

ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Trends in Applied Mechanics and Mechatronics

Сборник научно-методических статей

Москва 2015

УДК 531/534

Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. Сборник научно-методических статей / Кирсанов М. Н. (ред). М.: ИНФРА-М, 2015. – 120 с. – ISBN

Сборник научно-методических статей освещает основные направления исследований в механике, мехатронике и робототехнике и предназначен для студентов, аспирантов, преподавателей, инженеров и научных работников, интересующихся по указанным направлениям науки и техники.

(с) ИНФРА-М, 2015

(с) Кирсанов М.Н., 2015

Редколлегия сборника:

Кирсанов М.Н. (гл.редактор), НИУ «МЭИ» (Москва, Россия),

Кобрин А.И., НИУ «МЭИ» (Москва, Россия),

Меркурьев И.В., НИУ «МЭИ» (Москва, Россия),

Подалков В.В., НИУ «МЭИ» (Москва, Россия),

Кадымов В.А., МГГЭУ (Москва, Россия),

Wille R., TU-Berlin (Берлин, Германия),

Gubarenko S. I., University of Toronto (Торонто, Канада).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Подготовка высококвалифицированных специалистов в области механики, математики, мехатроники и робототехники предполагает активное участие в научно-исследовательской работе студентов и преподавателей. Объектами исследований, представленных в настоящем сборнике, являются конструкции балочных пространственных ферм, многослойные нагруженные пластины, мобильные и манипуляционные роботы, чувствительные элементы микромеханических гироскопов, акселерометров и систем на их основе. Поставлены задачи совершенствования и оптимизации конструктивных параметров объектов исследования, построения новых математических моделей и инженерных методов расчета, позволяющих учесть особенности функционирования технических систем.

Результаты анализа пространственных инженерных конструкций, полученные с использованием аналитических и индуктивных методов расчета, новые математические модели и методы исследования динамики микромеханических гироскопов, мобильных и манипуляционных роботов могут быть использованы для проектирования новых типов датчиков, робототехнических и инженерных систем.

Сборник научно-методических статей предназначен для студентов, аспирантов, преподавателей, инженеров и научных работников, интересующихся вопросами механики, математики, мехатроники и робототехники.

Заведующий кафедрой теоретической механики
и мехатроники НИУ «МЭИ», д-р техн. наук

И.В. Меркурьев

Содержание

Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы	4
Тимофеева О. А. Математическое моделирование течения в разветвленной обходной галерее	9
Кадымов В. А. Задача о пластическом сжатии многослойной пластины	13
Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. Идентификация уравнений пластичности при сложном нагружении	22
Кирсанов М. Н. Аналитический расчет прогиба плоской решетчатой фермы треугольного очертания	28
Канатова М. И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы	31
Соловьев И.А., Петрушко И.М., Петрушко М.И. Задача об оценке планируемых показателей объемов производства нефти на основе модернизированного принципа максимума статистической энтропии	35
Подалков В.В., Антонов Е.А. Поведение микромеханического гироскопа L-L типа в режиме вынужденных колебаний	39
Степанов А. С., Сбытова Е. С., Подалков В. В. Математическая модель микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней	47
Тиньков Д. В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами	52
Подалков В.В., Шустова Т.И., Сбытова Е.С. Поведение микромеханического гироскопа L-L типа в режиме свободных колебаний	57
Ахмедова Е.Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой	62
Александров В. А., Кирик К.А., Кобрин А. И. Программное обеспечение комплекса аппаратного моделирования алгоритмов группового управления	66
Киселева А.В., Корецкий А.В. Анализ движения робота на линии в окрестности опор высоковольтных ЛЭП	70
Панкратьева Г.В., Русаков А.М. Вынужденные колебания микромеханического гироскопа на вращающемся основании	83
Корецкий А.В., Созинова Е.Л. Обратная задача кинематики и прямая задача динамики о вертикальном подъеме груза четырехзвенным манипулятором	90
Осадченко Н. В. Метрические соотношения в барицентрическом исчислении	100
Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние вибраций и ударов на динамику микромеханического вибрационного гироскопа	109

Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы

Ларичев С.А.
НИУ "МЭИ"

Расчет прогиба пространственной фермы в аналитической форме представляет важную теоретическую и практическую задачу. При этом следует отметить, что для заданного числа панелей (может быть даже и весьма большого) обычный аналитический расчет несложен и сводится к получению формулы, в которую входят только размеры фермы. Решение же задачи для произвольного числа панелей весьма трудоемко и требует применения метода индукции [1-5]. При этом, все символьные преобразования (достаточно громоздкие) и индуктивный анализ возможны только с применением какого-либо специального математического пакета. В настоящей работе используется система Maple [6].

Ферма 1, базовая модель

Рассмотрим пространственную статически определимую ферму, составленную из трех плоских ферм (рис. 1). Предполагаем, что все стержни конструкции упругие (модуль упругости E) одинакового сечения F , соединены идеальными шарнирами. Число панелей $2n$ (на рис. 1 $n=2$, четыре панели). Длина одной панели – a , ширина в основании – b , высота фермы – h . На ферму действует уравновешенная система вертикальных сил. В середине пролета приложена сила P ; к углам основания приложены четыре силы $P/4$, имитирующие опоры.

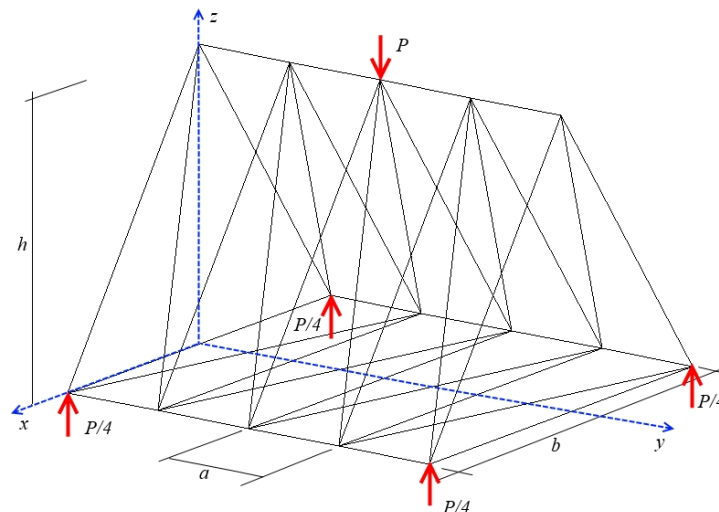


Рис. 1. Ферма 1

Воспользуемся методом вырезания узлов для определения усилий в стержнях. Зададим координаты узлов

$$x_k = b/2, x_{k+1} = -b/2, x_{k+2} = 0, y_k = y_{k+1} = y_{k+2} = a(i-1), z_k = z_{k+1} = 0, z_{k+2} = h,$$

где $k = 3i - 2, i = 1, \dots, 2n + 1$. Указываем номера узлов по концам стержней, условно представляя их векторами V , выбрав один конец стержня за начало, другой за конец. Стержни в поперечных сечениях, $k = 3i - 2, i = 2n + 1$:

$$V_i = [k, k + 2], V_{i+2n+1} = [k + 1, k + 2], V_{i+4n+2} = [k, k + 1];$$

продольные и диагональные, $k = 3i - 2$, $i = 2n$:

$$V_{i+6n+3} = [k + 2, k + 3], V_{i+8n+3} = [k + 1, k + 5], V_{i+10n+3} = [k, k + 4], \\ V_{i+12n+3} = [k, k + 3], V_{i+14n+3} = [k + 1, k + 4], V_{i+16n+3} = [k + 2, k + 5].$$

