

虫眼鏡を利用した距離計の作成

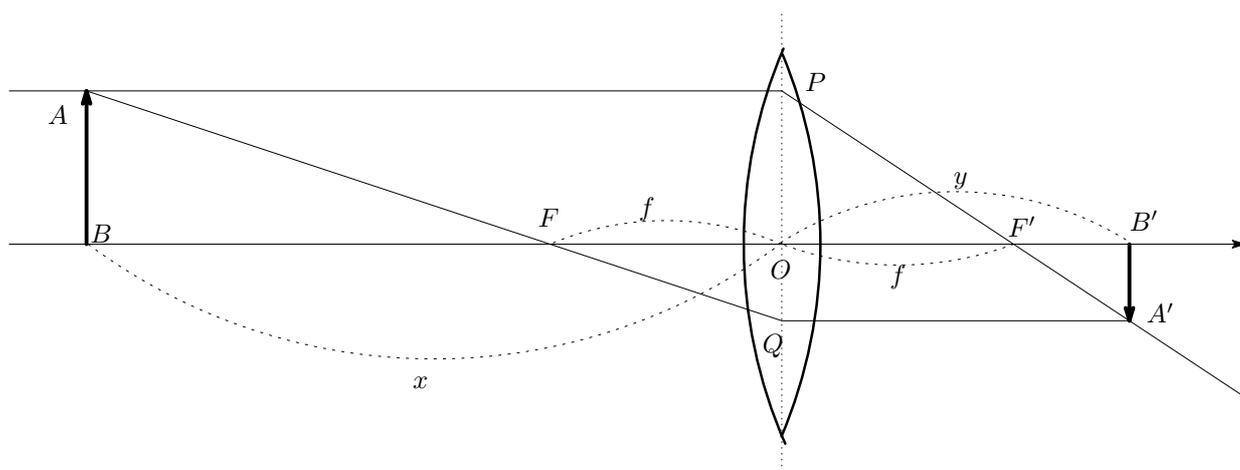
宮本次郎

2002年8月10日

1 はじめに

とにかく授業を1時間まるまるつぶして何かを手作りするというだけで、わくわくしてくる。ましてや、完成してはじめて覗き込んだとき、綺麗に色がついた像が逆転しているのを見て、ほとんどの生徒が歓声をあげる。そして、この距離計をくると回してみる。そのときの生徒の表情をみるためだけにでも、これを授業でやってみる価値があると思っている。

2 原理



凸レンズの軸に平行に入る光は1点に集まる。この点を焦点という。逆に焦点に置いた光は凸レンズを通るとき、レンズの軸に平行に進むように進路を変える。レンズから焦点までの距離を焦点距離という。

ある物体から出た光は四方八方に広がる。そのうち、いくつかの光線は凸レンズを通過し、上に述べたような曲がり方をして、あるところに像を結ぶ。その像の位置を知るためには、四方八方に放射する光の中の2本の特別の光がどう進むかを調べるだけでよい。一つはその物体のてっぺんからレンズの軸に平行に出た光線であり、これはレンズを通過するときに焦点を通るように進路を曲げる。もう一つは、物体のてっぺんからレンズの物体側にある焦点に向かう光線である。これは、焦点を通過してからレンズに入るから、レンズを通過するときにレンズの軸に平行に進路を曲げる。この2つの光線の交わる場所が、物体のてっぺんの像が結ぶところである。

図のように各点に名前をつけよう。

図を見て分かるように、 $\triangle ABF \sim \triangle QOF$ だから、

$$\frac{BF}{OF} = \frac{AB}{QO}$$

である。また、 $\triangle A'B'F' \sim \triangle POF'$ だから、

$$\frac{B'F'}{OF'} = \frac{A'B'}{PO}$$

である。そして、

$$AB = PO, \quad A'B' = QO$$

であることを使うと、

$$\frac{BF}{OF} = \frac{AB}{QO} = \frac{PO}{A'B'} = \frac{OF'}{B'F'}$$

もうひとつ、レンズの焦点距離を f とすると、 $OF = OF' = f$ となるから、結局、

$$BF \times B'F' = f^2$$

という関係にあることがわかる。

レンズから物体までの距離 ($= OB$) を x 、レンズから像までの距離 ($= OB'$) を y とすれば、 $BF = x - f$ 、 $B'F' = y - f$ であるから、この関係は、

