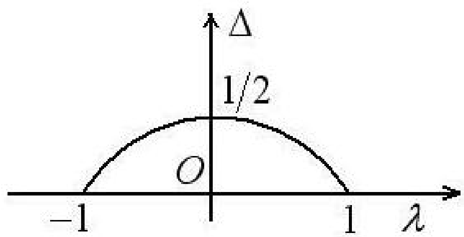


Рис. 2.

2. Предположим, что имеет место условие максимального касательного напряжения Треска (6)

$$\tau_{\max} = -\tau_2 = k,\ \ k - const. \tag{12}$$

На рис. 3 показан элемент тела, находящийся под действием напряжений

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = -k,\ \ -k \le \sigma_2 \le k.$$

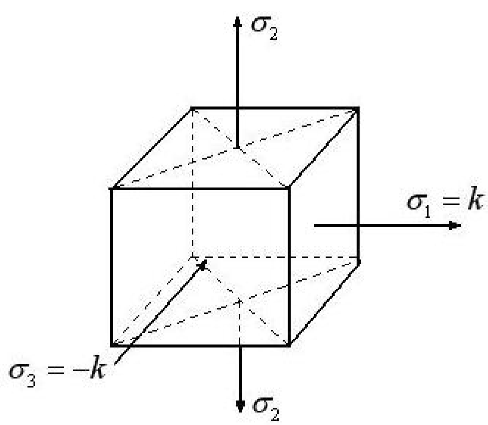


Рис. 3.

В дальнейшем, все величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к пределу текучести на сдвиг k (12)

Второй инвариант девиатора напряжений

$$\Sigma_2' = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2, \tag{13}$$

согласно (3), (8) примет вид

$$\Sigma_2' = 2 - \Delta. \tag{14}$$

Изменение напряжения σ_2 (рис. 3) не влияет на условие пластичности (12), с изменением напряжения σ_2 согласно (2), (8), (12), (14) изменяются коэффициент интенсивности статической неопределимости Δ, величина Σ_2', согласно (10), (14) имеет место

$$\frac{3}{2} \leq \Sigma_2' \leq 2. \tag{15}$$

Таким образом, при выполнении условия пластичности максимального касательного напряжения Треска (12) в процессе продолжающегося нагружения при $\Delta \to 0$, согласно (14) происходит *возрастание* величины Σ_2', при достижении которой предельного значения $\Sigma_2'{}_{\max} = 2$ $(\Delta = 0)$ в теле наступает состояние полной пластичности.

3. Предположим, что имеет место условие пластичности Мизеса

$$\Sigma_2' = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 1. \tag{16}$$

Рассмотрим изменение касательного напряжения

$$-\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq 0 \tag{17}$$

в процессе нагружения.

Из (3), (9), (16) следует

$$\tau_2^2 = \frac{1}{2 - \Delta}. \tag{18}$$

Согласно (10), (18) имеет место

$$\frac{1}{2} \leq \tau_2^2 \leq \frac{2}{3},\ 0 \leq \Delta \leq \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Таким образом, при выполнении условия пластичности Мизеса (16) в процессе продолжающегося нагружения при $\Delta \to 0$, согласно (18), происходит *уменьшение* величины $|\tau_2|$, при достижении которой предельного значения $|\tau_2| = {}^1\!/_2$ в теле наступает состояние полной пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2002. – Т. 2. – 446 с.

[2] *Ивлев, Д. Д.* О переходе статически неопределимого состояния в статически определимое / Д. Д. Ивлев // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2007. – № 1. – С. 5-9.

[3] *Ивлев, Д. Д.* О развитии идеально пластического состояния / Д. Д. Ивлев // Известия РАН. МТТ. – 2006. – № 6. – С. 99-102.

[4] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966.

D. D. Ivlev

COEFFICIENT OF THE INTENSITY OF STATIC INDEFINABILITY AND ACHIEVEMENT OF ABSOLUTE PLASTICITY'S CONDITION

The Chuvash State Pedagogic University named after I.Y. Yakovlev

Abstract. In the paper the definition of coefficient of the intensity of static indefinability is introduced, it characterizes the "level" of static indefinability of strain condition. The change of coefficient of the intensity of static indefinability with Treska's condition of plasticity and Mizes's condition of plasticity is investigated. The change of strain condition with Treska's condition of plasticity was investigated in works [2, 3].

Keywords: plasticity, ideal, absolute, elasticity, stress, fluidity limit, coefficient, intensity, static definability.

Ивлев Дюис Данилович

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, 428000, г. Чебоксары, ул. Карла Маркса, 38

Ivlev Dyuis Danilovich

doctor of sciences, professor, managing chair of the mathematical analysis of Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva, Cheboxary, 428000, st. Karla Marksa, 38.

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. №1. С. 81–97

В. Г. Зубчанинов

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ

Тверской государственный технический университет

Аннотация. Предложена модифицированная теория течения, в основе которой лежат соотношения теории процессов пластического деформирования сплошных сред и материалов и основная гипотеза теории течения о разложении полных деформаций на упругие и пластические части

Ключевые слова: пластичность, упругость, процессы, течение, сплошная среда, сложное нагружение, деформация, предельная поверхность, градиентальность

УДК: 539.3, 539.374

1. Процессы нагружения и деформирования в линейном координатном многомерном евклидовом пространстве

Симметричные тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} могут быть представлены в линейных координатных евклидовых пространствах напряжений Σ_6 и деформаций E_6с общим ортонормированным базисом $\{\hat{\varepsilon}_n\}$ в виде [3,4]

$$\bar{S} = X_n\hat{\varepsilon}_n; \quad \bar{\varepsilon} = Y_n\hat{\varepsilon}_n \quad (n = 1, 2, ...6). \tag{1}$$

$$X_1 = \sigma_{11},\, X_2 = \sigma_{22},\, X_3 = \sigma_{33},\, X_4 = \sqrt{2}\sigma_{12},\, X_5 = \sqrt{2}\sigma_{23},\, X_6 = \sqrt{2}\sigma_{13}, \tag{2}$$

$$Y_1 = \varepsilon_{11},\, Y_2 = \varepsilon_{22},\, Y_3 = \varepsilon_{33},\, Y_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{12},\, Y_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{23},\, Y_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{13}, \tag{3}$$

– компоненты векторов и тензоров напряжений и деформаций соответственно,

$$\begin{array}{l} S = \left|\bar{S}\right| = \sqrt{X_nX_n} = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}, \\ \varepsilon = \left|\bar{\varepsilon}\right| = \sqrt{Y_nY_n} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}, \end{array} \ (i, j = 1, 2, 3) \tag{4}$$

– их модули.

$$\hat{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0, ...0),\ \ \hat{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0, ...0),\, ...\, \hat{\varepsilon}_n = (0, 0, 0, ...1)\ \ (n = 6) \tag{5}$$

– ортонормированный координатный базис В.Прагера.

Базис (2) был введен первоначально в теорию пластичности В.Прагером для несимметричных тензоров σ_{ij} и ε_{ij} для девятимерного линейного координатного пространства, которое не было евклидовом [3,4].

Процессы нагружения в точке (частице) тела $x_k (k = 1, 2, 3)$ определяются заданием в ней шести компонент тензора напряжений [3,4,6,7]

Поступила 10.03.2009

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k, t), \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

а процесс деформирования – заданием шести компонент тензора деформаций.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_k, t), \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

как непрерывных функций координат точки x_k и времени t как параметра прослеживания процессов. В линейных векторных координатных пространствах Σ_6, E_6 эти процессы задаются криволинейными и прямолинейными траекториями.

$$\bar{S} = \bar{S}(t), \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t), \tag{6}$$

которые описывают концы векторов с длинами дуг Σ и ε соответственно.

Траектория деформирования в E_6 при базисе $\{\hat{\varepsilon}_n\}$ с построенным в каждой точке s вектором напряжений $\bar{S}$ и приписанными к этой точке температурой Ти другими нетермофизическими параметрами β создают *образ процесса*. Аналогично вводится понятие образа процесса в пространстве Σ_6 при базисе $\{\hat{\varepsilon}_n\}$. Отметим, что при преобразованиях вращения и отображения в Σ_6 и E_6 векторов и траекторий остаются неизменными только модули векторов и тензоров.

Линейное евклидово координатное пространство может иметь несколько ортонормированных базисов. А.А.Ильюшин ввел общий шестимерный базис $\left\{\hat{i}_k\right\}$, в Σ_6 и E_6 [4]

$$\begin{cases} \hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3\right), \\ \hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\cos\beta_0\hat{\varepsilon}_1 - \sin(\beta_0 + \pi/6)\hat{\varepsilon}_2 + \sin(\beta_0 - \pi/6)\hat{\varepsilon}_3\right] \\ \hat{i}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\sin\beta_0\hat{\varepsilon}_1 + \cos(\beta_0 + \pi/6)\hat{\varepsilon}_3 - \cos(\beta_0 - \pi/6)\hat{\varepsilon}_3\right] \\ \hat{i}_3 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_4, \ \ \hat{i}_4 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_5, \ \ \hat{i}_5 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_6, \end{cases} \tag{7}$$

где β_0 - произвольный угол, определяющий множество базисов на девиаторной плоскости. На практике наиболее удобным оказалось значение $\beta_0 = 0$, при котором из (7) следует

$$\begin{cases} \hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3\right), \\ \hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\hat{\varepsilon}_1 - \frac{1}{2}\left(\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3\right)\right], \\ \hat{i}_2 = \frac{\hat{\varepsilon}_2 - \hat{\varepsilon}_3}{\sqrt{2}}, \hat{i}_3 = \hat{\varepsilon}_4, \hat{i}_4 = \hat{\varepsilon}_5, \hat{i}_5 = \hat{\varepsilon}_6. \end{cases} \tag{8}$$

Он представил в тех же пространствах векторы напряжений и деформаций при базисе $\left\{\hat{i}_k\right\}$ в виде [7]

$$\overline{S} = S_k\hat{i}_k; \bar{\varepsilon} = Э_k\hat{i}_k \quad (k = 0, 1, 2...6) \tag{9}$$

где

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, \ S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, \ S_2 = \sqrt{2}(S_{22} + \frac{1}{2}S_{11}), \\ S_3 = \sqrt{2}S_{12}, \ S_4 = \sqrt{2}S_{23}, \ S_5 = \sqrt{2}S_{13}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Э_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, \ Э_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}Э_{11}, \ Э_2 = \sqrt{2}(Э_{22} + \frac{1}{2}Э_{11}), \\ Э_3 = \sqrt{2}Э_{12}, \ Э_4 = \sqrt{2}Э_{23}, \ Э_5 = \sqrt{2}Э_{13}, \end{cases} \tag{10}$$

– компоненты векторов, напряжений и деформаций,

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \ \ \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{11}$$

– средние напряжения и деформации, δ_{ij} - символ Кронеккера,

$$Э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \ \ S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \tag{12}$$

– компоненты девиаторов напряжений и деформаций соответственно.

Такое представление векторов (8) – (11) в Σ_6 и E_6-пространствах позволило разложить их в прямую сумму одномерных подпространств Σ_0 и E_0 всестороннего растяжения – сжатия и пятимерные подпространства Σ_5 и E_5 формоизменения. Учитывая сдвиговый характер пластического формоизменения и упругий характер объемного расширения-сжатия частиц тела, мы можем считать что для начально изотропных сред σ_0 и ε_0 связаны в E_0 законом Бриджмена

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \tag{13}$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \tag{14}$$

– модуль упругой объемной деформации, E – продольный модуль упругости Эйлера-Юнга, μ- коэффициент Пуассона.

В пятимерных подпространствах Σ_5, E_5 девиаторам напряжений и деформаций ставятся соответственно пятимерные векторы

$$\overline{\sigma} = S_k\hat{i}_k; \bar{Э} = Э_k\hat{i}_k \quad (k = 0, 1, 2...5) \tag{15}$$

и инварианты σ_0 и ε_0 в каждой точке s траектории деформирования соответственно. Траектория деформирования $\bar{Э}(s)$ в E_6 при базисе $\left\{\hat{i}_k\right\}$ с построенными в каждой точке векторами напряжений $\bar{S}, d\bar{S}$ и приписанными ним температурой T, параметрами β создают *образ процесса деформирования.* Аналогично вводится понятие образа процесса нагружения в Σ_6. Ортогональные преобразования вращения и отражения траектории в Σ_6 и E_6 сохраняют инварианты Э и S, но не сохраняют σ_0 и ε_0 и углы вида деформированного и напряженного состояний φ и ψ либо

$$\cos 3\varphi = 3\sqrt{6}\left|Э^*_{ij}\right|, \quad \cos 3\psi = 3\sqrt{6}\left|S^*_{ij}\right|, \tag{16}$$

где $Э^*_{ij} = Э_{ij}/Э$, $S^*_{ij} = S_{ij}/\sigma$, – компоненты направляющих тензоров формоизменения.

Траектория деформирования $\bar{Э}(s)$ в E_5 при базисе $\left\{\hat{i}_k\right\}$ с построенными в каждой точке S векторами $\bar{\sigma}, d\bar{\sigma}$ и приписанными к ним температурой T, средней деформацией ε_0 и параметрами β создают образ процесса деформирования в E_5. Аналогично вводится образ процесса нагружения в Σ_5.

Образы процессов дополняются также предельными поверхностями деформирования $F\left(\bar{Э}\right)$ и нагружения $f(\bar{\sigma})$ соответственно [3,4], что необходимо для сближения теории течения с теорией процессов.

Постулат макроскопической определенности утверждает, что термомеханическое состояние среды в момент времени t определяется процессом в каждой ее точке

$x_k (k = 1, 2, 3)$ физического пространства. Возникающий в процессе деформирования среды в каждой ее частице тензор напряжений $\sigma_{ij}(t)$ или шаровой тензор $\delta_{ij}\sigma_0$ и девиатор $S_{ij}(t)$ являются вполне определенными однозначными функциями процесса, то есть функционалами, зависящими от функций $\varepsilon_{ij}(t), T(t), \beta(t)$ либо, что все равно, от $\varepsilon_0(t), Э_{ij}(t), T(t), \beta(t)$.

Следовательно, имеют место функциональные соотношения [7]

$$\sigma_{ij} = F\left\{\varepsilon_{ij}, T, \beta\right\}_t \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{17}$$

либо

$$\sigma_0 = F_0\left\{\varepsilon_0, Э_{ij}, T, \beta\right\}_t, \quad S_{ij} = \Phi_{ij}\left\{\ \varepsilon_0, Э_{ij}, T, \beta\ \right\}_t, \tag{18}$$

где $S_{ij}, Э_{ij}$ – компоненты девиаторов напряжений и деформаций.

Соотношения (17) и (18) названы в [7] *общим постулатом изотропии* для начально изотропных сред. Эти соотношения остаются инвариантными относительно ортогональных преобразований вращения координатных осей $x_k (k = 1, 2, 3)$ в физическом пространстве.

А.А.Ильюшин предложил записывать (17), (18) в физическом пространстве в тензорном базисе $\left\{dЭ_{ij}^n/ds^n\right\}$, где $n = 0, 1, ...5$. Тогда, согласно (10) соотношения (18) можно записать в E_5 в виде

$$S_0 = 3KЭ_0, \ \ S_{ij} = \sum_{n=0}^{4} A_n \frac{d^n Э_{ij}}{ds^n} (i, j = 1, 2, 3). \tag{19}$$

Учитывая (10), получаем векторную форму записи представления соотношений (19) в E_5

$$\bar{S}_0 = 3K\bar{Э}_0, \quad \bar{\sigma} = \sum_{n=0}^{4} A_n \frac{d^n \bar{Э}}{ds^n}. \tag{20}$$

Используя соотношения Френе для ортонормированного базиса $\{\hat{p}_k\}$ в линейном евклидовом пространстве деформаций E_5

$$\frac{d\hat{p}_k}{ds} = -æ_{k-1}\hat{p}_{k-1} + æ_k \hat{p}_{n+1}, (k = 1....5),$$

где $æ_n$ – четыре параметра кривизны и кручения траектории, получаем

$$\bar{S} = S_0\hat{p}_0 + \bar{\sigma},$$

где

$$\bar{\sigma} = P_k\hat{p}_k, \quad (k = 1, 2, ...5) \tag{21}$$

– вектор напряжений в E_5, соответствующий девиатору напряжений,

$$P_k = P_k\left\{\varepsilon_0\ , Э, \varphi, æ_m, T, \beta\right\}_{s(t)} \tag{22}$$

– функционалы процесса, зависящие от всех трех инвариантов тензора деформаций в физическом пространстве, параметров кривизны и кручения $æ_m$(m=1,2,3,4) траектории, температуры T, физических параметров β по параметру прослеживания процесса $s(t)$.

Соотношение (21) неинвариантно относительно преобразований вращения и отражения в линейном подпространстве E_5. Образ процесса для каждой траектории деформирования в E_5соответствует различным физическим процессам. Однако, для большинства классов материалов, в условиях нормальной и повышенной температуры при малых деформациях влияние инвариантов ε_0, φ, в E_5 является слабым. К таким материалам относятся практически все металлы и их сплавы [6-8].

В этом случае для начально изотропных сред подпространств E_5,Σ_5 и пространств E_6,Σ_6 можно с достаточной степенью точности считать изотропным относительно ортогональных преобразований вращения и отражения. Это соображение позволило А.А.Ильюшину сформулировать частный постулат изотропии: *образ физического процесса сохраняется при всех преобразованиях вращения и отражения траекторий деформирования в E_5, если в соответствующих точках траектории деформирования* сохраняются значения $\varepsilon_0^{,}T, \beta$ [5-7]. Такое предположение, которые многие недооценили, позволило для большого класса материалов ставить и решать краевые задачи теории пластичности в условиях сложного напряженного состояния и сложного нагружения [6]. Постулат изотропии и сейчас остается наиболее общим в математической теории пластичности.

В [3,4] получена общая локальная форма определяющих соотношений на основе общего постулата изотропии в E_5

$$\frac{d\sigma}{ds} = M_k\hat{p}_k + M\hat{\sigma}, (k = 1, 2, ...5), \tag{23}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma}{ds} = -M_k \cos\beta_k, \frac{d\sigma}{ds} = P\cos\beta_1, \\ M_k = M_k \left\{\varepsilon_0, \text{Э}, \varphi, æ_m, T, \beta\right\}_{s(t)}, \end{array} \right. \tag{24}$$

$$\hat{\sigma} = \cos\beta_k\hat{p}_k, \hat{\text{Э}} = \cos\alpha_k\hat{p}_k \tag{25}$$

$\beta_k, \alpha_k -$ угловыекоординатыединичныхвекторовврепере $\{\hat{p}_k\}$.

Большим удобством при разделении скалярных и векторных свойств материалов явилось введение полярных сферических координат $\vartheta_m (m = 1, 2, 3, 4)$ согласно формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\sigma} = \cos\vartheta_1\hat{p}_1 + \sin\vartheta_1(\cos\vartheta_2\widehat{p}_2 + \sin\vartheta_2\widehat{p}_3), \\ \widehat{p} = \cos\vartheta_3\hat{p}_3 + \sin\vartheta_3(\cos\vartheta_4\widehat{p}_4 + \sin\vartheta_5\widehat{p}_5). \end{array} \right. \tag{26}$$

В соответствии с постулатом физической определенности и принципом ортогональности параметры кривизны и кручения $æ_3$и $æ_4$несущественны, а $\vartheta_3 = 0$. В связи с этим локальная форма (23) принимает вид

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = M_1\widehat{p}_3 + M\hat{\sigma} + M_3\hat{p}_3, \tag{27}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1\cos\vartheta_1 - M_3\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2, \\ M_k = M_k \left\{\varepsilon_0, \text{Э}, \varphi, æ_1, æ_2, T, \beta\right\}_{s(t)}. \end{array} \right. \tag{28}$$

Для углов сближения ϑ_1 и депланации ϑ_2 получены дифференциальные уравнения [3,4]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta_1}{ds} + æ_1 \cos\vartheta_2 = \frac{1}{\sigma}(-M_1 \sin\vartheta_1 + M_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2), \\ \sin\vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + æ_2\right) = æ_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma}\cos\vartheta_2. \end{array} \right. \tag{29}$$

Из (27) следует нелокальная форма определяющих соотношений [3,4]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N_1\hat{p}_1 + N_\sigma\hat{\sigma}, + N_Э\hat{Э} \tag{30}$$

где

$$N_\sigma = \frac{d\sigma}{ds} - N_1\cos\vartheta_1 - N_Э\cos\alpha, \tag{31}$$

$N_1, N_Э$ – функционалы процесса деформирования. Обычно соотношения (30) записывают в виде

$$d\overline{\sigma} = N_1 d\overline{Э} + ds\left[N^*_\sigma\bar{\sigma} + N^*_Э\bar{Э}\right] \tag{32}$$

либо, с учетом (31)

$$d\overline{\sigma} = N_1 d\bar{Э} + (P - N_1)\frac{\bar{\sigma}d\bar{Э}}{\sigma^2} + dsN_Э\bar{n}, \tag{33}$$

где вектор

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{n} = \hat{n}\sin\alpha = \hat{Э} - \hat{\sigma}\cos\alpha, \\ N^*_\sigma = \frac{N_\sigma}{\sigma}, \quad N^*_Э = \frac{N_Э}{\sigma}. \end{array} \right. \tag{34}$$

Соотношения (30) – (34) следуют также из гипотезы ортогональности вектора $\bar{\sigma}$ к предельным поверхностям.

Соотношения (32) играют определяющую роль в сближении двух основных направлений в теории пластичности – теории процессов и теории течения.

2. Общая теория пластического течения Мелана – Прагера.

В основе общей теории пластического течения лежит гипотеза о возможности разложения полных деформаций ε_{ij} на упругие ε^e_{ij} и пластические ε^p_{ij} части [3,4]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}, \quad (i,j = 1,2,3)\,. \tag{35}$$

Упругие части ε^e_{ij} определяются законом Гука

$$\varepsilon^e_{ij} = \frac{1}{E}\left\{(1+\mu)\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ij}\delta_{ij}\right\}, \tag{36}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, E – продольный модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона начально изотропной среды.

Тензоры деформаций и напряжений можно разложить на шаровые $\delta_{ij}\varepsilon_0, \delta_{ij}\sigma_0$ и девиаторы $S_{ij}, Э_{ij}$, так, что

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_0 + S_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\sigma_0 + Э_{ij}, \tag{37}$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{38}$$

– средние значения напряжений и деформаций.

Следствием основной гипотезы теории течения является концепция В.Прагера о существовании предельных поверхностей нагружения и деформирования [3,4]

$$f = f(\bar{s}, \varepsilon^p), \quad F = F(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}^p), \tag{39}$$

разделяющих области активного и пассивного деформирования. Все продолжения процесса из произвольной точки K траектории нагружения, через которую проходит поверхность, делятся на два множества. Первое множество имеет направление во вне поверхности нагружения и соответствует активному пластическому деформированию, для которого

$$\mathrm{grad}\, f \cdot d\bar{s} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0.$$

Второе множество имеет направление во внутрь предельной поверхности и отвечает упругой разгрузке, то есть не вызывает пластических деформаций так, что

$$\mathrm{grad}\, f \cdot d\bar{s} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad .$$

Таким образом, пластическое состояние материала при упругой разгрузке оказывается как бы "замороженным". Отметим также, что в связи с разложением полных деформаций на упругие и пластические части вопрос о законе упругой разгрузки в теории течения и не ставится.

Драккером был выдвинут постулат пластичности, согласно которому *на любом замкнутом процессе нагружения в пространстве напряжений Σ_6 работа избыточных напряжений положительна, если происходит изменение пластических деформаций.* Этот постулат позволил сделать вывод, что вектор приращения пластических $d\bar{Э}^p$должен составлять не тупой угол с любым приращением вектора напряжений $\Delta\bar{S}$, т.е. вектор $d\bar{Э}^p$ в регулярной точке поверхности должен быть направлен по ее внешней нормали [3,4]. Следовательно

$$d\bar{\varepsilon}^p = D\mathrm{grad}\, f(\bar{s}, \bar{\varepsilon}^p) df, df = \mathrm{grad}\, f \cdot d\bar{s} \tag{40}$$

или в скалярной форме

$$d\varepsilon_{ij}^p = D\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df, df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn}. \tag{41}$$

Для активного процесса пластического деформирования при $df > 0$ и

$$d\bar{\varepsilon}_{ij}^p = 0, \;\; d\varepsilon_{ij}^p = 0, \;\; df = 0. \tag{42}$$

для пассивного процесса упругой разгрузки. В (40), (41) – D-функционал процесса.

Роль гидростатического и девиаторных компонент тензоров при образовании пластических деформаций принципиально различны, т.к. пластическая деформация имеет ярко выраженный сдвиговый характер. Поэтому функция нагружения должна иметь вид

$$f = f(\sigma_0, S_{ij}, Э_{ij}^p). \tag{43}$$

Отнесем линейные координатные евклидовы шестимерные пространства деформаций E_6 и напряжений Σ_6 к новому ортонормированному базису

А.А.Ильюшина $\left\{\hat{i}_k\right\}$, где $k = 0,1,2,...5$ [3,4]. Как было выше отмечено, сдвиговые процессы формоизменения будут проходить в совмещенных пятимерных подпространствах Σ_5, E_5. Представим соответственно векторы напряжений и деформаций в этих подпространствах в виде

$$\bar{\sigma} = S_k\hat{i}_k, \quad \bar{\text{Э}} = \text{Э}_k\hat{i}_k, \quad (k = 1,2,...5). \tag{44}$$

Общий вид определяющих соотношений Мелана-Прагера (40), (42) примут в пространстве А.А.Ильюшина E_5 вид [3,4,7]

$$d\bar{\text{Э}}^{\mathrm{p}} = D\mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma}, \bar{\text{Э}}^{\mathrm{p}})df, \quad df = \mathrm{grad}\, f \cdot d\bar{\sigma} > 0 \tag{45}$$

для активных процессов пластического деформирования, и – вид

$$d\bar{\text{Э}}^{\mathrm{p}} = 0, d\bar{\text{Э}}^{e} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad df = \mathrm{grad} f \cdot d\bar{\sigma} < 0 \tag{46}$$

для пассивных процессов разгружения.

В скалярной форме вместо (45), (46) получаем

$$\begin{cases} d\text{Э}^p_{ij} = D\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}df, \quad df = \frac{\partial f}{\partial S_{mn}}dS_{mn} > 0, \quad (i,j,m,n = 1,2,3), \\ d\text{Э}^p_{ij} = 0, \quad d\text{Э}^e_{ij} = \frac{dS_{ij}}{2G}, \quad d\,f < 0. \end{cases} \tag{47}$$

Соотношения Мелана-Прагера для полных приращений деформаций принимают вид

$$\begin{cases} d\bar{\text{Э}} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + D\mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma}, \bar{\text{Э}}^{\mathrm{p}})df, \\ df = \mathrm{grad}\, f \cdot d\bar{\sigma} > 0 \end{cases} \tag{48}$$

для активных процессов, и

$$d\bar{\text{Э}} = d\bar{\text{Э}}^{e} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad df < 0 \tag{49}$$

для пассивных процессов упругой разгрузки.

В работах [8] А.А.Ильюшин высказал общее предположение, называемое постулатом пластичности: *работа напряжений во всяком замкнутом изотермическом процессе в пространстве деформаций E_6 неотрицательна*, т.е.

$$\mathrm{A} = \oint \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \geq 0.$$

Он показал, что из этого предположения следует так называемый принцип градиентальности или ассоциированный с предельной поверхностью деформирования $F(\bar{\text{Э}})$ закон течения.

$$d\bar{\text{Э}}^{\mathrm{p}} = D_1\mathrm{grad}F(\bar{\text{Э}})ds. \tag{50}$$

Этот закон содержит два скалярных функционала процесса течения D_1, F.

Применение постулата пластичности к аналогичному замкнутому по деформациям процессу в пространстве напряжений Σ_6 приводит к изоморфизму уже полученного результата

$$d\bar{\text{Э}}^{\mathrm{p}} = D_2\mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma})d\Sigma, \tag{51}$$

где D_2, f-функционалы процесса.

А.А.Ильюшин обратил внимание на то, что при разгрузке в результате развития деформационной анизотропии на активных участках траектории упругая деформация является однородной линейной функцией напряжений и обратно

$$d\bar{Э}^e = (g_{ij})\,\bar{\sigma},\ \bar{\sigma} = (E_{ij})\,\bar{Э}^e, \tag{52}$$

причем матрицы коэффициентов упругости (g_{ij}) и (E_{ij}) зависят от активных участков предшествующей траектории до начала разгрузки в некоторой точке К. Если не пренебрегать этим и обозначить вектор

$$d\bar{Э}* = d\bar{Э} - (g_{ij})\ \bar{\sigma}, \tag{53}$$

то из (48) следует определяющее соотношение

$$d\bar{Э}* = D_2 \mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma},\, \bar{Э}^{\mathrm{p}}) d\Sigma, \tag{54}$$

где Σ – длина дуги траектории нагружения и учтено, что

$$df = |\mathrm{grad}\, f| \cos\vartheta d\Sigma, \quad \cos\vartheta = \frac{d\sigma}{d\Sigma}.$$

Соотношение (54) носит название *обобщенного принципа градиентальности* в теории течения: *физический вектор* $d\bar{Э}*$ *нормален в пространстве* Σ_5*к предельной поверхности нагружения* $f(\bar{\sigma}, \{\bar{Э}^{\mathrm{p}})$.

Построение предельной поверхности упрочняющегося материала представляет собой трудную задачу. Упрочнение материала способствует возникновению деформационной анизотропии у первоначально изотропных материалов. Простейшей моделью упрочнения является модель изотропного упрочнения. Согласно этой модели начальная поверхность текучести равномерно расширяется подобно самой себе. Она является прямым обобщением "единой" универсальной диаграммы простого нагружения. Недостатком этой модели является то, что в ней невозможен эффект Баушингера. В. Прагер предложил модель, описывающую поведение упрочняющегося материала с отчетливо выраженным проявлением эффекта Баушингера [2, 10].

По описанию В.Прагера трансляция предельной поверхности в пространстве напряжений происходит следующим образом. Двигаясь по траектории нагружения конец вектора напряжений $\bar{\sigma}$выходит на начальную предельную поверхность в некоторой точке $К_0$. если условно считать эту точку гладким жестким шариком, а предельную поверхность нагружения моделировать жесткой оболочкой, то при дальнейшем сложном нагружении шарик начинает двигать оболочку давлением, ортогональным к предельной поверхности $f(\bar{\sigma})$. Предполагается, что оболочка двигается поступательно в направлении действия этого нормального к поверхности вектора давления $\bar{\sigma}^0$ без поворотов. В текущей точке К пересечение траектории нагружения $\bar{\sigma}\,(\Sigma)$ и предельной поверхности $f(\bar{\sigma})$ активный вектор давления $\bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma} -$ $\bar{\mathrm{a}}$, где $\bar{\mathrm{a}}$ – вектор дополнительных напряжений, ортогонален предельной поверхности. Данная кинематическая модель В.Прагера описывает в явном виде анизотропное упрочнение и эффект Баушингера при трансляции предельной поверхности. Недостатком модели В.Прагера является жесткое требование о недопустимости поворота предельной поверхности.

3. Частные теории пластического течения.

Различные теории течения отличаются друг от друга лишь формой задания функции нагружения $f(\bar{\sigma},\, \bar{Э}^{\mathrm{p}})$. Эта функция в общем случае зависит от векторов напряжений $\bar{\sigma}$и пластических деформаций $\bar{Э}^{\mathrm{p}}$ и практически не зависят от первых инвариантов σ_0, ε_0 шаровых тензоров.

При изотропном упрочнении обычно принимают

$$2f = \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} - C_p^2(s^p) = 0, \quad \sigma = \Phi\,(s)\,, \tag{55}$$

где $\Phi\,(s)$ – закон упрочнения для траектории малой и средней кривизны.

Из (54) с учетом (55) получаем

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = ds^p \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \quad d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + ds^p \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}. \tag{56}$$

Другой формой для полных приращений векторов деформаций и напряжений является форма, принимаемая в теории процессов (частный случай гипотезы компланарности).

$$\begin{cases} d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right) \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \\ d\bar{\sigma} = 2G d\bar{Э} + (P - 2G)\, \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \end{cases} \tag{57}$$

где использовано соотношение

$$ds^p = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right) d\sigma. \tag{58}$$

Для скользящего образа процесса реализуемого для траекторий малой кривизны имеем $\mathrm{P} = d\Phi/ds$ и из (24) получаем зависимость

$$ds^p = \left(1 - \frac{1}{2G}\frac{d\Phi}{ds}\right) ds = g_0 ds. \tag{59}$$

Из (56) следует, что полный вектор напряжений $\bar{\sigma}$ ортогонален поверхности нагружения.

При трансляционно-изотропном упрочнении принимается [3, 10]

$$2f(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}^0 \bar{\sigma}^0 - C_p^(s^p) = 0, \quad \sigma_0 = \mathrm{C_p}\,(s^p) \tag{60}$$

Полный вектор напряжений $\bar{\sigma}$ разлагается на вектор $\bar{\sigma}^0$ активных и $\bar{\mathrm{a}}$ – вектор добавочных микронапряжений

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + \bar{\mathrm{a}} \tag{61}$$

Ортогональным к поверхности нагружения считается вектор вектор активных напряжений $\bar{\sigma}_0$. Его модуль

$$\sigma_0 = \mathrm{C_p}\,(s^p) \tag{62}$$

характеризует изотропное упрочнение либо разупрочнение материала. Смещение центра поверхности нагружения определяет вектор $\bar{\mathrm{a}}$, характеризующий анизотропное упрочнение, учитывающее эффект Баушингера.

Согласно принципу градиентальности (54) и выражения (60) получаем

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = ds^p \frac{\bar{\sigma}^0}{\sigma^0},\, d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G},\, d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + ds^p \frac{\bar{\sigma}^0}{\sigma^0} \tag{63}$$

для активных процессов нагружения и

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = 0,\, d\bar{Э}^{e} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G},\, d\bar{Э} = d\bar{Э}^{e} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} \tag{64}$$

для пассивных процессов разгружения.

Для приращений пластических деформаций из (45) с учетом (55) может быть получена иная форма определяющих соотношений

$$d\bar{Э}^{p} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{k\sigma^2}\bar{\sigma}^0 = \left(1 - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma}d\bar{Э}}{k\sigma^2}\bar{\sigma}^0, \tag{65}$$

где

$$\mathrm{P} = \frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}dЭ} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{1}{\cos\vartheta_1}$$

– функционал А.А. Ильюшина. При этом по-прежнему $d\bar{Э}^{e} = d\bar{\sigma}/2G$.

Тогда соотношения теории с трансляционно-изотропным упрочнением для полных приращений могут быть записаны в форме, принимаемой в теории процессов

$$\left\{\begin{array}{l} d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{k\sigma^2}\bar{\sigma}^0, \\ d\bar{\sigma} = 2G + (P - 2G)\frac{\bar{\sigma}d\bar{Э}}{k\sigma^2}\bar{\sigma}^0, \end{array}\right. \tag{66}$$

где $\bar{\sigma}^0$ определено выражением

$$\bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma} - \bar{\mathrm{a}}, \tag{67}$$

$$k = 1 - \frac{\bar{\sigma}\cdot\bar{a}}{\sigma^2}. \tag{68}$$

Из (43), (45) получаем зависимость

$$ds^{\mathrm{p}} = g_0 ds, \;\; g_0 = \frac{\sigma_0}{k\sigma}(1 - \frac{P}{2G})\cos\vartheta_1.$$

При трансляционно-изотропном упрочнении для вектора $\bar{\mathrm{a}}$ в теории Кадашевича-Новожилова принимается закон квазипростого нагружения [9]

$$\bar{a} = 2g\bar{Э}^{\mathrm{p}}. \tag{69}$$

В этом случае

$$\left\{\begin{array}{l} k = 1 + \frac{g}{G} - 2g\frac{Э}{\sigma}\cos\alpha, \;\; \cos\alpha = \hat{\sigma}\cdot\hat{Э}, \\ \bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma} - \bar{a} = \bar{\sigma}(1 + \frac{g}{G}) - 2g\bar{Э}. \end{array}\right. \tag{70}$$

Для функции изотропного упрочнения принимают

$$\sigma_0 = \mathrm{C_p}\left(s^p\right) = \gamma\sigma^{\mathrm{T}}, \;\; \gamma = 1 + \mathrm{c}s^p.$$

Функция $2g$ определяется из опыта на простое растяжение, либо простое нагружение. Для этого используется закон Роша и Эйхингера в виде

$$\sigma = \Phi(Э), \quad \sigma = \mathrm{H}(Э^{\mathrm{p}}).$$

В этом случае три вектора $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^0 = \hat{\mathrm{a}}$ направлены по одной прямой и $\sigma = \sigma^0 + \mathrm{a}$. Тогда

$$2g = \frac{a}{Э^{\text{p}}} = \frac{\sigma - \gamma\sigma^{\text{T}}}{Э - \sigma/2G} = 2G\frac{\Phi(Э) - \gamma\sigma^{\text{T}}}{2GЭ - \Phi(Э)}. \tag{71}$$

В теории Кадашевича-Новожилова функция $\sigma^0 = \text{C}_{\text{p}}\left(s^p\right)$ изотропного упрочнения определяется из опыта на простое растяжение, либо простое нагружение. В этом случае параметры сложного нагружения такие как кривизна $æ_1$,кручение $æ_2$,углы излома ϑ_1^0не учитываются. Поэтому оценить их влияние невозможно, хотя вычислить можно. Эффект Баушингера учитывается, но принцип Мазинга не учитывается. Поэтому теория не может описать вторичную пластичность после “протыкания” предельной поверхности.

При изотропном упрочнении $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^0$, $\hat{\text{a}} = 0$, $k = 1$. Из (66) следует определяющие соотношения (57). Для квазипростого процесса течения ($\hat{\sigma} = \hat{Э}$, $\alpha = 0$) из (70) получаем $\bar{\sigma}^0 = k\bar{\sigma}$ и из соотношений (66) следует определяющие соотношения теории пластического течения В. Прагера для полных приращений

$$\begin{cases} d\bar{Э} = \frac{d\sigma}{2G} + (\frac{dЭ}{d\sigma} - \frac{1}{2G})\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{\sigma^2}\bar{\sigma}, \\ d\bar{\sigma} = 2Gd\bar{Э} + (\frac{d\sigma}{dЭ} - 2G)\frac{\bar{\sigma}d\bar{Э}}{\sigma^2}\bar{\sigma}. \end{cases} \tag{72}$$

С учетом (68) соотношения теории течения в форме (66) приводятся к виду соотношений теории процессов пластического деформирования

$$\begin{cases} N_1 d\bar{Э} = d\sigma - d\Sigma\left[M_\sigma^*\bar{\sigma} + M_{Э^*}\bar{Э}\right], \\ d\bar{\sigma} = N_1^d\bar{Э} + ds\left[N_\sigma^*\bar{\sigma} + N_{Э^*}\bar{Э}\right], \end{cases} \tag{73}$$

где

$$\begin{cases} N_1 = 2G,\ N_\sigma^* ds = M_\sigma^* d\Sigma,\ N_{Э^*}ds = M_{Э^*}d\Sigma, \\ N_\sigma^* = (\text{P} - 2G)(1 + \frac{g}{G})\frac{\cos\vartheta_1}{k\sigma}, \quad N_{Э^*} = -(\text{P} - 2G)2g\frac{\cos\vartheta_1}{k\sigma}, \\ M_\sigma^* = -(\frac{1}{\text{P}} - \frac{1}{2G})(1 + \frac{g}{G})\frac{\cos\vartheta}{k\sigma}, \quad M_{Э^*} = (\frac{1}{\text{P}} - \frac{1}{2G})(1 + \frac{g}{G})\frac{\cos\vartheta}{k\sigma}. \end{cases} \tag{74}$$

Обобщение теории течения с трансляционно-изотропным упрочнением предпринято в работах [1]. Вместо закона (69) для вектора дополнительных микронапряжений $\bar{\text{a}}$ предложено “эвристическое” уравнение вида

$$d\bar{a} = gd\bar{Э}^{\text{p}} + ds^p\left[g_{a^{\bar{a}}} + g_Э\bar{Э}^p\right]. \tag{75}$$

Таким образом, основными соотношениями обобщенного варианта теории течения с трансляционно-изотропным упрочнением становятся уравнения

$$\bar{Э} = \bar{Э}^e + \bar{Э}^p, \quad d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad \bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma} - \bar{\text{a}},$$

$$d\bar{Э}^p = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{k\sigma^2}\left(\bar{\sigma}^-\bar{\text{a}}\right) \quad , \tag{76}$$

$$d\bar{a} = gd\bar{Э}^{\text{p}} + ds^p\left[g_a^{\bar{a}} + g_Э^{\bar{Э}^p}\right],$$

а также скалярная функция

$$\sigma^0 = \text{C}_{\text{p}}\left(s^p\right). \tag{77}$$

Данный вариант учитывает эффект знакопеременного нагружения, предсказываемый эффектом Баушингера и принципом Мазинга, т.е. по существу учитывается максимально допустимый излом траектории на 180^0 в рамках траектории малой и средней кривизны, для которых диаграмма деформирования $\sigma = \mathrm{H}(s^{\mathrm{p}})$ близка к диаграмме простого нагружения, а упругая разгрузка описывается линейным законом. В основные соотношения (76), (77) входят величины $\bar{Э}, \bar{Э}^e, \bar{Э}^p,\ \bar{a}, \bar{\sigma}^0$, зависящие от вектора-аргумента $\bar{\sigma}$. В то же время, остается открытым вопрос о корректности одного из основных определяющих соотношений (75) и направлении действия вектора активных напряжений $\bar{\sigma}_0$. В теории [9] поведение этого вектора не обсуждается, а модель В.Прагера утверждает, что во все время течения он имеет неизменное направление.

4. Модифицированная теория течения.

Данная теория предложена в развитие общей теории течения. В ее основе лежат две гипотезы. Первая – это основная гипотеза теории течения о возможности разложения полных деформаций на упругие и пластические части

$$\bar{Э} = \bar{Э}^e + \bar{Э}^p,\ \ d\bar{Э} = d\bar{Э}^e + d\bar{Э}^p, \tag{78}$$

$$d\bar{Э}^e = d\bar{\sigma}/2G. \tag{79}$$

Вторая гипотеза – это гипотеза ортогональности полного вектора напряжений $\bar{\sigma}$ к предельной поверхности $f\left(\bar{\sigma}\right)$

$$\bar{\sigma} = \operatorname{grad} f\left(\bar{\sigma}\right). \tag{80}$$

При этом, согласно модели В.Прагера, поверхность нагружения обладает только поступательным перемещением [7,8], в то время как в теории процессов эта поверхность может поворачиваться.