Система уравнений равновесия узлов запишем в векторном виде

$$G\bar{S} = \bar{B}.$$

G – матрица направляющих косинусов. Компоненты этой матрицы имеют следующий вид:

$$G_{3V_{i,1}-2,i} = l_{x,i} / l_i, G_{3V_{i,1}-1,i} = l_{y,i} / l_i, G_{3V_{i,1},i} = l_{z,i} / l_i, G_{3V_{i,2}-2,i} = -l_{x,i} / l_i, G_{3V_{i,2}-1,i} = -l_{y,i} / l_i, G_{3V_{i,2},i} = -l_{z,i} / l_i.$$

Проекции стержней-векторов на оси координат имеют вид: $l_{x,i} = x_{V_{i,1}} - x_{V_{i,2}}$, $l_{y,i} = y_{V_{i,1}} - y_{V_{i,2}}$, $l_{z,i} = z_{V_{i,1}} - z_{V_{i,2}}$. Длина i -го стержня: $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2 + l_{z,i}^2}$; $\bar{S} = [S_1, \dots, S_m]$ — вектор усилий в стержнях. $\bar{B} = [P_{x,1}, P_{y,1}, P_{z,1}, \dots, P_{x,m}, P_{y,m}, P_{z,m}]$ — вектор внешних нагрузок, приложенных к узлам. $m = 18n + 3$ — число стержней.

По формуле Максвелла-Мора [6,7] определим прогиб середины пролета (вертикальное перемещение точки приложения силы P)

$$\Delta = \sum_{k=1}^m \frac{S_k s_k l_k}{EF},$$

где S_k, s_k – усилия в k -м стержне фермы от приложенной нагрузки и от единичной вертикальной силы. Суммирование идет по всем стержням фермы.

Последовательно решая задачу для ферм с одной, двумя, тремя и т. д. панелями в половине пролета, методом индукции получаем следующую формулу

$$\Delta_1 = \frac{P(n(b^2 + 4h^2)^{3/2} + n(b^2 + 4h^2 + 4a^2)^{3/2} + 8a^3 n^3 + b^3)}{32h^2 EF}.$$

Ферма 2. Строительный подъем

Рассмотрим конструкцию, отличающуюся от фермы 1 малым углом ε подъема нижней панели (строительный подъем) (рис. 2 и рис. 3). Строительный подъем предусмотрен для компенсации прогиба фермы от действия собственного веса.

Для нахождения прогиба середины пролета сделаем аналогичные операции, но координаты узлов по оси z теперь будут заданы следующим образом: $z_k = z_{k+1} = h_1$, $z_{k+2} = h + h_1$, где $h_1 = (i-1) \cdot a \cdot \sin(\varepsilon)$, при $i = 1..(n+1)$, и $h_1 = (2n+1-i) \cdot a \cdot \sin(\varepsilon)$, при $i = (n+2), \dots, (2n+1)$.

Последовательно решая задачу с одной, двумя, тремя и т.д. панелями в половине пролета, получаем формулу, зависящую от n , a , b , h , P , E , F и малого угла ε . Полученные решения раскладываем по малому параметру ε в ряд Тейлора, используя функцию `mtaylor`.

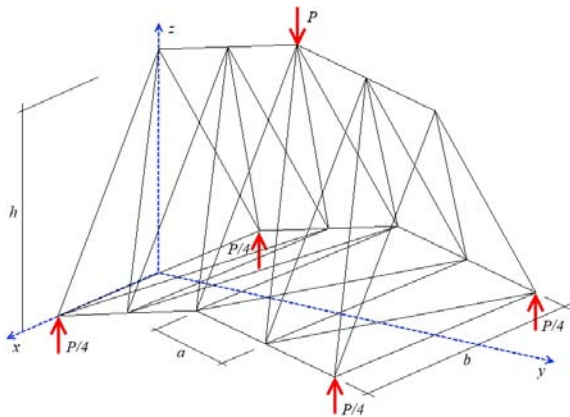


Рис. 2. Ферма 2

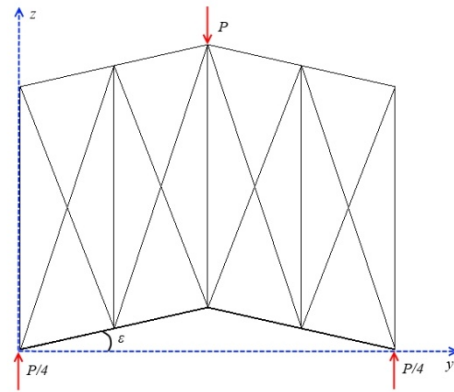


Рис. 3. Ферма 2, фронтальный вид

Для практических расчетов достаточно удерживать в формуле только первую степень ε , так как полагаем $\varepsilon^2 \approx 0$. Воспользовавшись методом индукции, получаем формулу

$$\Delta_2 = \frac{P(n(b^2 + 4h^2)^{3/2} + n(b^2 + 4h^2 + 4a^2)^{3/2} + 8a^3n^3 + b^3)}{32h^2EF} - \frac{P(b^2 + 4h^2)^{3/2}na\varepsilon}{16h^3EF}.$$

Заметим, что первое слагаемое совпадает с Δ_1 . Знак минус перед вторым слагаемым позволяет утверждать, что при увеличении подъема середины пролета прогиб при неизменной нагрузке уменьшается.

Ферма 3, искривление в плане

Рассмотрим еще одну конструкцию. За основу возьмем Ферму 1 (рис. 1) с боковым сдвигом на угол η (по оси x , рис.4 и рис. 5).

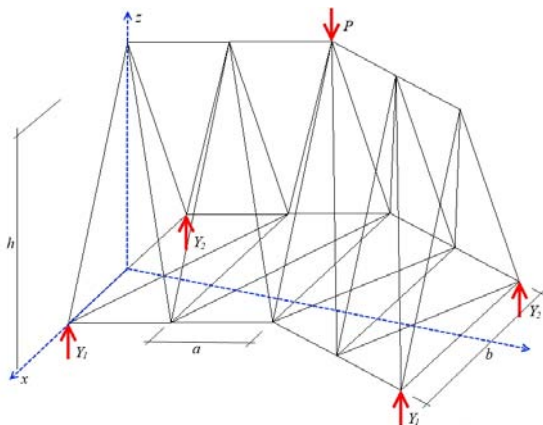


Рис. 4. Ферма 3

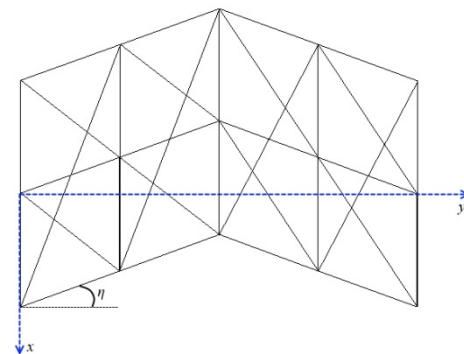


Рис. 5. Ферма 3, вид сверху

Прделаем уже известные операции расчета и индукции вплоть до определения прогиба середины пролета по формуле Максвелла-Мора. Координаты узлов по оси x будут заданы следующим образом: $x_k = b/2 + h_2$, $x_{k+1} = -b/2 + h$, $x_{k+2} = h_2$, где $h_2 = (i-1)a \sin \eta$, при $i = 1, \dots, (n+1)$, и $h_2 = (2n+1-i) \cdot a \cdot \sin \eta$, при $i = (n+2), \dots, (2n+1)$.