$$(x - f)(y - f) = f^2$$

というように表せる。

この原理については生徒の実態に合わせて、別に解説なんかしなくてもよい。けれども、これから距離計を設計するためには知っていたほうがいいたろう。

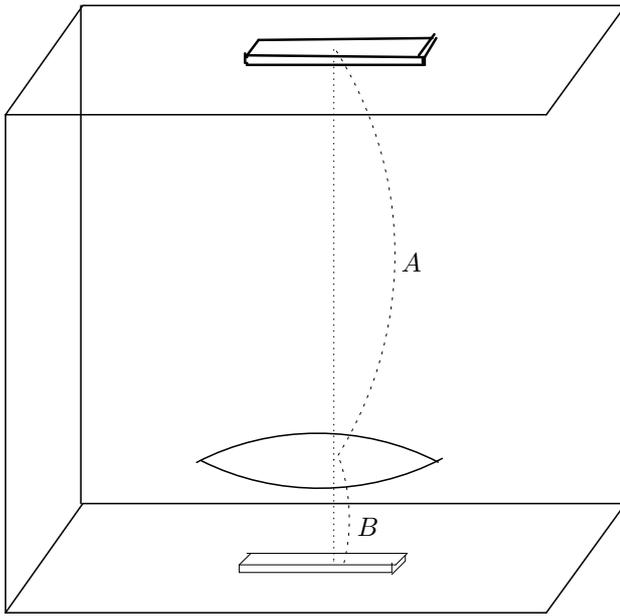
3 設計

まず凸レンズを調達する。文房具店で並んでいるものは1本800円から1000円もする。学童用の「虫眼鏡」があれば、350円ぐらいだろうか。以前授業でやってみたときには、この「虫眼鏡」を使った。焦点距離が10cmぐらいで使い易い。今では100円ショップで「拡大鏡」を100円で購入できるので、一クラス分買ってもしいかなと思うぐらいである。この「拡大鏡」は焦点距離が長めで、距離計の大きさを大きくしなければならない。作った後にいろいろ測定するときには、この方が測り易いかもしれない。

ともかく、自分の調達したレンズの焦点距離をわかっていないと距離計の大きさを決めることができない。まず焦点距離を測定しよう。

3.1 焦点距離の測定

天井で光っている蛍光灯を、この拡大鏡を使って、床に映してみよう。



レンズを動かして、天井の蛍光灯の像のピントを合わせて、そのときの A , B を測定する。このとき、

$$(A - f)(B - f) = f^2$$

という方程式、2次方程式に見えるが実は1次方程式であるが、これを解くと f がわかる。

私が手に入れた100円の拡大鏡には2種類ある。ひとつは直径 8cm ぐらいのもので、パッケージには「拡大率約2.5倍」と書いてある。この拡大鏡の場合、

$$A = 250\text{cm}, \quad B = 20\text{cm}$$

となったので、

$$(250 - f)(20 - f) = f^2, \quad \text{すなわち} \quad 5000 - 270f = 0$$

より、 $f = 18.52\text{cm}$ となった。

私が買ったもう一つの拡大鏡は、レンズの直径が 6cm 弱のもので、パッケージには「拡大率約3倍」と書いてある。この拡大鏡の場合には、

$$A = 260\text{cm}, \quad B = 10\text{cm}$$

となったので、

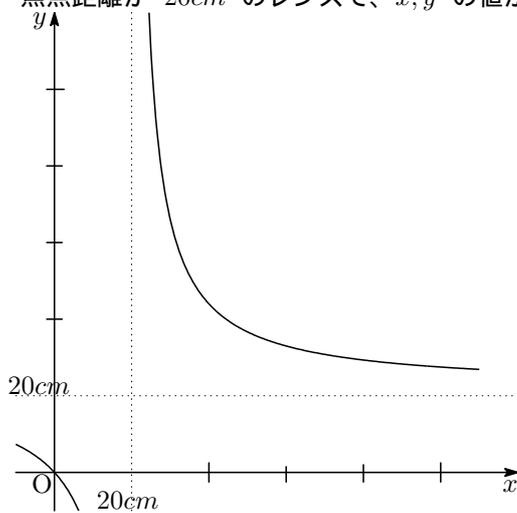
$$(260 - f)(10 - f) = f^2, \quad \text{すなわち} \quad 2600 - 270f = 0$$