Из гипотезы ортогональности (79) в теории процессов вытекает нелокальная форма определяющего соотношения

$$d\bar{\sigma} = N_1 d\bar{Э} + ds\left[N_\sigma^* \bar{\sigma} + N_Э^* \bar{Э}\right], \tag{81}$$

где $N_1, N_\sigma^*, N_Э^*$ – функционалы процессов деформирования в E_5 .

В пространстве напряжений Σ_5 вместо (81) получаем

$$d\overline{Э} = \frac{1}{N_1} d\overline{\sigma} - \frac{d\Sigma}{N_1}\left[M_\sigma{}^* \bar{\sigma} + M_Э^* \bar{Э}\right] \tag{82}$$

где $N_1, M_\sigma^*, M_{Э^*}$ – функционалы процесса нагружения, Σ – длина дуги траектории нагружения в Σ_5,

$$dsN_\sigma^* = d\Sigma M_{\sigma^*}, dsN_{Э^*} = d\Sigma M_{Э^*}.$$

Подставляя (78), (79) в (81), получаем

$$(1 - \frac{N_1}{2G}) d\overline{\sigma} = N_1 d\bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds\left[N_\sigma^* \bar{\sigma} + N_Э^* \bar{Э}^p\right] \tag{83}$$

где

$$N^* = N_\sigma^* + \frac{1}{2G} N_Э^* \quad , \quad b = 1 - \frac{N_1}{2G} \tag{84}$$

в теориях течения принимается $N_1 = 2G$, $b = 0$. Тогда из (83) находим

$$d\bar{Э}^{\text{р}} = -\frac{ds}{2G}\left[N_\sigma^*\bar{\sigma} + N_Э^*\bar{Э}^p\right]. \tag{85}$$

Однако, при практически расчетах предел текучести $\sigma^{\text{Т}}$ и положение предельной поверхности определяется по допуску на остаточные деформации $Э^{\text{Т}}_{\text{ост}}$ и поэтому этот предел по существу является "функцией" точности измерительных приборов. Диаграмма деформирования еще до достижения принятого по допуску предела текучести начинает отклонятся от пропорциональной зависимости согласно закона Гука, искривляется и при $\sigma = \sigma^{\text{Т}}$имеет некоторый наклон касательной, тангенс угла которой меньше удвоенного упругого модуля сдвига $2G$. Поэтому утверждения в ряде источников о том, что в теории пластического течения метод обработки экспериментальных данных по определению материальных функций "не связан с определением пределов текучести и других величин с какими либо допусками на деформацию" не имеет смысла. Поэтому при построении модифицированной теории течения нами принято $N_1 < 2G$и $b \neq 0$.

Из (83) в соответствии с выше отмеченным получаем основное определяющее соотношение теории течения

$$d\overline{\sigma} = N_1^p d\bar{Э}^{\text{р}} + ds\left[N_\sigma^p\bar{\sigma} + N_Э^p\bar{Э}^p\right] \tag{86}$$

где

$$N_1^p = \frac{N_1}{b}, N_\sigma^p = \frac{N^*}{b}, N_{Э^{\text{р}}} = \frac{N_{Э^*}}{b}. \tag{87}$$

Соотношение (86) сохраняет в себе полный вектор $\bar{\sigma}$ и нет необходимости его разлагать на векторы активных напряжений $\bar{\sigma}^0$ и добавочных микронапряжений $\bar{a}$, что чрезвычайно важно. Для вектора $\bar{Э}^{\text{р}}$ из (86) получаем

$$d\bar{Э}^{\text{р}} = (\frac{1}{N_1} - \frac{1}{2G})\left\{d\bar{\sigma} - ds\left[N_\sigma^p\bar{\sigma} + N_Э^p\bar{Э}^p\right]\right\} \tag{88}$$

Полная деформация, согласно (79), (88),

$$d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{N_1} - ds(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{2G})\left[N_\sigma^p\bar{\sigma} + N_Э^p\bar{Э}^p\right]\} \tag{89}$$

Введем вектор

$$d\bar{Э}^* = d\overline{Э}^p - (\frac{1}{N_1} - \frac{1}{2G})d\bar{\sigma} - dsN_Э^p\bar{Э}^p \tag{90}$$

Этот вектор (90) с учетом (79) приводит к принципу градиентальности в теории процессов [2, 4, 7]

$$d\bar{Э}^* = D\text{grad}\, f(\bar{\sigma})d\Sigma, \tag{91}$$

т.е. вектор $d\bar{Э}^*$, коллинеарный полному вектору напряжений $\bar{\sigma}$, ортогонален к предельной поверхности, разделяющий области активного и пассивного упругопластического деформирования.

В частном случае $N_1 = 2G$ и $N_Э^p = 0$ получаем $d\bar{Э}^* = d\bar{Э}^{\text{р}}$, т.е. приходим к принципу градиентальности в классической теории течения.

$$d\bar{Э}^{\text{р}} = D\text{grad}\, f(\bar{\sigma})d\Sigma$$

или

$$d\bar{\text{Э}}^{\text{p}} = d\lambda \text{grad}\, f(\bar{\sigma}). \tag{92}$$

В теории течения полный вектор напряжений представляется в виде

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + \bar{\text{a}}, \tag{93}$$

где $\bar{\sigma}^0$ – вектор активных напряжений, $\bar{\text{a}}$ – вектор дополнительных микронапряжений.

Обозначим, как в теориях течения,

$$N_1 = g_1, N_\sigma^p = g_\sigma, N_{\text{Э}}^{\text{p}} = g_{\text{Э}}$$

и представим (59) в виде

$$d\bar{\sigma} = g_1^d \bar{\text{Э}}^{\text{p}} + ds^p \left[g_a \bar{\sigma} + g_{\text{Э}} \bar{\text{Э}}^p \right]. \tag{94}$$

Подставляя (93) в (94), получим соотношение

$$d\bar{a} = g_1 d\bar{\text{Э}}^{\text{p}} + ds^p \left[g_a^{\bar{a}} + g_{\text{Э}} \bar{\text{Э}}^p \right] + \bar{\sigma}*, \tag{95}$$

где

$$\bar{\sigma}^* = ds g_\sigma \bar{\sigma}^0 - d\bar{\sigma}^0 = \left[ds g_\sigma^{\sigma^0} - d\sigma^0 \right] \hat{\sigma}^0 - d\hat{\sigma}^0. \tag{96}$$

Так как $\hat{\sigma}^0 \cdot d\hat{\sigma}^0 = 0$, то $\hat{\sigma}^0 \perp d\hat{\sigma}^0$. В модели В.Прагера $\hat{\sigma}^0 = const$, т.е. во все время процесса сохраняется неизменным направление вектора $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 \hat{\sigma}^0$, что маловероятно. Однако, есди это допустить то $d\hat{\sigma}^0 = 0$. Тогда из (96) находим

$$\bar{\sigma}^* = \left[ds g_\sigma^{\sigma^0} - d\sigma^0 \right] \hat{\sigma}^0. \tag{97}$$

Если предположить, что $\bar{\sigma}^* = 0$, то из (95) следует “эвристическое” соотношение (54) теории течения с изотропно-трансляционным упрочнением [1]. Но в таком случае из условия (75) получаем уравнение

$$\frac{d\sigma^0}{ds} = g_\sigma \sigma^0, \tag{98}$$

из которого следует решение

$$\sigma^0 = \text{C}(s) = \sigma^T \exp \left\{ \int\limits_0^{\Delta s} g_\sigma ds \right\}^{-\beta \Delta s}, \tag{99}$$

если принять $g_\sigma = const$, то получим

$$\sigma^0 = \sigma^T e^{-g_\sigma \Delta s}, \tag{100}$$

откуда следует, что функция – радиус предельной поверхности $\sigma^0 = C_p(s^p)$, характеризующее изотропное упрочнение или разупрочнение суживается. Это означает, что в процессе деформирования при $s^p \to \infty$предельная поверхность превратится в точку, что совсем невероятно. Уменьшение радиуса предельной поверхности при активном трансляционном упрочнении подтверждается результатами обработки экспериментальных данных для различных материалов при растяжении в [1].

Нелокальная форма определяющего соотношения и ее вариант соотношений модифицированной теории течения в своей основе опираются на принцип ортогональности полного вектора напряжений к предельной поверхности. Из этого принципа естественным образом следует, что векторы $\bar{\sigma}^0$ и $\bar{a}$ имеют направление, что и $\bar{\sigma}$ и поэтому имеет место не только Но в таком случае единичные векторы $\hat{\sigma}^0 = \hat{a} = \hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}^0 = \sigma^0\hat{a}$, $\hat{\sigma} = \sigma\hat{a}$, а уравнение (94) примет вид

$$d\bar{\sigma} = g_1^0 d\bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds\left[g_\sigma^0\bar{\sigma} + g_Э^0\bar{Э}^p\right] \tag{101}$$

откуда

$$d\bar{a} = g_1^0 d\bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds\left[g_a^0\bar{a} + g_Э^0\bar{Э}^p\right], \tag{102}$$

где

$$g_1^0 = \frac{a}{\sigma}g_1, \quad g_a^0 = g_\sigma^0 - \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma^0}{ds}, \quad g_Э^0 = \frac{a}{\sigma}g_Э, \quad ds = g_0 ds^p.$$

Таким образом, соотношение (45) теории течения с трансляционным упрочнением в [1] является корректным в рамках теории течения, если принят принцип ортогональности полного вектора напряжений $\bar{\sigma}$ к предельной поверхности. Но в таком случае в теории течения с трансляционным упрочнением нет необходимости раскладывать полный вектор напряжений $\bar{\sigma}$ на вектор активных $\bar{\sigma}^0$ и вектор добавочных $\bar{a}$напряжений. Достаточно использовать основное соотношение модифицированной теории течения (86) либо (89).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бондарь, В. С.* Неупругость. Варианты теории / В. С. Бондарь. – М. :Физматлит, 2004. – 144 с.

[2] *Зубчанинов, В. Г.* Гипотеза ортогональности и принцип градиентальности в теории пластичности / В. Г. Зубчанинов // Известия РАН. МТТ. – 2008. – № 5. – С. 68-73.

[3] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2002. – 300 с.

[4] *Зубчанинов, В. Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 2 : Пластичность / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2008. – 336 с.

[5] *Ильюшин, А. А.* Еще о постулате изотропии / А. А. Ильюшин // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 201-204.

[6] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : МГУ, 1990. – 310 с.

[7] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : АН СССР, 1963. – 271 с.

[8] *Ильюшин, А. А.* Труды. Т. 2 : Пластичность, 1946-1966 / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит, 2004. – 479 с.

[9] *Новожилов, В. В.* Вопросы механики сплошной среды / В. В. Новожилов. – Ленинград [СПб.] : Судостроение, 1989. - 397 с.

[10] *Поль, Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Б. Поль // Разрушение. Т. 2 : Математические основы теории разрушения. – М. : Мир, 1975. – С. 336-520.

V. G. Zubchaninov

MODIFIED FLOWING THEORY

Tver State Technical University

Abstract. The modified flowing theory fouded on equations of theory of processes is considered. Decomposition of total strains on elastic and plastic components and hypothesis of ortogonality are used.

Keywords: plasticity, elasticity, flowing, continuous solid, complex loading, strain, deformation, limit surface, gradientity.

Зубчанинов Владимир Георгиевич

доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь

`e-mail:` vgz@rambler.ru

Vladimir Georgievich Zubchaninov

doctor of science, professor, managing chair of resistance of materials, Theories of elasticity and plasticity of the Tver state technical university, Tver

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 98–104

Ш. Г. Гасанов

О ЧАСТИЧНОМ ЗАКРЫТИИ ТРЕЩИНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГИХ СРЕД

Азербайджанская сельскохозяйственная академия

Аннотация. Исследуется плоская задача о трещине, возникающей на границе раздела двух однородных изотропных сред с различными упругими постоянными. Считается, что при приложении внешней нагрузки в концевой зоне трещины будут возникать сжимающие напряжения, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт.

Ключевые слова: кусочно-однородное тело, трещина на границе раздела сред, концевая контактная зона, контактные напряжения.

УДК: 539.374

Рассматривается задача о распределении напряжений и деформаций вблизи края трещины, возникающей на границе раздела двух однородных изотропных сред с различными упругими постоянными.

При некоторых видах нагружения двухслойного тела и соотношениях геометрических параметров возможно уменьшение деформации тела в направлении перпендикулярном трещине-расслоении, и в связи с этим снижается коэффициент интенсивности напряжений в кончике трещины. Следует ожидать, что при некотором соотношении параметров нагружения и геометрических характеристиках двухслойного тела будут возникать зоны S сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт. Это взаимодействие берегов трещины приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещины.

В случае, когда характерный линейный размер S считается малым по сравнению с длиной трещины или с каким-либо другим характерным линейным размером L двухслойного тела в плане, возможно эффективное асимптотическое решение задачи о частичном закрытии трещины, основанное на представлении о тонкой структуре конца трещины.

Задачу о тонкой структуре конца трещины на границе раздела сред (т.е. о распределении напряжений и деформаций на расстояниях r от конца трещины, удовлетворяющих условию $L >> r >> \rho$, где ρ – радиус кривизны конца трещины) можно ставить [3] следующим образом.

Рассмотрим окрестность конца трещины, которая мала по сравнению с характерным линейным размером в плане пластины, но больше сравнительно с характерным линейным размером области S. Тогда трещина на плоскости xy представится полубесконечным размером вдоль $y = 0$, $-\infty < x < 0$. При этом в

Поступила 17.04.2008

части разреза длиной d (концевая зона), примыкающая к ее вершине, берега трещины будут взаимодействовать (войдут в контакт), что будет способствовать появлению контактных напряжений на данном участке. Вне этого участка берега трещины будут свободны от нагрузок. На бесконечности реализуется напряженное поле, характерное для тонкой структуры конца трещины. Это поле считается заданным и имеет [3] следующий вид

$$
\begin{aligned}
\sigma_x = {} & \tfrac{K_I^\infty}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[3\cos\tfrac{\theta}{2}-2\beta\sin\theta\cos\tfrac{3\theta}{2}-\sin\theta\sin\tfrac{3\theta}{2}\right]-\right.\\
& \left.-\,e^{\beta(\theta-\pi)}\cos\tfrac{\theta}{2}\right\}-\tfrac{K_{II}^\infty}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{e^{\beta(\theta-\pi)}\sin\tfrac{\theta}{2}+e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[-3\sin\tfrac{\theta}{2}+\right.\right.\\
& \left.\left.+\,\sin\theta\cos\tfrac{3\theta}{2}-2\beta\sin\theta\sin\tfrac{3\theta}{2}\right]\right\},\\
\sigma_y = {} & \tfrac{K_I^\infty}{2ch\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[\cos\tfrac{\theta}{2}+2\beta\sin\theta\cos\tfrac{3\theta}{2}+\sin\theta\sin\tfrac{3\theta}{2}\right]+e^{\beta(\theta-\pi)}\cos\tfrac{\theta}{2}\right\}-\\
& -\tfrac{K_{II}^\infty}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{-e^{\beta(\theta-\pi)}\sin\tfrac{\theta}{2}+e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[\sin\theta-\sin\theta\cos\tfrac{3\theta}{2}+2\beta\sin\theta\sin\tfrac{3\theta}{2}\right]\right\},\\
\tau_{xy} = {} & \tfrac{K_I^\infty}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[\sin\tfrac{\theta}{2}+\sin\theta\cos\tfrac{3\theta}{2}-2\beta\sin\theta\sin\tfrac{3\theta}{2}\right]-e^{\beta(\theta-\pi)}\sin\tfrac{\theta}{2}\right\}-\\
& -\tfrac{K_{II}^\infty}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{-e^{\beta(\theta-\pi)}\cos\tfrac{\theta}{2}+e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[-\cos\tfrac{\theta}{2}+\sin\theta\sin\tfrac{3\theta}{2}+2\beta\sin\theta\cos\tfrac{3\theta}{2}\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В поставленной задаче параметрами нагружения являются коэффициенты интенсивности напряжений K_I^∞, K_{II}^∞, представляющие собой некоторые функции формы двухслойного тела, граничных условий. Они определяются из решения задачи “в целом”.

Рассматриваемая задача состоит в определении контактных напряжений на участке $-d \le x \le 0$, размера контактной зоны, а также напряженно-деформированного состояния вне трещины. Концевая область, примыкающая к вершине трещины, мала по сравнению с остальной частью плоскости. Считается, что при закрытии берегов трещины предельное равновесие не достигнуто и, таким образом, проскальзывание берегов трещины отсутствует. При действии внешней нагрузки на некотором участке d берега трещины взаимодействуют между собой. Это взаимодействие берегов трещины приводит к появлению в общем случае нормальных $q_y(x)$ и касательных усилий $q_{xy}(x)$. Таким образом, к берегам разреза в концевой области будут приложены нормальные и касательные напряжения, численно равные $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$, соответственно. Величины этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Граничные условия рассматриваемой задачи на берегах трещины имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y=0, -\infty < x < -d,\\
&\sigma_y - i\tau_{xy} = q_y - iq_{xy} \quad \text{при} \quad y=0, -d \le x \le 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где i – мнимая единица.

С помощью формул Колосова-Мусхелишвили [2] имеем

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x^{(k)}+\sigma_y^{(k)} = 2\left[\Phi_k(z)+\overline{\Phi_k(z)}\right] \quad (z=x+iy),\\
&\sigma_y^{(k)}+i\tau_{xy}^{(k)} = \Phi_k(z)+\overline{\Phi_k(z)}+\bar{z}\Phi_k'(z)+\Psi_k(z),\\
&2G_k\left(u^{(k)}+iv^{(k)}\right) = k_k\varphi_k(z)-z\overline{\Phi_k(z)}-\overline{\psi_k(z)} \quad (k=1,\ 2).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь $k_1 = 3 - 4\mu_1$; $k_2 = 3 - 4\mu_2$; $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ – аналитические функции при $y > 0$, $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ – аналитические функции при $y < 0$.

Следуя [4], введем функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, аналитические во всей плоскости z, кроме, может быть, оси x

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{G_1(1+k_2)}{G_1+k_1G_2}\Phi_2(z) + \frac{G_2-G_1}{G_1+k_1G_2}\left[\bar{\Phi}_1(z) + z\bar{\Phi}'_1(z) + \bar{\Psi}_1(z)\right] \quad \text{при} \quad \mathrm{Im}z < 0, \\ \Phi_1(z) \quad \text{при} \quad \mathrm{Im}z > 0, \end{cases}$$
$$\Omega(z) = \begin{cases} \frac{G_1(1+k_1)}{G_2+k_2G_1}\left[\bar{\Phi}_2(z) + z\bar{\Phi}'_2(z) + \bar{\Psi}_2(z)\right] - \frac{G_1k_2-G_2k_1}{G_2+k_2G_1}\Phi_1(z) \quad \text{при} \quad \mathrm{Im}z > 0, \\ \bar{\Phi}_1(z) + z\bar{\Phi}'_1(z) + \bar{\Psi}_1(z) \quad \text{при} \quad \mathrm{Im}z < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Из этих формул получаем необходимые в дальнейшем основные соотношения, выражающие производные по x от компонент вектора смещения и компоненты тензора напряжения через функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$.

В верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}z > 0$)

$$\begin{aligned} &\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\Phi(z), \\ &\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ &2G_1\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = k_1\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}; \end{aligned} \tag{5}$$

в нижней полуплоскости ($\mathrm{Im}z < 0$)

$$\begin{aligned} &\sigma_x + \sigma_y = 4\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\mathrm{Re}\left[\Phi(z) + \frac{G_2-G_1}{G_1+k_1G_2}\Omega(z)\right], \\ &\quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\Phi(z) + \frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(z) + \frac{G_1k_2+G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(\bar{z}) + \\ &\quad + \frac{G_1k_2-G_2k_1}{G_1+k_2G_1}\Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\left[\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Phi'(z)} + \frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Omega'(z)}\right], \\ &2G_2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = k_2\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\Phi(z) + k_2\frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(z) - \frac{G_1k_2+G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(\bar{z}) - \\ &\quad - \frac{G_1k_2-G_2k_1}{G_1+k_2G_1}\Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\left[\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Phi'(z)} + \frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Omega'(z)}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая соотношения (5) и (6) граничные условия (2) запишем в виде [4]

$$\begin{gathered} \Phi^+ + \Omega^- = f^+(x) \\ (G_1 + G_2k_1)\Phi^- + (G_1 - G_2)\Omega^- + (G_1k_2 - G_2k_1)\Phi^+ + (G_1k_2 + G_2)\Omega^+ = \\ = (G_1 + k_2G_1)f^-(x), \end{gathered} \tag{7}$$

где $f^{\pm}(x) = 0$ при $-\infty < x < -d$, $f^{\pm}(x) = q_y - iq_{xy}$ при $-d \leq x \leq 0$; знаки плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам трещины с концевой контактной зоной.

После некоторых преобразований получим две решаемые порознь краевые задачи линейного сопряжения для одной функции

$$\begin{aligned} &F_1^+ - F_1^- = f^+ - f^-, \quad (-\infty < x < 0) \\ &F_2^+ + gF_2^- = f_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $F_1(z) = \frac{1}{G_1(1+k_2)}\left[C_2\Phi(z) - C_1\Omega(z)\right]$, $F_2(z) = \Phi(z) + \Omega(z)$, $g = \frac{C_2}{C_1}$, $C_1 = G_2 + k_2G_1$, $C_2 = G_1 + k_1G_2$, $f_0 = \frac{B}{C_1}f^+$, $B = \left[G_2(1 + k_1) + G_1(1 + k_2)\right]$.

В классе функций, имеющих на конце разреза интегрируемую особенность, общее решение неоднородной задачи (8) запишется в виде

$$F_1(z) = \mathrm{C}, \quad F_2(z) = \frac{1}{2\pi i z^{1/2-i\beta}} \int\limits_{-d}^{0} \frac{x^{1/2-i\beta} f_0(x)dx}{x-z} + \frac{K_I^\infty - iK_{II}^\infty}{2\sqrt{2\pi} z^{1/2-i\beta}}, \tag{9}$$

где $\beta = \frac{1}{2\pi} \ln g$.

Из условия на бесконечности следует, что $C = 0$.

Формулы для комплексных потенциалов принимают вид

$$\Phi(z) = \frac{\mathrm{C}_1}{B} F_2(z), \quad \Omega(z) = \frac{C_2}{B} F_2(z). \tag{10}$$

Для окончательного определения потенциалов $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ необходимо найти контактные напряжения $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$ на участке контакта между кромками трещин, т.е. при $-d \le x \le 0$.

Условием, служащим для определения неизвестных контактных напряжений, возникающих на берегах трещины в концевой контактной зоне, является отсутствие раскрытия трещины в этой области. В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее записать для производной раскрытия смещения берегов трещины

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u^{(1)} - u^{(2)} + i\left(\upsilon^{(1)} - \upsilon^{(2)}\right)\right] = 0, \tag{11}$$

где x – аффикс точек концевой зоны трещины $-d \le x \le 0$.

Для определения функции $q_y - iq_{xy}$ рассмотрим формулы (5) и (6). На основании этих формул, осуществляя предельный переход на контур трещины при $y \to \pm 0$, получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} &2G_1 \tfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{1)} + i\upsilon^{1)}\right) = k_1\Phi^+ - \Omega^-, \\ &2G_2 \tfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{(2)} + i\upsilon^{(2)}\right) = \tfrac{1}{G_1(1+k_2)}\left[k_1\left(G_1 + k_1G_2\right)\Phi^- + k_2\left(G_1 - G_2\right)\Omega^- - \right. \\ &\quad \left. - \left(G_1k_2 + G_2\right)\Omega^+ - \left(G_1k_2 - G_2k_1\right)\Phi^+\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Применяя к правой части (9) формулу Сохоцкого-Племеля [1], находим

$$\begin{aligned} &F_2^+(x) = \tfrac{1}{2} f_0 + \tfrac{1}{2\pi i X^+(x)} \int\limits_{-d}^{0} \tfrac{X^+(t) f_0 dt}{(t-x)} + \tfrac{K_I^\infty - iK_{II}^\infty}{2\sqrt{2\pi} X^+(x)}, \quad X^+(x) = x^{1/2-i\beta}, \\ &F_2^-(x) = \tfrac{f_0}{2g} - \tfrac{1}{g}\tfrac{1}{2\pi i X^+(x)} \int\limits_{-d}^{0} \tfrac{X^+(t) f_0 dt}{(t-x)} - \tfrac{1}{g}\tfrac{\left(K_I^\infty - iK_{II}^\infty\right)}{2\sqrt{2\pi} X^+(x)}, \\ &\Phi^\pm(x) = \tfrac{\mathrm{C}_1}{B} F_2^\pm(x), \quad \Omega^\pm(x) = \tfrac{\mathrm{C}_2}{B} F_2^\pm(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Используя формулы (13), окончательно найдем

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial x}\left[u^{(1)} - u^{(2)} + i\left(\upsilon^{(1)} - \upsilon^{(2)}\right)\right] = \tfrac{f_0}{2G_1B}\left[k_1C_1 - \tfrac{1}{g}C_2 - \tfrac{(B_1 - B_2)}{G_2(1+k_2)}\right] + \\ &\quad + \tfrac{1}{2G_1B}\left[\tfrac{B_1 + B_2}{G_2(1+k_2)} + k_1C_1 + \tfrac{1}{g}C_2\right]\left[\tfrac{D}{X^+(x)} + I\right], \end{aligned} \tag{14}$$

где $B_1 = \frac{1}{g}C_2\left[k_1C_1 + k_2\left(G_2 - G_1\right)\right], \quad B_2 = C_1\left[C_2 - \left(G_1k_2 - G_2k_1\right)\right], D = \frac{K_I^\infty - iK_{II}^\infty}{2\sqrt{2\pi}}$,

$I = \frac{1}{2\pi i X^+(x)} \int\limits_{-d}^{0} \frac{X^+(t) f_0 dt}{(t-x)}$.

Удовлетворяя условию (11), получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестных контактных напряжений $q_y - iq_{xy}$

$$D_1\left(q_y(x)-iq_{xy}(x)\right)+D_2\frac{1}{2\pi i X^+(x)}\int\limits_{-d}^{0}\frac{X^+(t)\left(q_y(t)-iq_{xy}(t)\right)dt}{(t-x)}=-\frac{DD_2C_1}{BX^+(x)},\qquad(15)$$

где $D_1=\frac{1}{2G_1B}\left[k_1C_1-\frac{1}{g}C_2-\frac{(B_1-B_2)}{G_2(1+k_2)}\right]$, $D_2=\frac{1}{2G_1B}\left[\frac{B_1+B_2}{G_2(1+k_2)}+k_1C_1+\frac{1}{g}C_2\right]$.

Решение интегрального уравнения (15) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [1]. Интегральное уравнение (15) можно представить в виде

$$a\left(t\right)\varphi\left(t\right)+\frac{b\left(t\right)}{\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{\varphi\left(\tau\right)}{\tau-t}dt=f\left(t\right),\qquad(16)$$

где $\varphi\left(t\right)=\left(q_y(t)-iq_{xy}(t)\right)X^+(t)$, $b\left(t\right)=\frac{D_1}{2X^+(t)}$, $a\left(t\right)=\frac{D_1}{X^+(t)}$, $f\left(t\right)=-\frac{DD_2C_1}{BX^+(t)}$.

Введем кусочно аналитическую функцию $F\left(z\right)$, заданную интегралом Коши, плотностью которого служит искомое решение интегрального уравнения

$$F\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{\varphi\left(\tau\right)}{\tau-z}d\tau.\qquad(17)$$

Аналитическая функция $F\left(z\right)$ должна являться решением задачи линейного сопряжения

$$F^+\left(t\right)=G\left(t\right)F^-\left(t\right)+g\left(t\right),\qquad(18)$$

где $G\left(t\right)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$, $g\left(t\right)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}$.

Решение краевой задачи (18) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$F\left(z\right)=\frac{X_1\left(z\right)}{2\pi z}\int\limits_{-d}^{0}\frac{g\left(\tau\right)}{X_1^+\left(\tau\right)\left(\tau-z\right)}\tau,\qquad(19)$$

где $X_1(z)=z^{1/2-i\beta_1}$, $\beta_1=\frac{1}{2\pi}\ln G$.

При этом должно выполняться следующее условие разрешимости краевой задачи [1]

$$\int\limits_{-d}^{0}\frac{g\left(\tau\right)d\tau}{X_1^+\left(\tau\right)}=0.\qquad(20)$$

Это дополнительное условие служит для определения неизвестного размера d концевой контактной зоны.

По формулам Сохоцкого-Племеля находим решение интегрального уравнения (16)

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = F^{+}(t) - F^{-}(t), \\ &F^{+}(t) = X_1^{+}(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X_1^{+}(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{g(\tau)d\tau}{X_1^{+}(\tau)(\tau-t)}\right], \quad X_1^{+}(t) = t^{1/2-i\beta_1}, \\ &F^{-}(t) = X_1^{-}(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X_1^{+}(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{g(\tau)d\tau}{X_1^{+}(\tau)(\tau-t)}\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Учитывая, что $X_1^{-}(t)/X_1^{+}(t) = \frac{1}{G}$, находим

$$\frac{q_y(t) - iq_{xy}(t)}{X^{+}(t)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{G}\right)g(t) + X_1^{+}(t)\left(1 - \frac{1}{G}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{g(\tau)d\tau}{X_1^{+}(\tau)(\tau - t)}.$$

Необходимые нам интегралы, содержащие функцию $X_1^{+}(\tau)$ вычисляются приемом, предложенным Н. И. Мусхелишвили [2, §110].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. –М. : Наука, 1977. – 640 с.

[2] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

[3] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.

[4] *Черепанов, Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластине с разрезами / Г. П. Черепанов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 131-138.

Sh. H. Hasanov

ABOUT PARTIAL CLOSING THE CRACK ON BOUNDARY OF SECTION OF ELASTIC ENVIRONMENTS

The Azerbaijan agricultural academy

Abstract. The plane problem about a crack arising on border of section of two homogeneous isotropic environments with various elastic constants is investigated. It is considered, that at the appendix of external loading in an end zone of a crack there will be compressing stressin which faces of a crack on some site will contact.

Keywords: partial homogeneous body, a crack on border of section of environments, a trailer contact zone, contact pressure

Гасанов Шахин Гумбат оглы

кандидат технических наук, доцент, Бакинский филиал Московского государственного открытого университета, Баку

`e-mail:` irakon63@hotmail.com

Hasanov Shahin Humbat oqlu

doctor of philosophy, senior lecturer, The Baku branch of the Moscow state open university, Baku

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 104–120

В. В. Глаголев, Т. А. Мерцалова

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЗАДАЧИ ДАГДЕЙЛА

Тульский государственный университет

Аннотация. Описание пластического деформирования в рамках теории течения является классическим подходом механики сплошной среды. Но, несмотря на кажущуюся простоту, решение конкретных задач ищется в рамках жесткопластической модели, когда упругим деформированием пренебрегается по сравнению с пластическим. Постановка связанных упругопластических задач сопряжена в данном случае с неопределенностью в отношении напряжений и соответствующих им деформаций для области пластического формоизменения. Однако, в некоторых случаях, эту проблему удается обойти. В представленной работе на основании идеально упругопластической модели исследуется важная задача механики разрушения состоящая в моделировании поведения тонких пластических зон в зависимости от вида плоской задачи. В классическом подходе [7,11] тонкая пластическая зона ассоциируется с действием сил сцепления постоянной интенсивности, которые по своей сути, являясь внешней нагрузкой, не связаны с процессом перехода среды из упругого состояния в пластическое. При этом не рассматривается зависимость зоны действия сил сцепления от начальной стадии нагружения до критического состояния. В рассмотренной постановке пластическая область распространяется в деформируемом теле, и ее состояние определяется в рамках соотношений механики сплошной среды. Эволюция длины пластической зоны получается из решения конкретной задачи и может рассматриваться как докритический рост. В качестве перехода из упругого в состояние пластического течения в работе используется критерий Треска. Показано, что учет напряжений, действующих вдоль слоя, существенен при формировании пластической области и переходе в пластическое состояние.

К основному результату исследуемой модели следует отнести полученное принципиальное отличие напряженного состояния в вершине трещины от вида плоской задачи. Если для плоского напряженного состояния напряжения не превосходят предел текучести, то в состоянии плоской деформации наблюдается сильный гидростатический эффект в результате которого в концевой области напряжения находятся за пределом текучести.

Ключевые слова: характерный размер, граничное интегральное уравнение, линейная упругость, идеально упругопластическая модель

УДК: 539.375

Введение. Одним из модельных представлений механики разрушения является вид зоны пластичности при маломасштабной текучести у вершины трещины нормального отрыва. Область пластичности в этом случае является продолжением трещиноподобного дефекта в упругопластической среде. Классическое рассмотрение трещины нормального отрыва в виде математического разреза постулирует механизм

Поступила 07.05.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-96402)

пластического течения, при котором по берегам границы пластической зоны действуют напряжения равные пределу текучести [7,11]. С формальной точки зрения при вычислении длины пластической зоны данное положение при различных видах плоского состояния приводит практически к одинаковому результату. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о существенном различии длины этих зон. Поэтому для плоской деформации вводится поправка [12] (предел текучести формально увеличивается в $\sqrt{3}$ раз) при которой размер зоны пластичности становится в 3 раза меньше, чем при плоском напряженном состоянии.

В данной работе трещина моделируется физическим разрезом с характерным размером δ_0. Данный масштабный уровень выбираем как минимально допустимый в рамках которого справедливы гипотезы механики сплошной среды [1,2]. Зона пластичности в этом случае, являясь продолжением трещиноподобного дефекта, будет представлять собой прямоугольник с высотой δ_0 и длиной l_p подлежащей определению. Зависимость соответствующей длины от вида напряженно-деформированного состояния, а также изучение механизма пластического течения от вида плоского состояния является целью данной работы.

1. Постановка и решение задачи упругого деформирования слоя. Рассмотрим нагружение плоскости, ослабленной физическим вырезом δ_0 симметричной внешней нагрузкой, согласно схеме рис. 1. Считаем, что материал, лежащий на продолжении физического разреза в плоскости образует слой – слой взаимодействия с однородным распределением НДС по толщине [1,2].

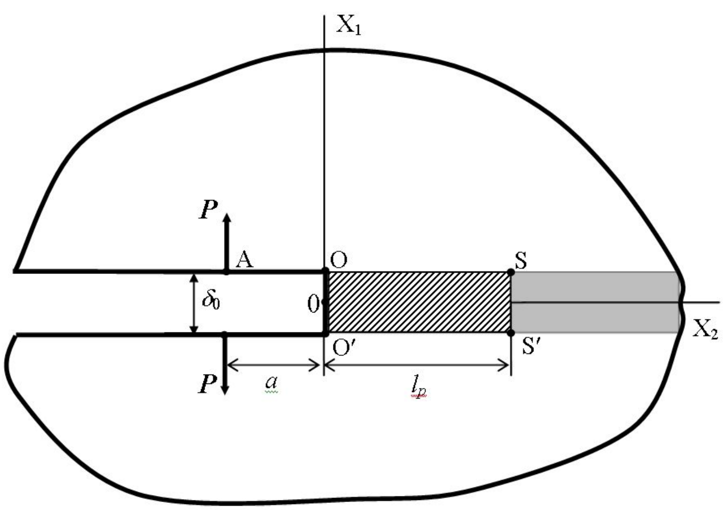


Рис. 1.

Наряду с напряжением $\sigma_{11}(x_2)$ в слое учитываем напряжение $\sigma_{22}(x_2)$ вдоль оси разреза, которое обусловлено касательной нагрузкой по границе со слоем. Полагаем, что связь между напряжениями и деформациями вне слоя взаимодействия описывается в рамках линейной теории упругости.

В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю полуплоскость ($x_1 \geq \delta_0/2$), а действие слоя заменим нагрузкой $\vec{q}(x) = -\left(\overset{\wedge}{\sigma}_{11}\,\vec{e}_1 + \overset{\wedge}{\sigma}_{21}\,\vec{e}_2\right)$ (здесь и далее $x \equiv x_2/\delta_0$ – безразмерная координата; $\overset{\wedge}{\sigma}_{ij} = \beta\sigma_{ij}\ \ i,j = 1,2$ – безразмерные напряжения; $\beta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$ – параметр материала для случая плоской деформации, $\beta = \frac{2}{\pi E}$ – параметр материала в плоском напряженном состоянии, E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона).

Соотношения Фламана [8] связывают внешние нагрузки $\overset{\wedge}{\sigma}_{11}$ и $\overset{\wedge}{\sigma}_{12}$ с перемещениями границы полуплоскости безразмерными выражениями

$$\hat{u}_1(x) = -\hat{P}\ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int\limits_0^{\mathrm{L}} \overset{\wedge}{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi, \tag{1}$$

$$\hat{u}_2(x) = \int\limits_0^{\mathrm{L}} \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi, \tag{2}$$

где $\hat{u}_i = u_i/\delta_0\ i = 1,2$ – безразмерные перемещения; $\hat{P} = P\beta/\delta_0$ – безразмерная сила на единицу толщины; L – удаленная точка с нулевым перемещением; L – расстояние от начала координат до L.

Основным постулатом модели слоя взаимодействия является положение об однородности напряженно-деформированного состояния (НДС) по толщине слоя. В силу данной гипотезы из условия равновесия следует, что:

$$\frac{\partial\,\overset{\wedge}{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\,\overset{\wedge}{\sigma}_{21}\,. \tag{3}$$

Перемещения границ слоя определяются в следующем виде:

$$\hat{u}_1(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{11}(x), \tag{4}$$

$$\hat{u}_2(x) = \int\limits_L^x \frac{1}{2}\varepsilon_{22}(x)dx. \tag{5}$$

Напряжения в состоянии плоской деформации, до достижения предела текучести, связаны с деформациями законом Гука:

$$\varepsilon_{11} = A\,\overset{\wedge}{\sigma}_{11} - B\,\overset{\wedge}{\sigma}_{22}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{22} = A\,\overset{\wedge}{\sigma}_{22} - B\,\overset{\wedge}{\sigma}_{11}, \tag{7}$$

где $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\nu\pi}{2(1-\nu)}$ – безразмерные постоянные.

В плоском напряженном состоянии закон Гука запишем в виде:

$$\varepsilon_{11} = A\,\overset{\wedge}{\sigma}_{11} - B\,\overset{\wedge}{\sigma}_{22}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{22} = A\,\overset{\wedge}{\sigma}_{22} - B\,\overset{\wedge}{\sigma}_{11}, \tag{9}$$

$$\varepsilon_{33} = -B\left(\overset{\wedge}{\sigma}_{11} + \overset{\wedge}{\sigma}_{22}\right), \tag{10}$$

где $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi\nu}{2}$ – безразмерные постоянные данного вида плоского состояния.

Продифференцируем по x выражение (2):

$$\varepsilon_{22} = \frac{d\hat{u}_2}{dx} = \int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi. \tag{11}$$

Перепишем выражение (1) с учетом формулы (4) в следующем виде:

$$\varepsilon_{11} = -2\hat{P}\ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + 2\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi. \tag{12}$$

Исходя из формул (11) и (12), найдем изменение объема вдоль слоя за счет движения “стенок”, ограничивающего его упругого пространства:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\tfrac{1}{(x-\xi)}d\xi + 2\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{11}(\xi)\ln\tfrac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi - 2\hat{P}\ln\left(\tfrac{x+a}{L+a}\right) + \varepsilon_{33}(x) = \\ = \varepsilon_{11}(x) + \varepsilon_{22}(x) + \varepsilon_{33}(x) = \theta(x).\end{gathered} \tag{13}$$

Отметим, что уравнение (13) является универсальным и остается в силе, как при упругом, так и упругопластическом поведении слоя.

Используя связи закона Гука (6)-(10), равенство (13) представим в виде:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\tfrac{1}{(x-\xi)}d\xi + 2\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{11}(\xi)\ln\tfrac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi - 2\hat{P}\ln\left(\tfrac{x+a}{L+a}\right) = \\ = (A-B)\left(\overset{\wedge}{\sigma}_{11} + \overset{\wedge}{\sigma}_{22}\right),\end{gathered} \tag{14}$$

где вид плоского состояния определяют постоянные A и B.

К уравнению (14) добавляется условие равенства деформаций ε_{22} вдоль слоя, вычисляемых из выражения (11) и непосредственно из закона Гука (7) или (9). В результате система разрешающих уравнений принимает вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\tfrac{1}{(x-\xi)}d\xi + 2\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{11}(\xi)\ln\tfrac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi - 2\hat{P}\ln\left(\tfrac{x+a}{L+a}\right) = \\ \qquad = (A-B)\left(\overset{\wedge}{\sigma}_{11} + \overset{\wedge}{\sigma}_{22}\right), \\ A\,\overset{\wedge}{\sigma}_{22} - B\,\overset{\wedge}{\sigma}_{11} = \int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\tfrac{1}{(x-\xi)}d\xi, \\ \frac{\partial\overset{\wedge}{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\,\overset{\wedge}{\sigma}_{12}.\end{array}\right. \tag{15}$$

Основными неизвестными системы (15) являются компоненты тензора напряжения. Так как полагается, что торцевая плоскость начального разреза не нагружена, то:

$$\overset{\wedge}{\sigma}_{22}\Big|_{x=0} = 0. \tag{16}$$

При решении задачи, следуя Новожилову [9], полагаем, что разрушение твердого тела – процесс дискретный, поэтому в пределах элемента слоя взаимодействия длиной δ_0 или единичной безразмерной длины напряженное состояние полагается однородным.