Отметим, что силы, приложенные к углам основания и имитирующие опоры, не будут равны $P/4$, как в двух предыдущих примерах. Их находим, используя симметрию конструкции и уравнения статики:

$$Y_1 = P \left(\frac{1}{4} - \frac{a \sin \eta}{2b} \right), Y_2 = P \left(\frac{1}{4} + \frac{a \sin \eta}{2b} \right).$$

Чтобы получить формулу, зависящую от n, a, b, h, P, E, F и малого угла η , последовательно решаем задачу, точно также как и в примере с Фермой 2. Полученные решения раскладываем в ряд Тейлора по малому параметру η , и находим интересующее нас слагаемое при η (как и в первом случае полагаем $\eta^2 \approx 0$). Пользуясь методом индукции, получаем формулу

$$\Delta_3 = \frac{P(n(b^2 + 4h^2)^{3/2} + n(b^2 + 4h^2 + 4a^2)^{3/2} + 8a^3n^3 + b^3)}{32h^2EF} - \frac{Pa((b^2 + 4h^2)^{3/2} - b^3)(n+1)\eta}{8h^2bEF}.$$

Как и следовало предполагать, первое слагаемое совпадает с Δ_1 . Так как перед вторым слагаемым стоит знак минус и $a > 0, b > 0, h > 0$ и $n > 0$ можно утверждать, что при сдвиге середины пролета прогиб при неизменной нагрузке уменьшается.

Пусть задана длина половины пролета фермы: $L = na$. Введем обозначение $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$. На графике (рис. 6) зависимости величины прогиба от числа панелей n обнаруживается минимум.

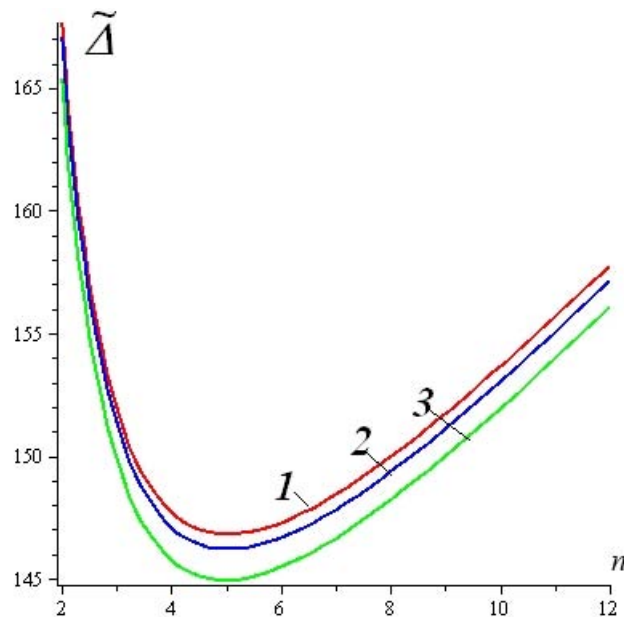


Рис. 6. График зависимости $\tilde{\Delta}(n)$ при $b=3\text{м}, h=4\text{м}, L=20\text{м}, \varepsilon=\eta=0,05$. (Ферма 1, 2, 3)

Оптимальное число панелей в половине пролета n можно найти из условия равенства производной прогиба по n нулю. В Maple эти операции выполняются с помощью операторов **diff** и **solve**. Полученный ответ необходимо округлить. В рассмотренном примере минимум достигается при $n=5$.

Литература

1. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
2. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36–40.
3. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
4. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // Труды Международной научно-методической конференции «Информатизация инженерного образования» ИНФОРИНО-2014 (Москва, 15—16 апреля 2014 г.). М.: Издательство МЭИ, 2014. С. 239–242.
5. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем. // Строительная механика и расчет сооружений. №5. 2011. С. 11–15.
6. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
7. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов/ Под ред. Смирнова А.Ф. М.: Стройиздат, 1984. 415 с.

Математическое моделирование течения в разветвленной обходной галерее

Тимофеева О.А.
ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова

В статье исследуется течение в поворотной области галереи с двумя выходами (рис.1). На выходе потока скорости распределены неравномерно (выше у вогнутой стенки). Для уменьшения максимальных скоростей в [1] после лабораторных исследований было предложено применить гасители скоростей в виде выступов, расположенных на вогнутой стороне вертикальной стенки галереи. Модель разветвленной галереи представляет обобщение модели [2] для галереи с одним выходом.

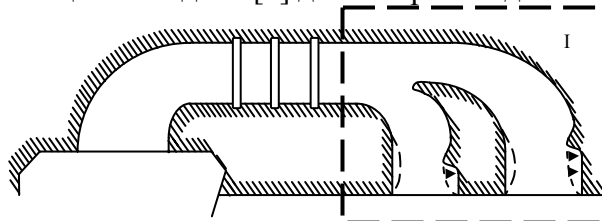


Рис. 1. План обходной разветвленной галереи с выступами

Рассмотрим течение на выделенном участке I (рис.1), расчетная схема которого представлена на рис. 2.

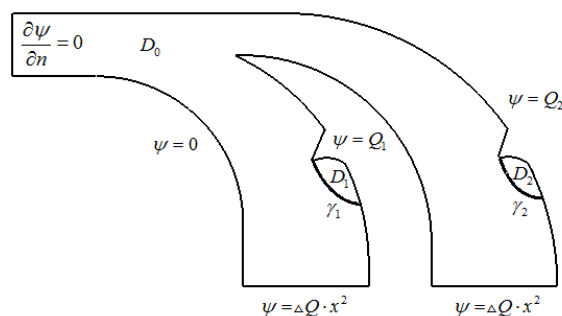


Рис. 2. Расчетная схема

Течение в этой области состоит из трех вихревых течений: вихревое с завихренностью $-\omega_0, \omega_0 > 0$ в области D_0 , вихревое с завихренностью $\omega_1, \omega_1 > 0$ в области D_1 , вихревое с завихренностью $\omega_2, \omega_2 > 0$ в области D_2 .

Для функции тока получаем квазилинейное уравнение Лаврентьева-Гольдштика с разрывной правой частью

$$\Delta\psi = \begin{cases} \omega_0, & z \in D_0 \\ -\omega_1, & z \in D_1 \\ -\omega_2, & z \in D_2 \end{cases}$$

с граничными условиями, указанными на рис. 2; дополнительное условие: $\psi|_{\gamma_1} = Q_1$, $\psi|_{\gamma_2} = Q_2$ так как кривые γ_1, γ_2 являются линиями тока.

Значение Q_1 определяется в точке разветвления галереи при решении задачи для области, показанной на рис.3: $\Delta\psi = \omega_0$, на входе и выходе потока (Γ_1) линии тока

расположены ортогонально границе, т.е. $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, на нижней части границы функция тока равна нулю, а на верхней равна расходу жидкости Q_2 (Γ_2).