より、 $f = 9.63\text{cm}$ となった。

レンズと物体との距離とレンズと像までの距離が、焦点距離だけずらすと反比例しているという原理を知っていれば、こんなにまじめに計算しなくても、 B の値が大体の焦点距離になることはわかる。設計のためには、これでも十分かもしれないが。

3.2 x, y の値の範囲

焦点距離が 20cm のレンズで、 x, y の値がどのように変化しているかグラフから見てみよう。



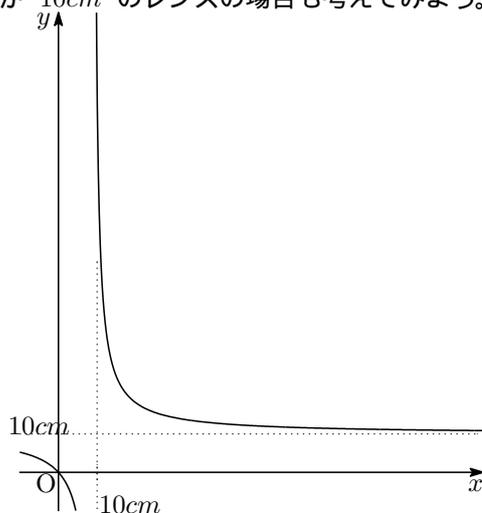
物体からレンズまでの距離は、どのようにでも取れる。しかし、レンズから像までの距離が大きくなるということは、作るべき距離計の箱の大きさも大きくなるということである。材料のこと、出来上がった箱の強度のことを考えると、長さが 30cm の箱というのも、かなりの大きさだ。 y の大きさを 30cm 以内に収めようと思うと、

$$(x - 0.2)(0.3 - 0.2) = 0.2^2$$

より、

$$x = 0.6$$

だから、レンズから 60cm よりも近づくと像を結ぶことは出来ないということになる。焦点距離が 10cm のレンズの場合も考えてみよう。



y の大きさを 30cm 以内に収めようと思うと、

$$(x - 0.1)(0.3 - 0.1) = 0.1^2$$

より、

$$x = 0.15$$

だから、レンズから 15cm よりも近づくと像を結ぶことは出来ないということになる。焦点距離が 20cm のレンズの時には、スクリーンまでの距離が 30cm のときには、物体とレンズの距離は 60cm までは近づけた。焦点距離 10 のときにも、物体とレンズの距離を 60cm まで近づけるだけでいいことにすると、

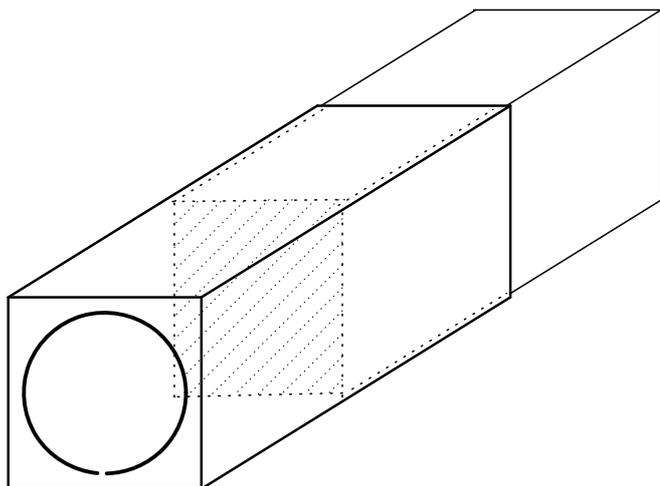
$$(0.6 - 0.1)(y - 0.1) = 0.1^2$$

より、

$$x = 0.15$$

箱の大きさは、レンズからスクリーンまで 15cm が確保できていればいい。

3.3 箱の大きさの決定



図のようなものを作る。二つの四角柱を作る。一つは少し小さめにつくり、もう一つの角柱の中にスライドさせる。内側の角柱の上底（図の斜線部）にスクリーンとなるトレーシングペーパーを張る。外側の箱の上底（図の円が書いてある部分）に凸レンズをつける。