Для построения решения задачи в рамках дискретной модели разобьем границу полуплоскости OL на N единичных элементов. Каждый элемент границы k, с координатами ξ_{k-1},ξ_k где $k = \overline{1 \cdots N}$ характеризуется постоянным (средним по элементу) значением напряжений $\sigma_{11}^{(k)}$, $\sigma_{22}^{(k)}$ и $\sigma_{12}^{(k)}$, определяемым следующим образом: $\sigma_{ij}^{(k)}\left(x_{(k)}\right) = \int\limits_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \overset{\wedge}{\sigma}_{ij}(\xi)\,d\xi$, где $x_{(k)} = (\xi_k + \xi_{k-1})/2$. В результате интегралы в уравнениях системы (15) предстанут в виде соответствующих сумм. Для дискретизации уравнения равновесия (7) проинтегрируем его по k-ому элементу, в результате получим: $\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}$. Подчеркнем, что данный подход близок к методу граничного элемента [6] с постоянной аппроксимацией, однако основное отличие данного подхода в том, что разбиение на элементы меньшего размера не имеет смысла. Данный размер, как указано выше, ограничивает материальную область, для которой еще справедлива гипотеза сплошности. Таким образом, дискретное представление интегро-дифференциальной системы (15), дополненное граничным условием (16) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)})\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\frac{1}{(\mathrm{x}_{(i)}-\xi)}d\xi+2\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)})\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\ln\frac{|x_{(i)}-\xi|}{L-\xi}d\xi- \\
2P\ln\left(\frac{x_{(k)}+a}{n+a}\right)=(A-B)\left(\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)})+\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)})\right), \quad k=1,..,n; \\
A\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)})-B\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)})\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\frac{1}{(x_{(i)}-\xi)}d\xi, \quad k=1,..,n; \\
\sigma_{22}^{(k)}-\sigma_{22}^{(k-1)}=-2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k=1,..,n; \\
\sigma_{22}^{(0)}=0.
\end{array}\right. \tag{17}$$

Отметим, что линейная система (17) в общем случае содержит бесконечное количество уравнений ($n \to \infty$). Однако, как показывают расчеты, для анализа результатов можно ограничиться конечным числом уравнений. Решение системы имеет достаточно хорошую сходимость и при $n = 1000$ результат отличается от расчета для $n = 5000$ менее 1%.

На рис.2 кривые 1, 2 и 3 определяют напряжения $\overset{\wedge}{\sigma}_{11}$, $\overset{\wedge}{\sigma}_{22}$ и $\overset{\wedge}{\sigma}_{33}$ для состояния плоской деформации при следующих характеристиках: $n = 5000$, $P = 1$, $a = 5$, $\nu = 0.25$. Отметим, что при $\nu = 0$ $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, а для остальных допустимых значений коэффициента Пуассона при плоской деформации имеем: $\sigma_{22} < \sigma_{33}$. Графики 4 и 5 соответствуют напряжениям $\overset{\wedge}{\sigma}_{11}$ и $\overset{\wedge}{\sigma}_{22}$ для плоского напряженного состояния.

2. Постановка и решение задачи упругопластического деформирования слоя (плоское деформирование). При достижении определенного критерия считаем, что материал слоя может переходить в пластическое состояние. Соответствующее поведение будем рассматривать в рамках идеально упругопластической модели [5]. Критерием перехода из упругого состояния в

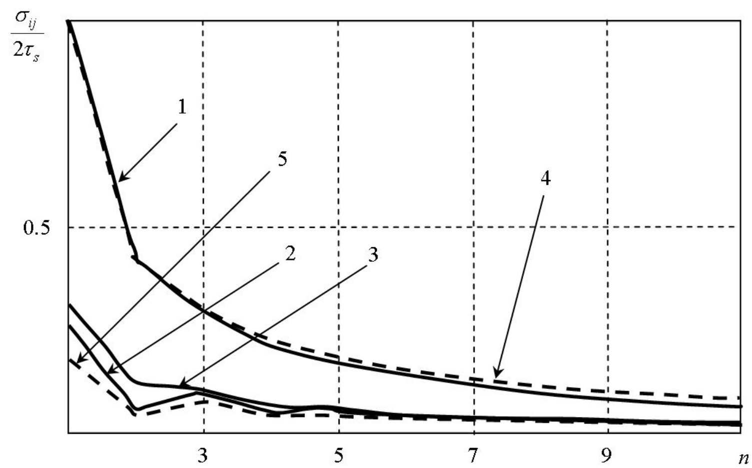


Рис. 2.

пластическое считаем достижение максимальным касательным напряжением критического значения:

$$|\sigma_{ii} - \sigma_{jj}| = 2\tau_s, \tag{18}$$

где $i, j = 1, 2, 3$, τ_s – предел текучести.

В условиях плоского деформирования в зоне предразрушения из решения упругой задачи имеем $\sigma_{11} > \sigma_{33} \geq \sigma_{22}$(см. рис. 2). Следовательно, критерий текучести Треска (18) для данного вида нагружения определяется следующим выражением:

$$\overset{\wedge}{\sigma}_{11} - \overset{\wedge}{\sigma}_{22} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \tag{19}$$

где $\overset{\wedge}{\tau}_s = \beta\tau_s$ – безразмерный предел текучести.

Полагаем деформации малыми и для стадии упругопластического деформирования справедливым следующее разложение:

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e + \varepsilon_{ii}^p, \quad i = 1, 2, \tag{20}$$

где ε_{ii}^e – упругая составляющая полной деформации; ε_{ii}^p – пластическая составляющая.

Считаем, что материал пластически несжимаем:

$$\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = 0. \tag{21}$$

В состоянии плоской деформации полагаем, что упругая и пластическая составляющие поперечной деформации нулевые:

$$\varepsilon_{33}^e = 0;\ \varepsilon_{33}^p = 0. \tag{22}$$

Используя связи закона Гука (6), (7) с учетом (20) – (22) изменение объема представим в виде:

$$\theta(x) = (A - B)\left(\overset{\wedge}{\sigma}_{11} + \overset{\wedge}{\sigma}_{22}\right). \tag{23}$$

Из выражений (13) и (23), условия равновесия элемента слоя (7), условия текучести Треска (19) получим следующую замкнутую систему уравнений, описывающую деформирование пластической области слоя длиной l_p в состоянии плоской деформации:

$$\begin{cases} \int\limits_0^{\mathrm{L}} \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi + 2\int\limits_0^{\mathrm{L}} \overset{\wedge}{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi - 2\hat{P}\ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) = \\ \quad = (A-B)\left(\overset{\wedge}{\sigma}_{11} + \overset{\wedge}{\sigma}_{22}\right), \\ \frac{\partial \overset{\wedge}{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\,\overset{\wedge}{\sigma}_{21}, \\ \overset{\wedge}{\sigma}_{11} - \overset{\wedge}{\sigma}_{22} = 2\,\overset{\wedge}{\tau}_s\,. \end{cases} \tag{24}$$

В упругой области, где $x > l_p$ и $\overset{\wedge}{\sigma}_{11} - \overset{\wedge}{\sigma}_{22} < 2\overset{\wedge}{\tau}_s$ НДС описывается системой (15). Основными неизвестными систем (24) и (15) являются компоненты тензора напряжения, а так же длина пластической области при удовлетворении граничного условия (16).

Рассмотрим подход к дискретному решению полученной системы уравнений (24), (15), (16), описывающих упругопластическое деформирование слоя в состоянии плоской деформации. Модель будет состоять из трех подсистем.

1. Уравнения, описывающие пластическую область (дискретный аналог системы 24):

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{12}^{(i)}(\mathrm{x}_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{\left(x_{(i)}-\xi\right)}d\xi + 2\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln\frac{\left|x_{(i)}-\xi\right|}{n-\xi}d\xi - \\ \quad 2P_{l+1}\ln\left(\frac{x+a}{n+a}\right) = \frac{\pi\left(\overset{\wedge}{\tau}_s + \overset{\wedge}{\sigma}{}_{22}^{(k)}\right)(1-2\nu)}{(1-\nu)}, \quad k = 1,..,l; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = 1,..,l; \\ \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} = 2\,\overset{\wedge}{\tau}_s, \quad k = 1,..,l; \\ \sigma_{22}^{(0)} = 0. \end{cases} \tag{25}$$

2. Уравнения, описывающие переход $l+1$ элемента из упругого состояния в пластическое (дискретный аналог системы 15 при условии достижения на элементе напряжением предела текучести $\overset{\wedge}{\sigma}_{11} - \overset{\wedge}{\sigma}_{22} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s$):

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} = 2\,\overset{\wedge}{\tau}_s, \quad k = l+1; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{\left(\mathrm{x}_{(i)}-\xi\right)}d\xi + 2\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln\frac{\left|x_{(i)}-\xi\right|}{L-\xi}d\xi - \\ 2P_{l+1}\ln\left(\frac{x+a}{n+a}\right) = \frac{\pi\left(\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) + \sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)})\right)(1-2\nu)}{2(1-\nu)}, \quad k = l+1; \\ A\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) - B\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{\left(x_{(i)}-\xi\right)}d\xi, \quad k = l+1; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = l+1. \end{cases} \tag{26}$$

3. Уравнения, описывающие упругую область (дискретный аналог системы (15)):

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(\mathrm{x}_{(i)}-\xi)} d\xi + 2 \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x_{(i)}-\xi|}{L-\xi} d\xi - \\ 2P_{l+1} \ln\left(\frac{x+a}{n+a}\right) = \frac{\pi\left(\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)})+\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)})\right)(1-2\nu)}{2(1-\nu)}, \quad k = l+2,..,n; \\ A\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) - B\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)}-\xi)} d\xi, \quad k = l+2,..,n; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = l+2,..,n. \end{cases} \tag{27}$$

Полная система дискретного деформирования, состоящая из подсистем (25)-(27), содержит $3n + 1$ линейное уравнение. Неизвестными являются $3n$ обобщенных напряжений и критическая сила P_{l+1}, обеспечивающая данное напряженное состояние. Решать поставленную задачу предлагается пошагово, определяя на каждом этапе критическую силу и напряженно-деформированное состояние слоя, соответствующее достижению критерия текучести на $l + 1$ элементе.

На рис. 3 показана зависимость распределения напряжений, отнесенных к пределу текучести, по элементам при достижении предела текучести на втором элементе (нагрузка P_2). Кривая 1 определяет напряжение σ_{11}, кривая 2 - соответственно σ_{22} при $2\tau_s/E = 3 \cdot 10^{-3}$. Из приведенной зависимости видно, что напряжения в пластически деформируемом элементе при плоской деформации могут существенно превышать предел текучести, на что указывалось и в работе [10]. Это объясняется существенной величиной гидростатической составляющей напряжения.

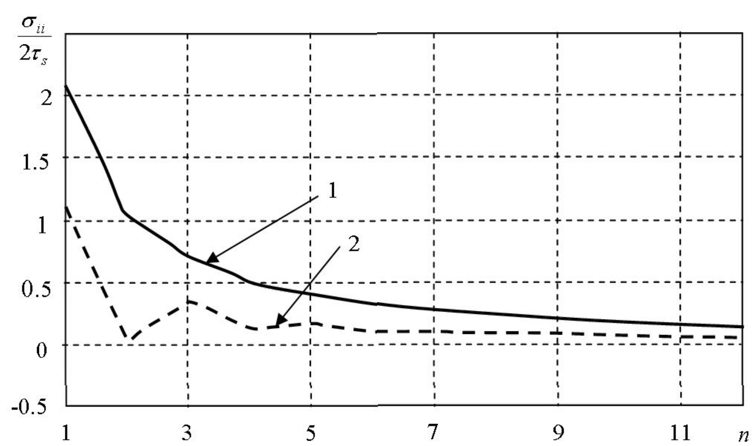


Рис. 3.

3. Упругогопластическое деформирование слоя (плоское напряженное состояние).

В условиях плоского напряженного состояния в зоне предразрушения из решения упругой задачи имеем $\sigma_{11} > \sigma_{22} \geq \sigma_{33} = 0$ (см. рис. 2). Следовательно, критерий текучести Треска (18) для данной схемы нагружения определяется следующим выражением:

$$\overset{\wedge}{\sigma}_{11} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \tag{28}$$

где $\overset{\wedge}{\tau}_s = \beta\tau_s$ – безразмерный предел текучести.

Запишем соотношения для приращений девиаторов напряжений в виде:

$$\begin{aligned} d\sigma'_{11} &= d\sigma_{11} - \tfrac{1}{3}(d\sigma_{11} + d\sigma_{22} + d\sigma_{33}), \\ d\sigma'_{33} &= d\sigma_{33} - \tfrac{1}{3}(d\sigma_{11} + d\sigma_{22} + d\sigma_{33}). \end{aligned} \tag{29}$$

С учетом плоского напряженного состояния и условия (28) из соотношений (13) и (7) следует:

$$d\sigma'_{11} = d\sigma'_{33} = -\frac{1}{3}d\sigma_{22}. \tag{30}$$

Рассмотрим связь приращений векторов девиаторов напряжений и деформаций [4]:

$$\Delta \overrightarrow{\sigma'} = N\Delta \overrightarrow{\varepsilon'} + (P-N)\frac{\overrightarrow{\sigma}\cdot\Delta \overrightarrow{\varepsilon'}}{\sigma^2}\sigma, \tag{31}$$

где N и P – соответствующие функционалы.

Рассмотрим случай $P = N$, имеем:

$$\Delta \overrightarrow{\sigma'} = N\Delta \overrightarrow{\varepsilon'}\,. \tag{32}$$

Из (32) получим следующее соотношение:

$$\frac{\Delta\sigma'_{11}}{\Delta\sigma'_{33}} = \frac{\Delta\varepsilon'_{11}}{\Delta\varepsilon'_{33}}, \tag{33}$$

которое справедливо для любого N, в том числе и для модели идеально упругопластического течения.

Принимая во внимание (30), из (33) получим:

$$d\varepsilon_{11} = d\varepsilon_{33}. \tag{34}$$

Таким образом, из (34) приходим к следующему соотношению между полными и упругими деформациями:

$$\varepsilon_{33}(x) = \varepsilon_{11}(x) - (\varepsilon^e_{11} - \varepsilon^e_{33}). \tag{35}$$

В результате система интегро-дифференциальных уравнений (7), (13) и (28), с учетом (12) и (35), становится замкнутой и принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int\limits_0^{\mathrm{L}} \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi + 4\int\limits_0^{\mathrm{L}} \overset{\wedge}{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi - 4\hat{P}\ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) = \\ \quad = \frac{\pi(1-2\nu)}{2}\left(2\,\overset{\wedge}{\tau}_s + \overset{\wedge}{\sigma}_{22}(x)\right) + (\varepsilon^e_{11} - \varepsilon^e_{33}), \\ \frac{\partial\,\overset{\wedge}{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\,\overset{\wedge}{\sigma}_{21}, \\ \overset{\wedge}{\sigma}_{11} = 2\,\overset{\wedge}{\tau}_s\,. \end{array} \right. \tag{36}$$

Для области упругого деформирования слоя, где $x > l_p$ и $\overset{\wedge}{\sigma}_{11} < 2\overset{\wedge}{\tau}_s$ НДС определяется из системы (15). Основными неизвестными систем (15) и (36) являются компоненты тензора напряжения, а так же длина пластической области при удовлетворении граничному условию (16).

Рассмотрим построение дискретной модели упругопластического деформирования слоя взаимодействия в условиях плоского напряженного состояния.

На первом шаге определим начало пластического деформирования слоя взаимодействия, а именно переход первого элемента слоя взаимодействия из упругого состояния в пластическое при выполнении критерия (28).

Разрешающая система интегро-дифференциальных уравнений (36) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \overset{\wedge}{\sigma}_{11} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \quad x = 0; \\ \int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi - 2\overset{\wedge 1}{P}_{(k)} \ln\frac{x+a}{L+a} + 2\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi = \\ \quad = \frac{1}{2}\pi(1-\nu)(\sigma_{11}(x) + \sigma_{22}(x)), \quad x \geq 0; \\ A\overset{\wedge}{\sigma}_{22} - B\overset{\wedge}{\sigma}_{11} = \int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi, \quad x \geq 0; \\ \frac{\partial \overset{\wedge}{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\overset{\wedge}{\sigma}_{12}, \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{37}$$

Перепишем систему (37) в дискретном виде:

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(k)} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \quad k = 1; \\ 2\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\sigma_{11}^{(i)}\int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\ln\frac{|x_k-\xi|}{L-\xi}d\xi - 0.5\pi(1-2\nu)\sigma_{11}^{(k)} + \sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\sigma_{12}^{(i)}\int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\frac{1}{x_i-\xi}d\xi - \\ \quad -0.5\pi(1-\nu)\sigma_{22}^{(k)} - 2\overset{\wedge 1}{P}_{(k)}\ln\frac{x_k+a}{n+a} = 0, \quad 1 \leq k \leq n; \\ B\sigma_{11}^{(k)} + \sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\sigma_{12}^{(i)}\int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\frac{1}{x_i-\xi}d\xi - A\sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad 1 \leq k \leq n; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq n. \end{cases} \tag{38}$$

Решением системы (38), наряду с полем напряжений, будет и величина критической нагрузки $\overset{\wedge 1}{P}_{(k)}$, при которой первый элемент переходит в пластическое состояние. Соответствующее распределение напряженного состояния показано на рис. 4 ($n = 5000$). Кривая 1 определяет распределение напряжений σ_{11}, кривая 2 – распределение напряжений σ_{22}, кривая 3 – распределение напряжений σ_{33}.

На втором шаге найдем поле напряжений и величину критической нагрузки $\overset{\wedge 2}{P}_{(k)}$, соответствующей переходу второго элемента в пластическое состояние при пластическом деформировании первого.

Система уравнений, описывающая пластическую область:

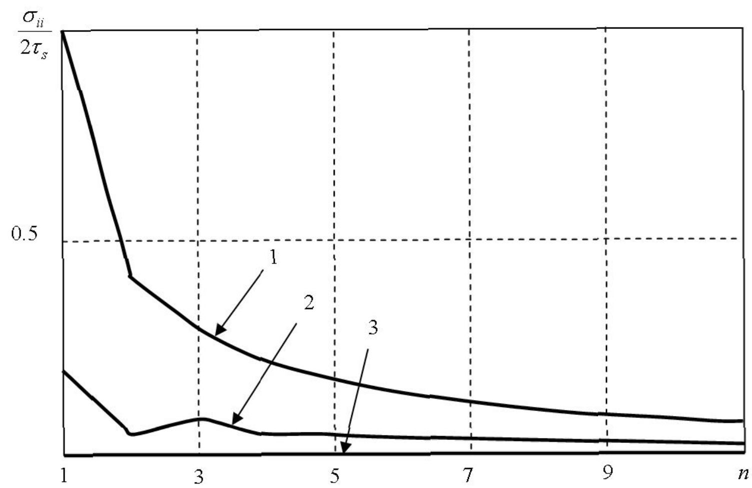


Рис. 4.

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi + 4\int\limits_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi - 4\,\hat{P}^2_{(k)}\ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) = \\
\quad = \frac{\pi\left(2\,\hat{\tau}_s + \hat{\sigma}_{22}\right)(1-2\nu)}{2} + (\varepsilon^e_{11} - \varepsilon^e_{33}), \quad x < l_p; \\
\frac{\partial\,\hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\,\hat{\sigma}_{21}, \quad x < l_p; \\
\hat{\sigma}_{11} = 2\,\hat{\tau}_s, \quad x < l_p.
\end{cases}
\tag{39}
$$

Уравнения, описывающие переход второго элемента из упругого в пластическое состояние:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial\,\hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\,\hat{\sigma}_{21}, \quad x = l_p; \\
\hat{\sigma}_{11} = 2\,\hat{\tau}_s, \quad x = l_p; \\
\int\limits_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi - 2\,\hat{P}^2_{(k)}\ln\frac{x+a}{L+a} + 2\int\limits_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi = \\
\quad = \frac{1}{2}\pi(1-\nu)(\sigma_{11}(x) + \sigma_{22}(x)), \quad x = l_p; \\
A\,\hat{\sigma}_{22} - B\,\hat{\sigma}_{11} = \int\limits_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi, \quad x = l_p.
\end{cases}
\tag{40}
$$

Уравнения, описывающие упругую область:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial\,\hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\,\hat{\sigma}_{21}, \quad x \geq l_p; \\
\int\limits_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi - 2\,\hat{P}^2_{(k)}\ln\frac{x+a}{L+a} + 2\int\limits_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi = \\
\quad = \frac{1}{2}\pi(1-\nu)(\sigma_{11}(x) + \sigma_{22}(x)), \quad x \geq l_p; \\
A\,\hat{\sigma}_{22} - \hat{B}\,\sigma_{11} = \int\limits_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{(x-\xi)}d\xi, \quad x \geq l_p.
\end{cases}
\tag{41}
$$

Введем обозначения:

$$\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi = \sum_{i=0}^{i=n-1}\sigma_{11}^{(i)}\left[\int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\ln|x-\xi|\,d\xi - \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\ln(L-\xi)\,d\xi\right] = \sum_{i=0}^{i=n-1}\sigma_{11}^{(i)}\varphi^{(i)}(x), \tag{42}$$

$$\int\limits_0^L \overset{\wedge}{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{x-\xi}d\xi = \int\limits_0^n \overset{\wedge}{\sigma}_{12}\,\frac{1}{x-\xi}d\xi = \sum_{i=0}^{i=n-1}\ \psi^{(i)}(x)\sigma_{12}^{(i)}, \tag{43}$$

где

$$\begin{array}{l} \varphi^{(i)}(x) = (x_j-\xi_i)\ln|x_j-\xi_i| - (x_j-\xi_{i+1})\ln|x_j-\xi_{i+1}| - \\ \qquad -(n-\xi_i)\ln|n-\xi_i| + (n-\xi_{i+1})\ln|n-\xi_{i+1}|\,, \\ \psi^{(i)}(x) = -\ln\left|\frac{(x_j-\xi_{i+1})}{x_j-\xi_i}\right|. \end{array} \tag{44}$$

Подставив (42), (43) и (44) в (39)– (41) получим соответственно:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\ \psi^{(i)}(x)\sigma_{12}^{(i)} + 4\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\sigma_{11}^{(i)}\varphi^{(i)}(x) - \frac{\pi\sigma_{22}^{(k)}(1-2\nu)}{2} - 4\,\overset{\wedge 2}{P}_{(k)}\ln\left(\frac{x_k+a}{n+a}\right) = \\ \qquad = \pi\tau_s\,(1-\nu) + (\varepsilon_{11}^e - \varepsilon_{33}^e), \quad k=1; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k=1; \\ \sigma_{11}^{(k)} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \quad k=1; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k=2; \\ \sigma_{11}^{(k)} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \quad k=2; \\ 2\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\sigma_{11}^{(i)}\varphi^{(i)}(x) - 0.5\pi(1-\nu)\sigma_{11}^{(k)} + \sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\ \psi^{(i)}(x)\sigma_{12}^{(i)} - \\ \qquad -0.5\pi(1-\nu)\sigma_{22}^{(k)} - 2\,\overset{\wedge 2}{P}_{(k)}\ln\frac{x_k+a}{n+a} = 0, \quad k=2; \\ B\,\sigma_{11}^{(k)} + \sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\ \psi^{(i)}(x)\sigma_{12}^{(i)} - A\,\sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad k=2; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k=3,...,n; \\ 2\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\sigma_{11}^{(i)}\varphi^{(i)}(x) - 0.5\pi(1-\nu)\sigma_{11}^{(k)} + \sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\ \psi^{(i)}(x)\sigma_{12}^{(i)} - \\ \qquad -0.5\pi(1-\nu)\sigma_{22}^{(k)} - 2\,\overset{\wedge 2}{P}_{(k)}\ln\frac{x_k+a}{n+a} = 0, \quad k=3,...,n; \\ B\,\sigma_{11}^{(k)} + \sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\ \psi^{(i)}(x)\sigma_{12}^{(i)} - A\,\sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad k=3,...,n. \end{array}\right.$$

На рис. 5 представлено распределение поля напряжений на первых 11 элементах $n = 5000$). Кривая 1 соответствует распределению напряжений σ_{11}, кривая 2 – описывает распределение напряжений σ_{22}.

Из графика видно, что на первом элементе $\sigma_{11} < \sigma_{22}$. Таким образом, при переходе от первого шага ко второму напряжение σ_{22}, в рамках критерия (10), меняется от $0.2\,\overset{\wedge}{\tau}_s$

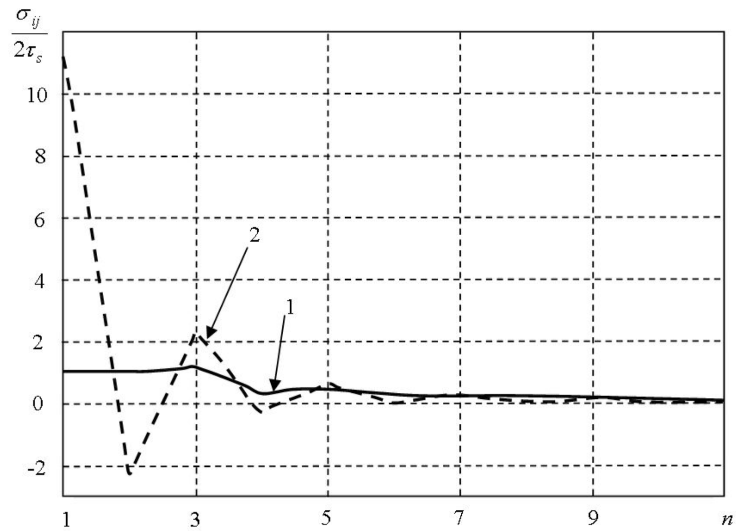


Рис. 5.

до $22\overset{\wedge}{\tau}_s$. Следовательно, в данном переходе должно выполняться равенство: $\sigma_{22} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s$. Это соответствует смене условия (10) на соотношение полной пластичности [3,5]:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \tag{45}$$

где $\overset{\wedge}{\tau}_s = \beta\tau_s$ – соответствующий безразмерный предел текучести данного вида плоского состояния.

С учетом уравнения равновесия (7) из (45) получаем, что по границе со слоем в пластической области касательные напряжения равны нулю $\overset{\wedge}{\sigma}_{12} = 0$. И, следовательно, для области пластического течения слоя имеем:

$$\begin{cases} \overset{\wedge}{\sigma}_{11} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \\ \overset{\wedge}{\sigma}_{22} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \\ \overset{\wedge}{\sigma}_{12} = 0. \end{cases} \tag{46}$$

В упругой области, где $x > l_p$ и $\overset{\wedge}{\sigma}_{11} < \overset{\wedge}{2\tau_s}$ к системе (46) добавляется система (15). Основными неизвестными систем (46) и (15), как и в случае плоского деформированного состояния, являются компоненты тензора напряжения, а так же длина пластической области.

При определении напряженного состояния слоя по выражениям (8)-(10) могут быть найдены соответствующие упругие деформации слоя. В пластической области, в силу однородности напряженного состояния (46), деформации будут постоянны по всей длине пластической зоны и равны деформациям на момент перехода из упругого состояния слоя в пластическое.

Дискретная модель будет состоять из трех подсистем.

1. Уравнения, описывающие пластическую область (дискретный аналог системы (46)):

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(k)} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \quad k = 1,..,l; \\ \sigma_{22}^{(k)} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \quad k = 1,..,l; \\ \sigma_{21}^{(k)} = 0, \quad k = 1,..,l. \end{cases}$$

2. Уравнения, описывающие переход $l+1$ элемента из упругого состояния в пластическое (дискретный аналог системы (15) и условие достижения на элементе напряжением $\overset{\wedge}{\sigma}_{11}$ предела текучести):

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(k)} = 2\overset{\wedge}{\tau}_s, \quad k = l+1; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(\mathrm{x}_{(i)}-\xi)} d\xi + 2\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln\frac{|x_{(i)}-\xi|}{L-\xi} d\xi - \\ \qquad -2P_{l+1}\ln\left(\frac{x+a}{n+a}\right) = \frac{\pi\left(\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) + \sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)})\right)(1-\nu)}{2}, \quad k = l+1; \\ A\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) - B\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)}-\xi)} d\xi, \quad k = l+1; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = l+1. \end{cases}$$

3. Уравнения, описывающие упругую область (дискретный аналог системы (15)):

$$\begin{cases} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(\mathrm{x}_{(i)}-\xi)} d\xi + 2\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln\frac{|x_{(i)}-\xi|}{L-\xi} d\xi - \\ \qquad -2P_{l+1}\ln\left(\frac{x+a}{n+a}\right) = \frac{\pi\left(\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) + \sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)})\right)(1-\nu)}{2}, \quad k = l+2,..,n; \\ A\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) - B\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)}-\xi)} d\xi, \quad k = l+2,..,n; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = l+2,..,n. \end{cases}$$

Рис. 6 отображает распределение напряжений, отнесенных к пределу текучести, по элементам при переходе третьего элемента в пластическое состояние (нагрузка P_3) для плоского напряженного состояния. Кривая 1 определяет напряжение σ_{11}, кривая 2 соответственно σ_{22} при $2\tau_s/E = 3\cdot 10^{-3}$.

На рис. 7 показана зависимость длины пластической зоны от приложенной нагрузки. График 1 соответствует плоскому напряженному состоянию, график 2 построен для состояния плоской деформации. Сила P_1 определяет достижение критерия текучести на первом элементе.

В заключении сформулируем выводы по работе.

1. Модель трещиноподобного дефекта в виде физического разреза позволила описать развитие зоны предразрушения в пределах слоя конечной толщины в рамках упругопластической модели. В этом случае, напряженное состояние слоя, а также длина его пластической области получается из решения соответствующих краевых задач, которые показали существенную разницу напряженного состояния и длины пластической зоны от вида плоской задачи.

2. Учет напряжений, действующих ортогонально отрыву (в данной работе σ_{22}) в слое конечной толщины, определил принципиальное различие в характере пластического течения. В состоянии плоского деформирования при упругом

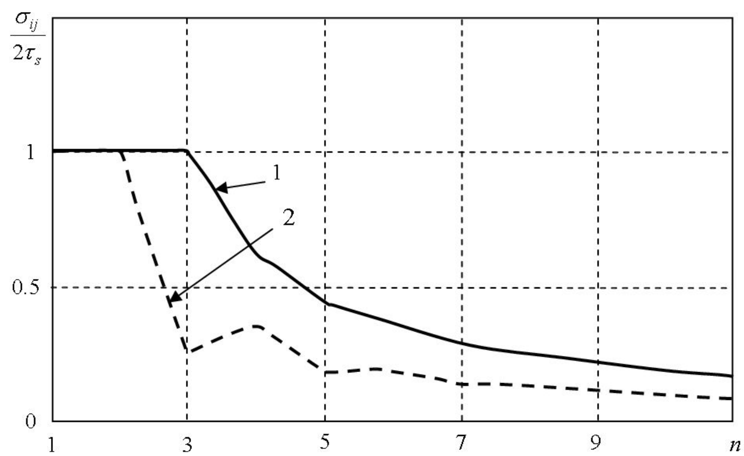


Рис. 6.

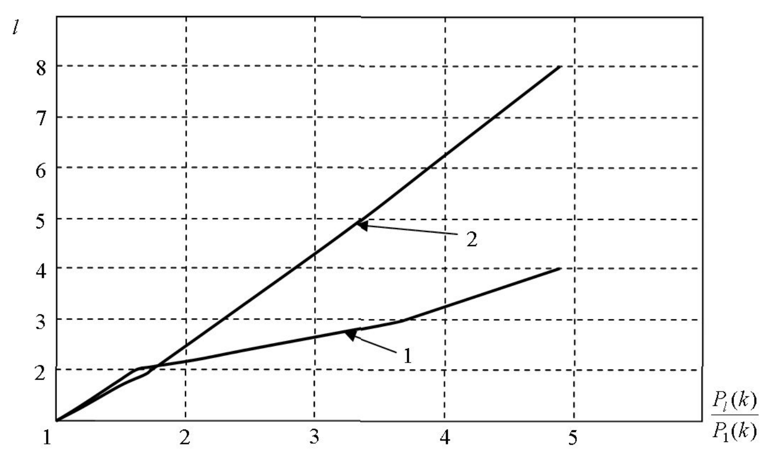


Рис. 7.

нагружении $\sigma_{11} > \sigma_{33} \geq \sigma_{22}$. Переход в пластическое деформирование по максимальному касательному напряжению определяется равенством: $\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2\tau_s$, что при решении приводит к превышению напряжений в окрестности вершины разреза над пределом текучести. Для плоского напряженного состояния при упругом деформировании $\sigma_{11} > \sigma_{22} \geq \sigma_{33} = 0$. Критерий Треска запишется в виде: $\sigma_{11} = 2\tau_s$. В этом случае напряжения в зоне пластического течения не превосходят предел текучести. Если толщину слоя считать нулевой, что соответствует модельному представлению трещиноподобного дефекта в виде математического разреза, то при упругом деформировании из асимптотических представлений линейной теории упругости получим: $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ как при плоском деформировании, так и в плоском напряженном состоянии. Это предполагает один и тот же механизм пластического течения, реализуемый для плоского напряженного состояния.

3. С использованием соотношений теории течения и поставлена и решена связная упругопластическая задача о развитии тонкой пластической зоны в окрестности трещиноподобного дефекта для плоского деформирования и случая плоского напряженного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Глаголев, В. В.* Определение термомеханических характеристик процесса разделения / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – № 6. – 2007. – С. 101-112.

[2] *Гаврилкина, М. В.* К решению одной задачи механики разрушения / М. В. Гаврилкина, В. В. Глаголев, А. А. Маркин // ПМТФ. – № 4. – 2007. – С. 121-127.

[3] *Ивлев, Д. Д.* О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 3. - С. 137.

[4] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. - М. : Изд–во МГУ, 1990. – 310 с.

[5] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 701 с.

[6] *Крауч, С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела : пер. с. англ./ Крауч С., Старфилд А. – М. : Мир, 1987. – 328 с.

[7] *Леонов, М. Я.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5. – № 4. – С. 391-401.

[8] *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.

[9] *Новожилов, В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности В. В. Новожилов // ПММ. – 1969. – № 2. – С. 212-222.

[10] *Нотт, Д. Ф.* Основы механики разрушения / Д. Ф. Нотт. – М. : Металлургия,1978. – 256 с.

[11] *Dugdale, D. S.* Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8. – № 2. – P. 100-108.

[12] *Irvin, G. R.* Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control / G. R. Irvin // Engn. Fracture Mechanics. – 1968. – V. 1. – P. 241-257.

V. V. Glagolev, T. A. Mercalova

ABOUT ONE REPRESENTATION OF THE PROBLEM OF DAGDAYL

Tula state university

Abstract. Description of plastic deformation in the context of flow theory is a classic way of mechanics of continua. But a solution of the problems is found in the context of a hard plastic model when it's ignored elastic deformation as compared with plastic. Target connected elastoplastic settings mate vagueness of tensions and deformations for the field of plastic deformation. However in various cases this problem is avoid. In the article is investigated the important problem of mechanics of destruction which consists of modeling of behavior plastic thin zone depending on the view of plane problem. In the classic way [7,11] thin plastic zone associate with an influence of cohesion force of constant activity, which don't connect with change from elastic to plastic condition. In the article plastic field is applied to deformable solid and its condition is rote in the context of the expression mechanics of continua. In the article – is obtained of principle difference tensity in the apex of a split from view plane problem.

Keywords: character dimension, boundary integral equation, linear elasticity, ideally elastic-plastic model

Глаголев Вадим Вадимович

доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры "Математическое моделирование" Тульского государственного университета 300600, г. Тула, пр. Ленина 92, ТулГУ

`e-mail:` vadim@tsu.tula.ru

Мерцалова Татьяна Анатольевна

аспирант кафедры "Математическое моделирование" Тульского государственного университета 300600, г. Тула, пр. Ленина 92, ТулГУ

`e-mail:` tania@tula.ru

Glagolev Vadim Vadimovich

doctor of sciences, senior lecturer, professor of chair "Mathematical modelling" of the Tula state university 300600, Tula, Lenin's 92 avenue

Mertsalova Tatyana Anatolevna

post-graduate student of chair "Mathematical modelling" of the Tula state university 300600, Tula, Lenin's 92 avenue

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 121–129

А. В. Горский, П. В. Горский

О ВДАВЛИВАНИИ ПЛОСКОГО КРУГОВОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С УЧЕТОМ КРУТЯЩИХ УСИЛИЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассмотрена осессиметричная задача о вдавливании плоского кругового в плане штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии крутящих усилий. Показано, что существует зависимость между величиной центральной жесткой области и характером крутящих усилий. Приведены условия отсутствия центральной жесткой области.

Ключевые слова: пластичность, условие полной пластичности, жесткопластическое полупространство, осессимметричный, закручивающие усилия, вдавливание, плоский круговой в плане штамп, центральная жесткая область.

УДК: 539.374

Рассматривается общая осессиметричная задача о вдавливании плоского кругового в плане штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии радиальных и окружных контактных касательных напряжений $\tau_{rz}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z} \neq 0$. В [1,2] приведены решения задачи о начальном пластическом течении идеально пластического полупространства при вдавливании гладкого плоского и сферического штампов. В [3] приведено численное решение задачи о давлении плоского круглого в плане штампа на идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения ($\tau_{rz} \neq 0, \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$), моделируемого по Прандтлю и Кулону, изменяющегося от нуля до предельного значения, при котором центральная жесткая область распространяется по всей контактной границе штампа. Согласно [1] при $\tau_{rz} \neq 0$, $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$ под штампом образуется центральная жесткая область, которая растет с увеличением контактного трения.

Ниже рассматривается задача о вдавливании кругового в плане штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при условии полной пластичности, контактное трение моделируется по Прандтлю. Добавление крутящих усилий при вдавливании плоского круглого штампа ($\tau_{\theta z} \neq 0$) приводит к уменьшению величины центральной жесткой области под штампом. Центральная жесткая область уменьшается с ростом угла α, где $\operatorname{tg}\alpha = \tau_{\theta z}/\tau_{rz}$, и исчезает, начиная с некоторого значения угла α. Приводятся численное решение и графики зависимости минимального значения угла α от контактного напряжения $\tau = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2}$, при котором центральная жесткая область будет отсутствовать.

1. Основные уравнения

Поступила 10.05.2008

Рассмотрим задачу о начальном пластическом течении при давлении с кручением плоского круглого в плане штампа на несжимаемое идеально пластическое полупространство по нормали к его границе с учетом радиальных и окружных контактных касательных напряжений фиг. 1. Введем цилиндрическую систему координат $\{\rho, \theta, z\}$, начало поместим в центр штампа O. За единицу длины примем радиус штампа R, за единицу напряжения – предел текучести при одноосном сжатии $2k = 1$, за единицу скорости – скорость вдавливания штампа по нормали к границе полупространства W.

Согласно [1, 2] задача решается при условии полной пластичности. В рассматриваемой задаче радиальная скорость пластического течения положительна, следовательно, условие полной пластичности имеет вид:

$$\sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + 1, \tag{1}$$

где σ_i- компоненты главных напряжений, для σ_i выполняется $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Направления главных напряжений σ_1 и σ_3 лежат на плоскости $\{r, z\}$.

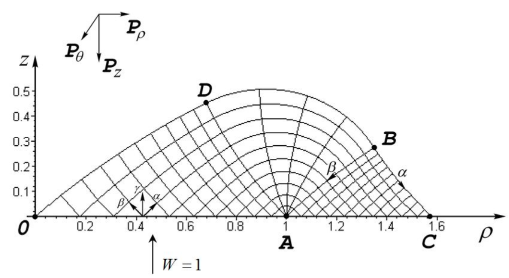


Рис. 1.

Компоненты напряжений σ_ρ, $\tau_{\rho\theta}$, ... имеют вид:

$$\begin{array}{ll} \sigma_\rho = \sigma + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1+\cos\psi)\cos^2\xi, & \tau_{\rho\theta} = -\frac{1}{2}\sin\psi\cos\xi, \\ \sigma_\theta = \sigma + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1-\cos\psi), & \tau_{\rho z} = -\frac{1}{2}(1+\cos\psi)\sin\xi\cos\xi, \\ \sigma_z = \sigma + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1+\cos\psi)\sin^2\xi, & \tau_{\theta z} = -\frac{1}{2}\sin\psi\sin\xi, \\ \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z). & \end{array} \tag{2}$$

Среднее напряжение σ при условии пластичности (1) имеет вид

$$\sigma = \sigma_2 - \frac{1}{3}. \tag{3}$$

Из (2) имеем:

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = \frac{1}{4}(1+\cos\psi)^2.$$

Предположим, что имеет место общая осесимметричная задача. Согласно [5, 6]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, z), \quad \xi = \xi(\rho, z), \quad \psi = \psi(\rho, z). \tag{4}$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho}+\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z}+R_1=0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho}+\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}+R_3=0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+R_2=0, \tag{5}$$

где R_1, R_2, R_3 определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} R_1 &= \tfrac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=-\tfrac{1}{2\rho}\left[(1+\cos\psi)\cos^2\xi-(1-\cos\psi)\right], \\ R_2 &= \tfrac{\tau_{\rho z}}{\rho}=-\tfrac{(1+\cos\psi)\sin\xi\cos\xi}{2\rho}, \\ R_3 &= \tfrac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho}{}_2=-\tfrac{\sin\psi\cos\xi}{\rho}. \end{aligned} \tag{6}$$

Компоненты скоростей деформации связаны с компонентами скоростей перемещений u, v, w формулами Коши:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_\rho=\tfrac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta=\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial v}{\partial \theta}+\tfrac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_z=\tfrac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\rho\theta}=\tfrac{1}{2}\left[\rho\tfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\tfrac{v}{\rho}\right)+\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial u}{\partial\theta}\right], \\ &\varepsilon_{\theta z}=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial w}{\partial\theta}+\tfrac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \varepsilon_{\rho z}=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u}{\partial z}+\tfrac{\partial w}{\partial \rho}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Поле скоростей перемещений должно удовлетворять условию несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{u}{\rho}=0, \tag{8}$$

и условиям изотропии:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u}{\partial \rho}+\left(\tfrac{\partial u}{\partial z}+\tfrac{\partial w}{\partial \rho}\right)\left(\tfrac{n_3^2-n_1^2}{2n_1n_3}\right)-\tfrac{\partial w}{\partial z}+\tfrac{\partial v}{\partial \rho}\tfrac{n_2}{2n_1}-\tfrac{\partial v}{\partial z}\tfrac{n_2}{2n_3}-\tfrac{n_2}{2\rho n_1}v=0, \\ &-\tfrac{\partial u}{\partial \rho}-\left(\tfrac{\partial u}{\partial z}+\tfrac{\partial w}{\partial \rho}\right)\tfrac{n_3}{2n_1}+\tfrac{\partial v}{\partial \rho}\left(\tfrac{n_1^2-n_2^2}{2n_1n_2}\right)+\tfrac{\partial v}{\partial z}\tfrac{n_3}{2n_2}+\tfrac{u}{\rho}+\tfrac{n_2^2-n_1^2}{2\rho n_1n_2}v=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим

$$S_1=\frac{u}{\rho}, \quad S_2=-\frac{n_2}{2\rho n_1}v, \quad S_3=\frac{u}{\rho}+\frac{n_2^2-n_1^2}{2\rho n_1 n_2}v, \tag{10}$$

где n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы главного напряжения σ_1 определяются соотношениями:

$$n_1=\cos\frac{\psi}{2}\cos\xi, \quad n_2=\sin\frac{\psi}{2}, \quad n_3=\cos\frac{\psi}{2}\sin\xi. \tag{11}$$

При условии полной пластичности (1) уравнения равновесия (5), (6) и условия несжимаемости (8) и изотропии (9) для скоростей перемещений приводят к уравнениям гиперболического типа [5, 7] с тремя характеристиками, совпадающими с линиями скольжения α, β и γ на плоскости $\{r, z\}$:

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{\alpha,\beta}=\operatorname{tg}\left[\xi\mp\left(\frac{\pi}{4}+\mu\right)\right], \quad \operatorname{tg}2\mu=\frac{1-\cos\psi}{2\sqrt{\cos\psi}}, \tag{12}$$

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{\gamma}=\operatorname{tg}\xi. \tag{13}$$

Дифференциальные соотношения вдоль линий скольжения (12), (13) для среднего напряжения σ и углов ξ и ψ имеют вид:

$$d\sigma\pm\frac{1}{2}\frac{1+\cos\psi}{\sqrt{\cos\psi}}d\xi+\left(R_1+R_2\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{\alpha,\beta}+\frac{\sin\psi}{C_{\alpha,\beta}\sqrt{\cos\psi}}R_3\right)d\rho=0, \quad \text{вдоль} \quad \alpha,\beta \tag{14}$$

и

$$d\sigma + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{\psi}{2}d\psi + \left(R_1 + R_2\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_\gamma - \frac{\mathrm{ctg}\,\frac{\psi}{2}}{\cos\xi}R_3\right)d\rho = 0, \quad \text{вдоль} \quad \gamma, \tag{15}$$

где $C_{\alpha,\beta} = \cos\xi\sqrt{\cos\psi} \pm \sin\xi$ иR_1, R_2, R_3 определяются соотношениями (6).