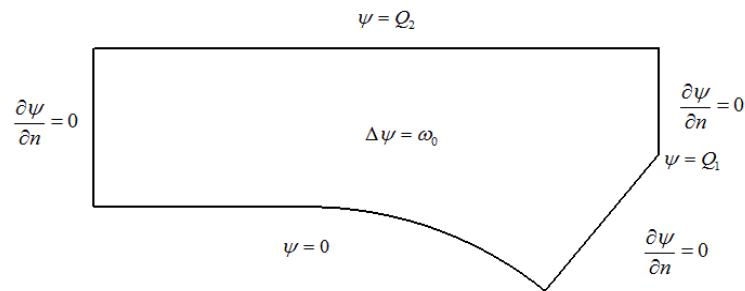


Рис. 3

Линии раздела γ_1, γ_2 (рис.2) находим итеративно. Отдельные итерации представляют уже решение линейного уравнения Пуассона при фиксированных γ_1, γ_2 , форма которого имеет вид:

$$\psi = \omega_1(\psi_{1,1} + \psi_{2,1}) + \omega_2(\psi_{1,2} + \psi_{2,2}) + \omega_0(\psi_{1,1} + \psi_{1,2} + \psi_3 + (x^2 + y^2)/4) + \psi_4,$$

где $\psi_{1,i} = \frac{1}{2\pi} \iint_{D_i} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\zeta$, $i = 1, 2$ - потенциал площади,

$\psi_{2,i}$, $i = 1, 2$ - решение задачи $\Delta \psi_{2,i} = 0$ в D с граничными значениями:

$$\frac{\partial \psi_{2,i}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = -\frac{\partial \psi_{1,i}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1}, \quad \psi_{2,i} \Big|_{\Gamma_2} = -\psi_{1,i} \Big|_{\Gamma_2},$$

ψ_3 - решение задачи $\Delta \psi_3 = 0$ в D с граничными значениями:

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial (-\psi_{1,1} - \psi_{1,2} - (x^2 + y^2)/4)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1}, \quad \psi_3 \Big|_{\Gamma_2} = (-\psi_{1,1} - \psi_{1,2} - (x^2 + y^2)/4) \Big|_{\Gamma_2},$$

ψ_4 - решение задачи $\Delta \psi_4 = 0$ в D с граничными значениями: $\frac{\partial \psi_4}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0$,

$$\psi_4 \Big|_{\Gamma_2} = \psi_0.$$

Численная процедура решения интегрального уравнения сводится к линейным системам с последующим использованием для их решения пакета LinearAlgebra системы компьютерной математики Maple [3,4]

$$\begin{bmatrix} E + (-1 + E)B & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \frac{\partial}{\partial n} \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -E + (1 - E)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \psi_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

относительно неизвестных $\begin{bmatrix} \psi_2 \\ \frac{\partial}{\partial n} \psi_2 \end{bmatrix}$.

На линиях γ_i , $i = 1, 2$ раздела вихревых течений используем условие равенства функции тока ψ значению Q_i . На этом этапе корректируем значение ω_i , и происходит исправление линии γ_i на уровень $\psi = Q_i$. Повторяем процесс для новых γ_i , $i = 1, 2$.

На рис. 4 представлены построенные области отрывных течений в галерее с выступом и без. Значения параметров: $Q_1 = 4.613$, $Q_2 = 8$, $\omega_0 = 0.4$. Точность вычислений значений функции тока 0.01. Для галереи с выступом: $\omega_1 = 5.45$, $\omega_2 = 5.08$. Из рисунка видно, что наличие выступа сдвигает область обратного течения, расположенную на нижней границе.

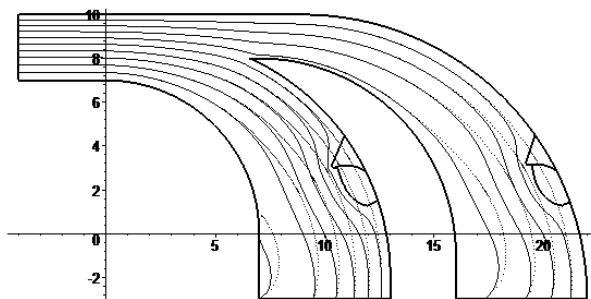


Рис. 4. Наложение линий тока в двух типах галерей

Изменение величин скоростей на уровне $y = 0$ в выходных каналах (для разного распределения скорости на выходе потока) представлено на рисунках 5,6. Для рисунков б скорость на выходе изменяется по формуле $\psi = \Delta Q \cdot x^{10}$. На рисунках 5,6 следующие обозначения: — 1 - для области с выступом, \cdots 2 - для области без выступа.

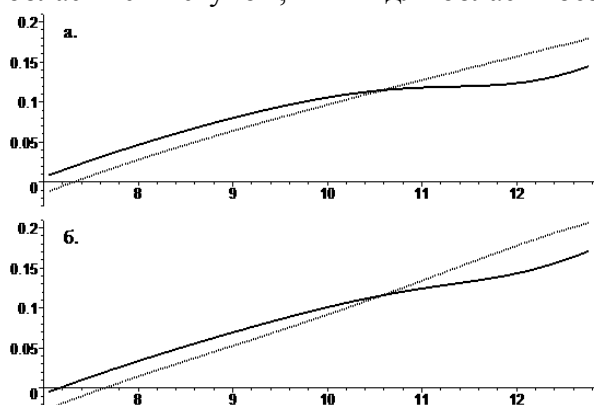


Рис. 5. Графики скоростей для выхода 1

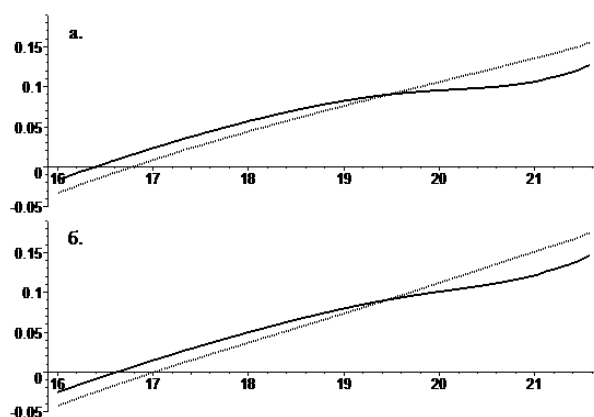


Рис. 6. Графики скоростей для выхода 2

Результаты вычислений подтверждают лабораторные исследования [1], связанные с использованием выступов для отклонения потока, поскольку действительно позволяют снизить скорости у внешних стенок любого канала галереи при любом распределении скоростей течения, что обобщает результаты [5,6].

Литература

1. Городенский Н.Б., Эндер Г.В. Гаситель вредных скоростей воды в выходных галереях судоходных шлюзов, Авторское свидетельство на изобретение №36916; 31.05. 1934.
2. Vasin A.V., Timofeeva O.A. Modeling zones of eddy currents in water-supply galleries of locks//Power Technology and Engineering. 2013. v.47. no.2. pp.17-21.
3. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
4. Кирсанов М.Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
5. Goloskokov D.P., Vasin A.V. Simulation of the Dynamic Loads and Calculation of Plane Lock Bypass Galleries. // Proceedings of ICCTPEA-2014, Saint-Petersburg, Russia, June 30 – July 04, 2014. p.201-202. (IEEE Catalog number CFP14BDA-USB).
6. Васин А. В. Определение линии раздела областей вихревых течений // Вестник С.-Петербур. ун-та. Сер.10. 2013. Вып.1. с. 3-10.