焦点距離が 20cm ぐらいのレンズのときに、レンズからスクリーンまでの距離を 30cm とれるようにできるだろうか。

焦点距離が 10cm ぐらいのレンズのときには、レンズからスクリーンまでの距離はもう少し小さめで充分である。

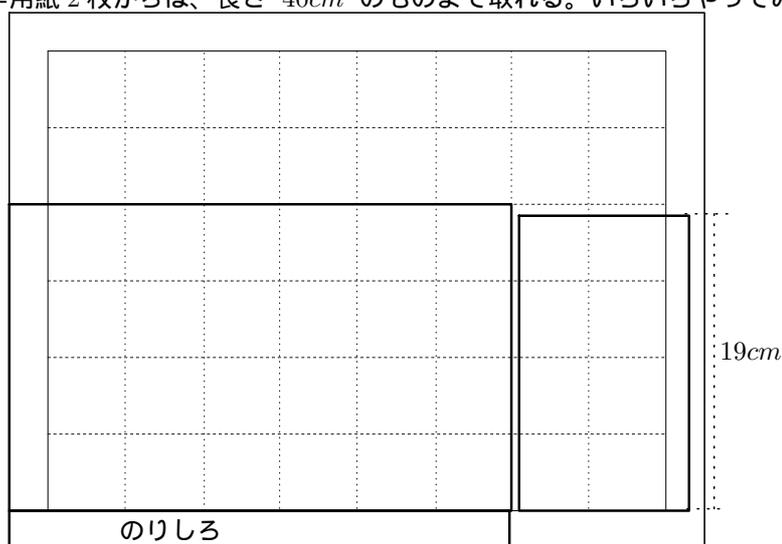
出来上がった距離計にどこまで求めるかによって、距離計となる箱の大きさが必然的に決まってくる。そこが決まれば、あとは、材料や経済性の問題になる。私の場合、工作のし易さ、どこでも手に入る、安いという理由で、「工作用紙」を使うことにした。以前、授業でやったときには、非常に大雑把な設計図だけを与えて材料その他一切を生徒にまかせたところ、牛乳パックやお酒のパックを使って作った生徒もいた。焦点距離が 10cm ぐらいのレンズの場合は、これで充分いいものが作れるが、焦点距離が 20cm ぐらいのレンズの場合には、少し長さが足りないような

気がした。出来上がったあかつきには、これで実験をするわけであるが、その際、レンズと物体との距離、レンズとスクリーンとの距離を測ることになる。そのためには、工作用紙のあの「方眼」は役に立つ。それから、綺麗な像を得るためには、箱の内側に光の反射を防ぐために黒く塗るとよいことがわかった。そのためにも工作用紙の裏側は黒く塗り易い。牛乳パックを黒くするのは対辺である。

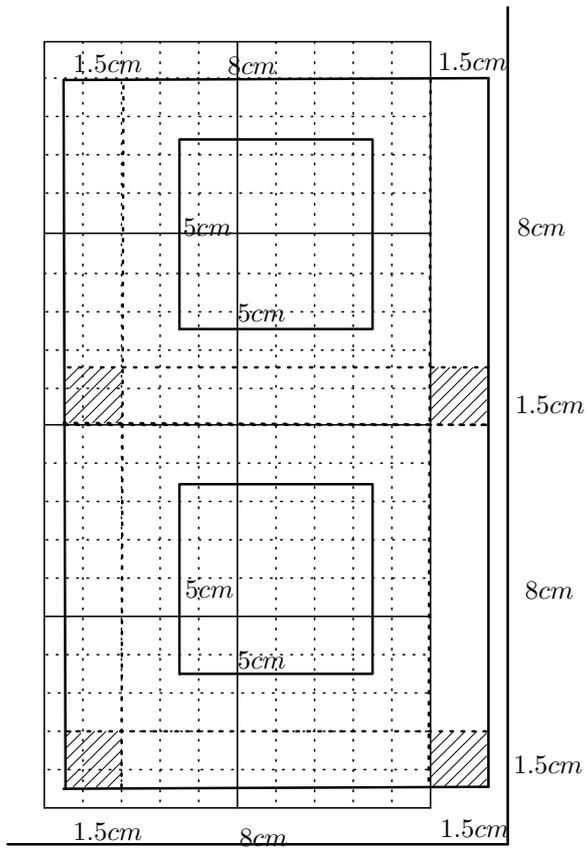
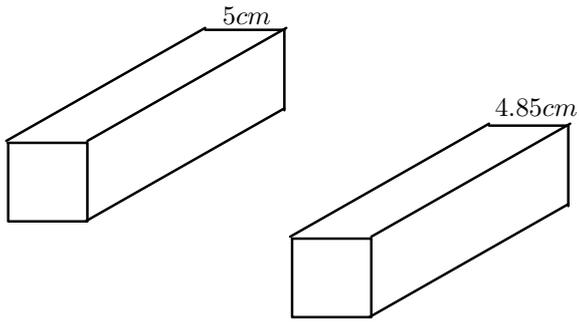
さて、工作用紙は、A3版の大きさのものが、1枚40円~50円である。たて30cm、よこ40cmの範囲で方眼が印刷してある。焦点距離20cmのレンズの場合に、長さ30cmぐらいの角柱を2つ作る。工作用紙は2枚使うことになる。