Дифференциальные соотношения вдоль линий скольжения (12), (13) для скоростей перемещений u, v, w имеют вид:

$$\begin{gathered} \mathrm{d}u + \left(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\alpha,\beta,\gamma}\mathrm{d}w + f_{\alpha,\beta,\gamma}\mathrm{d}v + \tfrac{1}{1-\sin^2\frac{\xi}{2}}\Big[(S_1+S_2)\cos^2\tfrac{\psi}{2}\sin^2\xi + \\ +S_3\cos^2\tfrac{\psi}{2}\left(\sin^2\xi - \cos^2\xi\right) - 2\cos^2\tfrac{\psi}{2}\cos\xi\sin\xi\,(S_1+S_2+2S_3)\left(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\alpha,\beta,\gamma} + \\ +\cos^2\tfrac{\psi}{2}\left(S_1\cos^2\xi - S_2\sin^2\xi + S_3\left(\cos^2\xi - \sin^2\xi\right)\right)\left(\tfrac{\mathrm{d}z}{rmd\rho}\right)^2_{\alpha,\beta,\gamma}\Big]\mathrm{d}\rho = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$f_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}\cos\psi}{\cos\xi\left(1-(1+\cos\psi)\cos^2\xi\right) + \sin\xi\left(1-(1+\cos\psi)\sin^2\xi\right)\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}\right)_{\alpha,\beta,\gamma}}.$$

При $\psi = 0$ соотношения (12) и (14) для α и β характеристик (12) при соответствующей замене переходят соотношения, приведенные в [1, 2].

Соотношение вдоль γ характеристики (15) преобразуем к виду (17), откуда следует $d\psi = 0$ при $\psi = 0$

$$2\,\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}\left[d\sigma + \left(R_1 + R_2\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_\gamma\right)d\rho\right] + d\psi + \frac{2\sin\psi}{\rho}d\rho = 0. \tag{17}$$

Соотношения (12), (16) при $\psi = 0$ для линий скольжения α и β при соответствующей замене переходят в соотношения, приведенные в [3, 4].

Соотношение вдоль γ линии скольжения (13), (16) преобразуем к виду (18)

$$\begin{gathered} -\tfrac{dv}{\cos\xi} + \mathrm{tg}\,\psi\,(du + \mathrm{tg}\,\xi\,dw) - \\ -\tfrac{1}{\rho}\tfrac{v\cos\frac{\psi}{2}\sin\psi\cos\xi\left(1-2\cos^2\frac{\psi}{2}\right)+2u\cos^2\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\psi}{2\sin\frac{\psi}{2}\cos\psi\cos^2\frac{\xi}{2}\cos\xi}d\rho = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Соотношение (18) при $\psi \to 0$ переходит в соотношение:

$$dv - \frac{v}{\rho\cos^2\frac{\xi}{2}}d\rho = 0. \tag{19}$$

Система уравнений (12)–(15) является статически определимой. Задав граничные условий для напряжений на свободной границе и под штампом можно определить граничные условия для σ, ξ и ψ из условия полной пластичности (1) и соотношений для напряжений (2). Совместное решение системы уравнений (12)–(15) позволяет построить линии скольжения и поле напряжений. Затем определяются граничные условия для скоростей перемещений и по соотношениям (16) и (19) вычисляется поле скоростей перемещений в пластической области. Поля напряжений и скоростей перемещений должны удовлетворять условию неотрицательности диссипативной функции

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \geq 0, \tag{20}$$

где ε_1, ε_2, ε_3 – главные скорости деформаций.

2. Граничные условия

Граница AC полупространства около штампа свободна от внешних усилий. Из соотношений (2) и условия полной пластичности (1) следует, что на свободной границе среды $\sigma_z = 0$, а $\sigma_\rho < 0$. Так как направления ρ и z являются для точек свободной границы главными и $\sigma_1 < \sigma_3$, то для этих точек $\sigma_z = \sigma_3 = 0$, $\sigma_\rho = \sigma_1 = -1$. Тогда из равенства главных напряжений $\sigma_2 = \sigma_3$ условия полной пластичности (1) следует $\sigma_\theta = \sigma_2 = 0$. В итоге получаем:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_\theta = \sigma_z = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_\rho = -1. \tag{21}$$

Из соотношения (2), (3) получаем:

$$\sigma = -1/3, \quad \xi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{на} \quad \text{AC} \quad \text{рис. 1}. \tag{22}$$

Согласно соотношениям (2) и рис. 1 контактное трение под штампом определяется соотношением:

$$\tau = \sqrt{\tau_{\rho z}^2 + \tau_{\theta z}^2}, \quad \tau = \sqrt{\left(k\left(1+\cos\psi\right)\sin\xi\cos\xi\right)^2 + \left(k\sin\psi\sin\xi\right)^2}, \quad 0 < \psi < \pi/2. \tag{23}$$

В сингулярной точке A изменение среднего напряжения от свободной границы к границе штампа определяется интегрированием уравнения (14) на вырожденной $\alpha-$характеристики для внешнего и внутреннего случаев соответственно:

$$\sigma = -\frac{1}{3} - \int_0^{\xi} \frac{1+\cos\psi}{2\sqrt{\cos\psi}} d\xi. \tag{24}$$

Согласно [3] для задачи давления плоского круглого штампа на идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения ($\tau_{\rho z} \neq 0$, $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = 0$) напряжения контактного трения приводят к образованию жесткой области OEG в центральной части границы контакта, движущейся вместе со штампом. Ниже приведен рис. 2 из [3]: на нем показано поле линий скольжения в пластической области при вдавливании штампа в полупространство с учетом контактного трения.

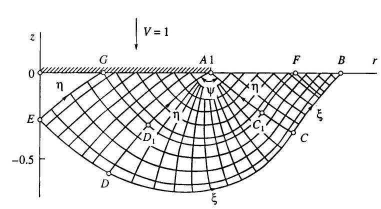


Рис. 2. Поле линий скольжения в пластической области при вдавливании штампа в полупространство с учетом контактного трения [3].

Согласно [3] в случае возникновения жесткой области возникает задача определения границы EG центральной жесткой области для поля линий скольжения, которое зависит от двух параметров: координат r_F и r_Bточек F и B границы AB. Точка E находящаяся на оси симметрии находится исходя из условий:

$$\rho_E\left(\rho_B, \rho_F\right) = 0, \quad \varphi_E\left(\rho_B, \rho_F\right) + \frac{\pi}{4} = 0 \quad (dz/d\rho = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{для} \quad \xi). \tag{25}$$

Решение системы уравнений (25) определяет линии скольжения и поле напряжений в пластической области с жесткопластическими границами EG и $EDCB$. Координаты точек B и F находятся методом вариации их значений во входных данных вычислительной программой. Численное решение, результаты и алгоритмы решения этой задачи приведены в [3].

Для общей осесимметричной задачи, в случае построения поля характеристик через верх и введенных обозначениях, система уравнений (25) имеет вид [7]:

$$\rho_E\left(\rho_B, \rho_F\right) = 0, \quad \varphi_E\left(\rho_B, \rho_F\right) - \frac{\pi}{4} = 0 \quad (dz/d\rho = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{для} \quad \alpha), \tag{26}$$

где $\varphi = \xi - \left(\frac{\pi}{4} + \mu\right)$, $\operatorname{tg} 2\mu = \frac{1-\cos\psi}{2\sqrt{\cos\psi}}$.

На рис. 3а приведено поле характеристик для осесимметричной задачи для $\tau = 0.85$, рис. 3б – общей осесимметричной задачи для $\tau = 0.85$ и $\operatorname{tg}\alpha = \tau_{\theta z}/\tau_{\rho z}$, $\alpha = 80.27°$. С увеличением угла веера ψ при сингулярной точке A (рис. 2) угол между α и β характеристика растет от $\pi/2$ до π при $\psi = \pi/2$ в соотношениях (12) и (26) (угол веера при точке A и угол ψ в соотношениях (12) не совпадают). Согласно рис. 3 следует, что с увеличением угла α (с добавлением усилий кручения) при $\tau = const$ центральная жесткая область под штампом будет уменьшаться.

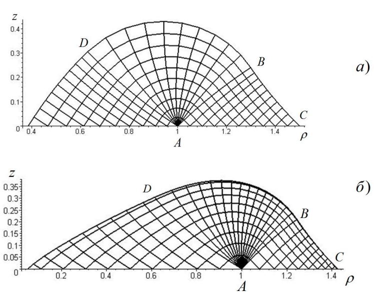


Рис. 3. а) $\psi = 0$, $\tau = 0.85$, $\xi = 1.7903$, $\alpha = 0°$ б) $\psi = 1$, $\tau = 0.85$, $\xi = 1.6646$, $\alpha = 80.27°$

3. Влияние крутящих усилий на образование центральной жесткой области

Критерием появления центральной жесткой области является условие пересечения αхарактеристикой оси Oz под углом не меньшим 45^o. Согласно рис. 1 и 3, условиям (26) и уравнению αхарактеристики (12) следует, что условием отсутствия образования центральной жесткой области является:

$$\xi - \mu < \frac{\pi}{4}, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg} 2\mu = \frac{1-\cos\psi}{2\sqrt{\cos\psi}}. \tag{27}$$

Решением уравнения $\xi - \mu = \frac{\pi}{4}$ является график зависимости углов ξ и ψ рис. 4, приведенный ниже.

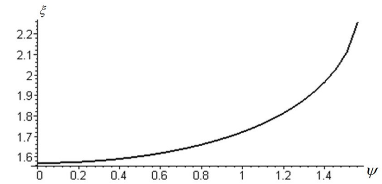


Рис. 4. График зависимости углов ξ и ψ решения уравнения (27).

Согласно соотношениям (2) контактное трение под штампом определяется соотношением:

$$\tau = \sqrt{\tau_{\rho z}^2 + \tau_{\theta z}^2}, \quad \tau = \sqrt{\left(-1/2\,(1+\cos\psi)\sin\xi\cos\xi\right)^2 + \left(-1/2\sin\psi\sin\xi\right)^2}, \quad 0 < \psi < \pi/2. \tag{28}$$

Получив решение неравенства (27) (рис. 4) и воспользовавшись соотношениями (2) можно построить область, определяющую контактное напряжение под штампом, для которого центральная жесткая область будет отсутствовать (рис. 5).

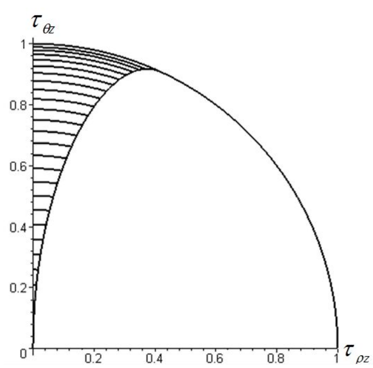


Рис. 5. Условие отсутствия образования центральной жесткой области.

Добавление крутящих усилий при вдавливании плоского круглого штампа ($\tau_{\theta z} \neq 0$) приводит к уменьшению величины центральной жесткой области под штампом. Центральная жесткая область уменьшается с ростом угла α, где $\operatorname{tg}\alpha = \tau_{\theta z}/\tau_{rz}$, и исчезает, начиная с некоторого значения угла α

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho z}} = \frac{\sin\psi\sin\xi}{(1+\cos\psi)\sin\xi\cos\xi}. \tag{29}$$

График зависимости предельных значений угла α для постоянных контактных напряжений $\tau = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2} = const$ приведен ниже .

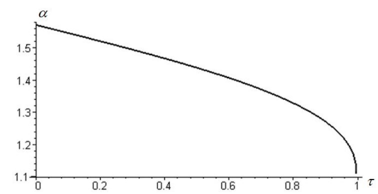


Рис. 6. График предельных значений угла α для постоянных контактных напряжений $\tau = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2} = const$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ишлинский, А. Ю.* Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринелля / А. Ю. Ишлинский // ПММ. – 1944. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 201-224.

[2] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

[3] *Непершин, Р. И.* Давление плоского круглого штампа на идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения / Р. И. Непершин // МТТ. – 2005. – № 5. – С. 150-158.

[4] *Друянов, Б. А.* Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.

[5] *Горский, А. В.* О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений общей плоской, осесимметрической и сферической задач теории идеальной пластичности / А. В. Горский, П. В. Горский // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. 2003. – Т. 1. – № 1. – С. 10-20

[6] *Горский, П. В.* О вдавливании кругового штампа в неоднородное жесткопластическое полупространство / П. В. Горский // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика – Тула : Издательство ТулГУ, 2004. – Т. 10, вып. 3.– С. 62-75.

[7] *Горский, А. В.* Об определении поля напряжений и скоростей перемещений идеально пластического течения в случае общей осесимметричной задачи / А. В. Горский, П. В. Горский // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике : аннотации докладов. Т. 3. – Нижний Новгород : Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2006. – С. 74-75.

A. V. Gorski, P. V. Gorski

ABOUT INDENTATION OF CIRCULAR STAMP WITH A FLAT BASIS IN RIGID-PLASTIC HALF-SPACE UNDER THE ACTION OF TWISTING STRESS

Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva

Abstract. Considered the axisymmetric problem of indentation of circular stamp with a flat basis in rigid-plastic half-space under the action of twisting stress. Pointed out the relation between size of a central rigid zone and twisting stress sort. The conditions of central rigid zone disappearance are given

Keywords: plasticity, plasticity condition, rigid-plastic half-space, axisymmetric, twisting stress, indention, circular stamp with flat basis, central rigid zone.

Горский Алексей Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, ГОУ ВПО "Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева" , г. Чебоксары, ул. К. Маркса 38, 428000

`e-mail:` gorski@mail.ru

Горский Павел Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, ГОУ ВПО "Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева", г. Чебоксары, ул. К. Маркса 38, 428000

`e-mail:` gorski@mail.ru

Gorsky Alexey Vladimirovich

doctor of philosophy, senior lecturer of chair of computer science and computer facilities, Chuvash state pedagogical university of I.J. Jakovleva , Cheboksary, K.Marx's 38 street, 428000

Gorsky Pavel Vladimirovich

doctor of philosophy, senior lecturer of chair of computer science and computer facilities, Chuvash state pedagogical university of I.J. Jakovleva , Cheboksary, K.Marx's 38 street, 428000

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. №1. С. 130–133

И. П. Григорьев

О СЖАТИИ ПЛОСКОГО ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ СИЛ ТЯЖЕСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается сжатие плоского идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом силы тяжести. Сжатие идеальнопластического слоя шероховатыми плитами без учета силы тяжести рассмотрено в [1,2] и др.

Ключевые слова: пластичность, идеальная, упругость, напряжения, скорости деформации, предел текучести, тяжесть, слой, давление.

УДК: 539.374

1. Рассмотрим идеальнопластический слой толщиной $2h$, сжатый жесткими шероховатыми плитами, находящихся в поле силы тяжести g (рис. 1). Условие пластичности примем в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2,\ k - const, \tag{1}$$

где $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}$– компоненты напряжения, k– предел текучести на сдвиг.

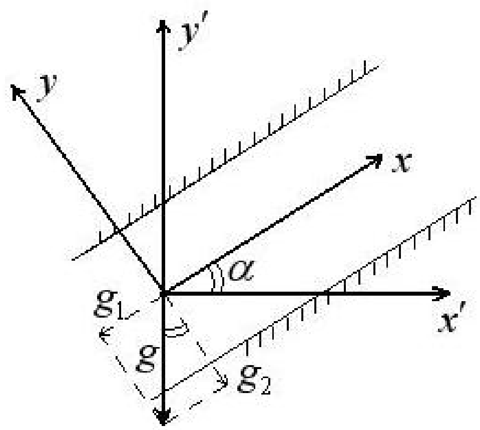


Рис. 1.

Поступила 15.01.2009

Уравнения равновесия запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -g\sin\alpha,\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -g\cos\alpha,\ g - const, \tag{2}$$

где $g_1 = -g\sin\alpha,\ g_2 = -g\cos\alpha$ – составляющие силы тяжести.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, все величины, имеющие размерность длины, будем считать отнесенными к величине h, размерность напряжения – к величине k.

Положим

$$\tau_{xy} = y. \tag{3}$$

Из (2), (3) получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -g\sin\alpha - 1,\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -g\cos\alpha. \tag{4}$$

Из (4) следует

$$\sigma_x = (-g\sin\alpha - 1) + f(x),\ \sigma_y = (-g\cos\alpha)\, y + \varphi(x). \tag{5}$$

Из (1), (3) найдем

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{1-y^2}. \tag{6}$$

Из (3), (5), (6) получим

$$\begin{aligned} &\sigma_x = (-g\sin\alpha - 1)\, x + C + (-g\cos\alpha)\, y + 2\sqrt{1-y^2}, \quad C - const,\\ &\sigma_y = (-g\sin\alpha - 1)\, x + C + (-g\cos\alpha)\, y,\ \tau_{xy} = y. \end{aligned} \tag{7}$$

Кинематика течения определяется из уравнений

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0,\ \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}},\ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y},\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right), \tag{8}$$

где $\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_{xy}$ – компоненты скорости пластической деформации, $u,\ \upsilon$ – компоненты скорости перемещения.

Согласно (3), (6), (8), уравнения, определяющие кинематику течения, не зависят от силы тяжести.

Полагая

$$\upsilon = y, \tag{9}$$

из (3), (6), (8), (9) получим

$$u = -x + \frac{1}{2}\sqrt{1-y^2} + C_1,\ \upsilon = y,\ C_1 - const. \tag{10}$$

2. Уравнения (1), (2) допускают другой вид решения. Положим

$$\tau_{xy} = (-g\sin\alpha)\, y. \tag{11}$$

Из (2), (11) найдем

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -g\cos\alpha. \tag{12}$$

Из (12) следует

$$\sigma_x = f(y),\ \sigma_y = (-g\cos\alpha)\,y + \varphi(x). \tag{13}$$

Из (1), (11) найдем

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{1 - ((-g\sin\alpha)\,y)^2}. \tag{14}$$

Из (11), (13), (14) получим

$$\begin{aligned} &\sigma_x = (-g\cos\alpha)\,y + C_1 + 2\sqrt{1 - ((-g\sin\alpha)\,y)^2},\ \mathrm{C}_1 - const,\\ &\sigma_y = (-g\cos\alpha)\,y + C_1,\ \tau_{xy} = (-g\cos\alpha)\,y. \end{aligned} \tag{15}$$

Согласно (14) максимальное значение касательного напряжения $\tau_{\max} = 1$ достигается при

$$y = \frac{1}{-g\sin\alpha}. \tag{16}$$

Согласно (15) сдавливающее давление σ_y на границе плиты $y = 1$ является постоянным

$$\sigma_y = -g\cos\alpha + C_1 - const. \tag{17}$$

3. В общем случае решение следует искать в виде

$$\tau_{xy} = (1 - g\sin\alpha)\,y. \tag{18}$$

Из (2), (18) получим

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = -g\cos\alpha. \tag{19}$$

Из (19) следует

$$\sigma_x = -x + f(y),\ \sigma_y = (-g\cos\alpha)\,y + \varphi(x). \tag{20}$$

Из (1), (18) найдем

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{1 - [(1 - g\sin\alpha)\,y]^2}. \tag{21}$$

Из (18), (20), (21) получим

$$\begin{aligned} &\sigma_x = -x + C_2 + (-g\cos\alpha)\,y + 2\sqrt{1 - [(1 - g\sin\alpha)\,y]^2},\\ &\sigma_y = -x + C_2 + (-g\sin\alpha)\,y,\ \tau_{xy} = (1 - g\sin\alpha)\,y. \end{aligned} \tag{22}$$

Под действием силы тяжести касательное напряжение τ_{xy} (18) уменьшается, сдавливающее усилие σ_y линейно изменяется вдоль оси x, на границе плиты $y = 1$ касательное напряжение $\tau_{xy} = (1 - g\sin\alpha) < \tau_{\max} = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука,1966.

[2] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука,1969. – 420 с.

I. P. Grigoryev

ABOUT PRESSING OF FLAT IDEAL PLASTIC LAYER WITH TAKING INTO ACCOUNT GRAVITY

Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva

Abstract. In the paper the pressing of flat ideal plastic layer with hard rough plate with taking into account gravity is investigated. The pressing of flat ideal plastic layer with rough plate without taking into account gravity is investigated in [1, 2].

Keywords: plasticity, ideal, elasticity, stress, fluidity limit, deformation's speed, gravity, layer, pressure.

Григорьев Иван Павлович

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры машиноведения Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

`e-mail:` sergio2100@mail.ru

Grigoryev Ivan Pavlovich

doctor of philosophy, senior teacher of chair of machins of Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovlev, Cheboxary

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 134–141

П. Н. Кузнецов

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВКЛЮЧЕНИЯМИ, ОГРАНИЧЕННЫМИ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИМИ ОКРУЖНОСТЯМИ, ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается двуосное упругопластическое напряженное состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями. Рассматривается случай плоской деформации. Определяется граница упругопластической зоны, рассматривается влияние неоднородного включения на напряженное состояние плоскости. Отметим, что вопросам теории пластичности неоднородных сред посвящен ряд работ, среди которых отметим [2,4-6].

Ключевые слова: плоская деформация, тензор напряжений, пластичность, упругость, упругопластическая граница, неоднородное включение.

УДК: 539.374

Рассмотрим плоскость с включениями, ограниченными окружностями. Плоскость ослаблена круговым отверстием радиуса R, центр первой окружности $O_1\,(a_1,\ b_1)$, центр второй окружности $O_2\,(a_2,\ b_2)$, центр третьей окружности $O_3\,(a_3,\ b_3)$ (рис. 1). Пределы текучести материалов включений равны k_1, k_2 и k_3, предел текучести материала плоскости – k_4. Центр начала координат x, y совпадает с центром кругового отверстия. Пластина находится в состоянии двуосного растяжения под действием усилий на бесконечности $p_1,\ p_2$ (рис. 1).

Уравнение контура L_1 запишем в виде

$$(x+\delta a_1)^2+(y+\delta b_1)^2=R_1^2, \tag{1}$$

где точка $O_1\,(a_1,\ b_1)$ – центр окружности, ограничивающей включение с пределом текучести k_1, R_1 – радиус окружности.

Уравнение контура L_2 запишем в виде

$$(x+\delta a_2)^2+(y+\delta b_2)^2=R_2^2, \tag{2}$$

где точка $O_2\,(a_2,\ b_2)$ – центр окружности, ограничивающей включение с пределом текучести k_2, R_2 – радиус окружности.

Поступила 20.02.2009

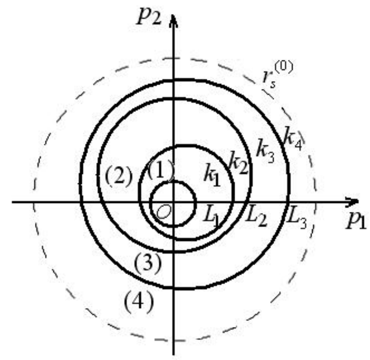


Рис. 1.

Уравнение контура L_3 запишем в виде

$$(x + \delta a_3)^2 + (y + \delta b_3)^2 = R_3^2, \tag{3}$$

где точка $O_3\,(a_3,\ b_3)$ – центр окружности, ограничивающей включение с пределом текучести k_3, R_3 – радиус окружности.

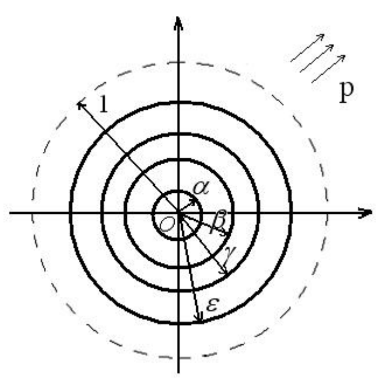


Рис. 2.

Решение будем искать в приближенном виде аналогично [1, 3-5]. Уравнение упругопластической границы запишем в виде

$$r = r_s^{(0)} + \delta r_{s1}, \tag{4}$$

где δ – малый безразмерный параметр.

В дальнейшем, все величины, имеющие размерность длины, отнесем к величине $r_s^{(0)}$. Все величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести k_1, обозначим: $k_2/k_1 = \chi_1,\ k_3/k_1 = \chi_2,\ k_4/k_1 = \chi_3$. Примем: $\rho = r\Big/r_s^{(0)},\ \rho' = r_{s1}\Big/r_s^{(0)}$. Величины $a_1\delta\Big/r_s^{(0)}$, $b_1\delta\Big/r_s^{(0)}$, $a_2\delta\Big/r_s^{(0)}$, $b_2\delta\Big/r_s^{(0)}$, $a_3\delta\Big/r_s^{(0)}$, $b_3\delta\Big/r_s^{(0)}$, $(p_1 - p_2)/2k_1$ будем считать достаточно малыми, порядка δ и обозначим

$$\frac{(p_1 - p_2)}{2k_1} = d_3\delta, \tag{5}$$

$$d_3 \ - \ const, \ 0 \le d_3 \le 1.$$

В исходном нулевом приближении при $\delta = 0$ имеем плоскость с круговым включением, ослабленным отверстием, равномерно растягиваемым на бесконечности усилиями $p = (p_1 + p_2)/2k_1$ (рис. 2).

Радиус отверстия в безразмерном виде обозначим $\alpha = R\Big/r_s^{(0)}$, радиус первой эксцентрической окружности – $\beta = R_1\Big/r_s^{(0)}$, радиус второй эксцентрической окружности – $\gamma = R_2\Big/r_s^{(0)}$, радиус третьей эксцентрической окружности – $\varepsilon = R_3\Big/r_s^{(0)}$. Будем считать, что $\varepsilon < 1$.

Компоненты напряжения запишем в полярной системе координат $\rho, \ \theta : \ \sigma_\rho, \ \sigma_\theta, \ \tau_{\rho\theta}$. Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma'_{ij}. \tag{6}$$

Припишем компонентам напряжения в зоне первого включения индекс "1" внизу, компонентам напряжения в зоне второго включения – индекс "2" внизу, в зоне третьего включения – индекс "3" внизу, вне зоны включения – индекс "4" внизу. Компонентам напряжения в пластической зоне припишем индекс "p" наверху, в упругой зоне – индекс "e" наверху.

Рассмотрим напряженное состояние в исходном нулевом приближении.

Исходное напряженное состояние является осесимметричным

$$\tau_{p\theta_1}^{(0)p} = 0, \ \tau_{p\theta_2}^{(0)p} = 0, \ \tau_{p\theta_3}^{(0)p} = 0, \ \tau_{p\theta_4}^{(0)p} = 0. \tag{7}$$

В зоне 1, в зоне первого включения, условие пластичности примет вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} - \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = -2, \ \sigma_{\theta_1}^{(0)p} > \sigma_{\rho_1}^{(0)p}. \tag{8}$$

В зоне 2, в зоне второго включения, условие пластичности запишется в виде

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)p} - \sigma_{\theta_2}^{(0)p} = -2\chi_1. \tag{9}$$

В зоне 3, в зоне третьего включения, условие пластичности запишется в виде

$$\sigma_{\rho_3}^{(0)p} - \sigma_{\theta_3}^{(0)p} = -2\chi_2. \tag{10}$$

Вне зоны включения, в зоне 4, условие пластичности запишется в виде

$$\sigma_{\rho_4}^{(0)p} - \sigma_{\theta_4}^{(0)p} = -2\chi_3. \tag{11}$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0. \tag{12}$$

Из (8)–(11) имеем

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\rho_1}^{(0)p} = 2\ln\rho + C_1,\ \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2 + 2\ln\rho + C_1,\\
&\sigma_{\rho_2}^{(0)p} = 2\chi_1\ln\rho + C_2,\ \sigma_{\theta_2}^{(0)p} = 2\chi_1\ln\rho + 2\chi_1 + C_2,\\
&\sigma_{\rho_3}^{(0)p} = 2\chi_2\ln\rho + C_3,\ \sigma_{\theta_3}^{(0)p} = 2\chi_2\ln\rho + 2\chi_2 + C_3,\\
&\sigma_{\rho_4}^{(0)p} = 2\chi_3\ln\rho + C_4,\ \sigma_{\theta_4}^{(0)p} = 2\chi_3\ln\rho + 2\chi_3 + C_4,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные.

Из условия $\sigma_{\rho_1}^{(0)p}\Big|_{\rho=\alpha} = 0$, определим постоянную C_1

$$C_1 = -2\ln\alpha.$$

Получим

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} = 2\ln\frac{\rho}{\alpha},\ \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2 + 2\ln\frac{\rho}{\alpha}. \tag{14}$$

Условие сопряжения компонент напряжений на границе первого включения запишется в виде

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p}\Big|_{\rho=\beta} = \sigma_{\rho_2}^{(0)p}\Big|_{\rho=\beta}. \tag{15}$$

Согласно (12)–(14) получим

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\rho_2}^{(0)p} = 2\chi_1\ln\tfrac{\rho}{\beta} + 2\ln\tfrac{\beta}{\alpha},\\
&\sigma_{\theta_2}^{(0)p} = 2\chi_1\ln\tfrac{\rho}{\beta} + 2\ln\tfrac{\beta}{\alpha} + 2\chi_1.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

На границе $\rho = \beta$ имеет место разрыв напряжений $\sigma_\theta^{(0)p}$:

$$\sigma_{\theta_2}^{(0)p} - \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2(\chi_1 - 1). \tag{17}$$

Условие сопряжения компонент напряжений на границе второго включения запишется в виде

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)p}\Big|_{\rho=\gamma} = \sigma_{\rho_3}^{(0)p}\Big|_{\rho=\gamma}. \tag{18}$$

Согласно (12), (15), (18) получим

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\rho_3}^{(0)p} = 2\chi_2\ln\tfrac{\rho}{\gamma} + 2\chi_1\ln\tfrac{\gamma}{\beta} + 2\ln\tfrac{\beta}{\alpha},\\
&\sigma_{\theta_3}^{(0)p} = 2\chi_2\ln\tfrac{\rho}{\gamma} + 2\chi_1\ln\tfrac{\gamma}{\beta} + 2\ln\tfrac{\beta}{\alpha} + 2\chi_2.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

На границе $\rho = \gamma$ имеет место разрыв напряжений $\sigma_\theta^{(0)p}$:

$$\sigma_{\theta_3}^{(0)p} - \sigma_{\theta_2}^{(0)p} = 2(\chi_2 - \chi_1). \tag{20}$$

Условие сопряжения компонент напряжений на границе третьего включения запишется в виде

$$\sigma_{\rho_3}^{(0)p}\Big|_{\rho=\varepsilon} = \sigma_{\rho_4}^{(0)p}\Big|_{\rho=\varepsilon}. \tag{21}$$

Согласно (12), (15), (21) получим

$$\begin{aligned}\sigma^{(0)p}_{\rho_4} &= 2\chi_3 \ln \tfrac{\rho}{\varepsilon} + 2\chi_2 \ln \tfrac{\varepsilon}{\gamma} + 2\chi_1 \ln \tfrac{\gamma}{\beta} + 2 \ln \tfrac{\beta}{\alpha},\\ \sigma^{(0)p}_{\theta_4} &= 2\chi_3 \ln \tfrac{\rho}{\varepsilon} + 2\chi_2 \ln \tfrac{\varepsilon}{\gamma} + 2\chi_1 \ln \tfrac{\gamma}{\beta} + 2 \ln \tfrac{\beta}{\alpha} + 2\chi_3.\end{aligned} \tag{22}$$

При $\rho \to \infty$, имеет место $\sigma^{(0)e}_{\rho} = \sigma^{(0)e}_{\theta} = p$.

Решение в упругой области будем искать в виде:

$$\sigma^{(0)e}_{\rho} = p - \frac{B}{\rho^2},\ \sigma^{(0)e}_{\theta} = p + \frac{B}{\rho^2},\ \tau^{(0)e}_{\rho\theta} = 0. \tag{23}$$

Из условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе будем иметь:

$$\sigma^{(0)p}_{\rho_4}\Big|_{\rho=1} = \sigma^{(0)e}_{\rho}\Big|_{\rho=1},\ \ \sigma^{(0)p}_{\theta_4}\Big|_{\rho=1} = \sigma^{(0)e}_{\theta}\Big|_{\rho=1}. \tag{24}$$

Из (23), (24) имеем

$$B = \chi_2,\ p = 2\chi_1 \ln \frac{\gamma}{\beta} - 2\chi_2 \ln \gamma + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + \chi_2. \tag{25}$$

Учитывая, что $\alpha = R\big/r^{(0)}_s$, $\beta = R_1\big/r^{(0)}_s$ и $\gamma = R_2\big/r^{(0)}_s$ из (**??**) получим

$$r^{(0)}_s = \exp\left(\ln R_2 + \frac{p}{2\chi_2} - \frac{\chi_1}{\chi_2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{\chi_2} \ln \frac{R_1}{R} - \frac{1}{2}\right). \tag{26}$$

Из (23), (25) имеем

$$\sigma^{(0)e}_{\rho} = p - \frac{\chi_3}{\rho^2},\ \sigma^{(0)e}_{\theta} = p + \frac{\chi_3}{\rho^2}. \tag{27}$$

Уравнение окружности (1) в первом приближении имеет вид

$$\rho = -a_1 \cos\theta - b_1 \sin\theta + R_1. \tag{28}$$

Контур кругового отверстия фиксирован, поэтому в зоне 1 величины $\sigma'^{p}_{ij_1} = 0$.

Граничные условия на контуре L_1 (рис. 1) запишутся в виде [1]

$$\begin{aligned}\left(\sigma'^{p}_{\rho_1} + \tfrac{d\sigma^{(0)p}_{\rho_1}}{d\rho}\rho'_{L_1}\right)\Bigg|_{\rho=\beta} &= \left(\sigma'^{p}_{\rho_2} + \tfrac{d\sigma^{(0)p}_{\rho_2}}{d\rho}\rho'_{L_1}\right)\Bigg|_{\rho=\beta},\\ \left(\tau'^{p}_{\rho\theta_1} - \left(\sigma^{(0)p}_{\theta_1} - \sigma^{(0)p}_{\rho_1}\right)\tfrac{\dot{\rho}'_{L_1}}{\beta}\right)\Bigg|_{\rho=\beta} &= \left(\tau'^{p}_{\rho\theta_2} - \left(\sigma^{(0)p}_{\theta_2} - \sigma^{(0)p}_{\rho_2}\right)\tfrac{\dot{\rho}'_{L_1}}{\beta}\right)\Bigg|_{\rho=\beta},\end{aligned} \tag{29}$$

где точка наверху означает дифференцирование по θ.

Из (29) следует

$$\begin{aligned}\sigma'^{p}_{\rho_2}\Big|_{\rho=\beta} &= \tfrac{2}{\beta}\left(1-\chi_1\right)\left(-a_1\cos\theta - b_1\sin\theta\right),\\ \tau'^{p}_{\rho\theta_2}\Big|_{\rho=\beta} &= -\tfrac{2}{\beta}\left(1-\chi_1\right)\left(a_1\sin\theta - b_1\cos\theta\right).\end{aligned} \tag{30}$$

Согласно [1], из (30) получаем

$$\begin{gathered}
\left.\sigma'^{p}_{\rho_2}\right|_{\rho=\beta} = \frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right)\left(-a_1\cos\theta - b_1\sin\theta\right), \\
\sigma'^{p}_{\rho_2} = \sigma'^{p}_{\theta_2}, \\
\left.\tau'^{p}_{\rho\theta_2}\right|_{\rho=\beta} = -\frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right)\left(a_1\sin\theta - b_1\cos\theta\right).
\end{gathered} \tag{31}$$

Уравнение окружности (2) в первом приближении имеет вид

$$\rho = -a_2\cos\theta - b_2\sin\theta + R_2. \tag{32}$$

Граничные условия на контуре L_2 запишутся в виде [1]

$$\begin{gathered}
\left.\left(\sigma'^{p}_{\rho_2} + \frac{d\sigma^{(0)p}_{\rho_2}}{d\rho}\rho'_{L_2}\right)\right|_{\rho=\gamma} = \left.\left(\sigma'^{p}_{\rho_3} + \frac{d\sigma^{(0)p}_{\rho_3}}{d\rho}\rho'_{L_2}\right)\right|_{\rho=\gamma}, \\
\left.\left(\tau'^{p}_{\rho\theta_2} - \left(\sigma^{(0)p}_{\theta_2} - \sigma^{(0)p}_{\rho_2}\right)\frac{\dot{\rho}'_{L_2}}{\gamma}\right)\right|_{\rho=\gamma} = \left.\left(\tau'^{p}_{\rho\theta_3} - \left(\sigma^{(0)p}_{\theta_3} - \sigma^{(0)p}_{\rho_3}\right)\frac{\dot{\rho}'_{L_2}}{\gamma}\right)\right|_{\rho=\gamma}.
\end{gathered} \tag{33}$$

Согласно [1], из (33) получаем

$$\begin{aligned}
\sigma'^{p}_{\rho_3} = &\left[-a_1\frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right) - a_2\frac{2}{\rho}\left(\chi_1-\chi_2\right)\right]\cos\theta + \\
&+\left[-b_1\frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right) - b_2\frac{2}{\rho}\left(\chi_1-\chi_2\right)\right]\sin\theta, \\
\sigma'^{p}_{\rho_3} = &\ \sigma'^{p}_{\theta_3}, \\
\tau'^{p}_{\rho\theta_3} = &\left[-a_1\frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right) - a_2\frac{2}{\rho}\left(\chi_1-\chi_2\right)\right]\sin\theta + \\
&+\left[b_1\frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right) + b_2\frac{2}{\rho}\left(\chi_1-\chi_2\right)\right]\cos\theta,
\end{aligned} \tag{34}$$

Уравнение окружности (3) в первом приближении имеет вид

$$\rho = -a_3\cos\theta - b_3\sin\theta + R_3. \tag{35}$$

Граничные условия на контуре L_3 запишутся в виде [1]

$$\begin{gathered}
\left.\left(\sigma'^{p}_{\rho_3} + \frac{d\sigma^{(0)p}_{\rho_3}}{d\rho}\rho'_{L_3}\right)\right|_{\rho=\varepsilon} = \left.\left(\sigma'^{p}_{\rho_4} + \frac{d\sigma^{(0)p}_{\rho_4}}{d\rho}\rho'_{L_3}\right)\right|_{\rho=\varepsilon}, \\
\left.\left(\tau'^{p}_{\rho\theta_3} - \left(\sigma^{(0)p}_{\theta_3} - \sigma^{(0)p}_{\rho_3}\right)\frac{\dot{\rho}'_{L_3}}{\varepsilon}\right)\right|_{\rho=\varepsilon} = \left.\left(\tau'^{p}_{\rho\theta_4} - \left(\sigma^{(0)p}_{\theta_4} - \sigma^{(0)p}_{\rho_4}\right)\frac{\dot{\rho}'_{L_3}}{\varepsilon}\right)\right|_{\rho=\varepsilon}.
\end{gathered} \tag{36}$$

Согласно [1], из (36) получаем

$$\begin{aligned}
\sigma'^{p}_{\rho_4} = &\left[-a_1\frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right) - a_2\frac{2}{\rho}\left(\chi_1-\chi_2\right) - a_3\frac{2}{\rho}\left(\chi_2-\chi_3\right)\right]\cos\theta + \\
&+\left[-b_1\frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right) - b_2\frac{2}{\rho}\left(\chi_1-\chi_2\right) - b_3\frac{2}{\rho}\left(\chi_2-\chi_3\right)\right]\sin\theta, \\
\sigma'^{p}_{\rho_4} = &\ \sigma'^{p}_{\theta_4}, \\
\tau'^{p}_{\rho\theta_4} = &\left[-a_1\frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right) - a_2\frac{2}{\rho}\left(\chi_1-\chi_2\right) - a_3\frac{2}{\rho}\left(\chi_2-\chi_3\right)\right]\sin\theta + \\
&+\left[b_1\frac{2}{\rho}\left(1-\chi_1\right) + b_2\frac{2}{\rho}\left(\chi_1-\chi_2\right) + b_3\frac{2}{\rho}\left(\chi_2-\chi_3\right)\right]\cos\theta,
\end{aligned} \tag{37}$$

Решение в упругой области будем искать в виде [1]

$$
\begin{aligned}
\sigma'^{e}_{\rho} &= \tfrac{a_1''}{\rho^3}\cos\theta + \tfrac{b_1''}{\rho^3}\sin\theta + \left(1 - \tfrac{4}{\rho^2} + \tfrac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta,\\
\sigma'^{e}_{\theta} &= -\tfrac{a_1''}{\rho^3}\cos\theta - \tfrac{b_1''}{\rho^3}\sin\theta + \left(1 + \tfrac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta,\\
\tau'^{e}_{\rho\theta} &= \tfrac{a_1''}{\rho^3}\sin\theta + \tfrac{b_1''}{\rho^3}\cos\theta + \left(1 + \tfrac{2}{\rho^2} - \tfrac{3}{\rho^4}\right) d_3 \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{38}
$$

Условия сопряжения напряжений в пластической и упругой областях при $\rho = 1$ имеют вид

$$
\sigma'^{p}_{\rho_4}\Big|_{\rho=1} = \sigma'^{e}_{\rho}\Big|_{\rho=1}, \;\; \tau'^{p}_{\rho\theta_4}\Big|_{\rho=1} = \tau'^{e}_{\rho\theta}\Big|_{\rho=1}. \tag{39}
$$

Из (37)–(39) имеем

$$
\begin{aligned}
\sigma'^{e}_{\rho} &= \tfrac{2[-a_1(1-\chi_1)-a_2(\chi_1-\chi_2)-a_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3}\cos\theta +\\
&\quad + \tfrac{2[-b_1(1-\chi_1)-b_2(\chi_1-\chi_2)-b_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3}\sin\theta + \left(1 - \tfrac{4}{\rho^2} + \tfrac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta,\\
\sigma'^{e}_{\theta} &= -\tfrac{2[-a_1(1-\chi_1)-a_2(\chi_1-\chi_2)-a_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3}\cos\theta -\\
&\quad - \tfrac{2[-b_1(1-\chi_1)-b_2(\chi_1-\chi_2)-b_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3}\sin\theta + \left(1 + \tfrac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta,\\
\tau'^{e}_{\rho\theta} &= \tfrac{2[-a_1(1-\chi_1)-a_2(\chi_1-\chi_2)-a_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3}\sin\theta +\\
&\quad + \tfrac{2[-b_1(1-\chi_1)-b_2(\chi_1-\chi_2)-b_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3}\cos\theta + \left(1 + \tfrac{2}{\rho^2} - \tfrac{3}{\rho^4}\right) d_3 \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{40}
$$

Величину ρ' определим из условия сопряжения

$$
\left(\sigma'^{p}_{\theta_4} + \frac{d\sigma^{(0)p}_{\theta_4}}{d\rho}\rho'\right)\Bigg|_{\rho=1} = \left(\sigma'^{e}_{\theta} + \frac{d\sigma^{(0)e}_{\theta}}{d\rho}\rho'\right)\Bigg|_{\rho=1}. \tag{41}
$$

Из (18), (25), (37), (40), (41) следует

$$
\begin{aligned}
\rho' &= \tfrac{[a_1(1-\chi_1)+a_2(\chi_1-\chi_2)+a_3(\chi_2-\chi_3)]\cos\theta}{\chi_3} +\\
&\quad + \tfrac{[b_1(1-\chi_1)+b_2(\chi_1-\chi_2)+b_3(\chi_2-\chi_3)]\sin\theta + d_1\cos 2\theta}{\chi_3}.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Таким образом, уравнение упругопластической границы имеет вид

$$
\begin{aligned}
\rho &= 1 + \delta\left(\tfrac{[a_1(1-\chi_1)+a_2(\chi_1-\chi_2)+a_3(\chi_2-\chi_3)]\cos\theta}{\chi_3} +\right.\\
&\quad \left. + \tfrac{[b_1(1-\chi_1)+b_2(\chi_1-\chi_2)+b_3(\chi_2-\chi_3)]\sin\theta + d_1\cos 2\theta}{\chi_3}\right).
\end{aligned} \tag{43}
$$

В случае равномерного растяжения пластины в (43) следует положить $d_1 = 0$. В случае отсутствия эксцентриситета у первой окружности – положить $a_1 = 0,\ b_1 = 0$. В случае отсутствия эксцентриситета у второй окружности – положить $a_2 = 0,\ b_2 = 0$. В случае отсутствия эксцентриситета у третьей окружности – положить $a_3 = 0,\ b_3 = 0$. При $d_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$ имеет место включение, ограниченное двумя окружностями, одно из которых имеет эксцентриситет. При $a_1 = b_1 = 1,\ d_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$ из (43) следует

$$
\rho = 1 + \delta\tfrac{(1-\chi_1)\cos\theta + (1-\chi_1)\sin\theta}{\chi_3}.
$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Ивлев Д. Д ., Ершов Л. В. – М. : Наука, 1978. – 205 с.