Задача о пластическом сжатии многослойной пластины

Кадымов В. А.
МГТУ

1. Плоская задача о сжатии тонкой пластической полосы толщиной $2h(t)$ между двумя сближающимися плитами относится к одной из немногих задач механики пластических тел, которая имеет точное решение. В предположениях, что в плоскости течения (в вертикальном разрезе) касательные напряжения не зависят от поперечной координаты, Л.Прандтль [1, 2] получил решение относительно напряжений

$$\sigma_{xz} = -\frac{\tau_s}{h}z, \quad \sigma_{zz} = \tau_s \left(\frac{x}{h} - c_0 \right), \quad \sigma_{xx} = \tau_s \left(\frac{x}{h} - c_0 + 2\sqrt{1 - \frac{z^2}{h^2}} \right) \quad (1)$$

которое Надаи дополнил кинематикой течения

$$v = -v_0 \frac{z}{h}, \quad u = v_0 \left(\frac{x}{h} + 2\sqrt{1 - \frac{z^2}{h^2}} + c_1 \right). \quad (2)$$

Здесь τ_s – предел текучести материала полосы на сдвиг; $v_0 = -\frac{dh}{dt}$ – скорость сближения плит; c_0, c_1 – постоянные, которые определяются из краевых условий. Отметим, что решение (1),(2) тем точнее описывает процесс пластической осадки, чем тоньше слой ($h/L \ll 1$, L – характерный линейный размер полосы). Подчеркнем, что решение Прандтля-Надаи (1), (2) удовлетворяет краевым условиям как на свободных концах полосы, так и в центральной части в интегральном смысле. Поэтому принято считать, что данное решение справедливо вдали от середины растекающегося пластического слоя, и от ее свободных концов (аналог принципа Сен-Венана). В работе [1] проведен анализ решения Прандтля-Надаи, предложены гипотезы, на основе которых построена осредненная по толщине слоя эффективная математическая теория течения в тонком пластическом слое (ТТПС). На контактных поверхностях принимается условие полного проскальзывания материала, а касательные напряжения достигают максимального значения, равного пределу текучести материала слоя на сдвиг [3]. В рамках этой модели А.А. Ильюшин сформулировал краевую задачу общего вида (которую условно принято называть моделью «вязкой жидкости» в силу того, что осредненные по толщине физические уравнения среды напоминают уравнения линейно-вязкой жидкости с коэффициентом трения, зависящим от времени [1, с.192-219]) в области с подвижной границей относительно трех неизвестных функций – контактного давления и двух компонент скорости течения. Для случая свободного растекания пластического слоя, при котором отсутствуют кинематические ограничения в плоскости течения, он указал на возможность упрощения постановки до модели «идеальной жидкости», в которой пренебрегаются касательными напряжениями. Разработаны различные математические методы решения задач (метод аналогий с песчаной насыпью, метод преобразований Лежандра, вариационные методы), с которыми можно ознакомиться в [4]. Исследована кинематика процесса растекания пластического слоя, выведено дифференциальное уравнение параболического типа для определения плоского в плане контура области, занятой растекающимся пластическим слоем, представлены классы решений подобия этого уравнения [5]. Получены другие формы представления эволюционного уравнения растекания пластического слоя; установлено, что уравнение

растекания пластического слоя является частным случаем нелинейного уравнения теплопроводности [6].

ТТПС была обобщен на горячие процессы. Исследована плоская задача о сжатии предварительно нагретой полосы холодными внешними телами [1, с. 243-288]. В результате интенсивного теплообмена образуются приконтактные слои затвердевания. Для определения истинной границы течения используется принцип минимума мощности внешних сил.

В работе [7] получено решение плоской задачи об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине ($\tau_s = \tau_s(z)$) в изотермической постановке:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = az + b, \quad \sigma_{zz} = -ax - c_0, \quad \sigma_{xx} = -ax - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2}, \\ v = -v_0 \frac{z}{h}, \quad u = v_0 \left(\frac{x}{h} + \frac{2}{h} \int_0^z \frac{az + b}{\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2}} dz + c_1 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

в котором постоянные a, b находятся из краевых условий на контактных поверхностях $z = \pm h$, а c_0, c_1 определяются из соответствующих краевых условий на свободном конце и в центре полосы, которые выполняются в интегральном виде. При этом решение (3) имеет смысл лишь в том случае, если выполнено условие:

$$|\sigma_{xz}| = |az + b| \leq \tau_s(z). \quad (4)$$

В [8] решена плоская задача о пластическом сжатии трехслойной полосы с кусочно-однородными и симметричными свойствами по толщине:

$$\tau_s = \tau_s(z) = \begin{cases} \tau_{s1}, & |z| < h_1 \\ \tau_{s2}, & |z| < h_1 + h_2 \end{cases}; (\tau_{s1} \leq \tau_{s2}),$$

причем допускается проскальзывание вдоль контактных границ между составными слоями.

В [9] решена задача Прандтля для слабо неоднородного по пределу текучести пластического слоя.

2. Ставится и решается плоская задача о сжатии двухслойной биметаллической полосы в рамках модели жесткопластического тела (рис. 1). Предположим, что пластическое течение происходит только в «мягком» слое, а второй слой при этом остается жестким.

Выпишем замкнутую систему уравнений краевой задачи:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4\tau_{s1}^2, \quad (6)$$

$$\frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

Краевые условия задачи:

$$z = 0: \quad \sigma_{xz} = \tau_{s1}; \quad v = 0, \quad (9)$$

$$z = h_1(t): \quad \sigma_{xz} = -\tau_{s1}; \quad v = -v_0 = \frac{dh_1}{dt}. \quad (10)$$

Кроме того, необходимо поставить краевые условия на неизвестной свободной границе $F(x, z, t) = 0$, которая в начальный момент задана уравнением $F(x, z, t_0) \equiv l_0 - x = 0$.

В рассматриваемом случае, при котором течение наблюдается в одном слое, остается в силе решение (3), в котором надо положить $\tau_s(z) \equiv \tau_{s1} = const$.

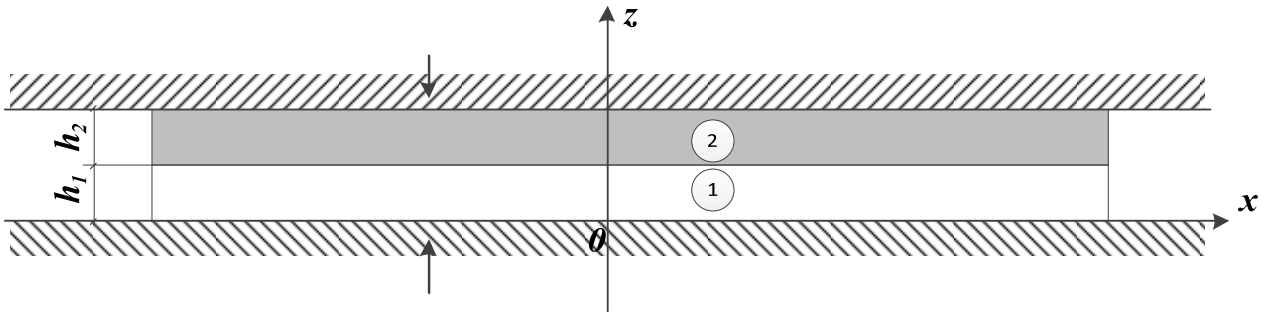


Рис.1. Пластическая осадка биметаллической полосы

Постоянные a, b определяются из следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \tau_{s1} &= \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b, \\ z = h_1: \quad -\tau_{s1} &= \sigma_{xz} = a \cdot h_1 + b, \end{aligned}$$

из которых получаем:

$$b = \tau_{s1}, \quad a = -\frac{2\tau_{s1}}{h_1}$$

Постоянная c_0 находится из интегрального условия на свободной границе $x = \bar{l}$, ($\bar{l} = \frac{l_0 h_0}{h(t)}$ – условная средняя граница):

$$\int_0^{h_1} \sigma_{xx} dz = 0,$$

откуда следует (см. приложение 1), что

$$c_0 = \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1} \left(1 + \frac{\pi h_1}{4\bar{l}} \right) \sim \tau_{s1} \frac{2\bar{l}}{h_1},$$

при этом мы учли условие тонкости слоя ($h/\bar{l} \ll 1$).