4 箱の製作

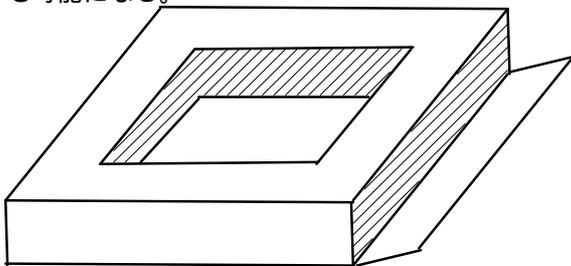
焦点距離が20cmぐらいの場合、レンズからスクリーンまで30cmとれば、70cmぐらいの距離にあるものまでなら大丈夫である。一応角柱の長さを30cmの場合で進めることにする。工作用紙2枚からは、長さ40cmのものまで取れる。いろいろやってみるとよい。



本体の角柱部分は、底辺が1辺5cmのもの（外側…レンズを付ける方）と1辺4.85cmのもの（内側…スクリーンを付ける方）を作る。折る前に、折り目となるところを、ナイフで切り目を入れておく。切れ目は方眼の印刷されている面につける。

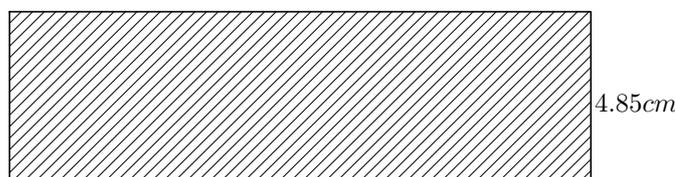


あまった部分から、レンズ取り付け部分を作る。これを作ると、あとでレンズだけ取り替えることも可能になる。



4.1 箱の内側の処理

箱の内側は、光の反射を防ぐために、「黒模造紙」を貼り付ける。方眼が印刷されていない方の面に貼り付ける。



32cm
全部で8枚

内側になる四角柱の先端に「スクリーン」を貼り付ける。スクリーンはトレーシングペーパーを使う。

4.2 製作時の注意

つくと早く覗いてみたいもの。糊が乾く前にスライドさせたりするとゆがんだりするので、あわてないこと。

まず、外側の箱を作る。切り出して、折り目をかるくナイフで切れ目を入れ、裏側に黒模造紙を貼り付ける。黒模造紙は、スライドする部分なので全面むらなく糊をぬること。糊の水分で工作用紙が曲がるので、重しをのせて乾くのを待つ。

外側の箱用の部品が乾くまで、内側の箱用の部品も同じようにして作る。内側の箱は、一辺を1.5mm 小さく作る。小さすぎるような気がするが、黒模造紙を張ったり、糊しろが案外に厚みをもつ。1mm でつくと、窮屈でスムーズにスライドしなかった。これも同じように重しをして乾燥をまつ。

本体の部品が乾くのを待つ間に、レンズ取り付け部分を準備する。展開図で、斜線部分は切り取る場所。出来上がりをよく見て、折り目にナイフで切れ目を軽く入れる。5cm 四方の正方形の穴には、距離計本体を差し込む部分である。この箱の中にレンズを入れる。この箱のサイズは、100円ショップの「拡大鏡」に合わせてあるので、自分で手に入れたレンズのときには、それに合わせて作る必要があるだろう。

ここでちょっと一服して、次に糊が乾いた本体部分の部品を組み立てよう。といっても、糊しろに糊をつけて貼り付けるだけである。定木や鉛筆のようなもので、しっかりと糊しろ部分を押し付けて乾燥を待つ。外側部分と内側部分をつくる。