[2] *Ольшак, В.* Теория пластичности неоднородных сред / Ольшак В., Рыхлевский Я. – М. : Мир, 1964. – 56 с.

[3] *Роштова, А. Н.* О предельных статически определимых условиях отрыва для сжимаемого анизотропного материала / А. Н. Роштова // Вестник Самарского государственного университета. – 2007. – № 6 (56). – С. 5-12.

[4] *Тихонов, С. В.* Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из неоднородного материала под действием внутреннего давления / С. В. Тихонов // Вестник Самарского государственного университета, 2007. – № 6 (56). – С. 13-21.

[5] *Целистова, Е. А.* Пространственное течение идеальнопластического слоя в случае неоднородных свойств материала / Е. А. Целистова // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. –1999. – № 7. – С. 45-47.

[6] *Spenser, A. J. M.* Perturbation methods in plasticity. 1 : Plane strain of nonhomogeneous plastic solids / A. J. M. Spenser // J. Mech. and Phys. Solids. – 1961. – № 4.

P. N. KUZNETSOV

ELASTOPLASTIC CONDITION OF PLAIN WITH APERTURES AND ECCENTRIC CIRCULAR NON-UNIFORM BODIES WITH BIAXIAL STRAIN

Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva

Abstract. In the paper elastoplastic condition of plain with apertures and eccentric circular non-uniform bodies with biaxial strain is investigated. The flat deformation is observed. The elastoplastic limit, influence of elliptical non-uniform body on strained condition of a plain is investigated.

Keywords: plane deformation, stress tensor, plasticity, elasticity, elastoplastic limit, non-uniform body.

Кузнецов Павел Николаевич

аспирант 2-го года обучения кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева.

`e-mail:` kuznetsov_pn@mail.ru

Kuznetsov Pavel Nikolaevich

post-graduate of the second year of dept. of mathematic analysis, Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva, Cheboxary, st. Karla Marksa, 38, 428000

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 142–149

В. М. Мирсалимов, Р. У. Оруджева

ТОРМОЖЕНИЕ КОГЕЗИОННОЙ ТРЕЩИНЫ ЛОКАЛЬНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ТОЛЩИНЫ ПЛАСТИНЫ

Азербайджанский технический университет,

Гянджинский филиал Азербайджанского учительского института

Аннотация. Исследуется плоская контактная задача о частичном закрытии берегов когезионной трещины с помощью локального изменения толщины пластины на пути ее роста.

Ключевые слова: когезионная трещина, переменность толщины пластины, усилия в связях, зона контактная, напряжения контактные.

УДК: 539.374

Пусть толщина пластинки постоянна, за исключением некоторой области. Характерный линейный размер этой области S считаем малым по сравнению с длиной трещины. Трещина расположена у области S. В области S толщина пластины представляет собой некоторую функцию координат. Как известно, такие локальные изменения в толщине пластины нетрудно выполнить технологически, как некоторые выточки (выдавки) или, наоборот, наплавления (утолщения) материала. Цель таких выточек или наплавлений в задержке или торможения развития сквозной трещины. Пусть пластина изготовлена из однородного упругого материала и содержит когезионную трещину с концевой зоной. Полагаем наличие областей, в которых действуют силы сцепления материала, непрерывно распределенные в концевой области трещины.

При некоторых локальных изменениях толщины (формах выточек) и соотношениях геометрических параметров уменьшается [4] деформация растягиваемой пластины в направлении перпендикулярном трещине, и в связи с этим снижается коэффициент интенсивности напряжений в кончиках трещины. Следует ожидать, что при некотором соотношении геометрических параметров пластины с локальными изменениями толщины на пути роста трещины, будут возникать зоны сжимающих напряжений. Для торможения развития трещины вблизи ее концов создают локальные изменения в толщине пластины, как некоторые выточки (выдавки).

В случае, когда характерный линейный размер области S считается малым по сравнению с длиной когезионной трещины или с каким-либо другим характерным линейным размером L пластинки в плане, возможно эффективное асимптотическое решение этой задачи, основанное на представлении о тонкой структуре трещины [7]. Задачу о тонкой структуре конца трещины (т.е. о распределении напряжений и

Поступила 18.04.2008

деформаций на расстояниях r от конца трещины, удовлетворяющих условию $L >> r >> \rho$) можно ставить следующим образом. Здесь ρ – радиус кривизны конца трещины.

Рассмотрим окрестность конца когезионной трещины, которая мала по сравнению с характерным линейным размером в плане пластины, но больше сравнительно с характерным линейным размером области S. Тогда трещина на плоскости xy представится полубесконечным размером вдоль $y = 0$, $-\infty < x < 0$. При этом в части разреза длиной d (концевая зона), примыкающая к ее вершине, берега трещины будут взаимодействовать. Взаимодействие берегов когезионной трещины в концевой области моделируется путем введения между берегами трещины связей (сил сцепления), имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеры концевых областей, в которых осуществляется взаимодействие берегов трещины, зависят от вида материала.

На бесконечности реализуется напряженное поле, характерное для тонкой структуры конца трещины. Это поле считается заданным и имеет [7] вид

$$\text{при} \quad z \to \infty \quad \Phi(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}, \quad \Omega(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}, \tag{1}$$

где $z = x + iy = re^{i\theta}$; r, θ – полярные координаты; $i = \sqrt{-1}$; $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ комплексные потенциалы Н. И. Мусхелишвили [5].

В рассматриваемой задаче параметрами нагружения являются коэффициенты интенсивности напряжений K_I, K_{II}, представляющие собой некоторые функции формы пластины и граничных условий.

Под действием внешней нагрузки и влияния локального изменения толщины вблизи конца трещины, в зоне сжимающих напряжений берега трещины на некотором участке $y = 0$, $-\lambda \leq x \leq 0$, войдут в контакт, что будет способствовать к возникновению контактных напряжений на данном участке. Рассмотрим случай, когда $\lambda < d$, т.е. контактная область меньше концевой зоны когезионной трещины. Параметр λ, характеризующий границу области контакта между берегами трещины должен быть определен в процессе решения задачи.

Рассматриваемая задача состоит в определении контактных напряжений на участке $y = 0$, $-\lambda \leq x \leq 0$, усилий в связях на участке $y = 0$, $-d \leq x \leq -\lambda$, напряженно-деформированного состояния пластины вне трещины. Считается, что пластина находится в обобщенном плоско-напряженном состоянии и декартовы координаты x, y в срединной плоскости пластины являются плоскостью симметрии. Учитывая переменность толщины в области S, запишем общие уравнения статического деформирования пластины переменной толщины.

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Закон Гука

$$\begin{gathered} N_x = \tfrac{2Eh}{1-v^2}\left(\tfrac{\partial u}{\partial x} + v\tfrac{\partial v}{\partial y}\right), \quad N_y = \tfrac{2Eh}{1-v^2}\left(\tfrac{\partial v}{\partial y} + v\tfrac{\partial u}{\partial x}\right), \\ N_{xy} = \tfrac{Eh}{1+v}\left(\tfrac{\partial u}{\partial y} + \tfrac{\partial v}{\partial x}\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь N_x, N_y, N_{xy} – нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины; u, υ – компоненты вектора перемещений; E – модуль упругости; υ – коэффициент Пуассона материала пластины.

Функция толщины $h(x,y)$ может быть представлена в виде

$$h(x,y) = h_0\left[1+\varepsilon\bar{h}(x,y)\right], \tag{4}$$

где $\bar{h}(x,y)$ – некоторая известная безразмерная непрерывная функция; $\varepsilon = (h_2-h_1)/(h_1+h_2)$ – малый параметр; h_1 и h_2 – соответственно, наименьшее и наибольшее значение толщины пластины в области S.

Решение задачи ищем методом малого параметра

$$\begin{gathered} N_x = N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^{(1)} + \ldots; \quad N_y = N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^{(1)} + \ldots; \quad N_{xy} = N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{(1)} + \ldots \\ u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots; \quad \upsilon = \upsilon_0 + \varepsilon \upsilon_1 + \ldots. \end{gathered} \tag{5}$$

Используя процедуру метода возмущений, получим последовательность задач. В полученных уравнениях уравнения нулевого приближения (невозмущенного состояния) совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого и второго приближений совпадают с теми же уравнениями, но с объемной силой, определяемой из решения предыдущих приближений.

Граничные условия задачи имеют вид:
для нулевого приближения

$$\begin{aligned} &N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} = 0 && \text{при} \quad y=0, \quad -\infty < x < -d, \\ &N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} = q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} && \text{при} \quad y=0, \quad -d \le x \le 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $q_y^{(0)}$ и $q_{xy}^{(0)}$ – нормальные и касательные усилия в связях для нулевого приближения, соответственно.
для первого приближения

$$\begin{aligned} &N_y^* - iN_{xy}^* = 0, && \text{при} \quad y=0, \quad -\infty < x < -d, \\ &N_y^* - iN_{xy}^* = q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)}, && \text{при} \quad y=0, \quad -d \le x < -\lambda, \\ &N_y^* - iN_{xy}^* = N_y^+ - iN_{xy}^+, && \text{при} \quad y=0, \quad -\lambda \le x \le 0. \end{aligned} \tag{7}$$

При выводе уравнений и граничных условий первого приближения были введены следующие обозначения

$$N_x^* = N_x^{(1)} - \bar{h}(x,y)N_x^{(0)}; \quad N_y^* = N_y^{(1)} - \bar{h}(x,y)N_y^{(0)}; \quad N_{xy}^* = N_{xy}^{(1)} - \bar{h}(x,y)N_{xy}^{(0)}.$$

Здесь N_y^+ и N_{xy}^+ – искомые контактные усилия, подлежащие определению. Величины усилий в связях $q_y^{(0)}$, $q_{xy}^{(0)}$ и $q_y^{(1)}$, $q_{xy}^{(1)}$ заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Основные соотношения задачи для невозмущенного напряженного состояния должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытие берегов трещины и усилия в связях. Это уравнение, без потери общности, можно представить в виде [1, 2].

$$\left(\upsilon_0^+ - \upsilon_0^-\right) - i\left(u_0^+ - u_0^-\right) = C\left(x,\sigma^0\right)\left[q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}\right], \tag{8}$$

где $\left(\upsilon_0^+ - \upsilon_0^-\right)$ и $\left(u_0^+ - u_0^-\right)$ – нормальная и касательная составляющая раскрытия берегов трещины в невозмущенном состоянии, соответственно. $C\left(x, \sigma^0\right)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей;

$$\sigma^0 = \sqrt{\left[q_y^{(0)}\right]^2 + \left[q_{xy}^{(0)}\right]^2} \text{ – модуль вектора усилий в связях.}$$

Аналогично, для первого приближения необходимо добавить следующие соотношения

$$\left(\upsilon_1^+ - \upsilon_1^-\right) - i\left(u_1^+ - u_1^-\right) = C\left(x, \sigma^1\right)\left[q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)}\right], \quad \left(-d \le x < -\lambda\right), \tag{9}$$

$$\left(\upsilon_1^+ - \upsilon_1^-\right) - i\left(u_1^+ - u_1^-\right) = 0, \quad \left(-\lambda \le x \le 0\right), \tag{10}$$

где $\sigma^1 = \sqrt{\left[q_y^{(1)}\right]^2 + \left[q_{xy}^{(1)}\right]^2}$.

Напряженно-деформированное состояние в бесконечной пластине в условиях плоской задачи с разрезом вдоль оси абсцисс описывается двумя аналитическими функциями $\Phi\left(z\right)$ и $\Omega\left(z\right)$ [5]. Для определения комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ для нулевого приближения имеем задачу линейного сопряжения [5]

$$\begin{aligned} &[\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^+ + [\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^- = 2f_0(x), \\ &[\Phi_0(x) - \Omega_0(x)]^+ - [\Phi_0(x) - \Omega_0(x)]^- = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $-\infty < x < 0$, x – аффикс точек берегов разреза с концевой зоной,

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{на свободных берегах трещины,} \\ q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} & \text{на берегах концевой зоны трещины.} \end{cases}$$

Для комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ находим

$$\Phi_0(z) = \Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i\sqrt{z}} \int\limits_{-d}^{0} \frac{\sqrt{t} f_0(t) dt}{t - z} + \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}. \tag{12}$$

Для перемещений нулевого приближения найдем

$$\left(u_0^+ - u_0^-\right) - i\left(\upsilon_0^+ - \upsilon_0^-\right) = \frac{1 + k_0}{2\mu}\left[-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-d}^{0} f_0\left(t\right) \ln\frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{2\left(K_I - iK_{II}\right)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x}\right], \tag{13}$$

где $k_0 = (3 - v)/(1 + v)$.

Используя соотношение (8), получим комплексное интегральное уравнение относительно неизвестных функций $q_y^{(0)}(x)$ и $q_{xy}^{(0)}(x)$:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1+k_0}{2\mu}\left[-\tfrac{1}{\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\left(q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}\right)\ln\tfrac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}} dt + \tfrac{2(K_I - iK_{II})}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x}\right] = \\ &\qquad = C\left(x, \sigma^0\right)\left[q_{xy}^{(0)}\left(x\right) + iq_y^{(0)}\left(x\right)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Отделяя в (14) действительные и мнимые части, получим два действительных интегральных уравнений относительно $q_y^{(0)}(x)$ и $q_{xy}^{(0)}(x)$, соответственно. Полученные нелинейные интегральные уравнения могут быть решены численно. Для их решения использовали коллокационную схему. В случае, когда закон деформирования связей является нелинейным, для определения $q_y^{(0)}(x)$ и $q_{xy}^{(0)}(x)$ в связях использовали итерационную схему, подобную методу упругих решений [3]. При рассмотрении линейно-упругих связей система интегральных уравнений оказывается линейной, и после использования коллокационной численной схемы получаем линейную алгебраическую систему относительно приближенных значений $q_y^{(0)}(x_m)$ и $q_{xy}^{(0)}(x_m)$ $\quad (m = 1,\ 2,\ ...,\ M)$в точках коллокации (узловых точках). Для решения линейной системы использовали метод Гаусса с выбором главного элемента.

Перейдем к решению задачи в первом приближении.

При наличии объемных сил решение ищем в виде

$$N_x^* = N_{x_0}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}; \quad N_y^* = N_{y_0}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}; \quad N_{xy}^* = N_{xy_0}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)}, \tag{15}$$

где $N_{x_0}^{(1)}$, $N_{y_0}^{(1)}$, $N_{xy_0}^{(1)}$ – любое частное решение при наличии объемной силы $F = X_1 + iY_1$; $N_{x_1}^{(1)}$, $N_{y_1}^{(1)}$, $N_{xy_1}^{(1)}$ – общее решение при отсутствии объемной силы.

Для построения решения при объемных силах используется представление А.Г. Угодчикова [6]

$$\begin{aligned} &\tfrac{N_x^{(*)}+N_y^{(*)}}{2h_0} = 4Re\left[\Phi_1^{(1)}(z) - \tfrac{1}{2(1+k_0)}\tfrac{\partial F_1}{\partial z}\right], \\ &\tfrac{N_y^{(*)}-N_x^{(*)}+2iN_{xy}^{(*)}}{2h_0} = 2\left[\bar{z}\Phi_1^{(1)'}(z) + \Psi_1^{(1)}(z) + \tfrac{1}{2(1+k_0)}\tfrac{\partial}{\partial z}\left(k_0\overline{F_1} - \overline{Q_1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

В эти соотношения входят две аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ комплексной переменной $z = x+iy$ и две функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$, представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \tfrac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F}, \\ F = \mathrm{X}_1 + i\mathrm{Y}_1 = \tfrac{\partial \bar{h}}{\partial x}\left(N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}\right) + i\tfrac{\partial \bar{h}}{\partial y}\left(N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}\right). \end{gathered} \tag{17}$$

Для определения функций $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ имеем задачу линейного сопряжения

$$\begin{aligned} &[\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^+ + [\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^- = 2p_1(x), \\ &[\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^+ - [\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^- = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где $p_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } -\infty < x < -d, \\ f(x) + q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)} & \text{при } y = 0 \quad -d \le x \le -\lambda, \\ f(x) + N_y^{(1)} - iN_{xy}^{(1)} & \text{при } y = 0 \quad -\lambda < x \le 0. \end{cases}$

$$f(x) = \frac{1}{1+k_0}\mathrm{Re}\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+k_0)}\left(k_0\frac{\partial \overline{F_1}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{Q_1}}{\partial z}\right) \quad \text{при} \quad \mathrm{y} = 0. \tag{19}$$

Функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$ можно формально записать в виде

$$F_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} F(z, \bar{z})d\bar{z}; \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^z \overline{F(z, \bar{z})}dz. \tag{20}$$

Для комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ находим

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i\sqrt{z}} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{t}p_1(t)dt}{t-z}. \tag{21}$$

Используя полученное решение и формулу [5]

$$2\mu\left(u_1 + i\upsilon_1\right) = k_0\varphi_1(z) - \omega(\bar{z}) - (z-\bar{z})\,\overline{\Phi_1(z)}$$

находим

$$\left(u_1^+ - u_1^-\right) - i\left(\upsilon_1^+ - \upsilon_1^-\right) = \frac{1+k_0}{2\mu}\left[-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0} p_1\left(t\right)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}}dt\right]. \tag{22}$$

Используя уравнения (9), (10), получим систему комплексных сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных усилий в связях $q_y^{(1)}(x)$, $q_{xy}^{(1)}(x)$ и контактных усилий $N_y^+(x)$ и $N_{xy}^+(x)$

$$\begin{gathered}\frac{1+k_0}{2\mu}\left[-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0}\left(f(t)+q_y^{(1)}-iq_{xy}^{(1)}+N_y^+-iN_{xy}^+\right)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}}dt\right]=\\ =C\left(x,\sigma^1\right)\left[q_{xy}^{(1)}\left(x\right)+iq_y^{(1)}\left(x\right)\right],\quad\left(-d\le x\le-\lambda\right),\end{gathered} \tag{23}$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0}\left(f(t)+q_y^{(1)}-iq_{xy}^{(1)}+N_y^+-iN_{xy}^+\right)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}}dt=0,\quad\left(-\lambda<x<0\right). \tag{24}$$

Для замкнутости системы интегральных уравнений не хватает одного комплексного уравнения, определяющего размеры контактной зоны. Условием, служащим для определения размера контактной зоны является условие конечности напряжений в окрестности вершины трещины. Записывая условие конечности напряжений, находим недостающее комплексное уравнение

$$\begin{aligned}&K_I^{(0)}-iK_{II}^{(0)}+\varepsilon\left(K_I^{(1)}-iK_{II}^{(1)}\right)=0,\\&K_I^{(0)}=K_I-\frac{\sqrt{2}}{\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{q_y^{(0)}dx}{\sqrt{x}},\quad K_{II}^{(0)}=K_{II}-\frac{\sqrt{2}}{\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{q_{xy}^{(0)}dx}{\sqrt{x}},\\&K_I^{(1)}=\bar{h}(0,0)K_I^{(0)}+K_I^*,\quad K_{II}^{(1)}=\bar{h}(0,0)K_{II}^{(0)}+K_{II}^*,\\&K_I^*=-\frac{\sqrt{2}}{\pi i}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt{x}}+\int\limits_{-d}^{-\lambda}\frac{q_y^{(1)}(x)\,dx}{\sqrt{x}}+\int\limits_{-\lambda}^{0}\frac{N_y^+(x)\,dx}{\sqrt{x}}\right],\\&K_{II}^*=-\frac{\sqrt{2}}{\pi i}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_2(x)\,dx}{\sqrt{x}}+\int\limits_{-d}^{-\lambda}\frac{q_{xy}^{(1)}(x)\,dx}{\sqrt{x}}+\int\limits_{-\lambda}^{0}\frac{N_{xy}^+(x)\,dx}{\sqrt{x}}\right],\\&f_1(x)=Ref(x),\quad f_2(x)=Imf(x).\end{aligned} \tag{25}$$

Отделяя в (23), (24) действительные и мнимые части, получим четыре действительных интегральных уравнения относительно $q_y^{(1)}$, $q_{xy}^{(1)}$, N_y^+ и N_{xy}^+, соответственно. Полученные интегральные уравнения решаются численно. Для их решения использовали коллокационную схему, аналогично нулевому приближению. Полученные формулы дают возможность рассчитать влияние имеющихся по толщине пластинки выточки (утолщения) на рост сквозной когезионной трещины и найти пути торможения ее роста.

Для решения интегральных уравнений, определяющих распределение контактных напряжений, усилий в связях и размера контактной зоны необходимо задать зоны изменения толщины в пластине в окрестности конца трещины (область S). Рассмотрим наиболее распространенные на практике формы выточек и утолщений.

Пусть выточка имеет форму усеченного параболоида вращения с осью, проходящей через конец сквозной трещины и перпендикулярно плоскости xy.

Верхняя поверхность описывается уравнением

$$h = \begin{cases} h_1 + \varepsilon \frac{x^2+y^2}{R_0} \text{ при } & x^2+y^2 \leq R_0^2, \\ h_0 \quad \text{при} & x^2+y^2 > R_0^2. \end{cases}$$

Здесь ε – малый параметр, определяется так

$$\varepsilon = (h_0 - h_1)/R_0.$$

Если $h_1 > h_0$, получим пластину с параболоидным утолщением.

Используя изложенную методику, для рассматриваемого примера, находим

$$\bar{h} = \begin{cases} -\frac{R_0}{h_0} + \frac{x^2+y^2}{h_0 R_0} \text{ при } & x^2+y^2 \leq R_0^2, \\ 0 \quad \text{при} & x^2+y^2 > R_0^2, \end{cases} .$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad x^2+y^2 > R_0^2,$$

при $x^2+y^2 \leq R_0^2$; $\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{2r\cos\theta}{R_0 h_0}$; $\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{2r\sin\theta}{R_0 h_0}$.

Находим объемные силы для области S, а затем функции $F_1(z,\bar{z})$ и $Q_1(z,\bar{z})$. По известным функциям $F_1(z,\bar{z})$ и $Q_1(z,\bar{z})$ согласно формуле (19) определяется функция $f(x)$. После нахождения функции $f(x)$, переходим к решению системы интегральных уравнений.

Ниже приводятся значения параметра $\lambda_* = \lambda/d$, характеризующего зону контакта берегов трещины в зависимости от относительной толщины выточки (от отношения глубины выточки к толщине пластины) h_1/h_0.

h_1/h_0	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1
λ/d	0	0,129	0,173	0,196	0,234	0,281	0,325

Анализируя полученные результаты в этом частном примере, можно сделать следующий вывод. Наличие малых параболоидных выточек на пути сквозных трещин можно применять для торможения эксплуатационных трещин.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гаджиев, В. Д.* Предельно-равновесное состояние детали типа втулки при наличии трещин со связями между берегами / Гаджиев В. Д ., Мирсалимов В. М.// Оптимальное проектирование механических систем. – Баку : Элм. 1999. – С. 50-63.

[2] *Гольдштейн, Р. В* . Перельмутер М. Н. Рост трещин по границе соединения материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского ; под ред. Д. М. Климова. – М. : Физматлит, 2003. – С. 221-238.

[3] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

[4] *Мирсалимов, В. М.* Разрушение пластин переменной толщины / В. М. Мирсалимов // ФХММ. – 1996. – Т. 32. – № 3. – С. 46-54.

[5] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

[6] *Угодчиков, А. Г.* Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах / А. Г. Угодчиков, М. И. Длугач, А. Е. Степанов. – М. : Высш. шк., 1970. – 528 с.

V. M. Mirsalimov, R. U. Orudjaeva

BRAKING COHESIVE OF THE CRACK BY LOCAL CHANGES OF THICKNESS OF A PLATE

Azerbaijan technical university,

Gjandzhinsky branch of the Azerbaijan teacher's institute

Abstract. The plane contact problem about partial closing faces cohesive cracks by means of local change of thickness of a plate on a way of its growth is investigated.

Keywords: cohesive crack, variability of a thickness of a plate, effort in communications, a zone contact, pressure contact

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Азербайджанский технический университет AZ1129, г. Баку, ул. Н. Туси, д.14, кв. 63

e-mail: irakon63@hotmail.com

Оруджева Рена Узеир гызы

старший преподаватель кафедры "Математика и информатика" Гянджинского филиала Азербайджанского учительского института, г. Гянджа

e-mail: irakon63@hotmail.com

Mirsalimov Vagif Miraxmedovich

doctor of sciences, professor, managing chair, Azerbaijan technical university AZ1129, Bacu, st. N. Tusi, h.14, p. 63

Orudzheva Ren Uzeir gyzy

senior teacher of chair «Mathematics and computer science» Gjandzhinsky branch of the Azerbaijan teacher's institute, Gandzha

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. №1. С. 150–159

Ю. В. Немировский

ВТОРОЕ ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ОДНОРОДНЫХ И КОМПОЗИТНЫХ БАЛОК

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Аннотация. Теория предельного пластического состояния, основанная на модели предельного жестко-пластического материала оказалась очень удобным практическим инструментом для оценки несущей способности конструкций разнообразного типа и получила широкое практическое применение [1-4]. При ее использовании вне поля внимания остаются два важных вопроса, связанных с эксплуатацией конструкций в условиях достаточно развитых пластических деформаций: а) оценка предельно допустимого коэффициента надежности эксплуатации конструкций из материалов, обладающих упрочнением; б) оценка степени их остаточной повреждаемости при превышении эксплуатационными нагрузками значений амплитуд найденных классических предельных нагрузок. Эти вопросы становятся особенно важными для композитных конструкций, создаваемых из материалов с различным характером и степенью упрочнения за пределом упругости. В данной работе на примере простейших элементов – изгибаемых композитных балок, разработан подход, позволяющий получить ответы на сформулированные выше вопросы.

Ключевые слова: пластичность, балки, предельное состояние, статическая определимость, статическая неопределимость, изгибающий момент, композиты

УДК: 539.374

Рассмотрим конструкции с симметричной структурой расположения материалов относительно осей координат в поперечном сечении композитных балок (рис. 1).

Предполагая, что все материалы, составляющие композитную конструкцию одинаково сопротивляются растяжению и сжатию и отбрасывая при достаточно развитых пластических деформациях упругие части деформаций, рассмотрим модель жестко-пластического материала с диаграммой растяжения, схематически изображенной на рис. 2а.

Участок AB диаграммы деформирования соответствует упрочнению материала, BC – разупрочнению (“скрытому разрушению”), прямая AD – соответствует модели идеально-пластического материала, $\overline{\sigma}_0$ – предел текучести материала, $\overline{\sigma}_*$ – предел прочности, ε_* – предельная деформация упрочнения (“предразрушения”). В дальнейшем под первым предельным состоянием будем понимать классическое предельное состояние, соответствующее классической диаграмме AD идеально пластического тела, $\overline{\sigma} = \sigma_0$, а под вторым предельным состоянием – достижение хотя

Поступила 13.01.2009

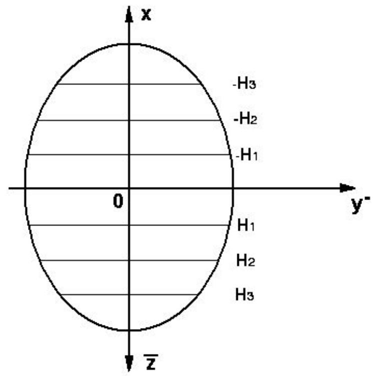


Рис. 1.

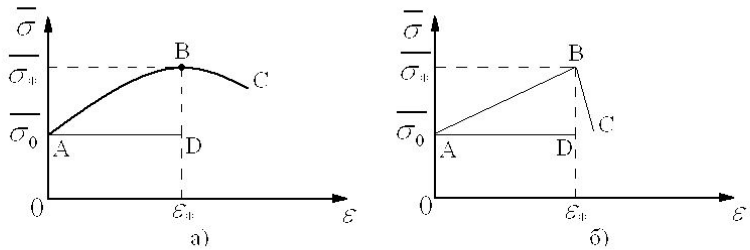


Рис. 2.

бы в одной точке состояния предразрушения – предельной деформации упрочнения ε_*. Для последующих расчетов удобно ввести для всех материалов единообразную аппроксимацию кривых упрочнения. Тогда в случае квадратичной аппроксимации участка AB связь между напряжениями и деформациями можно записать в виде

$$\begin{gathered}\overline{\sigma} = \overline{\sigma_0}\mathrm{sign}\varepsilon + \overline{E_*}\varepsilon\left(2 - \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_*}\right), \;\; 0 \le |\varepsilon| \le \varepsilon_*, \\ \overline{E_*} = \frac{\overline{\sigma_*} - \overline{\sigma_0}}{\varepsilon_*},\end{gathered} \tag{1}$$

а в случае линейной аппроксимации

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma_0}\mathrm{sign}\varepsilon + \overline{E_*}\varepsilon, \quad 0 \le |\varepsilon| \le \varepsilon_*. \tag{2}$$

При $\overline{\sigma_*} = \overline{\sigma_0}$ $(E_* = 0)$ будем иметь модель идеально-пластического тела. При $|\overline{\sigma}| < \overline{\sigma_0}$ материал остается жестким.

Для композитной слоистой балки, составленной из n материалов, изгибающий момент определяется выражением

$$\overline{M}(\overline{x}) = 2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{H_{i-1}}^{H_i} \overline{\sigma_i}\overline{b_i}(\overline{x}, \overline{z})\overline{z}d\overline{z}, \tag{3}$$

$\overline{x}$ – продольная координата, $\overline{b}_i$ – ширина i-го слоя сечения балки.

Введем далее безразмерные величины

$$\sigma_i = \frac{\overline{\sigma_i}}{\overline{\sigma_0^0}}, \quad \sigma_{0i} = \frac{\overline{\sigma_{0i}}}{\overline{\sigma_0^0}}, \quad \sigma_{*i} = \frac{\overline{\sigma_{*i}}}{\overline{\sigma_0^0}}, \quad E_{*i} = \frac{\overline{E_{*i}}}{\overline{\sigma_0^0}},$$

$$z = \frac{\overline{z}}{\overline{H_0^0}}, \quad x = \frac{\overline{x}}{l}, \quad h_i = \frac{\overline{H_i}}{\overline{H_0^0}}, \quad b_i(z,x) = \frac{\overline{b_i}(\overline{z},\overline{x})}{\overline{b_0^0}},$$

$$\omega = \frac{\overline{\omega}}{\overline{H_0^0}}, \quad \upsilon = \left(\frac{\overline{H_0^0}}{l}\right)^2 \omega, \quad \chi = \overline{H_0^0}\,\overline{\chi}, \quad \overline{\chi} = -\frac{d^2\overline{\omega}}{d\overline{x}^2},$$

где $\overline{\sigma_0^0}$, $\overline{H_0^0}$, l, $\overline{b_0^0}$ – обезразмеривающие параметры.

Тогда вследствие гипотезы Кирхгофа имеем

$$\varepsilon = z\chi \tag{4}$$

и для безразмерных напряжений в слоях будем иметь:
в случае квадратичного упрочнения

$$\sigma_i = \sigma_{0i}\mathrm{sign}\varepsilon + E_{*i}\left(2 - \frac{|z\chi|}{\varepsilon_{*i}}\right) z\chi, \quad h_{i-1} \le |z| \le h_i, \tag{5}$$

и в случае линейного упрочнения

$$\sigma_i = \sigma_{0i}\mathrm{sign}\varepsilon + E_{*i} z\chi. \tag{6}$$

Здесь

$$\chi = -\left(1+\theta^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d\theta}{dx}, \quad \theta = \frac{d\upsilon}{dx}, \tag{7}$$

θ – безразмерный угол поворота сечения. Так как на практике прогибы балок достаточно малы по сравнению с их пролетом и углы поворота также достаточно малы ($\theta << 1$), то можно принять

$$\chi = -\frac{d^2\upsilon}{dx^2}. \tag{8}$$

Следует иметь в виду, что в рамках жестко-пластической модели балка разбивается на жесткие и пластические участки. При этом пластические участки могут иметь достаточно малые размеры по сравнению с общим пролетом балки и тогда вместо (8) следует использовать общее выражение (8) или выражение

$$\chi = -\left(1 - \frac{3}{2}\theta^2\right) \frac{d^2\upsilon}{dx^2}, \ \theta = \frac{d\upsilon}{dx}. \tag{9}$$

Для последующего анализа это не принципиально и связано с большими или меньшими техническими трудностями при интегрировании уравнений для получения безразмерного прогиба $\upsilon(x)$. Поэтому во избежание громоздких выражений будем в конкретных примерах использовать выражение (8).

Для безразмерного изгибающего момента

$$M = \frac{\overline{M}}{\overline{M_0^0}} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_i b_i(x,z) z dz, \quad \left(\overline{M_0^0} = 2\overline{\sigma_0^0}\,\overline{b_0^0}\,(\overline{H_0^0})^2\right)$$

в случае линейного упрочнения материалов будем иметь выражение

$$M = M_0 \mathrm{sign}\chi + M_1\chi, \tag{10}$$

а в случае квадратичного упрочнения

$$M = M_0 \mathrm{sign}\chi + 2M_1\chi - M_2\chi,^2 \mathrm{sign}\chi, \tag{11}$$

где

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{0i} \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x,z) z dz, \quad M_1 = \sum_{i=1}^{n} E_{*i} \int\limits_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x,z) z^2 dz,$$
$$M_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_{*i}}{\varepsilon_{*i}} \int\limits_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x,z) z^3 dz. \tag{12}$$

Для однородных балок следует принять

$$E_{*i} = E_*, \;\; \varepsilon_{*i} = \varepsilon_*, \;\; b_i = b, \;\; \sigma_{0i} = \sigma_{0.}$$

При необходимости можно использовать для диаграммы растяжения более сложные чем линейные или квадратичные аппроксимации. Это приведет к непринципиальным изменениям зависимостей (10), (11), усложнит дальнейший анализ и лишит его единообразия при изменении расположения материалов в сечении.

При анализе первого предельного состояния в сечении балки, в формулах (10), (11) следует принять $E_{*i} = 0$, второе предельное состояние в сечении балки будет возникать при

$$h_k\,|\chi| = \varepsilon_{*k}, \quad \varepsilon_{*k} = \min(\varepsilon_{*1},\ \varepsilon_{*2},\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{*n}). \tag{13}$$

При этом предельный изгибающий момент в сечении будет равен (по модулю)

$$M_{*k} = M_0 + M_1\varepsilon_{*k}/h_k \tag{14}$$

при линейной аппроксимации диаграмм растяжения,

$$M_{*k} = M_0 + 2M_1\varepsilon_{*k}/h_k - M_2(\varepsilon_{*k}/h_k)^2, \tag{15}$$

– при квадратичной аппроксимации.

Из этих выражений видно, что предельное состояние в сечении композитной балки будет существенно зависеть от характера расположения материалов. При этом работоспособность всех материалов кроме одного может оказаться далеко не исчерпанной. Естественно поэтому рассмотреть вопрос о рациональном расположении материалов в сечении, при котором во втором предельном состоянии все материалы будут работать на пределе своих возможностей. В этом случае

$$|\chi| = \frac{\varepsilon_{*1}}{h_1} = \frac{\varepsilon_{*2}}{h_2} = \ldots = \frac{\varepsilon_{*n}}{h_n} \tag{16}$$

откуда следует

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{\varepsilon_{*(i+1)}}{\varepsilon_{*1}} > 1, \quad h_i = \frac{\varepsilon_{*i}}{\varepsilon_{*1}} h_1, \ (i = 1, 2, ..., n). \tag{17}$$

Неравенство (17) устанавливает правило расстановки материалов для рациональной конструкции. Подставляя выражения (16), (17) в соотношения (10)-(12) получим значение второго предельного момента M_* композитной балки в случае линейной или квадратичной аппроксимации диаграмм растяжения.

Безразмерное уравнение изгиба балок можно записать в виде:

$$M''(x) = -p\varphi(x), \quad \left(p = \frac{q_0 l^2}{M_0^0}\right), \tag{18}$$

q_0 – амплитуда распределенной нагрузки, $\varphi(x)$ – закон ее распределения; $(...)' = \frac{d}{dx}(...)$.

При решении задач о второй предельной нагрузке изгибаемых балок будем рассматривать отдельно случаи статически определимых и статически неопределимых балок.

Статически определимые балки.