Следовательно, поле напряжений имеет вид:

$$\sigma_{xz} = \tau_{s1} \left(1 - \frac{2z}{h_1} \right), \quad \sigma_{zz} = \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0, \quad \sigma_{xx} = \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 + 2\tau_{s1} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2z}{h_1} \right)^2}. \quad (11)$$

Теперь можем найти общее потребное усилие для осуществления процесса пластической осадки

$$Q_{(1)} = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \left(\frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 \right) dx \right| = 2c_0\bar{l} = \frac{4\tau_{s1}\bar{l}^2}{h_1} \left(1 + \frac{\pi h_1}{4\bar{l}} \right) \sim \frac{4\tau_{s1}\bar{l}^2}{h_1}. \quad (12)$$

Итак, в рассматриваемом случае, при котором течет только «мягкий» слой, определили напряжения (11), а также величину потребного усилия Q . Кроме того, как

нетрудно заметить, имеет место условие (13), при котором прямая II располагается ниже прямой I (см. рис.2):

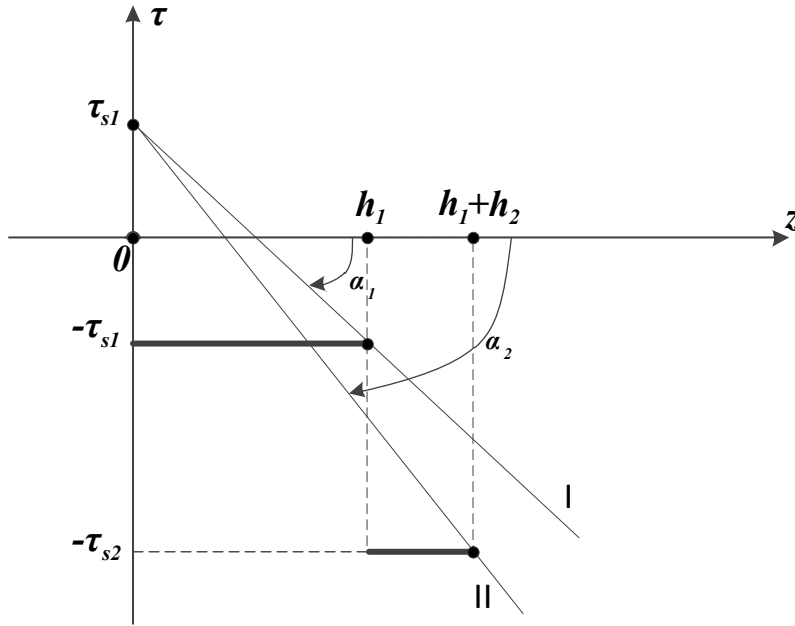


Рис.2. Пластическое течение в двухслойной полосе (а)

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_1} < \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}, \quad (13)$$

которое подтверждает выполнимость условия (4) в области $0 < z < h_1$, занятой «мягким» слоем. Таким образом, в результате осадки пластического слоя уменьшается h_1 до некоторого значения h_{10} , такого что

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_{10}} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_{10} + h_2}, \quad (14)$$

и в дальнейшем пластическое течение распространяется на весь объем двухслойной полосы.

Предположим теперь, что течет вся полоса. Для этого случая можем принять решение (3), в котором надо положить

$$\tau_s(z) = \begin{cases} \tau_{s1}, & 0 < z < h_1 \\ \tau_{s2}, & h_1 < z < h_1 + h_2 \equiv h \end{cases}; (\tau_{s1} \leq \tau_{s2})$$

Аналогично тому, что мы проделали в предыдущем случае, найдем постоянные a, b из соответствующих условий на контакте:

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad \tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b, \\ z = h_1 + h_2: & \quad -\tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot (h_1 + h_2) + b, \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$b = \tau_{s1}, \quad a = -\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}.$$

Напряжения в области течения принимают вид:

$$\sigma_{xz} = -\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)z + \tau_{s1}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}x - c_0, \quad (15)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} x - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - \left(\tau_{s1} - \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} z\right)^2}.$$

Заметим, что условие (4) относительно решения (15) выполняется теперь во всей области

$$0 < z < h_1 + h_2.$$

Иначе говоря, в рассматриваемом случае прямая II располагается выше прямой I (рис.3), то есть

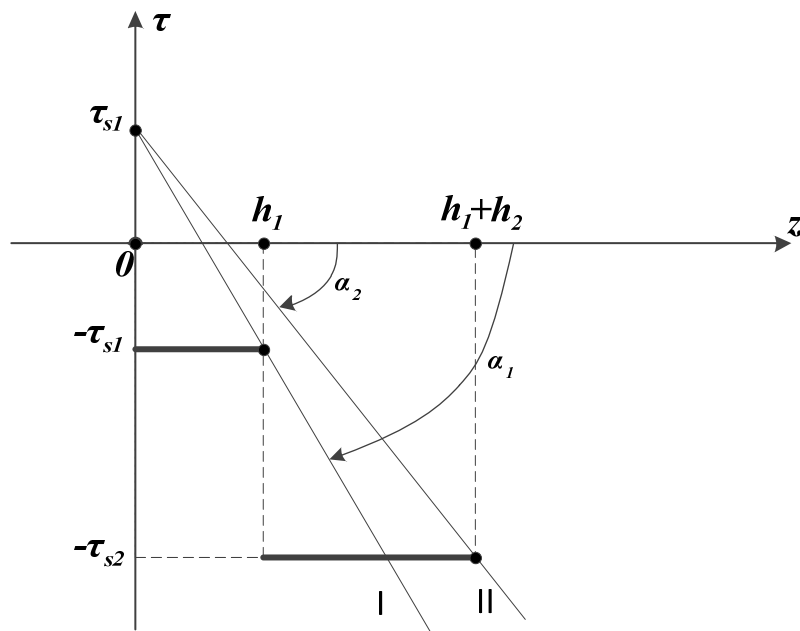


Рис.3. Пластическое течение в двухслойной полосе (б)

$$\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1}. \quad (16)$$

Утверждение 1. Условия (13), (16) в точности совпадают с условием, выведенным А.А. Ильюшиным [1] из принципа минимума мощности внешних сил: истинному положению границы течения (неоднородного по толщине пластического слоя) в данном состоянии соответствует минимум мощности, потребной для протекания процесса. При заданном законе сближения плит минимуму мощности отвечает условие минимума внешних усилий.