次にスクリーンとなるトレーシングペーパーを内側の先端につける。工作用紙の方眼は、縁の内側に印刷してある。上の図のように切り出すと、一つの先端は、ぴったり方眼からはじまり、他の先端は縁の部分がある。出来上がった距離計は、このスライド分を測ることになるので、スクリーンは先端がぴったり方眼からはじまるほうに貼り付けるのがよい。

次にレンズ取り付け箱にレンズを入れて、外側の箱をレンズ取り付け箱の正方形の穴に差し込む。また、内側の箱を外側の箱の中にスライドさせて入れる。

これでできあがり。

5 実験

この製作だけでほぼ1時間を使うであろう。距離計を固定して、この距離計のレンズのところから、物体までの距離を測る。そのために「巻尺」を用意する。そして、この物体が綺麗に写るようにピントを合わせ、そのときにのレンズからスクリーンまでの距離を測る。物体をいろいろな距離のところ置き、データを取っていく。

こうやって蓄積したデータが手元があれば、逆に、ある物体をねらってピントを合わせたときのレンズとスクリーンの距離を測れば、その物体までの距離がわかる。

6 どういうふうに授業を組み立てるか

これはひとそれぞれである。こういうふうにつかわないとだめということはない。

6.1 関数のイメージ

関数のためのシェーマとして「ブラックボックス」がある。入力に対して出力を決める「機能」を表す実物としてのブラックボックスは、それなりに、ほのぼのとして役に立つのは確かである。

けれども、この「関数」のイメージはずいぶん「現代的」である。こういう定義が出来る前に、もっと素朴に独立変数と従属変数がぎっちり決まった関係のなかで、 x が動くときと否応なく y も動かざるを得ないというような、ちょっと昔の関数のイメージを、生徒にも経過してほしいときに、この距離計のもつフィーリングがぴったりとするのではないかと思う。個体発生は系統発生を繰り返すというのが本当なら、生徒たちが数学を学ぶときに、いきなり現代的な関数のイメージに飛ぶというのはかわいそうな気がする。

6.2 グラフの平行移動

2次関数のグラフを描くときに、必ず通る「平行移動」。だけど生徒たちが自然と平行移動に出会う場面ってあるだろうか？ いつも天下りに「こうやると平行移動だ」というのでは、ちょっと悲しい。ちょっとがんばってこの距離計の原理を勉強したりすると、最初から物体側の焦点から物体までの距離を x 、スクリーン側の焦点からスクリーンまでの距離を y としておけば、何のことはない反比例そのものなのである。こういう出会いを経験してから「平行移動」をやってもいいのではないか。

昔、数学で2次関数のあとに分数関数をやることになっていた。この距離計の実験をやって、最初に分数関数をやって、自然と平行移動と出会ってからその後に2次関数に入ったこともある。これはこれで結構いいものだった。

6.3 逆関数

「逆関数」なんていうと、生徒は一步後ずさりする。指数関数やっても対数関数やると、三步後ずさりする。だけど、この距離計の経験があると、要するにカメラを距離計に使えるだけなんだと

思うことができる。逆関数を考えるのは、それを考えると便利だからである。そういう感じを体験できるというのも、この「距離計」のよいところではないかと思う。

6.4 分数関数

分数関数はもうなくなってしまったけれど、教科書になくてもこれで2時間ぐらい遊んでもばちはあたるまい。

6.5 身近にある数学

数学の点数を上げるだけの数学教育・・・あとに虚しさだけが残る。小学校の子供たちのように、歓声上がるようなことが、高校でももっとあっていいと思う。この距離計を作って、生徒が喜ぶ姿を見ることができる。これだけでもいいのだ。

その上で、これを使ってちょっと数学を試してみる感じがよい。

7 100円ショップ

100円ショップでは、付き、メモリー一つの電卓が100円で作る。一クラス分買っても4000円。分度器やはさみなど、授業で使ってみたいけど全員分そろえることは稀・・・ということでなかなか実験ができないということもある。100円ショップで売っているもので、どういう実験ができるか、みんなで考えてみるというのもおもしろい。最近ではハノイの塔も100円で売っているし、知恵の輪やパズルの類も100円で買える。100円ショップの材料でできる授業ネタをさがしてみたいね。

8 おわりに

こうやって何か作って楽しむ授業をみんなで集めてみたい。いろんなところから仕入れて、やってみて、面白いネタをさがしましょう。