Рассмотрим шарнирно-опертую балку на отрезке $0 \le x \le 1$, и примем $\varphi(x) = \sin \pi x$. Тогда интегрируя уравнение (18) при граничных условиях

$$M(0) = M(1) = 0 \tag{19}$$

получим

$$M(x) = \frac{p}{\pi^2} \sin \pi x. \tag{20}$$

Наибольшее значение $M(x)$ достигается при $x = 1/2$. Тогда первая предельная нагрузка будет равна

$$p_0 = \pi^2 M_0, \tag{21}$$

а вторая предельная нагрузка

$$p_{*k} = \pi^2 M_{*k}. \tag{22}$$

В случае рационального проекта балки вторая предельная нагрузка будет равна

$$p_* = \pi^2 M_*. \tag{23}$$

При вычислении прогибов в силу симметрии нагрузки относительно середины пролета, достаточно рассмотреть участок $0 \le x \le 1/2$. При этом на участке $0 \le x \le x_1$ балка будет жесткой ($\chi = 0$). Следовательно

$$\upsilon = C_1 x, \quad \upsilon' = C_1, \quad (0 \le x \le x_1). \tag{24}$$

Так как на границе x_1 имеем условие $M(x_1) = M_0$, то

$$\sin \pi x_1 = \frac{\pi^2 M_0}{p}. \tag{25}$$

На участке $x_1 \le x \le 1/2$ балка будет пластической и деформируется в соответствии с законом

$$M(x) = M_0 + M_1\chi. \tag{26}$$

Принимая для χ выражение (8) и учитывая выражение (20) после интегрирования при граничных условиях

$$\upsilon'\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ \ \upsilon\left(\frac{1}{2}\right) = \upsilon_0$$

на отрезке $x_1 \leq x \leq 1/2$ будем иметь

$$\begin{array}{l} \upsilon'(x) = \frac{M_0}{M_1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{p}{\pi^3 M_1}\cos\pi x, \\ \upsilon(x) = \upsilon_0 + \frac{M_0}{2M_1}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{p}{\pi^4 M_1}(\sin\pi x - 1). \end{array}$$

Пользуясь далее условиями непрерывности υ' и υ на границе $x = x_1$, получим

$$\begin{array}{l} C_1 = \frac{M_0}{M_1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{p}{\pi^3 M_1}\cos\pi x_1, \\ \upsilon_0 = C_1 x_1 - \frac{M_0}{2M_1}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{p}{\pi^4 M_1}(\sin\pi x - 1). \end{array}$$

Так как в области $x_1 \leq x \leq 1/2$ для $\chi(x)$ имеем равенство

$$\frac{p}{\pi^2}\sin\pi x = M_0 + M_1\chi,$$

то принимая $\chi(\frac{1}{2}) = \varepsilon_{*k}/h_k$ получим вторую предельную нагрузку

$$p_{*k} = \pi^2(M_0 + \frac{\varepsilon_{*k}}{h_k}M_1).$$

Если для шарнирно-опертой балки распределение нагрузки определяется законом

$$\varphi(x) = x^{\alpha},\ \ (\alpha > 0), \tag{27}$$

тогда

$$M(x) = \frac{px}{(\alpha+1)(\alpha+2)}(1 - x^{\alpha+1}). \tag{28}$$

Тогда первая предельная нагрузка определяется равенством

$$p_0 = (\alpha+2)^{\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}}M_0, \tag{29}$$

а вторая предельная нагрузка p_{*k} – равенством

$$p_{*k} = (\alpha+2)^{\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}}M_{*k}. \tag{30}$$

В этом случае при $p > p_0$ балка разбивается на три участка $0 \leq x \leq x_1$, $x_1 \leq x \leq x_2$. Первый и третий участки – жесткие, ($\chi = 0$), второй – пластический, с законом деформирования

$$M(x) = M_0 + M_1\chi, \tag{31}$$

где $M(x)$ определяется выражением (27). На границах участков должны быть выполнены условия $\upsilon(0) = \upsilon(1) = 0$, $M(x_1) = M(x_2) = M_0$, $[\upsilon']_{x_1} = [\upsilon]_{x_1} = [\upsilon']_{x_2} = \upsilon(x_2) = 0$, где $[...]_{x_j}$ – обозначает скачек соответствующей величины при $x = x_j$.

В результате в области $0 \leq x \leq x_1$ имеем

$$\upsilon'(x) = C_1,\ \ \upsilon(x) = C_1 x,$$

в области $x_1 \le x \le x_2$

$$\begin{aligned}
&\chi = -\upsilon''(x) = \tfrac{px}{(\alpha+1)(\alpha+2)M_1}(1 - x^{\alpha+1}) - \tfrac{M_0}{M_1},\\
&\upsilon'(x) = C_1 + \tfrac{M_0}{M_1}(x - x_1) + \tfrac{px}{(\alpha+1)(\alpha+2)M_1}\left[\tfrac{x^{\alpha+3}-x_1^{\alpha+3}}{\alpha+3} - \tfrac{x^2-x_1^2}{2}\right],\\
&\upsilon(x) = C_1x + \tfrac{M_0}{2M_1}(x - x_1)^2 + \tfrac{px}{(\alpha+1)(\alpha+2)M_1}\left\{\tfrac{x^{\alpha+4}-(\alpha+4)x_1^{\alpha+3}(x-x_1)}{(\alpha+3)(\alpha+4)} - \right.\\
&\left.-\tfrac{1}{6}\left[(x^3 - x_1^3) - 3x_1^2(x - x_1)\right]\right\},
\end{aligned}$$

C_1 – определяется из уравнения

$$\upsilon'(x_2)(1 - x_2) + \upsilon(x_2) = 0,$$

а x_1 и x_2 определяются из уравнений

$$\zeta^{\alpha+2} - \zeta = 1 - \frac{1}{x_1^{\alpha+1}}; \quad (\zeta = \frac{x_2}{x_1} > 1).$$

Для консольной балки с защемленным правым краем и свободным левым при распределении нагрузки по закону (27) имеем

$$M(x) = -p\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}. \tag{32}$$

Тогда первая предельная нагрузка будет равна

$$p_0 = (\alpha+1)(\alpha+2)M_0, \tag{33}$$

а вторая предельная нагрузка

$$p_{*k} = (\alpha+1)(\alpha+2)M_{*k}. \tag{34}$$

При $p_0 \le p \le p_{*k}$ в процессе деформирования балка разбивается на два участка:
$0 \le x \le x_1$ – жесткий ($\chi = 0$);
$x_1 \le x \le 1$ – пластический с законом деформирования

$$M(x) = -M_0 + M_1\chi. \tag{35}$$

В соответствии с этим, учитывая условия $[\upsilon']_{x_1} = [\upsilon]_{x_1} = 0$, $\upsilon'(1) = \upsilon(1) = 0$ при $p > p_0$ будем иметь при $0 \le x \le x_1$

$$\upsilon'(x) = C_1, \quad \upsilon(x) = C_1x + \upsilon_0$$

и при $x_1 \le x \le 1$

$$\upsilon(x) = \frac{M_0}{M_1}\left[\frac{p(x^{\alpha+4}-1)}{(\alpha+3)(\alpha+4)p_0} - \frac{(x_1^2-1)}{2} + \left(\frac{p}{(\alpha+3)p_0} + 1\right)(x_1 - 1)\right],$$

$$C_1 = \frac{M_0}{M_1}\left[\frac{p}{(\alpha+3)p_0}(x^{\alpha+3} - 1) + 1 - x_1\right],$$

$$\upsilon_0 = \frac{M_0}{M_1}\left\{\frac{p(x_1^{\alpha+4}-1)}{(\alpha+3)(\alpha+4)p_0} - \frac{(x_1^2-1)}{2} + \left(\frac{p}{(\alpha+3)p_0} + 1\right)(x_1 - 1)\right\} - C_1x_1,$$

$$x_1^{\alpha+2} = \frac{p_0}{p}.$$

Статически неопределимые балки

В качестве простейшего примера статически неопределимой конструкции рассмотрим защемленную по краям балку нагруженную равномерно распределенной нагрузкой ($\varphi(x) = 1$). В этом случае в силу симметрии удобно выбрать начало координат в середине пролета и рассмотреть решение задачи на отрезке $0 \le x \le \frac{1}{2}$. Тогда учитывая условие $M'(0) = 0$, для изгибающего момента получим выражение

$$M(x) = M(0) - \frac{px^2}{2}.$$

При определении первой предельной нагрузки p_0 используем условия $M(0) = M_0$ и $M(1/2) = -M_0$, тогда

$$p_0 = 16M_0.$$

Рассмотрим далее нагрузки $p > p_0$. В этом случае рассматриваемый пролет ($0 \le x \le \frac{1}{2}$) балки разбивается на три участка:
участок $0 \le x \le x_1$ с законом деформирования

$$M(x) = M_0 + M_1\chi;$$

участок $x_1 \le x \le x_2$ с законом деформирования

$$\chi = 0;$$

и участок $0 \le x_2 \le \frac{1}{2}$ с законом деформирования

$$M(x) = -M_0 + M_1\chi.$$

На границах участков должны выполняться условия

$$\begin{gathered} M(x_1) = M_0, \quad M(x_2) = -M_0, \\ \upsilon'(0) = \upsilon'(1/2) = \upsilon(1/2) = 0, \quad \upsilon(0) = \upsilon_0, \\ \upsilon'(x_1) = \upsilon'(x_2), \quad [\upsilon']_{x_1} = [\upsilon']_{x_2} = 0, \quad [\upsilon']_{x_1} = [\upsilon']_{x_2} = 0. \end{gathered}$$

Учитывая это и принимая для $\chi(x)$ выражение (8) после интегрирования на каждом из участков получим выражения:
на участке $0 \le x \le x_1$:

$$\begin{aligned} &\upsilon'(x) = \tfrac{px}{6M_1}(x^2 - 3x_1^2), \\ &\upsilon(x) = \upsilon_0 + \tfrac{px^2}{24M_1}(x^2 - 6x_1^2), \quad \upsilon(x_1) = \upsilon_0 - \tfrac{5px_1^4}{24M_1}, \end{aligned}$$

на участке $x_1 \le x \le x_2$:

$$\begin{aligned} &\upsilon'(x) = -\tfrac{px_1^3}{3M_1}, \\ &\upsilon(x) = \upsilon_0 + \tfrac{px_1^4}{8M_1} - \tfrac{px_1^3}{3M_1}x, \end{aligned}$$

и на участке $x_2 \le x \le \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\upsilon'(x) = \tfrac{1}{24M_1}\left[6(4M_0 + px_1^2)(1 - 2x) + p(8x^3 - 1)\right], \\ &\upsilon(x) = \tfrac{1}{384M_1}\left[p(16x^4 - 16x + 7) - 48(px_1^2 + 4M_0)(2x - 1)^2\right]. \end{aligned}$$

Из условия $[\upsilon']_{x_2} = 0$ получим уравнение для $x_1(p)$:

$$36(4M_0+px_1^2)(1-2x_2)+3p(8x_2^3-1)+48px_1^2=0,$$
$$x_2=(x_1^2+\tfrac{4M_0}{p})^{1/2},$$

а из условия $[v]_{x_2}=0$ находим $v_0(p)$:

$$v_0=\frac{1}{384M_1}\left[p(16x_2^4-16x_2+7)-48(px_1^2+4M_0)(2x_2-1)^2+16px_1^3(8x_2-3x_1)\right].$$

Предельную нагрузку p_{*k} находим из условия $M(0)=M_{*k}$ или $p_{*k}x_1^2(p_{*k})=2M_1\varepsilon_{*k}/h_k$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гвоздев, А. А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / А. А. Гвоздев. – М. : Стройиздат, 1949. – 280 с.

[2] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Ч. 1 / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат,1948. – 376 с.

[3] *Ходж, Ф. Г.* Расчет конструкций с учетом пластических деформаций / Ф. Г. Ходж. – М. : Машгиз, 1963. – 380 с.

[4] *Ивлев, Д. Д.* Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Воронеж: ВГУ, 2005. – 205 с.

U. V. Nemirovskiy

THE SECOND LIMITING CONDITION OF HOMOGENEOUS AND COMPOSIT BEAMS

Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science

Abstract. The theory of a limiting plastic condition based on model of a limiting is rigid-plastic material has appeared very convenient practical tool for an estimation of bearing ability of designs of various type and has received wide practical application [1-4]. At its use out of an attention field there are two important questions, the designs connected with operation in the conditions of enough developed plastic deformations: an estimation of maximum permissible factor of reliability of operation of designs from the materials possessing hardening; an estimation of degree of their residual damageability at excess by operational loadings of values of amplitudes of the found classical maximum loads. These questions become especially important for the composit designs created from materials with various character and degree of hardening behind a limit of elasticity. In the given work on an example of the elementary elements - bent composit beams, the approach is developed, allowing to receive answers to the questions formulated above.

Keywords: beams, a limiting condition, static definability, static indefinability, bending moment, composites

Немировский Юрий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича, г. Новосибирск

`e-mail:` nemirov@itam.nsc.ru

Nemirovsky Jury Vladimirovich

doctor of sciences, professor, Institute of theoretical and applied mechanics of S. A. Hristianovicha of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 160–171

С. В. Лавриков, О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко

ОПИСАНИЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НЕУПРУГИХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРА ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ И НЕАРХИМЕДОВОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск

Аннотация. В работе рассматривается общее описание плоского деформирования сред со структурой. Показано, что вместо тензора напряжений удобнее использовать вектор внутренних усилий. Моделирование структуры среды осуществляется на основе методов неархимедового анализа. Вводится пространство, координатные оси которого являются неархимедовыми прямыми. Строится замкнутая модель горного массива с двумя масштабными уровнями. Получено численное решение задачи о деформировании массива вблизи горизонтальной выработки.

Ключевые слова: плоская деформация, тензор напряжений, вектор внутренних усилий, внутренняя структура, неархимедово пространство, определяющие уравнения, замкнутая модель, горная порода, выработка, разупрочнение, алгоритм, численное моделирование.

УДК: 539.374

1. Внутренние усилия в твердых телах описываются с помощью тензора напряжений. Понятие напряжения является настолько привычным и удобным, что кажется, что оно является и единственно возможным для описания деформирования твердых тел. Можно, однако, указать один класс задач, в которых более естественным и удобным является альтернативный способ описания внутренних усилий. Во многих случаях модель плоского деформирования сводится к следующей системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\tfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}=0,\quad \tfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\tfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0,\\
&\tfrac{\partial u_1}{\partial x_1}=\ a_{11}\,\sigma_{11}+a_{12}\,\sigma_{22}+a_{13}\,\sigma_{12},\\
&\tfrac{\partial u_2}{\partial x_2}=\ a_{21}\,\sigma_{11}+a_{22}\,\sigma_{22}+a_{23}\,\sigma_{12},\\
&\tfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\tfrac{\partial u_2}{\partial x_1}=\ a_{31}\,\sigma_{11}+a_{32}\,\sigma_{22}+a_{33}\,\sigma_{12}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} – компоненты тензора напряжений, u_1, u_2– компоненты вектора перемещений, a_{11}, ... a_{33} – известные коэффициенты. Вместо смещений и напряжений в системе могут фигурировать их приращения. Тогда коэффициенты могут зависеть от напряжений, достигнутых на предыдущем шаге, а также от знака определенной комбинации приращений напряжений (в соответствии с

Поступила 12.02.2009

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 08-05-00543, и поддержке Сибирского Отделения РАН, интеграционный проект № 69.

критерием активного напряжения и разгрузки). В системе (1) первые два уравнения являются уравнениями равновесия, последующие три уравнения – это определяющие уравнения, связывающие напряжения с деформациями. Такая форма записи модели является классической. Однако, несмотря на это, данная форма записи является в определенном смысле патологической. Действительно, система (1) представляет собой пять дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет первый порядок. Однако сводится она к уравнению не пятого, а четвертого порядка. Например, для упругого тела сводится к бигармоническому уравнению относительно функции Эри. Есть также признаки патологичности, связанные с механическим смыслом системы. В системе (1) “на равных” фигурируют все три напряжения $\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{12}$. Поэтому сам вид системы не исключает постановок краевых задач, когда, например, на границе $\mathrm{x}_1 = 0$ задается напряжение σ_{22}. С механической точки зрения подобные задачи, как известно, смысла не имеют. Однако при записи системы в форме (1) подобные “задачи” формально выглядят так же, как и задачи с заданными напряжениями $\sigma_{11},\ \sigma_{12}$. Патологичность системы проявляется и при исследовании ее типа. Данные Коши для любой линии L всегда оказываются связанными между собой. Отсюда, конечно, не следует, что L – характеристика системы. Попытка же найти характеристики и соотношения на них наталкивается на значительные трудности. Все перечисленные признаки связаны между собой и приводят к одному выводу: модель (1) в своей сущности должна сводиться не к пяти, а только к четырем дифференциальным уравнениям первого порядка. Поэтому и независимых переменных должно быть не пять, а четыре. К искомой системе четырех “существенных” уравнений можно придти следующим образом. Зафиксируем некоторую точку O, принадлежащую телу, и соединим её с точкой A произвольной кривой OBA, также принадлежащей телу. Обозначим через $\overrightarrow{f} = \{f_1, f_2\}$ усилие, которое действует на контур OBA со стороны нормали, показанной на рис. 1. Если взять другой контур $OB'A$, то усилие будет таким же (здесь необходимо предположить, что массовые силы отсутствуют). Таким образом, функция $\overrightarrow{f}$ зависит только от координат точки A. Связь функции $\overrightarrow{f}$ с напряжениями даётся формулами

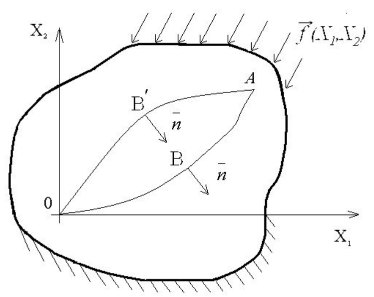


Рис. 1. Определение вектора внутренних усилий $\overline{f}$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{21} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \tag{2}$$

Условие парности касательных напряжений приводит к уравнению

$$\operatorname{div} \overrightarrow{f} = \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}_1} + \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial \mathrm{x}_2} = 0. \tag{3}$$

Таким образом, во всех построениях вектор $\overrightarrow{f}$ может заменить тензор напряжений. При этом два уравнения равновесия относительно напряжений переходят в одно уравнение (3) относительно компонент вектора $\overrightarrow{f}$. Система (1) приобретает следующий вид

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = a_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - a_{12} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - a_{13} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = a_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - a_{22} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + a_{23} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = a_{31} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - a_{32} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - a_{33} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \end{array} \tag{4}$$

Данная система имеет целый ряд преимуществ перед стандартной системой (1). Во-первых, она содержит только четыре уравнения первого порядка и соответствующая матрица вырожденной не является. Исследование ее типа и вывод соотношений вдоль характеристик никаких трудностей не представляет. (Нетрудно заметить, что при $\mathrm{a}_{22} = 0$ второе уравнение содержит только производные по x_2). Кинематическое и силовое описание процесса деформирования на языке (4) является симметричным: в обоих случаях речь идет о векторных полях $\overrightarrow{u}\ (x_1, x_2)$ и $\overrightarrow{f}\ (x_1, x_2)$. Появляется симметрия и в способе задания краевых условий. Например, задание на границе $\mathrm{x}_1 = 0$ вектора $\overrightarrow{f}\ (x_2)$ равносильно заданию напряжений σ_{11}, σ_{12} и "автоматически" исключает задание компоненты σ_{22}. Однако основное преимущество в использовании функции $\overrightarrow{f}$ проявляется при описании деформирования сплошных сред со структурой.

2. Последовательное развитие моделей сплошных сред со структурой приводит к выводу о том, что для их адекватного описания многомасштабной структурой необходимо наделять само пространство. В механике используется концепция арифметического пространства (точка – это тройка вещественных чисел). Поэтому построение арифметического пространства со структурой сводится к построению числовой системы со многими масштабными уровнями. Будем опираться на числовую систему [1, глава 4], [4]. Опишем ее, используя идеи работы П.К. Рашевского [5].

В основе числовых систем лежит натуральный ряд

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots 10^{23}, \quad 10^{23}+1,\ \dots \quad .$$

Формально все числа данного ряда имеют одинаковый статус. Например, пара чисел $10,\ 11$ является по статусу такой же, как и пара 10^{23} и $10^{23}+1$. При этом переход от чисел $10,\ 11,\ \dots$ к числу 10^{23} осуществляется по шагам. Прибавляя к 11 единицу, затем еще единицу, мы, в конце концов, приходим к числу 10^{23}, затем к числу $10^{23}+1$ и т.д. Но это только теоретически. Практически же ясно, что переход к числу 10^{23} всегда будет осуществляться скачком. При этом, если говорить о прикладной математике, то любому специалисту в этой области ясно, что и статус чисел 10^{23}, $10^{23}+1$ становится совсем не таким же как чисел $10,\ 11$. Основная идея [5] состоит в том, что указанное различие должно быть введено и в теоретическую математику. Построения [1, 4] в определенном смысле выполнены именно в данном направлении.

Вернемся к натуральному числу 10^{23}. 10^{23} – это порядок числа молекул газа в закрытой трехлитровой емкости. Каким образом физик "добрался" до этого числа? Его можно представить таким образом. Вначале было число 1. Например, изучалось поведение одной молекулы газа в закрытой емкости. Затем было число 2 – изучалось столкновение двух молекул. Затем, может быть, были числа 3 и 4. И затем был совершен скачок сразу к числу 10^{23}. Есть все основания считать, что в результате этого мы перешли к новой реальности. Раньше это были отдельные молекулы, теперь – это объемы газа в литрах. В этой новой реальности говорить о числах $10^{23}+1$, $10^{23}+2$ уже нет никакого смысла. Но в новой реальности имеют вполне определенный смысл числа $0,5\cdot 10^{23}$, $2\cdot 10^{23}$ и т.д. То есть мы видим, что в новой реальности число 10^{23} выступает уже как масштаб этой реальности. (То же самое относится и к движению "вглубь", например, от чисел 1, $1/2$, $1/3$ к числам нового масштаба $1/10^{13}$, $1/(2\cdot 10^{13})$ и т.д.). Примем, что главным здесь является тот факт, что переход к новой реальности совершается не по шагам $\left(1+1+\ \ldots\ +1=10^{23}\right)$, а обязательно скачком. Это означает, что реальности различных масштабных уровней всегда разделены барьером, который мы обозначаем многоточием.

Основное свойство данного "многоточия" состоит в том, что его невозможно преодолеть, двигаясь единичными шагами. Следует, однако, подчеркнуть, что это относится только к практической стороне дела. Теоретически же переход "по шагам" всегда возможен. Более того, именно эта возможность (через аксиому индукции) лежит в основе математического анализа. Следовательно, проблема состоит в том, чтобы построить такую числовую систему, в которой барьер между разными уровнями невозможно было бы преодолеть (единичными шагами) и теоретически. Такая постановка вопроса приводит к следующему однозначному выводу: в числовой системе со многими масштабными уровнями должно содержаться число, которое было бы больше любого натурального числа, получаемого последовательным прибавлением единицы к числу 1. Таким образом, в числовой системе со многими масштабами обязательно должно быть снято ограничение, диктуемое аксиомой Архимеда. Следовательно, числовая система должна содержать актуальное бесконечно большое и бесконечно малое числа (ω и $\mathrm{E}=1/\omega$). Данные числа и управляют переходами к новым масштабным уровням числовой системы.

Рассматривая числа из данной системы в качестве координат точек, можно придти к пространству, которое характеризуется иерархией масштабных уровней. В данном пространстве можно исследовать различные процессы, в том числе и процессы деформирования "сплошных" сред со структурой.

3. Ограничимся двумя масштабными уровнями – вещественным и первым микроуровнем. В плоском случае имеем

$$X_1 = x_1 + \xi_1,\ X_2 = x_2 + \xi_2, \tag{5}$$

где X_1, X_2 – декартовы координаты, $\xi_1 = y_1\mathrm{E}$, $\xi_2 = y_2\mathrm{E}$, переменные x_1, x_2, y_1, y_2 – это обычные вещественные числа, а $\mathrm{E}=1/\omega$ – актуальное бесконечно малое число. Это означает, что $0<\mathrm{E}<1/n$ для любого натурального $n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ 10^{13},\ \ldots\ 10^{23},\ \ldots$. Таким образом, в окрестности каждого вещественного числа появилась целая окрестность пространства "вглубь", т.е. появился новый масштабный уровень.

Пусть $\overrightarrow{u}$ – вектор перемещений. В классическом варианте вектор $\overrightarrow{u}$ мог зависеть только от двух вещественных переменных (везде рассматривается плоская деформация). Производные от компонент вектора определяли тензор деформаций и поворот. Теперь вектор перемещений зависит от четырех пространственных координат (и это, по-прежнему, в плоском случае):

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\ (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)\,. \tag{6}$$

Производные по переменным ξ_1, ξ_2 определяют компоненты микродеформаций, производные по x_1, x_2 – компоненты макродеформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\right), \quad i, j = 1, 2.$$

Их разности (наряду с разностью поворотов) дают описание кинематики процессов, которые происходят на стыке разных масштабных уровней.

Вопрос о напряжениях гораздо сложнее. Ряд трудностей удаётся снять, если вместо напряжений ввести функцию $\overrightarrow{f}$, имеющую смысл главного вектора внутренних усилий.

Пусть функция $\overrightarrow{f}$ зависит от четырёх переменных: $f_1 = f_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$, $f_2 = f_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$. Её производные по x_1, x_2 – это напряжения вещественного масштабного уровня, производные по ξ_1, ξ_2 – напряжения микроуровня:

$$t_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}, \quad t_{12} = \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, \quad t_{21} = -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}, \quad t_{22} = -\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}.$$

Отсюда сразу следуют условия совместности напряжений, которые получить другим способом было бы весьма затруднительно:

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial t_{21}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial t_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_1}.$$

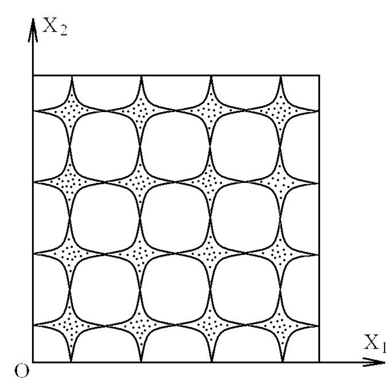


Рис. 2. Зёренная структура геосреды на микроуровне

Перейдём к определяющим уравнениям. Как известно, для их формулировки необходимо привлечение экспериментальных данных, гипотез о механизме деформирования среды и т.д. Будем исходить из упруго-пластической модели горной породы [3]. Пусть эффективная регулярная упаковка несущих зёрен (частиц) ориентирована вдоль координатных осей (рис. 2). В неархимедовой плоскости (5) производным по координатам x_1, x_2 соответствуют осреднённые деформации, взятые на базе, относящейся к центрам частиц. Производным по переменным ξ_1, ξ_2

соответствуют деформации самих частиц (микродеформации). Различия в данных производных описывают проскальзывания на контактах между частицами.

Рассмотрим структуру определяющих уравнений. Влиянием поровой среды пренебрежём. Отсюда следует, что $t_{ij} = \sigma_{ij}$, или

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \tag{7}$$

Не видно большого смысла учитывать неоднородность деформаций и напряжений в пределах отдельных частиц. В [3] используются осреднённые характеристики частиц и предположение об их упругом поведении. С учётом (2), (7) закон Гука для плоской деформации можно записать в следующем виде:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = e_{11} = \frac{1-v}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_1(x_1,x_2,0,0)}{\partial \xi_2} + \frac{\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = e_{22} = -\frac{1-v}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} - \frac{\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = 2e_{12} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, \end{array} \tag{8}$$

здесь ν, μ – упругие постоянные.

Уравнения для проскальзываний между зёрнами [3] имеют вид

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u_1(x_1,x_2,0,0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(x_1,x_2,0,0)}{\partial \xi_1}, \ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{G_1} \frac{\partial f_1(x_1,x_2,0,0)}{\partial x_1}, \ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{G_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \end{array} \tag{9}$$

где G_1, G_2 – пластические модули. Первые два уравнения констатируют отсутствие дилатансии, последние два – описывают независимые проскальзывания на контактах из различных семейств (см. рис. 2).

Подведем итог. Получена система, которая включает в себя одно уравнение вида (4, первое уравнение), четыре уравнения (7), три уравнения (8) и четыре уравнения (9), т.е. получено 12 уравнений относительно четырёх неизвестных функций $f_i, u_i,\ i = 1,2$. Система, тем не менее, переопределённой не является. Всё дело в том, что каждая из функций зависит не от двух, а от четырёх аргументов: $f_i = f_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$, $u_i = u_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$. Природа "дополнительных" уравнений связана именно с новыми пространственными переменными, которые появляются в неархимедовом случае. Например, пусть известно, что тело является линейно упругим на вещественном масштабном уровне. Этот факт описывается четырьмя уравнениями. Пусть, кроме того, известно, что имеет место непрерывность между вещественным и первым микроуровнем. Для описания этого факта требуется уже восемь уравнений

$$\frac{\partial f_i(x_1 x_2, \xi_1 \xi_2)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j},\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}. \tag{10}$$

Решение данных уравнений имеет вид:

$$f_i = f_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2),\ u_i = u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2). \tag{11}$$

Таким образом, восемь уравнений (10) содержат только ту информацию, что компоненты векторов $\overrightarrow{f}$ и $\overrightarrow{u}$ в действительности зависят не от четырёх, а только от двух пространственных переменных. В результате приходим к четырём уравнениям упругости относительно четырёх функций (11). Каждая из функций зависит только от двух пространственных координат. Система замкнута, задача корректна.

В рассматриваемой модели ситуация будет аналогичной. Из уравнений (8) следует, что

$$
\begin{aligned}
u_1 &= e_{11}(x_1, x_2) \cdot \xi_1 + e_{12}(x_1, x_2) \cdot \xi_2 - \Omega(x_1, x_2) \cdot \xi_2 + U_1(x_1, x_2), \\
u_2 &= e_{22}(x_1, x_2) \cdot \xi_2 + e_{12}(x_1, x_2) \cdot \xi_1 + \Omega(x_1, x_2) \cdot \xi_1 + U_2(x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Здесь Ω, U_i – произвольные функции своих аргументов: Ω имеет смысл собственного вращения зёрен, U_i – компонент перемещений центров зёрен. Подстановка (12) в (9) приводит к системе

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1(x_1,x_2,0,0)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1,x_2,0,0)}{\partial x_2} = 0, \\
&\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = e_{11}, \ \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = e_{22}, \\
&\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - e_{12} - \Omega = -\frac{1}{G_1} \cdot \frac{\partial f_1(x_1,x_2,0,0)}{\partial x_1}, \\
&\frac{\partial U_1}{\partial x_2} - e_{12} + \Omega = -\frac{1}{G_2} \cdot \frac{\partial f_1(x_1,x_2,0,0)}{\partial x_1}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Таким образом, в результате получена система пяти уравнений относительно следующих пяти неизвестных функций: $f_1, f_2, U_1, U_2, \Omega$. Система замкнута. На части границы задается вектор $\overrightarrow{u}(x_1, x_2, 0, 0)$, на другой части вектор $\overrightarrow{f}(x_1, x_2, 0, 0)$. Последнее соответствует заданным граничным напряжениям.

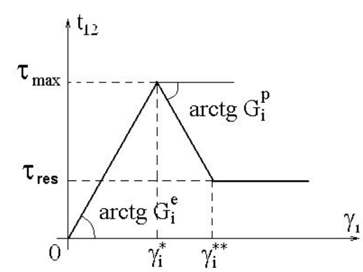


Рис. 3. Диаграмма межзёренного проскальзывания

Определим теперь условия скольжения между зёрнами. Предположим, что эти условия представляют собой нелинейные зависимости касательных напряжений t_{ij} и величин проскальзывания $\gamma_i = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}$ вдоль контактов, $i, j = 1, 2; i \neq j$. Здесь i - номер контакта из двух различных семейств. Скольжение включает в себя три стадии: упрочнение, разупрочнение и стадию остаточной прочности. Следует отметить, что проскальзывания вдоль контактов из различных семейств независимы, т.е. в общем случае $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Диаграмма, характеризующая указанные условия, показана на рис. 3. В силу нелинейности диаграммы уравнения необходимо записать в приращениях:

$$
\Delta t_{12} = G_1 \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi_1} \right), \quad \Delta t_{12} = G_2 \left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi_2} \right), \tag{14}
$$

где пластические модули G_i, определяются через заданные константы $\gamma_i^*, \ \gamma_i^{**}, \ G_i^e, \ G_i^p$ (см. рис. 3) следующим образом

$$G_i = \begin{cases} G_i^e, \quad 0 \le \gamma_i < \gamma_i^*, \\ -G_i^p, \quad \gamma_i^* \le \gamma_i < \gamma_i^{**}, \qquad i = 1, 2. \\ 0, \quad \gamma_i^{**} \le \gamma_i, \end{cases}$$

Следовательно, используя систему (13), переписанную в приращениях, условия (14) и (5), можно выписать определяющие уравнения модели в приращениях:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \Delta U_1}{\partial x_1} = \frac{1-\nu}{2\mu}\frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} + \frac{\nu}{2\mu}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \Delta U_2}{\partial x_2} = -\frac{1-\nu}{2\mu}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} - \frac{\nu}{2\mu}\frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Delta U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta U_2}{\partial x_1} = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)\frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}. \end{array} \tag{15}$$

Как уже отмечалось, уравнения (15) записаны в системе координат, связанной с эффективной регулярной упаковкой зёрен. Это означает, что определяющие уравнения модели имеют форму (15) только в системе координат, ориентированной вдоль линий эффективной упаковки зёрен. Иными словами, приведённая модель описывает анизотропную среду. Для формулировки общей замкнутой системы определяющие уравнения необходимо перепроектировать в произвольную систему координат, повернутую относительно исходной на произвольный угол α, который будет иметь смысл угла естественного напластования горных пород, и замкнуть ее уравнением равновесия (3). Таким образом, окончательно замкнутая модель в приращениях примет следующий вид

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial \Delta U_1}{\partial x_1} = A_{11}\frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} - A_{12}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} + A_{13}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Delta U_2}{\partial x_2} = A_{21}\frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} - A_{22}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} + A_{23}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Delta U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta U_2}{\partial x_1} = A_{31}\frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} - A_{32}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} + A_{33}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}. \end{array} \tag{16}$$

Здесь, как и ранее, $\Delta U_1, \Delta U_2$ – приращения компонент вектора перемещений центров зёрен, $\Delta f_1, \Delta f_2$ – приращения компонент вектора внутренних усилий. Коэффициенты A_{ij} зависят от напряжений и деформаций на предыдущем шаге нагружения:

$$\begin{array}{l} A_{11} = \frac{(1-\nu)}{2\mu} - \frac{q}{2}\sin^2(2\alpha),\ A_{12} = \frac{-\nu}{2\mu} + \frac{q}{2}\sin^2(2\alpha),\ A_{13} = q\sin(2\alpha)\cos(2\alpha), \\ A_{21} = \frac{-\nu}{2\mu} + \frac{q}{2}\sin^2(2\alpha),\ A_{22} = \frac{1-\nu}{2\mu} - \frac{q}{2}\sin^2(2\alpha),\ A_{23} = -q\sin(2\alpha)\cos(2\alpha), \\ A_{31} = q\sin(2\alpha)\cos(2\alpha),\ A_{32} = -q\sin(2\alpha)\cos(2\alpha),\ A_{33} = {}^1\!/_\mu - 2q\cos^2(2\alpha), \end{array} \tag{17}$$

где $q = -0.5\left({}^1\!/_{G_1} + {}^1\!/_{G_2}\right)$, α – угол естественного напластования горных пород. В дальнейшем он считается известным из данных натурных наблюдений.

Таким образом, уравнения (16), (17) представляют собой замкнутую модель для расчета одного шага по приращению параметра нагружения. Общее решение будем строить в виде суммы решений, полученных на каждом шаге нагружения.

Хорошо известно, что численные расчёты в задачах с учётом разупрочнения (ниспадающие ветви) могут приводить к парадоксальным результатам. Это связано с тем, что с физической точки зрения в среде могут происходить динамические скачки (динамическое неконтролируемое высвобождение накопленной упругой энергии), в то время как линейная для приращений численная схема не описывает динамические эффекты. Условие возникновения динамического скачка связано с наклоном ниспадающей ветви диаграммы (параметр G^p). Иными словами, существует критическое значение параметра G^p, такое, что если реальный параметр меньше критического, то деформирование протекает устойчиво. В противном случае в среде будут наблюдаться динамические эффекты.

В описанной выше модели для ситуации, когда один из контактов (в данном случае i-контакт) уже разупрочняется (ниспадающий участок), а другой (j-контакт) – продолжает упрочняться (восходящий участок), условие устойчивости формулируется в виде неравенства:

$$G_i^p < \frac{\mu \cdot G_j^e}{\mu + G_j^e}. \tag{18}$$

В случае, когда оба контакта вышли на стадию разупрочнения, условие устойчивости примет вид:

$$\frac{G_1^p \cdot G_2^p}{G_1^p + G_2^p} < \mu. \tag{19}$$

Выполнение условий (18) и (19) означает, что деформирование будет протекать устойчиво без динамических эффектов. В этом случае описанная схема расчёта приведёт к корректным результатам. Если же условия (18) и (19) не выполняются, тогда необходимо вносить корректировку в описанный численный алгоритм [4]. В данной работе ограничимся рассмотрением только устойчивого поведения.

4. На основе описанной модели разработаны конечно-элементный алгоритм и компьютерная программа, позволяющие численно исследовать плоское напряжённо-деформированное состояние массива горных пород. Рассмотрим задачу о деформировании горного массива вокруг горизонтальной протяжённой выработки. В качестве расчетной области рассмотрим зону $r \leq R$, окружающую выработку арочного сечения, как показано на рис. 4. Параметр нагружения определим в виде радиального перемещения V, заданного на внешней границе области деформирования $r = R$. $V > 0$ соответствует направлению к центру выработки. Внутреннюю границу выработки будем считать от напряжений свободной. Краевые условия имеют следующий вид

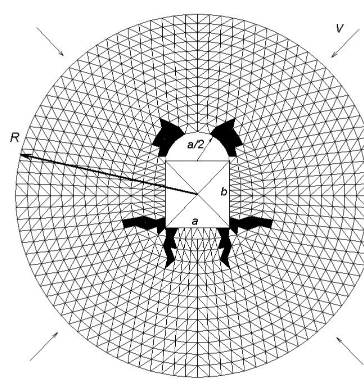


Рис. 4. Картина деформирования для угла анизотропии $\alpha = 0°$

$$\begin{array}{ll} \Delta U_r|_{r=R} = -V, & \Delta\sigma_n|_\Gamma = 0, \\ \Delta U_\theta|_{r=R} = 0, & \Delta\tau_n|_\Gamma = 0, \end{array}$$

где $\Delta U_r, \Delta U_\theta$ – приращения компонент вектора перемещений в полярных координатах, $\Delta\sigma_n, \Delta\tau_n$ – приращения соответственно нормального и касательного напряжений, Γ – внутренняя граница расчетной области, геометрия которой однозначно определяется заданными постоянными a, b в соответствии с рис. 4. Примем, что в начальный момент времени

$$\sigma_{ij}^0 = 0, \quad u_i^0 = 0, \quad \gamma_i^0 = 0,$$

верхний индекс означает номер итерации (номер шага нагружения).

Рассмотрим примеры расчетов. Выберем следующие параметры задачи

$$\begin{array}{l} R/b = 3,5; \quad a/b = 1 \quad \nu = 0,2; \quad \mu = 5 \cdot 10^4\ MPa; \\ \gamma_1^* = \gamma_2^* = 0,001; \quad \gamma_1^{**} = \gamma_2^{**} = 0,01; \\ \tau_{\max} = 50\ MPa; \quad \tau_{res} = 0\ MPa; \quad \alpha = 0^0. \end{array}$$

Выбранные параметры гарантируют выполнение условий устойчивости (18) и (19). Численное решение приводит к картине деформирования, показанной на рис. 4. Здесь незакрашенные области соответствуют ситуации, когда диаграмма контактного взаимодействия зёрен (см. рис. 3) находится на восходящем участке (стадия упрочнения), серым цветом отмечены области массива, в которых диаграмма вышла на ниспадающий участок (разупрочнение), черным цветом показаны области, соответствующие горизонтальному участку диаграммы (остаточная прочность). В процессе нагружения зоны разупрочнения и остаточной прочности зарождаются на поверхности выработки, причем вначале зарождается сразу четыре не связанные между собой зоны в направлениях анизотропии массива. При дальнейшем нагружении эти зоны последовательно одна за другой развиваются вглубь массива, окружающего выработку, имея тенденцию к объединению на поверхности выработки (см. рис. 4).

Из приведенного рисунка видно, что если в начальный момент времени напряженное состояние определяется в основном геометрией выработки, то в дальнейшем существенное влияние на него оказывает анизотропия массива: области разупрочнения и остаточной прочности развиваются в виде полос, наклонённых к оси Ox_1 под углом напластования пород α и ортогональном ему направлении.

В рассмотренных примерах расчёта угол напластования массива был принят равным $\alpha = 0^0$. Такие же картины будут наблюдаться в случае $\alpha = 90^0$ в силу взаимной ортогональности различных семейств контактов. В этом смысле противоположная ситуация будет иметь место при значении $\alpha = 45^0$. Результат расчетов для угла напластования пород $\alpha = 45^0$ показан на рис. 5.

Выводы:

1. Классическая форма записи системы уравнений плоского деформирования является вырожденной, так как пять дифференциальных уравнений первого порядка (два уравнения равновесия и три уравнения связи между напряжениями и деформациями) сводятся к одному уравнению только четвертого порядка. Поэтому вместо тензора напряжений удобнее использовать вектор внутренних усилий. В

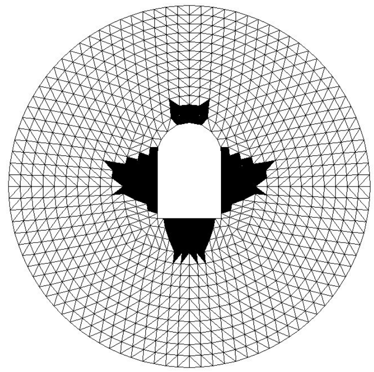


Рис. 5. Картина деформирования для угла анизотропии $\alpha = 45^\circ$

этом случае модель сводится к системе четырёх уравнений, которая является более приемлемой для исследования и последующих обобщений.

2. Последовательное развитие моделей сред со структурой приводит к необходимости наделять внутренней структурой саму независимую переменную, а значит, и само пространство. Показано, что с использованием подобных (неархимедовых) переменных можно строить замкнутые модели горных пород.

3. Рассмотрена конкретная модель, включающая в себя два структурных уровня, учитывающая анизотропию и возможность разупрочнения на контактах между упругими несущими зёрнами. Численно решена задача о деформировании массива в зоне, окружающей горизонтальную протяжённую выработку. Построены картины деформирования, отражающие развитие областей разупрочнения и областей потери сдвиговой прочности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Андреев, А. Н.* Механика - от дискретного к сплошному / А. Н. Андреев и др. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2008. – 343с.

[2] *Лавриков, С. В.* Моделирование процессов деформирования массива горных пород с использованием методов неархимедового анализа / С. В. Лавриков, О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2008. – № 1. – С. 3-16.

[3] *Рашевский, П. К.* О догмате натурального ряда / П. К. Рашевский // Успехи математических наук. – 1973. – №. 28. – Вып. 4 (172). – С. 243-246.

[4] *Ревуженко, А. Ф.* Механика упругопластических сред и нестандартный анализ / П. К. Ревуженко. – Новосибирск : Изд-во Новосибир. ун-ета, 2000. – 423 с.

[5] *Лавриков, С. В.* Концепция неархимедова многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой / С. В. Лавриков и др. // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т. 11. – № 3. – С. 45-60.