Для подтверждения приведенного выше утверждения достаточно вычислить потребное усилие сжатия полосы относительно второго случая, при котором течет вся биметаллическая полоса:

$$Q_{(2)} = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} x - c_0 \right) dx \right| = c_0 2\bar{l}. \quad (17)$$

Найдем постоянную интегрирования c_0 , входящую в (17):

$$\int_0^{h_1+h_2} \sigma_{xx}(x=\bar{l}, z) dz = 0,$$

$$\int_0^{h_1} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} - c_0 + 2 \sqrt{\tau_s^2(z) - \left(-\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} z + \tau_{s1} \right)^2} \right) dz = 0,$$

$$c_0 = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} (1 + O(h/\bar{l})) \sim \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l},$$

где $O(h/\bar{l})$ – бесконечно малая одного порядка с h/\bar{l} .

Подставим последнее выражение в (17):

$$Q_{(2)} = 2\bar{l}^2 \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} (1 + O(h/\bar{l})) \sim 2\bar{l}^2 \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}. \quad (18)$$

Из (12) и (18) видно, что случаю пластического течения всей биметаллической полосы отвечает условие (16), которое в свою очередь совпадает с условием минимума внешних сил.

3. В предыдущем разделе мы представили метод определения истинного положения границы течения неоднородного по толщине тонкого пластического слоя. А теперь, зная границу области течения, можем приложить сказанное к решению задач о пластическом сжатии многослойных пластин. В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу о пластическом сжатии биметаллической пластины (рис.4) в плане формы кольца ($a \leq r \leq b$), у которого внутренний конец остается неизменным (затекание в пазы в одном из тел инструмента), а внешний контур свободно растекается ($b = b(t)$).

Предположим, что пластическое течение происходит во всем объеме так, что выполняется условие

$$\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1}. \quad (19)$$

Отметим, что граница раздела двух пластических сред

$$h_1(t) \equiv z(t) = \frac{h_{10}}{h_{10} + h_{20}} h(t)$$

определяется как решение следующей задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} z; \quad z(t=t_0) = h_{10}; \quad 0 \leq z \leq h_1 + h_2.$$

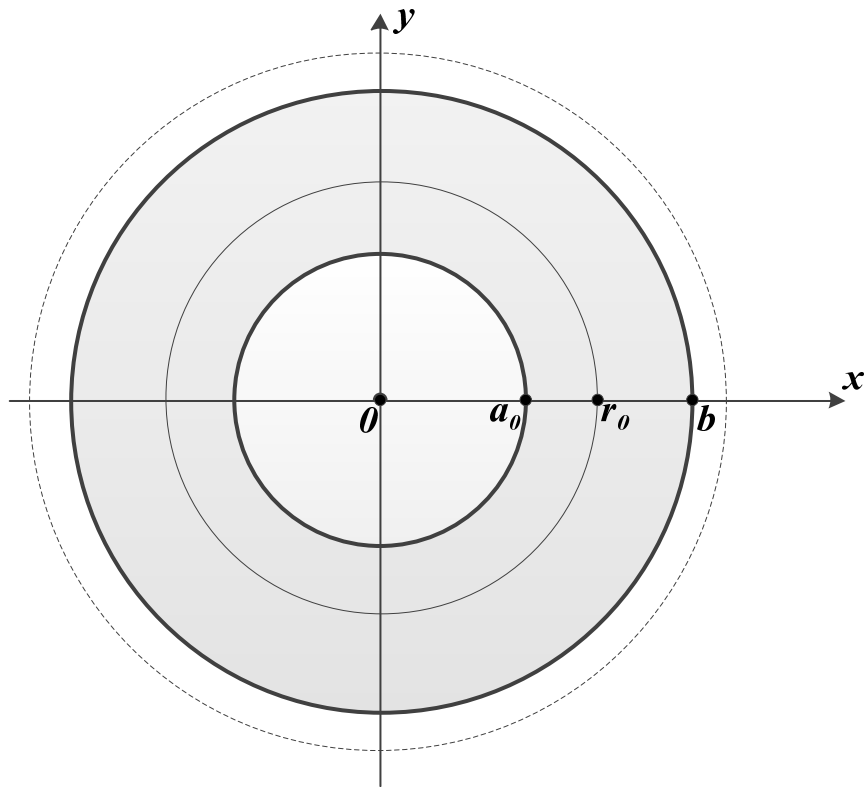


Рис.4. Пластическая осадка тонкой пластины в плане формы кольца

Будем ставить и решать задачу в упрощенной постановке ТТПС. Выпишем основные соотношения задачи в полярной системе координат:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mp \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}; \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} = \frac{d\lambda}{dt}, \quad (20)$$

$$r = a_0 : p = \frac{\sigma_{s1}h_1 + \sigma_{s2}h_2}{h_1 + h_2}; \quad r = b(t) : p = 2 \frac{\sigma_{s1}h_1 + \sigma_{s2}h_2}{h_1 + h_2}. \quad (21)$$

Интегрируя уравнение равновесия (20) со стороны внутренней, а затем внешней границы области, и приравнявая найденные значения контактного давления, определим из условия непрерывности неизвестную линию ребра поверхности давлений (линию ветвления течения) $r = r_0$:

$$\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) (r_0 - a_0) - 2\sqrt{3} \left(\frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right) = \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) (b - r_0) - \sqrt{3} \left(\frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right),$$

откуда с точностью до h/L получаем

$$r_0 = \frac{1}{2}(b(t) + a_0). \quad (22)$$

Интегрируя уравнение несжимаемости (20) с учетом условия на ребре $w(r = r_0) = 0$, находим:

$$w(r) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right). \quad (23)$$

Теперь с учетом условия (23) можем найти закон изменения свободной границы из решения задачи Коши:

$$w(b) = \frac{db}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(b - \frac{r_0^2}{b} \right) = \frac{(3b + a_0)(b - a_0)}{8b}; \quad b(t = t_0) = b_0.$$

В результате получаем в неявном виде зависимость $b = b(t)$:

$$8 \int \frac{db}{3b + a_0} + 8a_0 \int \frac{db}{(3b + a_0)(b - a_0)} = \int d\lambda,$$

$$\left(\frac{3b + a_0}{3b_0 + a_0} \right)^{2/3} \left(\frac{b - a_0}{b_0 - a_0} \right)^2 = e^{\lambda(t)} = \frac{h_0}{h(t)}.$$

Выпишем теперь значение максимального контактного давления в точках ребра:

$$p_{\max} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} (r_0 - a_0) - 2\sqrt{3} \left(\frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right) \approx \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h(t)} \left(\frac{b(t) - a_0}{2} \right).$$

Полученное решение может быть использовано в решении практических технологических задач обработки металлов давлением.

Литература

1. Ильющин А.А. Труды (1946-1966), т.2 Пластичность. М.:Физматлит, 2004, 480 с.
2. Prandtl L.// ZAMM. 1923. 3(6). pp.401-406.
3. Унксов Е.П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. М.:Машгиз, 1955.280 с.
4. Кийко И.А. Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
5. Кийко И.А. Пластическое течение металлов// В сб. «Научные основы прогрессивной техники и технологии». М.: 1985. С. 102-133.
6. Белов Н.А., Кадымов В.А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами // Изв. РАН МТТ. 2011. №1. С.46-58.
7. Кузнецов А.И // Archiwum Mech.Stos.,2, V. 12. 1960. pp.163-171.
8. Kadymov V., Wille R.//ZAMM, V.75. 1995, №1,pp.293-284.
9. Георгиевский Д. В. Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя // Изв. РАН. МТТ. 2006. №1. С.47-59.