S.V. LAVRIKOV, O.A. MIKENINA, A.F. REVUZHENKO

DESCRIPTION OF PLANE DEFORMATION OF NON-ELASTIC BODIES USING THE VECTOR OF INTERNAL FORCES AND NON-ARCHIMEDEAN MATHEMATICAL ANALYSIS

Mining Institute of Siberian Branch of RAS, Novosibirsk

Abstract. In the paper the general description of plane deformation of media with structure is considered. It is shown that it is more convenient to use the vector of internal forces instead stress tensor. The modeling of medium structure is carried out on the basis of methods of non-Archimedean analysis. The space, coordinate axes of which are non-Archimedean straight lines is introduced. The closed model of mining rock with two scale levels is designed. The numerical solution of the problem about deformation of rock massive near horizontal opening is obtained.

Keywords: plane deformation, stress tensor, vector of internal forces, internal structure, non-Archimedean space, constitutive equations, closed model, mining rock, opening, softening, algorithm, numerical simulation.

Лавриков Сергей Владимирович

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института горного дела СО РАН г. Новосибирск

`e-mail:` lvk64@mail.ru

Микенина Ольга Александровна

кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института горного дела СО РАН г. Новосибирск

`e-mail:` revuzhenko@yandex.ru

Ревуженко Александр Филиппович

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института горного дела СО РАН г. Новосибирск

`e-mail:` revuzhenko@yandex.ru

Lavrikov Sergey Vladimirovich

doctor of philosophy, senior scientific employee of Institute of mining of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk

Mikenina Olga Aleksandrovna

doctor of philosophy, younger scientific employee of Institute of mining of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk

Revuzhenko Alexander Filippovich

doctor of science, professor, managing laboratory of Institute of mining of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. №1. С. 172–178

А. А. Петров, В. Г. Теличко, А. А. Трещев

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ТОНКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Тульский государственный университет

Аннотация. Предлагается математическая модель расчета изгиба тонких прямоугольных пластин, выполненных из разносопротивляющихся материалов, свойства которых зависят от изменений температуры. Получены разрешающие уравнения и численное решение методом конечных элементов с использованием пакета FlexPDE 5 (PDE Solutions Inc.).

Ключевые слова: Механика материалов, изгиб тонких пластин, термомеханическое нагружение, разносопротивляющиеся материалы, связанная задача термоупругости, метод конечных элементов.

УДК: 539.734

За сорок лет интенсивного развития механики материалов, учитывающей чувствительность их механических характеристик к виду напряженного состояния, было предложено достаточно большое количество определяющих соотношений разносопротивляющихся сред, базирующихся на различных технических гипотезах. Однако, несмотря на всю глубину теоретических проработок моделей теории деформирования разносопротивляющихся сред, совершенно недостаточно внимания уделено зависимости от вида напряженного состояния такой характеристики материала, как коэффициент линейного температурного расширения и в целом разномодульной теории упругости. Между тем как, например, в работах П. Е. Харта [3] было показано, что для некоторых марок графита коэффициенты линейного температурного расширения могут различаться на 100 и более процентов в зависимости от вида реализованного напряженного состояния.

В работе Н. М. Матченко и А. А. Трещева [1] в рамках закона теплопроводности Фурье и классических условий динамического равновесия получены основные дифференциальные уравнения разномодульной теории термоупругости: уравнение теплопроводности, включающее в связанном случае учет влияния вида напряженного состояния, и уравнения динамического равновесия. Также в этой работе решены следующие задачи термоупругости: о плоском деформированном состоянии полого разномодульного цилиндра при нестационарных термосиловых воздействиях, об осесимметричном напряженно-деформированном состоянии полого разномодульного цилиндра при стационарных термосиловых воздействиях.

Поступила 31.03.2008

Используя аналогичную методику, в данной работе получены разрешающие уравнения для решения связанной задачи о расчете плосконапряженного состояния прямоугольных пластин из материалов с усложненными свойствами в условиях термомеханического нагружения.

Уравнения состояния термоупругого изотропного разносопротивляющегося материала представлены следующими формулами:

$$e_{ij} = \frac{2}{3}\tilde{b}_2\sigma_{ij} + \frac{2}{3}\left(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2\right)\sigma\delta_{ij} + \frac{1}{3}b_{t2}\delta_{ij}\theta^{\circ} + T_{tij}, \tag{1}$$

$$L = (b_{t1}\xi + \beta_{t2})\,\sigma + b_{t1}\eta\tau + \frac{d\Gamma}{dT}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} T_{tij} = \tfrac{1}{3}\left[2\tilde{b}_3\xi\left(1+0,5\eta^2\right) + \tfrac{\eta^2}{\xi}\left(\tilde{b}_4\eta^2 + 1,5\sqrt{2\tilde{b}_5}\right) - \tilde{b}_5\eta^3\cos 3\varphi\right]\sigma\delta_{ij} + \\ +\tfrac{1}{3}\left[2\left(\tilde{b}_4\xi + \tilde{b}_5\eta\cos 3\varphi\right) - \left(\tilde{b}_3\xi^2 + \tilde{b}_4\eta^2\right) - \tilde{b}_5\left(3-\eta\xi^2\right)\cos 3\varphi + 3\sqrt{2\tilde{b}_5}\mu_{ij}\right] \times , \\ \times S_{ij} + \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{3}b_{t1}\alpha_{ij} + \delta_{ij}b_{t2}\right)\theta^{\circ} \end{gathered} \tag{3}$$

где e_{ij} – деформации, σ_{ij} – напряжения, $\tilde{b}_i$, b_{ti} – константы потенциала [1], α_{ij} – нормированные напряжения, $\cos 3\varphi$ – фазовый инвариант, η и ξ – гармонические функции, которые трактуются как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке, L – плотность энтропии, Γ – потенциал Гиббса, T – температура тела.

Выражения (1) – (3) можно получить, применив операции дифференцирования по формулам $e_{ij} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\sigma_{ij}}$ и $L = \frac{\partial\Gamma}{\partial T}$ к термодинамическому потенциалу Гиббса $\Gamma = \Gamma(\sigma_{ij},\ T)$ [1].

Обращая для выражений деформаций (1) линейные члены уравнений, получим

$$\sigma_{ij} = (D_1 + D_2)\ e_{ij} - 3D_2 e\delta_{ij} - D_3\theta^0\delta_{ij} - H_{ij}, \tag{4}$$

где $e = \frac{1}{3}(e_{11}+e_{22}+e_{33})$, $\sigma_{ij} = (D_1+D_2)\,e_{ij} - 3D_2e\delta_{ij} - D_3\theta^{\circ}\delta_{ij} - H_{ij}$, $D_1 = \frac{A+C}{(A-C)\,(A+2C)} = \frac{(\tilde{b}_1-\tilde{b}_2)}{\tilde{b}_1\tilde{b}_2}$, $D_2 = \frac{C}{(A-C)(A+2C)} = \frac{(\tilde{b}_1-\tilde{b}_2)}{2\tilde{b}_1\tilde{b}_2}$, $D_3 = \frac{A_t}{A+2C} = 2b_{t2}/9\tilde{b}_1$, $H_{ij} = (D_1+D_2)\,T_{ij} - D_2T\delta_{ij}$, $T = T_{ij}\delta_{ij}$, $A_t = 0,5\left(\alpha_{t1}^{+}+\alpha_{t1}^{-}\right)$, $B_t = 0,5\left(\alpha_{t1}^{+}-\alpha_{t1}^{-}\right)$, α_{t1}^{+}, α_{t1}^{-} – коэффициенты линейного теплового расширения в продольном и поперечном направлениях соответственно.

Рассматривая плоское напряженное состояние с параметрами $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, из формулы (4) можно выразить деформации e_{33}, e_{23} и e_{23}:

$$e_{33} = \frac{1}{D_1}\left(H_{33} + \theta^0 D_3 D_2\left(e_{11}+e_{22}\right)\right),\ \ e_{13} = \frac{H_{13}}{D_1+D_2},\ \ e_{23} = \frac{H_{23}}{D_1+D_2}. \tag{5}$$

Таким образом, можно получить зависимости для любой поверхности пластины в форме:

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = (D_1+D_2)\,e_{11} - D_2\left(e_{11}+e_{22}+\tfrac{1}{D_1}\left(H_{33}+\theta^{\circ}D_3 + D_2\left(e_{11}+e_{22}\right)\right)\right) - D_3 - H_{11}, \\ \sigma_{22} = (D_1+D_2)\,e_{22} - D_2\left(e_{11}+e_{22}+\tfrac{1}{D_1}\left(H_{33}+\theta^{\circ}D_3 + D_2\left(e_{11}+e_{22}\right)\right)\right) - D_3 - H_{22}, \\ \sigma_{12} = (D_1+D_2)\ e_{22} - H_{12}. \end{gathered} \tag{6}$$

Для этой же поверхности имеют место гипотезы Кирхгофа в форме

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + x_3\chi_{uj}, \;\; \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \;\; \chi_{ij} = -w_{,ij}\,. \tag{7}$$

Учитывая записанное выше, можно перейти к определениям усилий в срединной поверхности по формулам:

$$N_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3, \;\; M_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3\, dx_3. \tag{8}$$

Для этих усилий имеем уравнения статики (с учетом продольных усилий в срединной плоскости):

$$\begin{gathered} N_{11,1} + N_{12,2} = 0, \\ N_{12,1} + N_{22,2} = 0, \\ M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} = -q\left(x_1, x_2\right) - N_{11}w_{,11} - 2N_{12}w_{,12} - N_{22}w_{,22}\,. \end{gathered} \tag{9}$$

Для температуры также имеется уравнение притока тепла в форме [1]:

$$\lambda\theta^{\circ}_{,ii} - C_{\sigma}\theta^{\circ}_{,t} - \left(3A_t\sigma_{,t} + B_t S_{,t}\right)\, T_0 + U = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) следует переписать в перемещениях с учетом отсутствия локальных источников тепла U и зависимостей:

$$\sigma = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}, \;\; S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}, \;\; S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \;\; \tau = \sqrt{\frac{1}{3}S_{ij}S_{ij}},$$

$$S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \;\; \xi = \frac{\sigma}{S_0}, \;\; \eta = \frac{\tau}{S_0}, \;\; S_0 = \frac{S}{\sqrt{3}}, \;\; \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

где S – вектор полного напряжения.

Подставляя уравнение (8) в (9), и учитывая (4), (5), (6), (7) можно получить замкнутую систему уравнений равновесия пластины прямоугольной формы в перемещениях. Полученные уравнения равновесия и уравнение притока тепла образуют полную систему дифференциальных уравнений описывающих плосконапряженное состояние прямоугольных пластин в условиях термомеханического нагружения.

В связи с громоздкостью получаемых уравнений в общем виде, на практике, вывод разрешающих уравнений целесообразно осуществлять для конкретной задачи путем использования системы аналитических расчетов MAPLE 10 (Maplesoft, Waterloo Inc., Canada) используя конкретные значения параметров и констант.

Для демонстрации возможностей предлагаемой математической модели решалась задача со следующими исходными данными: прямоугольная пластина толщиной $h = 4$ мм, квадратная, со стороной $l = 100$ мм, материал графит АРВ [1, 3], жестко защемлена по контуру; пластина нагружалась равномерно распределенной нагрузкой $q = 10$ кПа; также осуществлялся нагрев поверхности пластины с перепадом температур 40 °C. Начальные температурные условия принимались следующие [1]: $\Theta_{|t=0} = 50\,^{\circ}C$ — на нижней поверхности пластины; $\Theta_{|t=0} = 10\,^{\circ}C$ — на верхней поверхности пластины, начальная температура пластины $T_0 = 0\,^{\circ}$C. Механические характеристики графита: модуль упругости $E^+ = 10^4$ МПа; $E^+/E^- = 0,8$;

коэффициент Пуассона $\nu^+ = 0,2$; $\nu^- = 0,3$; плотность $\rho = 1700$ кг / м^3; коэффициенты линейного теплового расширения $\alpha_{t1}^+ = \alpha_{t1}^- = 4,0 \cdot 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$; коэффициент теплопроводности $\lambda = 150$ Вт / (м · К); $\text{C}_\sigma = 500$ Дж / (кг · К) — теплоемкость материала при постоянном напряжении [1].

После выполненных преобразований, с учетом исходных данных указанных выше, разрешающая система дифференциальных уравнений в частных производных приобрела следующий вид:

$$\begin{gathered}
2.26 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_1(x_1, x_2, t) + 1.52 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u_2(x_1, x_2, t) + \\
+7.40 \cdot 10^6 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_1(x_1, x_2, t) = g_1(x_1, x_2, x_3, t), \\
7.40 \cdot 10^6 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_2(x_1, x_2, t) + 1.52 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u_1(x_1, x_2, t) + \\
+2.26 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_2(x_1, x_2, t) = g_2(x_1, x_2, x_3, t), \\
30.18 \cdot 10^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} w(x_1, x_2, t) + 60 \cdot 10^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} w(x_1, x_2, t) + \\
+30.18 \cdot 10^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} w(x_1, x_2, t) + 2.71 \cdot 10^6 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} w(x_1, x_2, t) + \\
+2.7 \cdot 10^6 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} w(x_1, x_2, t) + q = g_3(x_1, x_2, x_3, t), \\
15.3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \theta(x_3, t) - 8.50 \cdot 10^5 \frac{\partial}{\partial t} \theta(x_3, t) - 1.05 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial x_1} u_1(x_1, x_2, t) - \\
-1.05 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial x_2} u_2(x_1, x_2, t) = g_4(x_1, x_2, x_3, t),
\end{gathered} \tag{11}$$

где $w(x_1, x_2, t)$ – функция вертикального прогиба; $u_1(x_1, x_2, t)$ – функция перемещений срединной плоскости вдоль оси x_1; $u_2(x_1, x_2, t)$ – функция перемещений срединной плоскости вдоль оси x_2; $\theta(x_3, t)$ – функция температуры; $g_i(x_1, x_2, x_3, t)$ $(i = 1..4)$ – компоненты разрешающей системы уравнений содержащие в себе нелинейные функции подробно описанные в работах [1, 2].

Механические граничные условия [1]:

$$w = 0, \;\; \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \;\; \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \;\; u_1 = 0, \;\; u_2 = 0. \tag{12}$$

Разрешающие уравнения (11) с начальными и граничными условиями представлены в форме, где все нелинейные члены выписаны в правых частях. Эта форма удобна для применения метода "упругих решений", который и применялся для решения конкретной задачи. Решение системы дифференциальных уравнений осуществлялось в пакете FlexPDE 5 (PDE Solutions Inc., USA), с помощью которого на каждой итерации по методу "упругих решений" искалось частное решение системы (11) в рамках метода конечных элементов.

В процессе решения прослеживался процесс влияния температуры на механические характеристики материалов и напряженного состояния на распределение температуры по толщине пластинки, рассчитывалось распределение температуры по толщине пластинки, характеристики ее напряженно-деформированного состояния с учетом температурного воздействия. Рассмотрим полученные результаты.

На рис. 1 приведены вычисленные значения температурных напряжений σ_θ для тонкой квадратной пластины вдоль ее диагонали, соответственно сверху и снизу для связанной и несвязанной задач термоупругости.

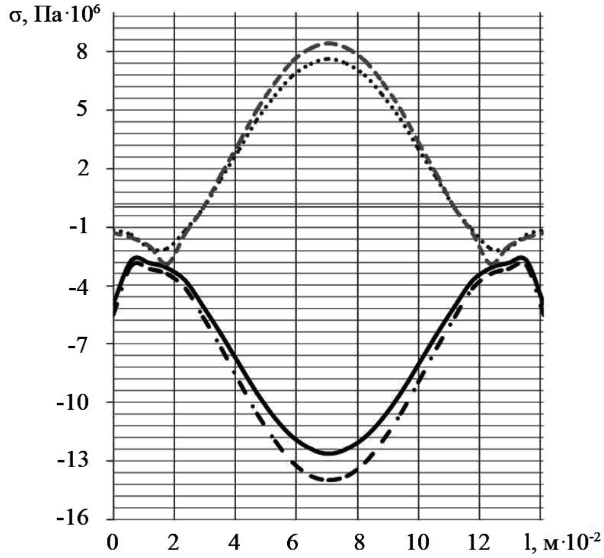


Рис. 1. Распределение температурных напряжений σ_θ вдоль диагонали пластины. Для несвязанной задачи: .... — напряжения на нижней поверхности, ————- — напряжения на верхней поверхности пластины; для связанной задачи: - - - - - - - - - — напряжения на нижней поверхности, – – – – – – – – – — напряжения на верхней поверхности пластины.

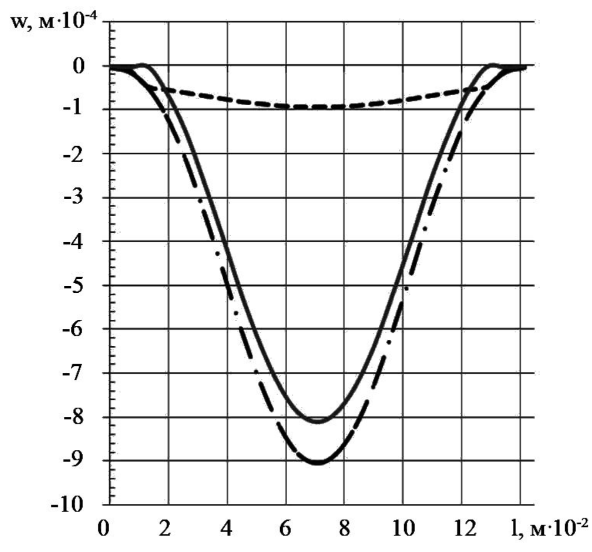


Рис. 2. Результаты расчета вертикальных прогибов пластины w при различных видах нагрузки вдоль диагонали пластины: ————- — с учетом только механического нагружения; - - - - - - — с учетом только температурного воздействия, – – – – – – – – – — с учетом обоих факторов нагрузки

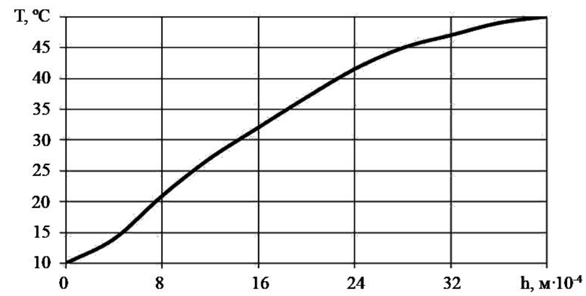


Рис. 3. Распределение температуры T по толщине h в центре плана пластины

Результаты расчета напряжений подтверждают гипотезу о том, что совместный учет взаимовлияния напряженного состояния и коэффициентов линейного температурного расширения является существенным для точности и достоверности результатов численного моделирования задач по определению напряженно-деформированного состояния пластин. Разница между решениями связанной и не связанной задач достигают 15 %.

На рис. 2 показано распределение прогибов w тонкой пластины вдоль ее диагонали. Из графика также можно сделать вывод, что учет совместного термосилового нагружения значительно влияет на результаты расчетов, позволяя получить более точное соответствие теории и эксперименту [1, 3].

На рис. 3 показано распределение температуры по толщине пластины.

Проведенные расчеты четко указывают на нелинейных характер деформирования конструкций из материалов с усложненными свойствами, а также подчеркивают важность решения задач термоупругости в связанной постановке, что позволяет добиться более точных и реалистичных результатов моделирования, по сравнению с уже известными способами решения подобных задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Hart, P. E.* The affect of pre-stressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite / P. E. Hart // Carbon. – 1972. – Vol. 107. – P. 233-236.

[2] *Матченко, Н. М.* Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Прикладные задачи теории упругости / Н. М. Матченко. – М. : РААСН ; Тула : ТулГУ, 2004. – 211 с.

[3] *Петров, А. А.* Плосконапряженное состояние пластин в условиях термомеханического нагружения / Петров А. А ., Теличко В. Г. // Сборник статей Международной научно-технической конференции "Композиционные строительные материалы. Теория и практика". – Пенза : ПГУАС-ПДЗ, 2007. – С. 229-232.

A. A. PETROV, V. G. TELICHKO, A. A. TRESCHEV

THE LATERAL BENDING OF THIN RECTANGULAR PLATES MADE FROM THE DIFFERENTLY RESISTANT MATERIALS UNDER THE CONDITIONS OF THERMOMECHANICAL LOADING

Abstract. Is proposed the mathematical model of the calculation of the bend of the thin rectangular plates, made from the differently resistant materials, whose properties depend on changes in the temperature. Are obtained the resolving equations and numerical solution by the finite elements method with the use of a flexPDE 5 software (PDE solutions Inc.).

Keywords: The mechanics of materials, the bend of thin plates, thermomechanical loading, the differently resistant materials, the connected task of thermoelasticity, the method of finite elements.

Петров Алексей Александрович

аспирант кафедры строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула.

e-mail: taa@uic.tula.ru

Теличко Виктор Григорьевич

кандидат технических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула.

e-mail: taa@uic.tula.ru

Трещев Александр Анатольевич

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула.

e-mail: taa58@yandex.ru

Petrov Alexey Aleksandrovich

post-graduate student of chair of building, building materials and designs of the Tula state university, Tula.

Telichko Victor Grigorevich

doctor of philosophy, the senior lecturer of chair of building, building materials and designs of the Tula state university, Tula.

Treshchev Alexander Anatolevich

doctor of sines, the professor, managing chair of building, building materials and designs of the Tula state university, Tula.

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 179–194

N. Takeuchi, A. Vardanyan

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS FOR PLATE BENDING PROBLEMS BY USING HYBRID-TYPE PENALTY METHOD

Department of Art and Technology, Hosei University,

Institute of Mechanics, Armenian National Academy of Sciences

Abstract. In present paper, we have given the investigations of the plate bending problem by numerical treatment using hybrid-type penalty method (HPM). The HPM assume linear and non-linear displacement field with rigid displacement, rigid rotation, strain and its gradient in each subdomain and introduce subsidiary condition about the continuity of displacement into the framework of the variational expression with Lagrange multipliers. For the purpose of this paper, we accepted the Kirchhoff theory that neglects the transversal shear deformation. In the first step of the work, we are giving the equilibrium equations for a deformable body in 3D case and as boundary conditions we are giving geometrical (for displacement field) and kinetic (for surface force) boundary conditions. Secondary we apply Kirchhoff theory to the displacement field of the 3D case for plate bending problem. For this purpose, we use quadratic form that includes rigid, linear and nonlinear parts of the displacements. The parameters used in this displacement field are independently defined in each subdomain. We introduce penalty function that presents strong spring connecting each subdomain. Then, we take the matrix of the subsidiary condition according to the surface integral of the contact surface of each sub-domain. We apply nonlinearity in penalty function such as spring system, which allow us to calculate hinge line. If hinge line makes mechanism then we can calculate limit load. We used load incremental method called r-min method in a material nonlinear analysis. We can calculate growing hinge line systematically using this algorithm for the nonlinear analysis. Finally, we calculate some simple problems to check accuracy of elastic solution and limit load.

Keywords: plate bending, penalty method, hybrid-type virtual work, discontinuous Galerkin method

УДК: 539.375

1. Introduction.

In this work for obtaining numerical results for the plate bending problem, we have used hybrid-type penalty method (HPM), which applied the concept of the penalty method [1] to the principle of hybrid type virtual work [7]. The HPM is based on discontinuous Galerkin (dG) method [4]. The HPM applies the concept of the spring of RBSM [3] (Rigid Bodies-Spring Model) in Lagrange multiplier and assume independent displacement field to each subdomain. Because compatibility requirements of the intersection boundary on adjacent sub-domain are secured by using the penalty method, the displacement field can be assumed regardless of the shape of sub-domain [6]. However, we cannot obtain high

Поступила 11.03.2008

accuracy solutions when it uses shape other than the triangle at the linear displacement field. For the reason, it is difficult to use the mesh division of arbitrary shape. To solve such a problem, we proposed the method of applying the second-order displacement field that added the gradient of the strain to linear displacement field of HPM [5].

Usually, for the finite element method, it requires C^1 continuity. However, many plate elements and numerical results are not satisfying this completely. Then, by using C^0 elements instead, it imposes the continuity of slope weakly. It calls this method discontinuous Galerkin method [2].

In this paper, we proposed the new element model on the plate bending problems by using HPM based on the dG method. In the first part of the paper, we have given brief formulation of proposed method, and in second part, we have given some numerical results.

2. Governing equation and hybrid-type virtual work

2.1. Governing equation. Let $\Omega \subset \mathrm{R}^{n_{\dim}}$, with $(1 \leq n_{\dim} \leq 3)$, be the reference configuration of a continuum body with smooth boundary $\Gamma := \partial\Omega$ and closure $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$. Here $\mathrm{R}^{n_{\dim}}$ is the n_{dim} dimensional Euclidean space.

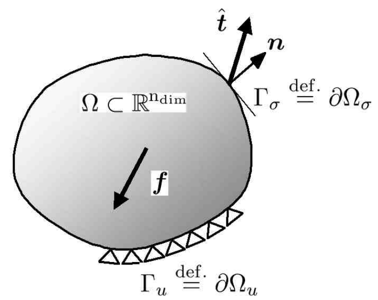


Fig. 1. Reference configuration Ω and smooth boundary $\partial\Omega$

The local form of the equilibrium equation for a deformable body is as follows:

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} = 0 \quad in \quad \Omega, \tag{1}$$

$$\sigma = \sigma^t \quad in \quad \Omega, \tag{2}$$

where, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathrm{R}^{n_{\dim}}$ is the body force per unit volume, $\sigma : \bar{\Omega} \to \mathrm{S}$ is the Cauchy stress tensor respectively. Here, $\mathrm{S} = \mathrm{R}^{(n_{\dim}+1)\cdot n_{\dim}/2}$ is the vector space of symmetric rank-two tensor and $\mathbf{e}_i$ is the standard base vector of $\mathrm{R}^{n_{\dim}}$, so that the stress tensor becomes $\sigma = \sigma_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, where $\otimes$ denotes a tensor product. $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \to \mathrm{R}^{n_{\dim}}$ is a displacement field of particles with reference position $\mathbf{x} \in \Omega$. We write this displacement field to be $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ and denote the infinitesimal strain tensor by

$$\varepsilon = \nabla^s \mathbf{u} := \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t\right], \tag{3}$$

where $\nabla := (\partial/\partial x_i)\,\mathbf{e}_i$ is the differential vector operator, ∇^s shows the symmetry part of ∇.

Then, we assume that the boundary $\Gamma := \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$.

$$\Gamma = \overline{\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma}, \;\; \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \tag{4}$$

here $\Gamma_u := \partial_u\Omega \subset \partial\Omega$ where displacement are prescribed as

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}} \ \ (given) \tag{5}$$

where as $\Gamma_\sigma := \partial_\sigma\Omega \subset \partial\Omega$ where tractions $\mathbf{t} := \sigma\mathbf{n}$ are prescribed as

$$\sigma|_{\Gamma_\sigma}\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}} \ \ (given). \tag{6}$$

Here $\hat{\mathbf{n}}$ is the field normal to the boundary Γ_σ. The constitutive equation to the elastic body is provided as follows by using the elasticity tensor $\mathbf{C}$.

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon. \tag{7}$$

2.2. Virtual work equation (weak forms). Let denote by $\boldsymbol{U}$ the space of admissible displacement field, defined as

$$\mathrm{U} :=? \left\{\mathbf{u} : \Omega \to \mathrm{R}^{n_{\dim}} | \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}}\right\}. \tag{8}$$

And, let denote by $\boldsymbol{V}$ the space of admissible virtual displacement field, defined as

$$\mathrm{V} := \left\{\delta\mathbf{u} : \Omega \to \mathrm{R}^{n_{\dim}} | \delta\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = 0\right\}. \tag{9}$$

We now use equation (1) and integrate volume of the body to give a weak form of the static equilibrium of the body as

$$\delta W := \int_\Omega (div\,\sigma + \mathbf{f}) \cdot \delta\mathbf{u}\, dV = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathrm{V}. \tag{10}$$

A more common and useful expression can be derived to give the divergence of the vector $\sigma\delta\mathbf{u}$ as

$$div\,(\sigma\delta\mathbf{u}) = (div\,\sigma)\cdot\delta\mathbf{u} + \sigma : \mathrm{grad}\,\delta\mathbf{u}. \tag{11}$$

Using this equation together with the Gauss theorem enable equation (10) to be rewritten as

$$\int_\Omega \sigma : \mathrm{grad}\,\delta\mathbf{u}\, dV - \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}}\cdot\delta\mathbf{u}\, dS = 0 \quad \forall\delta\mathbf{u} \in \mathrm{V}. \tag{12}$$

This equation is virtual work equation. If $\mathbf{u}$is the weighing function, this is a weak forms. It is $\mathrm{U} \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$ and $\mathrm{V} \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$ where denotes the Sobolev space $\mathrm{H}^1(\Omega)$ of function possessing space integrable derivatives.

2.3. Hybrid-type virtual work equation. Let Ω consist of M sub-domains $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ with the closed boundary $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ as shown in Figure 2.

That is

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{M} \Omega^{(e)} \quad here \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \ \ (r \neq q). \tag{13}$$

In what follows, we assume that the closure $\bar{\Omega}^{(e)} := \Omega^{(e)} \cup \partial\Omega^{(e)}$.

We denoted by $\Gamma_{<ab>}$ the common boundary for two sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$ adjoined as shown in Figure 3, and which is defining as

$$\Gamma_{<ab>} := \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)}. \tag{14}$$

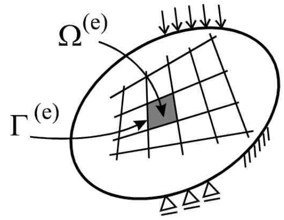


Fig. 2. Sub-domain $\Omega^{(e)}$

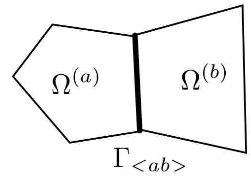


Fig. 3. Common boundary $\Gamma_{<ab>}$ of sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$

The relation for $\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}$ and $\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}$ are following:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \ \ on \ \ \Gamma_{<ab>}. \tag{15}$$

They are the displacements on the intersection boundary $\Gamma_{<ab>}$ in sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$.

This subsidiary condition is introduced into the framework of the variational equation (12) with Lagrange multipliers λ as follows:

$$H_{<ab>} := \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda \cdot \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}\right) dS, \tag{16}$$

where $\delta\,(\bullet)$ shows the variation of $(\bullet)$ Physical meaning of the Lagrange multiplier λ is equal to the surface force on the intersection boundary $\Gamma_{<ab>}$.

$$\lambda = \mathbf{t}^{(a)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}) = -\mathbf{t}^{(b)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}), \tag{17}$$

where $\mathbf{t}^{(a)}$ and $\mathbf{t}^{(b)}$ are the surface force on the intersection boundary in sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$. The hybrid type virtual work equation can be described as follows about M subdomain and N intersection boundary:

$$\begin{gathered}\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}} \sigma : \operatorname{grad}(\delta\mathbf{u}) dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u} dV\right) - \sum_{s=1}^{N}\left(\delta\int_{\Gamma_{<s>}} \lambda(\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) dS\right) - \\ - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}}\cdot\delta\mathbf{u} dS = 0 \ \ \forall\delta\mathbf{u} \in \mathrm{V}.\end{gathered} \tag{18}$$

3. Independent displacement field and relative displacement

3.1 3D displacement fields. In the following work, we consider three-dimensional displaced field $\mathbf{u} \in \mathrm{U}$ with $\mathrm{n}_{dim} = 3$ and carry out Taylor's expansion of displacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ for point $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p) \in \Omega^{(e)}$ from $\Omega^{(e)}$ arbitrary domain. Consequently, the second-order displacement field in the arbitrary sub-domain $\Omega^{(e)}$ is as follows by matrix form:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)}\mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)}\varepsilon^{(e)} + \mathbf{N}_{gx}^{(e)}\varepsilon_{,x}^{(e)} + \mathbf{N}_{gy}^{(e)}\varepsilon_{,y}^{(e)} + \mathbf{N}_{gz}^{(e)}\varepsilon_{,z}^{(e)}, \tag{19}$$

where

$$\mathbf{N}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z & -Y \\ 0 & 1 & 0 & -Z & 0 & X \\ 0 & 0 & 1 & Y & -X & 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & Y/2 & 0 & Z/2 \\ 0 & Y & 0 & X/2 & Z/2 & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & Y/2 & X/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{gx}^{(e)} = \begin{bmatrix} X^2/2 & -Y^2/2 & -Z^2/2 & 0 & -YZ/2 & 0 \\ 0 & XY & 0 & X^2/2 & ZX/2 & 0 \\ 0 & 0 & ZX & 0 & XY/2 & X^2/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{gy}^{(e)} = \begin{bmatrix} XY & 0 & 0 & Y^2/2 & 0 & YZ/2 \\ -X^2/2 & Y^2/2 & -Z^2/2 & 0 & 0 & -ZX/2 \\ 0 & 0 & YZ & 0 & Y^2/2 & XY/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{gz}^{(e)} = \begin{bmatrix} ZX & 0 & 0 & YZ/2 & 0 & Z^2/2 \\ 0 & YZ & 0 & ZX/2 & Z^2/2 & 0 \\ -X^2/2 & -Y^2/2 & Z^2/2 & -XY/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = [u_p, v_p, w_p, \theta_x, \theta_y, \theta_z]^t, \;\; \varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^t,$$

$$\varepsilon_{,x} = [\varepsilon_{x,x}, \varepsilon_{y,x}, \varepsilon_{z,x}, \gamma_{xy,x}, \gamma_{yz,x}, \gamma_{zx,x}]^t,$$

$$\varepsilon_{,y} = [\varepsilon_{x,y}, \varepsilon_{y,y}, \varepsilon_{z,y}, \gamma_{xy,y}, \gamma_{yz,y}, \gamma_{zx,y}]^t,$$

$$\varepsilon_{,z} = [\varepsilon_{x,z}, \varepsilon_{y,z}, \varepsilon_{z,z}, \gamma_{xy,z}, \gamma_{yz,z}, \gamma_{zx,z}]^t,$$

$$X = x - x_p, \;\; Y = y - y_p, \;\; Z = z - z_p.$$

3.2. Displacement for thin plate. The thin plate is defining as follows:

$$\Omega := \left\{ (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 | z \in [-t/2, t/2], (x, y) \in A \in \mathrm{R}^2 \right\}, \tag{20}$$

where is plate thickness and A is plate area.

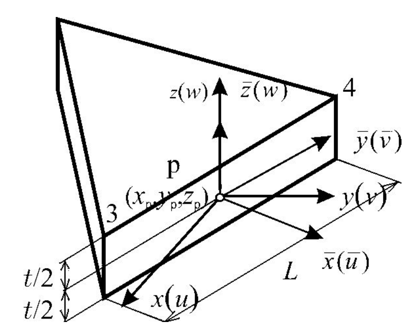


Fig. 4. Thin plate

Since for thin plate we have following Kirchhoff-Love's assumptions:

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{21}$$

we will obtain deflection for thin plate as follows:

$$w = w_p + Y\theta_x^p - X\theta_y^p - \frac{1}{2}X^2\varepsilon_{x,z}^p - \frac{1}{2}Y^2\varepsilon_{y,z}^p - \frac{1}{2}XY\gamma_{xy,z}^p. \tag{22}$$

Consequently, the displacement at arbitrary point will be:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{Z}_M\mathbf{N}_{Md}^{(e)}\mathbf{d}_M^{(e)} + \mathbf{Z}_M\mathbf{N}_{Mq}^{(e)}\varepsilon_M^{(e)}, \tag{23}$$

where

$$\mathbf{Z}_M = \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{N}_{Md}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & Y & -X \end{bmatrix}, \ \mathbf{N}_{Mq}^{(e)} = \begin{bmatrix} -X & 0 & -\frac{Y}{2} \\ 0 & -Y & -\frac{X}{2} \\ -\frac{X^2}{2} & -\frac{Y^2}{2} & -\frac{XY}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_M^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_p \\ \theta_x^p \\ \theta_y^p \end{Bmatrix}, \ \varepsilon_M^{(e)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,z}^p \\ \varepsilon_{y,z}^p \\ \varepsilon_{xy,z}^p \end{Bmatrix}, \ \mathbf{u}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \\ w^{(e)} \end{Bmatrix},$$

(23) we can write by matrix form:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{Z}_M\mathbf{N}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)}, \tag{24}$$

where

$$\mathbf{N}^{(e)} = \left\lfloor \mathbf{N}_{Md}^{(e)}\mathbf{N}_{Mq}^{(e)} \right\rfloor, \ \ \mathbf{U}^{(e)} = \left\lfloor \mathbf{d}_M^{(e)}\varepsilon_M^{(e)} \right\rfloor^t.$$

3.3. Relative displacement. Now we have to do transformation from global coordinate system to local. The local coordinate system matrix form is follows:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}, \tag{25}$$

where $\mathbf{R}^{(e)}$ is:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

where

$$l = \frac{y_{43}}{L}, \ \ m = -\frac{x_{43}}{L}, \ \ L = \sqrt{x_{43}^2 + y_{43}^2}, \ \ x_{ij} = x_i - x_j.$$

The relative displacement on the intersection boundary will be:

$$\delta_{<ab>} = \sum \mathbf{R}_{<ab>}^{(e)}\mathbf{U}_{<ab>}^{(e)} \tag{26}$$

and the matrix form for relative displacement is:

$$\delta_{<ab>} = \mathbf{Z}_M\mathbf{B}_{<ab>}\mathbf{U}_{<ab>}, \tag{27}$$

where

$$\mathbf{B}_{<ab>}^{(e)} = \left\lfloor \mathbf{R}_{<ab>}^{(a)}\mathbf{N}^{(a)}\mathbf{R}_{<ab>}^{(b)}\mathbf{N}^{(b)} \right\rfloor, \ \ \mathbf{U}_{<ab>} = \left\lfloor \mathbf{U}^{(a)}\mathbf{U}^{(b)} \right\rfloor.$$

4. Discretization for HPM

4.1. Lagrange multiplier and penalty function. Physical meaning of the Lagrange multiplier λ is equal to the surface force on the intersection boundary. Generally, in a hybrid-type variational principle, this multiplier is dealt with as an unknown parameter.

Since it has the meaning that Lagrange multiplier λ is the surface force on the boundary $\Gamma_{<ab>}$ in sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$, the surface force is defined as follows:

$$\lambda_{<ab>} = \mathbf{k} \cdot \delta_{<ab>}. \tag{28}$$

Here $\delta_{<ab>}$ shows relative displacement on the sub-domain boundary $\Gamma_{<ab>}$, and it is shown in three dimensional problem (also plate bending problem) as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{n<ab>} \\ \lambda_{sx<ab>} \\ \lambda_{sy<ab>} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{lll} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_{sx} & 0 \\ 0 & 0 & k_{sy} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \delta_{n<ab>} \\ \delta_{sx<ab>} \\ \delta_{sy<ab>} \end{array} \right\}, \tag{29}$$

where

$$k_n = k_{sx} = k_{sy} = p,$$

where p is a penalty function.

4.2. Discretization for subsidiary condition. The (16) expression we can write by following way:

$$\begin{gathered} \mathbf{H}_{<ab>} = -\delta \textstyle\int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda^t_{<ab>} (\mathbf{u}^{(a)}_{<ab>} - \mathbf{u}^{(b)}_{<ab>}) d\Gamma = \\ = -\delta \textstyle\int_{\Gamma_{<ab>}} \delta^t_{<ab>} \mathbf{k}_{<ab>} \delta_{<ab>} d\Gamma = -\delta \mathbf{U}^t_{<ab>} \textstyle\int_{\Gamma_{xy<ab>}} \mathbf{B}^t_{<ab>} \bar{\mathbf{k}}_{<ab>} \mathbf{B}_{<ab>} d\Gamma_{xy} \mathbf{U}_{<ab>}. \end{gathered} \tag{30}$$

Where

$$\mathbf{U}_{<ab>} = \mathbf{M}_{<ab>} \mathbf{U},$$

here M is a matrix which relates the total degree of freedom and the degree of freedom of each sub-domain. It is similar for virtual displacement:

$$\delta \mathbf{U}_{<ab>} = \mathbf{M}_{<ab>} \delta \mathbf{U}.$$

Then we obtain following equation:

$$\mathbf{H}_{<ab>} = -\delta \mathbf{U}^t \mathbf{K}_{<s>} \mathbf{U}, \tag{31}$$

where

$$\mathbf{K}_{<s>} = \mathbf{M}^t_{<s>} \int_{\Gamma_{xy<ab>}} \mathbf{B}^t_{<s>} \bar{\mathbf{k}}_{<s>} \mathbf{B}_{<s>} d\Gamma_{xy} \mathbf{M}_{<s>},$$

where

$$\bar{\mathbf{k}}_{<s>} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{Z}^t_M \mathbf{k} \mathbf{Z}_M dZ = \left[\begin{array}{lll} \frac{t^3}{12} k_n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{12} k_{sx} & 0 \\ 0 & 0 & t k_{sy} \end{array} \right].$$

4.3. Discretization virtual work equation for each sub-domain. For thin plate theory a reduced form of the constitutive relations is obtained by making $\sigma_z = 0$ and subsequently eliminating ε_z. Strains in thin plate are:

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\ \ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.\end{gathered} \tag{32}$$

After application of thin plate strains we obtain $\bar{D}$ matrix for an elastic isotropic material:

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Next we are bringing strain vector into the matrix using displacement field.

$$\bar{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{L}\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{Z}\mathbf{B}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)}, \tag{34}$$

where

$$\mathbf{B}^{(e)} = \mathbf{L}\mathbf{N}^{(e)},$$

we will have:

$$\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L}\delta\mathbf{u}]^t \sigma d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} \delta\bar{\varepsilon}^{(e)}\bar{\mathbf{D}}^{(e)}\bar{\varepsilon}^{(e)} d\Omega = \left(\delta\mathbf{U}^{(e)}\right)^t \int_{\Omega_{xy}^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)t}\mathbf{k}^{(e)}\mathbf{B}^{(e)} d\Omega_{xy}\mathbf{U}^{(e)}. \tag{35}$$

We have:

$$\mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)}\mathbf{U},\ \ \delta\mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)}\delta\mathbf{U}.$$

As mentioned above, it obtains the following:

$$\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L}\delta\mathbf{u}]^t \sigma d\Omega = \delta\mathbf{U}\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{U} \tag{36}$$

here $\mathbf{A}^{(e)}$ is a matrix which relates the total degree of freedom and the degree of freedom of each sub-domain.

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_{xy}^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)t}\mathbf{k}^{(e)}\mathbf{B}^{(e)} d\Omega_{xy}$$

here

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{Z}^t\bar{\mathbf{D}}^{(e)}\mathbf{Z} dZ = \frac{t^3}{12}\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

The discretization of the body and surface force is as follows:

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta\mathbf{u}^t\mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma^{(e)}} \delta\mathbf{u}^t\mathbf{T} d\Omega = \delta\mathbf{U}^t\mathbf{P}^{(e)}, \tag{38}$$

where

$$\mathbf{P}^{(e)} = \left(\mathbf{A}^{(e)}\right)^t \int_{\Omega^{(e)}} \left(\mathbf{N}^{(e)}\right)^t \mathbf{Z}_M \mathbf{f}\, d\Omega + \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\mathbf{N}^{(e)}\right)^t \mathbf{Z}_M \mathbf{T} d\Gamma.$$

Finally, we obtain following discretized equation:

$$\delta \mathbf{U}^t \left(\sum \mathbf{K}^{(e)} + \sum \mathbf{K}_{<s>}\right) \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^t \left(\sum \mathbf{P}^{(e)}\right) = 0. \tag{39}$$

Since $\delta\mathbf{U}$ is arbitrary, we can write Equation (39) as follows:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{P}, \tag{40}$$

where

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^{(e)} + \sum \mathbf{K}_{<s>}, \quad \mathbf{P} = \sum \mathbf{P}^{(e)} .$$

The discretization equation of this model becomes a simulteniuos linear equation shown in equation (40). Left coefficient matrix $\mathbf{K}$ consists of stiffness in the sub-domain and subsidiary condition on the intersection boundary for the adjacent sub-domain. It can express the discontinuous phenomenon of hinge etc., without changing degree of freedom by changing the value of k of equation (28) to zero.

5. Numerical example.

As numerical examples, we present some simple problems.

At first, we give both-end fixed beam with uniform distributed load. The beam has the following material properties and geometrical properties:

Young's Modulus = 1x10^6 kN/m^2 , Poison's ratio = 0, Length=4m, width=1m and thickness=0.1m, Uniform-distributed-load=1kN/m^2.

It has given comparison between exact solution and HPM results. The results for this case have given by the figures 5 and 6. Here for the moment analytical and numerical solutions are equal.

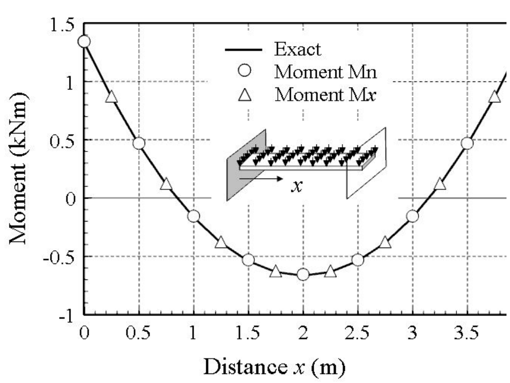


Fig. 5. Moments

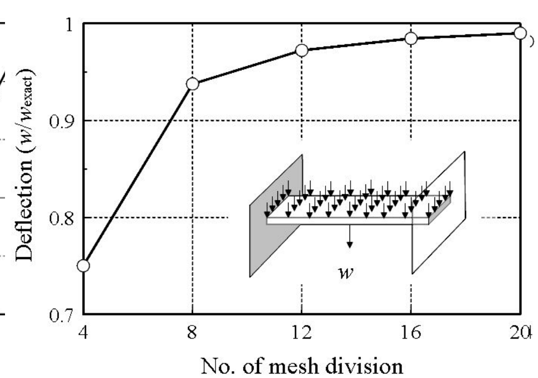


Fig. 6. Ratio of deflections by exact and HPM

The next example is fixed supported circle plate with distributed load. Plate material and geometrical properties are following:

Young's Modulus = $1\text{x}10^6$ kN/m^2 , Poison's ratio = 0, Radius=1m, thickness=0.1m, Distributed Load=1kN/m^2.

In the figure 7, it has also given correspondently contours of moment distribution for xx and xy components and mesh division for circle plate.

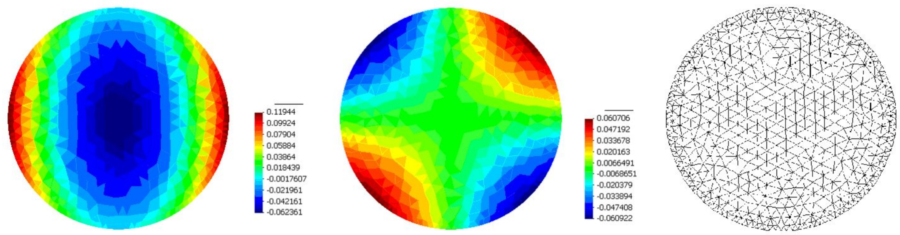


Fig.7 Contours of Moment-xx and Moment-xy distribution and Mesh Division

Also as shown in figure 8 numerical result of the deflection is high accuracy.

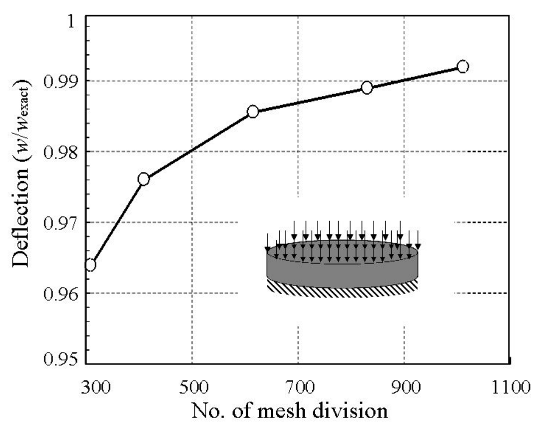


Fig.8 Ratio of deflections by exact and HPM

Next example is simple-supported rectangular plate with concentrated load. The plate properties are following:

Young's Modulus = $1\text{x}10^6$ kN/m^2 , Poison's ratio = 0, Length=4m, width=4m and thickness=0.1m, Concentrated-load=4kN.

In figure 9 and 10, it show the results obtained for this case. Here we obtain high accuracy between exact and HPM results for moment calculations, but not exactly the same solutions.

In figure 11, it has given correspondently contours of moment distribution for xx and xy components and mesh division for simple supported plate with concentrated load.

The last example is again simple-supported plate, but with uniform distributed force, which is equal $1kN/m^2$. Material and geometrical characteristics are the similar with previews example. Results for this case are given in figures 12 and 13.

In figure 14, it has given correspondently contours of moment distribution for xx and xy components and mesh division for this case.

6. Discrete limit analysis

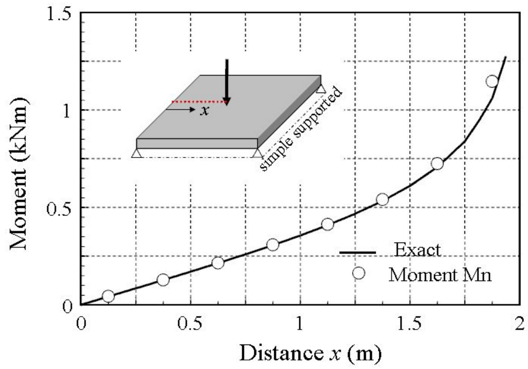


Fig. 9.Moments

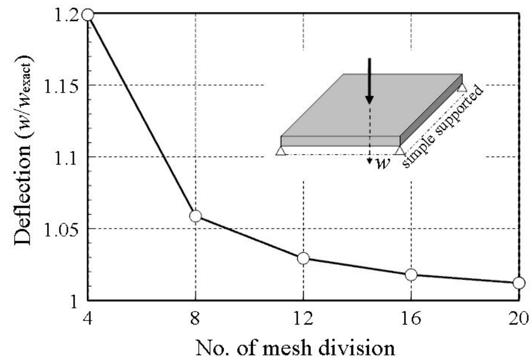


Fig. 10. Ratio of deflections by exact and HPM

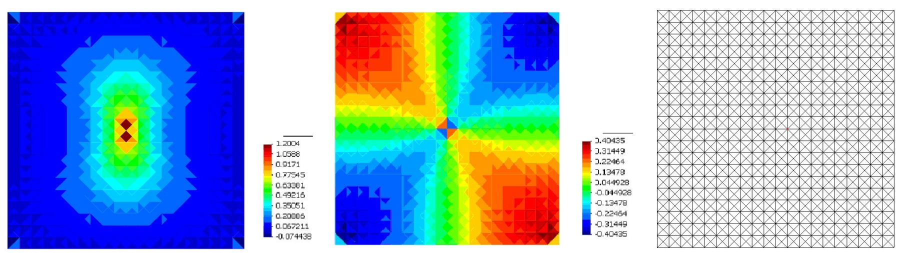


Fig.11 Contours of Moment-xx and Moment-xy distribution and Mesh Division

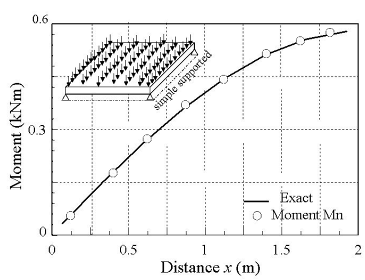


Fig. 12. Moments

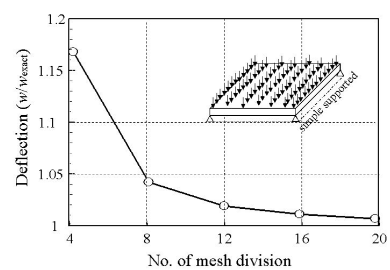


Fig. 13.Ratio of deflections by exact and HPM

6.1. Constitutive Low: In case of plate bending problems yield function has following forms:

$$f(M) = \left(\frac{M_n}{M_{pn}}\right)^2 - 1. \tag{41}$$

If a plastic hinge will occur, the bending moment on intersection boundary is assumed to be zero:

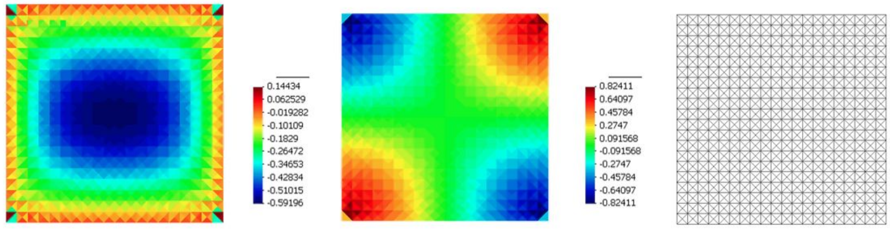


Fig.14 Contours of Moment-xx and Moment-xy distribution and Mesh Division

$$f(M_n) = 0. \tag{42}$$

For this case we can obtain incremental bending moment as follows:

$$\Delta M_n = k^{ep} \Delta \delta, \tag{43}$$

where $\Delta\delta$ is the relative displacement and

$$k^{ep} = \left(k^e - \frac{k^e \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} k^e}{\frac{\partial f}{\partial \lambda} k^e \frac{\partial Q}{\partial \lambda}} \right). \tag{44}$$

6.2. Load Incremental Method: Load at the (i+1)-th step can be calculated by using the load at the i-th step:

$$P^{(i+1)} = (1 - r_i) P^{(i)}, \tag{45}$$

where r_i is a rate of load increment which we can calculate using this equation:

$$f\left(M_n + r\Delta M_n\right) = 0. \tag{46}$$

After solving following equation:

$$\left(\frac{M_n + r\Delta M_n}{M_{pn}} \right)^2 - 1 = 0$$

we will obtain r :

$$r = \frac{M_{pn} - M_n}{\Delta M_n}. \tag{47}$$

In case of bending moment, residual load at the n-th step will be:

$$P^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} [(1 - r_i)] P. \tag{48}$$

Cumulative rate of load increment is as follows:

$$r_{TOTAL} = \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1} [(1 - r_i)] \right) r_k. \tag{49}$$

When $r_{TOTAL} = 1$, iteration is finish.

7. Numerical examples for discrete limit analysis: In case of discrete-limit analysis, we have computed simple supported plate with distributed load. The plate has following geometrical and material properties: Young's Modulus = 1x10^6 kN/m^2 , Poison's ratio = 0, Yield Moment: $M_{pn} = 0.1$Nm, Length=2m,width=2m and thickness=0.1m, Distributed Load=1kN/m^2.

As a result of calculation, it has obtained Load-Displacement curve, which has compared with exact solution and as we can see bellow in the graph numerical and exact solutions are the same:

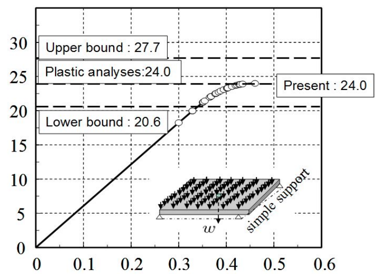


Fig. 15. Load-Displacement Curve

Also it has done comparison between numerical and analytical plastic hinge and we can see bellow for two cases obtained the same results:

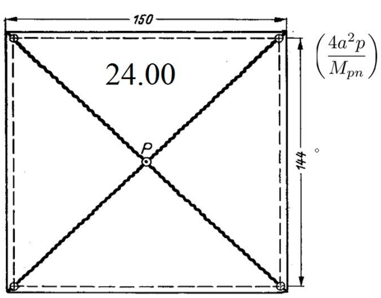


Fig. 16. Theoretical Hinge-line

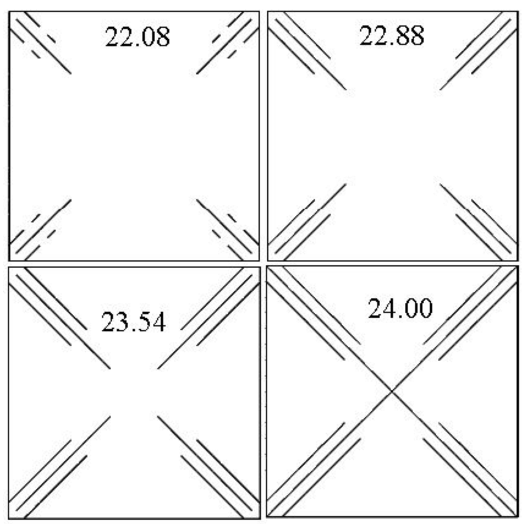


Fig. 17. Numerical Hinge-line

Next example is again simple supported plate with same properties, only now applied concentrated load, which is equal 4kN. For this case, also it has done the same calculations and the same comparisons and in this case also theoretical and numerical results are congruent.

Below given Load-Displacement curve obtained analytically and numerically.

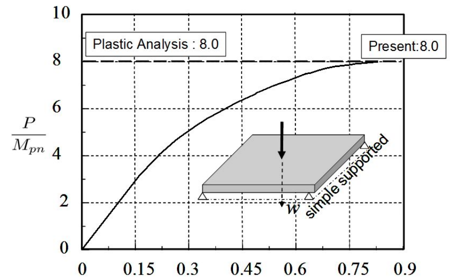


Fig. 18. Load-Displacement Curve Ratio of deflections by exact and HPM

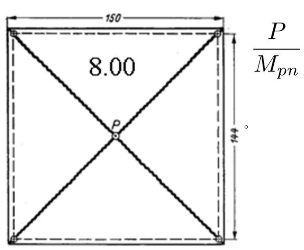


Fig. 19. Theoretical Hinge-line

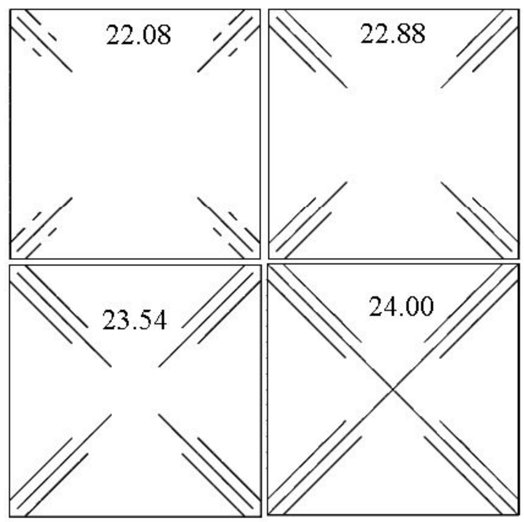


Fig. 20. Numerical Hinge-line

Next it has given hinge lines obtained analytically and numerically.

8. Conclusions. In this paper proposed new approach for solving plate bending problem by using HPM. After comparison of analytical solution and HPM results for deflection and bending moment in case of several examples we can see that we have high accuracy between them. Numerical results for limit load equal to the solutions of plastic analysis. And we can get same collapse pattern about theoretical assumption. As a result, we can conclude that HPM corresponds to all requirements for solving the elastic or elasto-plastic problems such as plate bending.

REFERENCES

[1] *Arnold, D. N.* An interior penalty finite element method with discontinuous elements / D. N. Arnold // SIAM journal on numerical analysis. – 1982. – No. 4. – Vol. 19. – P. 742-760.

[2] *Hughes, T. J. R. K.* On the continuous/discontinuous Galerkin(CDG) formulation of Poisson-Kirkhoff plate theory / Hughes T. J. R ., Garikipati. K. // Computational mechanics-Theory and practice. – 2004.

[3] *Kawai, T.* My challenge in the development of a mixed variational method in solid mechanics / T. Kawai // Applied Mechanics Reviews, Transaction of the ASME. – 2007. – Vol. 60. – P. 51-64.

[4] *Mergheim, J.* A hybrid discontinuous Galerkin/interface method for the computational modeling of failure / J. Mergheim J. et al.// Communications in numerical methods in engineering. – 2004. – Vol. 20. – P. 511-519.

[5] *Ohki, H.* Upper and low bound solution with hybrid-type penalty method / Ohki H., Takeuchi N. // Transactions of JSCES. – 2006. – Paper No 20060020 – P. 1-10.

[6] *Takeuchi, N.* Material nonlinear analysis by using discrete model applied penalty method in hybrid displacement model / N. Takeuchi // Transactions of JSCE. 2001. – Paper № 20010002. – P. 52-62.

[7] *Washidzu, K.* Variational methods in elasticity and plasticity / K. Washidzu. – New York : Pergamon Press, 1968. – P. 238.

Н. Такеучи,А. В. Варданян

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИЗГИБА ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПЕНАЛЬТИ ГИБРИДНОГО ТИПА

Хосей университет, Токио, Япония

Институт механики Национальной Академии наук Армении

Аннотация. В работе рассматривается изгиб пластины численным пенальти методом гибридного типа (HPM-Hybrid-type Penalty Method). Данный метод учитывает в линейных и нелинейных смещениях жесткое смещение, жесткое кручение, деформацию и градиент деформации в каждой подобласти, и описывает дополнительные условия непрерывности смещений в рамках вариационных выражений с лагранжевыми множителями. Вводится пенальти функция, описывающая жесткую пружину, соединяющую каждую подобласть. Шарнирные линии вычисляются с использованием нелинейности в функциях пенальти как пружинных систем. Приводятся примеры решения задач изгиба пластин численным пенальти методом гибридного типа

Ключевые слова: изгиб пластины, метод пенальти, виртуальная работа гибридного типа, разрывный метод Галеркина

Такеучи Норио

доктор наук, профессор, Хосей университет, Токио, Япония

Варданян Анна Ваниковна

аспирант, Институт механики НАН Армении, Ереван

Takeuchi Norio

doctor of sciences, professor, Department of Art and Technology, Hosei University, Tokyo, Japan

e-mail: takeuchi@hosei.ac.jp

Vardanyan Anna Vanikovich

post-graduate student, Institute of Mechanics, Armenian National Academy of Sciences

e-mail: vardanyan_a@yahoo.com

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 195–202

Мы все подобны облакам
Которые внезапно налетают
И уходят в никуда

Из китайской мудрости

Д. Д. Ивлев

ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ. 1. ДО ВОРОНЕЖА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В статье излагаются события, связанные с работой автора в ИМЕХ АН СССР и защитой докторской диссертации

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, предельное состояние

УДК: 539.374

Глеб Константинович в воспоминаниях, опубликованных выше, коснулся событий, свидетелем которых я был, коснулся личностей, с которыми мне также довелось иметь дело. Есть, что вспомнить.

В 1948 году я окончил среднюю школу в Чебоксарах и поступил в Московский университет на мехмат. В нашей группе учились Юрий Андреевич Демьянов и Владимир Павлович Карликов. Я специализировался по механике деформируемого твердого тела, меня интересовала теория пластичности. На четвертом курсе я ознакомился с кандидатской диссертацией Виктора Васильевича Москвитина, посвященной вторичным пластическим деформациям на примере толстостенной трубы и полого шара. Дело в том, что при нагружении за пределом текучести в теле появляются пластические деформации, а при последующей разгрузке за счет внутренних напряжений в теле могут появиться новые, дополнительные пластические деформации.

Алексей Антонович Ильюшин, руководитель работы В.В., назвал эти пластические деформации вторичными. Мне показалось возможным распространить результаты В.В. на случай произвольных тел, это была моя курсовая работа, позже я добавил к ней раздел о повторных нагружениях тел, с теорией приспособляемости я тогда знаком не был.

Мою работу смотрел сам Алексей Антонович и, по-видимому, остался доволен. Когда через много лет я стал смотреть свою работу, то обнаружил, что допустил ряд неточностей.

Поступила 12.12.2008

При построении теории пластичности А.А. проводил разделение определяющих соотношений по признакам простого и сложного нагружений. Довольно скоро я пришел для себя к выводу, что теорию пластичности надо строить так, как все разделы механики сплошной среды – от простых замкнутых моделей к более общим, и что в основе теории пластичности должна лежать теория идеальной пластичности.

В аспирантуре я посещал семинары кафедры теории пластичности, тон, направление на которых задавал Гавриил Семенович Шапиро.

Кандидатскую диссертацию я защитил в МГУ в декабре 1956 года. Надо сказать, что Алексей Антонович в то время очень хорошо относился ко мне, именно по его предложению первым оппонентом выступил В.В. Соколовский, вторым оппонентом был Г.С. Шапиро, вел Совет Ю.Н. Работнов, голосование прошло без сучка и задоринки.

Я не мог устроиться на работу, пока не решился пойти к Алексею Антоновичу и попросить принять меня в Институт Механики АН СССР, директором которого он тогда был. А.А. без разговоров принял меня, я был зачислен в ИМех АН 07.02.1957 г. Не знаю почему, я никаких пожеланий на этот счет не высказывал, я оказался в отделе Ю.Н. Работнова, сам Ю.Н. никаких усилий по зачислению меня в ИМех АН не предпринимал, да я к нему и не обращался.

То, что А.А. принял меня на работу в ИМех АН, было для меня очень большим делом, и я сохраняю глубокую признательность Алексею Антоновичу за этот шаг.

Впоследствии мои отношения с А.А. осложнились, об этом я пишу в “Трех дискуссиях”. Я действительно до сих пор не понимаю, почему А.А. не захотел разобраться в моих замечаниях к работам К.Н. Шевченко, но мне тогда следовало вести себя более осмотрительно и продуманно. Впоследствии у нас с А.А. были столкновения, с безапелляционностью А.А. в ряде случаев я согласиться не мог. У А.А. были свои слабости, у кого их нет, но в моих глазах Алексей Антонович никогда не был интриганом.

Весь 1957 год я чувствовал себя в ИМехе прекрасно, Ю.Н. Работнов был назначен председателем комиссии по прочности газовых турбин, Э.И. Григолюк – его заместителем, я – ученым секретарем. Вместе с Евгением Ивановичем Болдыревым мы организовывали конференции и совещания по прочности газовых турбин, выезжали в Ленинград и Киев, посетили многие заводы и КБ, связанные с газовыми турбинами. Мы работали много и хорошо, наша работа получала одобрение.

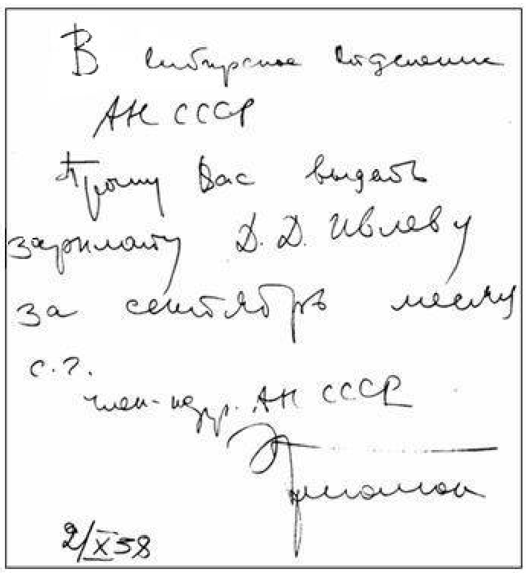
В ИМехе я сблизился с Николаем Адриановичем Талицких, человеком в общем-то необычной судьбы. В то время он редактировал все журналы по механике, Н.А. знали все механики, человеком он был весьма колоритным. В то время я был далек от событий, происходивших в ИМехе, в местком я не избирался, по возрасту не состоял в комсомольской организации. С Глебом Константиновичем в то время, разумеется, мы были знакомы, но тогда близки не были.

Осложнения моего положения в ИМехе начались после моих результатов по работам К.Н. Шевченко весной 1958 года.

В 1958 году началась эпопея с выборами членов Академии Наук по Сибирскому Отделению. Ю.Н. Работнов был избран академиком по СО АН, Э.И. Григолюк – членом-корреспондентом. Я был огорчен неизбранием В.В. Соколовского академиком по СО АН, к В.В. я всегда чувствовал и сохраняю глубокое уважение, думаю, что если бы В.В. был избран, судьба прочности в СО АН была бы иной.

В то время у меня не было ни московской прописки, ни жилья в Москве, я принял предложение Ю.Н. перейти в Сибирское Отделение. В СО АН я числился три месяца. Я побывал в Новосибирске, посмотрел на новые жилые дома, мне понравилось, но тогда же меня начали терзать сомнения. Я уже достаточно знал Ю.Н. и Э.И. и не сомневался, что их пребывание в СО АН не затянется.

Разрешению моих сомнений послужил один эпизод. 1.10.58 г. я отправился в бухгалтерию за получкой, мне сказали, что по указанию Ю.Н. Работнова до особого распоряжения зарплата мне выдана не будет. Я повстречался с Э. И. Григолюком и спросил, что же это такое. Э.И. развел руками, он все понимает, но ничего сделать не может. Мне показалось, что он в курсе дела, что вопрос с ним согласован и он поддерживает действия Ю.Н. К Ю.Н. я объясняться не пошел. Не помню, что я мог совершить: опоздать куда-либо, задержать какую-либо бумагу? Не помню, знаю, что ничего существенного я сделать не мог, но знал, что у меня есть семья: жена, дочь и других источников дохода кроме зарплаты у меня нет.



В Сибирское Отделение
АН СССР
Прошу Вас выдать
зарплату Д. Д. Ивлеву
за сентябрь месяц
с. г.
член-корр. АН СССР
Григолюк
2/X 58

У Ю.Н. не было оснований применять ко мне подобные санкции, тем не менее, новоиспеченный академик счел возможным показать, кто есть кто, применить ко мне "воспитательные меры". На другой день я был настроен решительно и, повстречав Э.И. Григолюка, сказал, что мне необходима зарплата. Григолюк, не знаю что сыграло роль, написал записку в бухгалтерию. В бухгалтерии записка Григолюка не понадобилась, там, по-видимому, осознали, узнали о незаконности своих действий, без всякого выдали мне зарплату. Записку Григолюка я сохранил, привожу эту историческую записку. После этого инцидента совместная работа в СО с Ю.Н. и Э.И. для меня была исключена, я решил идти своим путем. Жалею ли я об этом? Конечно, нет.

Предлог не заставил себя ждать. По проекту в задуманном Институте прочности СО АН должно было быть 14 лабораторий, я спросил Ю.Н., кем он видит меня в этом институте. Он ответил – ученым секретарем. Я сказал, вы стали академиком, Э.И. – членом-корреспондентом, я хотел бы быть заведующим лабораторией. На это Ю.Н. ответил, что зав. лабораториями будут только доктора наук. Я спросил, где вы найдете 14 докторов наук, на что мне ответили, что это не мое дело. На это я сказал, что на таких условиях в СО АН я работать не буду[1]. Мой предлог, точь в точь, слово в слово, использовали В.Д. Клюшников и С.А. Шестериков, которые тоже отказались перейти в СО и ехать в Новосибирск. Это был первый звонок для Ю.Н., за ним последовали другие. В конце концов, Институт прочности в СО создан не был, а Ю.Н. и Э.И. отбыли в Москву.

Итак, я уволился из СО АН и остался с испорченными на тот момент отношениями с А.А. Ильюшиным и Ю.Н. Работновым[2].

Весной 1959 года я подал в МГУ докторскую диссертацию, защита состоялась в октябре этого же года.

Моя докторская диссертация посвящена пространственной задаче теории идеальной пластичности, общей теории предельного состояния тел.

Плоская задача, ведущая начало от Сен-Венана, фундаментальным образом была развита Прандтлем[3]. Результаты, полученные Генки [4], были переосмыслены Прандтлем, он придал им каноническую форму, ему принадлежит их наименование: *Теоремы Генки.* Эти теоремы в интерпретации Прандтля стали знаменитыми. Удивительно, что Генки утверждал, что никаких других семейств линий скольжения, кроме декартовой и полярной сетки координат, не существует, и как легко и изящно Прандтль опрокинул это утверждение, указав на трубу под давлением.

Гигант Прандтль прорубил в дремучем лесу широкую просеку, определив развитие плоской задачи теории идеальной пластичности. После гениальных работ Прандтля последовали работы Гейрингер, Надаи, В.В. Соколовского, Прагера, Хилла и др., придавших теории плоской задачи законченный вид. Теория превратилась в мощную прикладную науку, связанную с определением предельного состояния тел и конструкций, технологией обработки металлов давлением и т.д. Естественное обобщение теории, путем введения в условие предельного состояния среднего давления, привело к развитию статики сыпучих сред, теории предельного состояния грунтов и т.д.

Что касается осесимметричной задачи, Генки указал на ее статическую определимость при условии полной пластичности и предложил приближенный аналитический прием решения.

Ограничившись исследованием плоской задачи, Прандтль (1921 г.) писал: *для разработки пространственной задачи до сих пор не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения.* После этих слов Прандтля задачу построения пространственных соотношений теории идеальной пластичности, сохраняющей все особенности плоской задачи – статическую определимость

[1] Я знаю, что мой отказ огорчил Михаила Алексеевича Лаврентьева, у него каждый человек был на счету. Он знал меня по дискуссии с К.Н. Шевченко, именно по его предложению я добавил пример с изгибом балки, но к Лаврентьеву объясняться я не пошел.

[2] Забегая вперед, скажу, что после защиты диссертации мои отношения с Ю.Н. Работновым быстро восстановились. Ю.Н. предлагал мне переезд в Новосибирск на любых условиях, но у меня уже были обязательства перед Воронежем, к тому же мне там было неплохо.

[3] *Prandtl L.*, ZAMM, Bd. 1, H. 1, S. 15-20 (1921), ZAMM, Bd. 3, H. 6, S. 101-106 (1923), русский первод, Теория пластичности. М. : Ил, 1948.

[4] *Hencky H.*, ZAMM, Bd. 3, H. 4, S. 241-251 (1923), русский первод, Теория пластичности. М. : Ил, 1948.

соотношений, гиперболический тип уравнений, есть все основания назвать *проблемой Прандтля.* Вот эту проблему я и решил.

Александр Юльевич Ишлинский в своей докторской диссертации (1943 г.) представил свои результаты по общей пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности:

$$\sigma_1 = \sigma_2,\ \sigma_1 = \sigma_3 + 2k,\ k - const, \tag{1}$$

где σ_i– главные напряжения, k– предел текучести при сдвиге.

А.Ю. записал условие полной пластичности в виде:

$$\sigma_1' = \sigma_2',\ \sigma_1' = \sigma_3' + 2k,\ \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0, \tag{2}$$

где штрих наверху приписан компонентам девиатора. Согласно (2) получается

$$\Sigma_2' = \sigma_1'\sigma_2' + \sigma_2'\sigma_3' + \sigma_3'\sigma_1' = -\frac{4}{3}k^2,\ \Sigma_3' = \sigma_1'\sigma_2'\sigma_3' = -\frac{16}{27}k^3, \tag{3}$$

где $\Sigma_2',\ \Sigma_3'$ – второй и третий инварианты девиатора напряжений.

Три уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$ плюс два условия пластичности (3) определяют систему пяти уравнений относительно шести компонент напряжений σ_{ij}. Чтобы замкнуть систему уравнений, А.Ю. использовал условие изотропии, определяющее свободу скоростей перемещений, на ребре пересечения условий текучести (3).

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}\sigma_{ji}, \tag{4}$$

где ε_{ij} – компоненты скорости пластических деформаций.

В работе А.Ю. все правильно, но он остановился на полпути к вершине, система уравнений А.Ю. является статически неопределимой, принадлежит к эллиптическому типу.

Вся красота, весь смак соотношений плоской задачи теории идеальной пластичности состоит в том, что имеют место предельные статически определимые соотношения и система уравнений принадлежит к гиперболическому типу.

В основе моих представлений лежал тот факт, что предельное состояние не может быть достигнуто при статически неопределимых состояниях. При статически неопределимых состояниях сохраняется связь между напряженным и деформированным состояниями, изменение напряженного состояния ведет к изменению деформированного состояния и предельное состояние не достигается так, как это имеет место в линейной теории упругости. Я поступил следующим образом: взял соотношения

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \\ &\tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2,\ (xyz; 1, 2, 3,\ l, m, n) \end{aligned} \tag{5}$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие ортогональные косинусы, определяющие ориентацию главных напряжений σ_i в физическом пространстве в декартовой системе координат xyz.

Из (5) и условия полной пластичности (1) следует

$$\sigma_x = \sigma - \frac{2}{3}k + 2kn_1^2,\ \tau_{xy} = 2kn_1 n_2,\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,\ (xyz, 1, 2, 3),\ \sigma = \sigma_{ii}, \tag{6}$$

где n_i– направляющие косинусы, определяющие ориентацию главного напряжения σ_3 в декартовой системе координат xyz.

Согласно (6), компоненты напряжения σ_{ij} выражаются через три независимых переменных, система уравнений становится статически определимой. Я показал, что полученная система уравнений для напряжений принадлежит к гиперболическому типу, характеристические поверхности совпадают с поверхностями действия максимальных касательных напряжений. Далее я воспользовался условиями изотропии, получил три уравнения для определения трех составляющих скоростей перемещения, показал, что эта система уравнений также принадлежит к гиперболическому типу и характеристические поверхности для определения скоростей перемещений совпадают с характеристическими поверхностями уравнений для компонент напряжений и являются поверхностями скольжения.

Все особенности плоской задачи – гиперболический характер уравнений, совпадение характеристик уравнений для компонент напряжений и скоростей пластических деформаций, совпадение характеристик с линиями скольжения (линиями разрыва скорости перемещений) и линиями действия максимального касательного напряжения – все это было сохранено как частный случай, в полученных мной соотношениях. Вот и все. Остальное было делом техники. Просто? Просто, а, следовательно, хорошо. А разве не "просты" гениальные соотношения Сен-Венана для плоской задачи:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_x}{dx}+\frac{\partial\tau_{xy}}{dy}=0,\ \frac{\partial\tau_{xy}}{dx}+\frac{\partial\sigma_y}{dy}=0,\ (\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2,\\ de_x+de_y=0,\ \frac{de_x-de_y}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{de_{xy}}{\tau_{xy}},\end{gathered}\tag{7}$$

где de_{ij} – приращения пластических деформаций.

Пять соотношений (7): два уравнения равновесия, условие пластичности, условие несжимаемости и условие изотропии. Но за этими пятью уравнениями стоит многотомная теория плоской задачи идеальнопластического тела, и ее фундаментальных приложений. Именно на основе теории идеальной пластичности развиты такие ее разделы, как жесткопластический анализ предельного состояния, теории приспособляемости, оптимального проектирования, упругопластических задач, динамики жесткопластических и упругопластических тел и т.д.

Я опубликовал свои результаты в 1958 году, полвека тому назад. Я уже тогда отлично представлял, что я сделал, знал, что эти результаты имеют фундаментальный характер, от них никуда не деться, они распахнули дверь в необъятную и сложную область пространственных задач предельного состояния тел. И если кто-то это не знает, не понимает или не хочет понять – это его проблемы. Как сказал Г. Перельман: *если доказательство правильное, оно не требует никаких знаков признания* (?).

Итак, защита. Председательствовал на Совете А.Ю. Ишлинский, оппонентами были Лев Александрович Галин, Лазарь Маркович Качанов, Гавриил Семенович Шапиро.

Что касается Льва Галина, то он занимался упругопластическими задачами, блестяще решал задачи теории упругости в новых постановках, связанных с наличием областей пластического деформирования. В общем-то он был далек от собственно теории пластичности, но он всегда неизменно, как мог, поддерживал меня. Что же касается Л.М. Качанова и Г.С. Шапиро, то это были специалисты экстра-класса, в теории пластичности рядом с ними поставить кого-либо у нас было трудно.

А.А. Ильюшин прислал в Совет письмо, которое было зачитано, в котором он, разумеется, отвергал мою работу. А.А. никогда не жаловал теорию идеальной пластичности. В моих работах А.А. не разбирался, если бы разобрался, то такое письмо не написал бы, а так – зачем утруждать себя, разбираться, проще надавить авторитетом на членов Совета. Все же в подобных случаях надо подумать и о своем авторитете.

Кстати, где это письмо, сохранилось ли оно, тогда это меня не интересовало, сейчас было бы интересно. А.А. прислал на защиту двух своих бойцов: Александра Михайловича Жукова и Виктора Степановича Ленского. Эти господа были без понятия о результатах работы, тем не менее, они регулярно появлялись у доски с возражениями, которые без труда опровергались. Все же защита продолжалась более четырех часов.

Меня очень эмоционально поддержал Леонид Иванович Седов, пластичность он не знал (позднее Седов расширил свои познания в этой области, но пробелы остались, об этом я еще скажу), но в таких случаях важно не *чтó* говорят, а *кáк* говорят. Всем было видно, что он очень *зá*. Далеко вперед глядел Леонид Иванович. Александр Геннадьевич Курош был возмущен письмом А.А. и поддержал меня.

Для меня была дорогá и волнительна поддержка Михаила Митрофановича Филоненко-Бородича, он был исключительно компетентным и авторитетным ученым в области механики деформируемого твердого тела. М.М. буквально сказал, что мы имеем дело с новым, важным шагом вперед в нашей науке. М.М. был начальником кафедры сопротивления материалов в Военно- инженерной академии им. Куйбышева, он был в генеральской форме с погонами и лампасами в чине генерал-майора инженерно-технических войск. М.М. оставил прекрасный курс сопромата в двух томах, написанный с сотрудниками-учениками, прекрасный курс теории упругости. По мере более подробного знакомства с этим курсом, я всегда открывал новые для себя сведения, я считаю, что курс М.М. занимает свое особое место среди многочисленных курсов теории упругости. Студентом я слушал лекции М.М., по сопромату сдавал ему экзамен, с этим экзаменом связан один забавный эпизод, но об этом как-нибудь, может быть, в следующий раз. Замечу, что М.М. в то время был сотрудником кафедры теории упругости А.А. Ильюшина в МГУ по совместительству. А.Ю. Ишлинский[5] оставил трогательные и очень уважительные воспоминания о Михаиле Митрофановиче.

А.Ю. Ишлинский очень внимательно следил за защитой и в заключение сказал, что он “завидует этим результатам”. Приступили к голосованию. Меня остановил Виктор Васильевич Москвитин, сказал: на, смотри, он был членом Совета, и показал бюллетень с пометой “согласен”. В.В. был одним из ближайших сотрудников А.А. Ильюшина, одним из лидеров партийной организации мехмата, тогда он еще не был доктором наук. В.В. оставил прекрасные монографии и работы по вязкоупругости, в моей памяти он остался исключительно порядочным человеком.

Огласили протокол, были против и воздержавшиеся. Я прошел с некоторым запасом прочности. Итак, защита состоялась, что дальше?

Михаил Митрофанович предложил мне работу на профилирующей кафедре в крупном строительном ВУЗе у своего друга, известного профессора, по отзывам очень порядочного человека, к сожалению, не помню фамилии. Но у меня была “маленькая,

[5] *Ишлинский А.Ю.* Механика. Идеи, задачи, приложения. М. : Наука, 1985. 623 с.

но семья" – жена, дочь, и, повторюсь, у меня не было московской прописки и жилья в Москве. Я принял предложение переехать в Воронеж для работы в Воронежском университете. Под меня 09.12.1959 г. была открыта кафедра упругости и пластичности ВГУ. От этой даты ведет свое начало "Воронежская школа механики".

В этом году в декабре школе исполняется 50 лет, и я начал разбираться, как и что. Я насчитал более 30 докторов, среди которых прямые ученики, "внуки" и даже "правнуки". Прежде всего, я вспоминаю Г.И. Быковцева, И.А. Бережного, В.В. Дудукаленко. К глубокому сожалению, двух первых с нами нет. Сейчас в Воронеже работают такие ученые, как А.Д. Чернышев, А.Н. Спорыхин, Ю.А. Россихин, и М.В. Шитикова и др., в Самаре – Ю.Н. Радаев и А.И. Хромов (ученики Г.И. Быковцева), в Новосибирске – А.Ф. Ревуженко, в Минске – А.В. Чигарев, во Владивостоке – А.А. Буренин, недавно избранный членом-корреспондентом РАН и т. д. Что касается кандидатов наук, то трудно сосчитать, можно сбиться со счета. Я подумываю об издании тома, в который вошли бы лучшие, избранные работы представителей школы. Если будет время и сохранится желание, может быть, выпустим.

Мое пребывание в Воронеже для меня памятно, с Воронежем связаны годы молодости, во время пребывания в Воронеже в нашей семье появился сын, но о воронежском периоде и о том, что было дальше – потом.

D. D. Ivlev

FROM MEMOIRS. 1. TO VORONEZH

The Chuvash State Pedagogic University named after I.Y. Yakovlev

Abstract. In article the events connected with work of the author in IMEH AH the USSR and protection of the thesis for a doctor's degree

Keywords: pressure, deformation, elasticity, plasticity, a limiting condition

Ивлев Дюис Данилович

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, 428000, г. Чебоксары, ул. Карла Маркса, 38

e-mail: ivlev21@mail.ru

Ivlev Dyuis Danilovich

doctor of sciences, professor, Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva, Cheboxary, 428000, st. Karla Marksa, 38.