Приложение

Определение постоянной интегрирования c_0 .

$$\int_0^{h_1} \sigma_{xx} dz = 0,$$

$$\int_0^{h_1} \left(\frac{2\tau_{s1}}{h_1} \bar{l} - c_0 + 2\tau_{s1} \sqrt{1 - \left(-\frac{2z}{h_1} + 1 \right)^2} \right) dz = 0,$$

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_1} \bar{l} h_1 - c_0 h_1 + 2\tau_{s1} \int_0^{h_1} \sqrt{1 - \left(-\frac{2z}{h_1} + 1\right)^2} dz = 0,$$

$$F(z) = \int \sqrt{1 - \left(-\frac{2z}{h_1} + 1\right)^2} dz = \left. \begin{array}{l} -\frac{2z}{h_1} + 1 = \cos \varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi \\ -\frac{2dz}{h_1} = -\sin \varphi d\varphi \\ dz = \frac{h_1}{2} \sin \varphi d\varphi \end{array} \right| = \frac{h_1}{2} \int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{h_1}{4} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) =$$

$$= \frac{h_1}{4} \left[\arccos(1 - 2z/h_1) - \frac{1}{2} \sin(2 \arccos(1 - 2z/h_1)) \right]; F(h_1) = \frac{h_1 \pi}{4}; F(0) = 0;$$

$$c_0 = \frac{\tau_{s1} 2\bar{l}}{h_1} \left(1 + \frac{\pi h_1}{4 \bar{l}} \right) \sim \tau_{s1} \frac{2\bar{l}}{h_1}.$$

Идентификация уравнений пластичности при сложном нагружении

Молодцов И.Н., Бабаева Д.О.
МГУ имени М.В.Ломоносова

Введение

В рамках теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина рассматривается сложное упругопластическое нагружение материалов. Для описания их свойств используются четырехчленные квазилинейные определяющие уравнения связи между векторами-девиаторами напряжений и деформаций. В [2] напряжения и деформации были связаны квазилинейными дифференциальными уравнениями первого порядка, которые были получены из трёхчленной формулы А. А. Ильюшина путём добавления слагаемых, не совершающих элементарной работы. Уравнения, описывающие процесс деформации, были построены аналогичным образом, при этом в соответствии с теоремой изоморфизма [1] вместо элементарной работы была использована дополнительная работа. Далее на основании указанной теоремы дополнительные и основные функционалы процессов связывались между собой соотношениями, обеспечивающими тождественность прямого и обратного процессов. В результате было получено единое уравнение, содержащее три функционала, которое описывает одновременно и процесс деформации, и процесс нагружения. В настоящей работе идентификация функционалов производится на основе экспериментальных данных об упругопластическом деформировании мягких сталей при нагружении по трёхмерным траекториям постоянной кривизны и кручения. Анализ этих данных показал свойство соосности цилиндров, на которые довольно скоро начинают ложиться винтовые траектории деформации и нагружения. Это свойство в виде специальной аппроксимации траектории нагружения содержит четыре неизвестных скалярных параметра и закладывается в процедуру калибровки функционалов. В настоящей работе приводятся представления функционалов теории через скалярные параметры траекторий деформации и нагружения, а также совершается механически корректный переход от исходных функционалов к определяющим функционалам, которые, как показал эксперимент, порождают в материале следовые реакции. Из четырех скалярных параметров два определяются приближенно через геометрические характеристики траектории деформаций, которые можно получить из определяющих уравнений теории средних кривизн. Поскольку вышеописанный подход с удовлетворительной точностью описывает все экспериментальные данные [4], можно считать основное уравнение пригодным для описания процессов сложного нагружения по траекториям деформаций с широким диапазоном изменения параметров внутренней геометрии траектории.

Определяющие уравнения и экспериментальные данные

Рассматриваются процессы сложного упругопластического нагружения материалов. Для описания их свойств используются стандартные обозначения, принятые в теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина [1]. Так, $\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$ обозначают пары пятимерных векторов напряжений и деформаций, построенных на базе девиаторов соответствующих тензоров, $\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon$ – их направляющие векторы. В [2] векторы напряжений и деформаций связываются между собой определяющими уравнениями

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = Q \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} + (P - Q)\bar{n}_\sigma \left(\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}, \bar{n}_\sigma \right) + (N - Q) \left(\bar{n}'_\varepsilon, \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} \right) \bar{n}'_\varepsilon, \quad (1)$$

$$C\Pi \equiv (\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon), \Psi \equiv 1 - C\Pi^2, \bar{n}'_\varepsilon \equiv \frac{(\bar{n}_\varepsilon - C\Pi\bar{n}_\sigma)}{\sqrt{\Psi}} (ds)^2 \equiv (d\bar{\varepsilon})^2.$$

где P, N, Q – функционалы процесса, s – длина дуги траектории деформаций. Целью работы является идентификация функционалов в экспериментах по сложному нагружению [4]. В указанных экспериментах тонкостенные стальные трубы (сталь 45) нагружались осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением по специальным программам деформирования, отвечающим винтовым траекториям деформаций с постоянными кривизной и кручением.

Уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{ds} = P \cos \theta_1, \\ \left(\frac{d\bar{\sigma}}{ds} - \frac{d\sigma}{ds} \bar{n}_\sigma - \left(\frac{d\bar{\sigma}}{ds}, \bar{n}'_\varepsilon \right) \bar{n}'_\varepsilon \right) = Q (\bar{n}_1 - \cos \theta_1 \bar{n}_\sigma - (\bar{n}_1, \bar{n}'_\varepsilon) \bar{n}'_\varepsilon), \\ \left(\frac{d\sigma}{ds} \bar{n}_\sigma + \left(\frac{d\bar{\sigma}}{ds}, \bar{n}'_\varepsilon \right) \bar{n}'_\varepsilon \right) = N (\cos \theta_1 \bar{n}_\sigma + (\bar{n}_1, \bar{n}'_\varepsilon) \bar{n}'_\varepsilon), \end{cases} \quad (2)$$

в каждое из которых входит только по одному функционалу процесса. Первое уравнение определяет интенсивность деформаций σ , второе и третье – проекции скорости изменения напряжений на плоскость векторов напряжений и деформаций и соответствующее ортогональное дополнение. Таким образом, представление основного уравнения в форме (2) делает наглядным геометрический смысл функционалов. Вид системы (2) свидетельствует о том, что функционалы можно вычислять независимо друг от друга. В этом заключается существенное преимущество рассматриваемого определяющего уравнения по сравнению с другими вариантами, которым сопутствуют значительные трудности в выборе процессов для проведения идентификации. Анализ экспериментальных данных [4] показал, что для этой цели вполне достаточно трёхмерных процессов. Калибровка проводится следующим образом: экспериментальные данные о процессе нагружения или деформирования представляются в виде соответствующей траектории в девиаторном пространстве, траектория параметризуется длиной дуги траектории деформации, и, наконец, с помощью системы (2) вычисляются функционалы. Приведённый выше алгоритм был реализован на винтовых траекториях деформаций с постоянными параметрами внутренней геометрии, но результат оказался малоинформативным. Помимо проблем, связанных с необходимостью дифференцирования экспериментальных данных, было обнаружено, что на таких траекториях функционалы N, Q являются сингулярными. Это обстоятельство значительно усложнило процедуру идентификации функционалов, поэтому было целесообразно заняться более внимательным исследованием геометрического смысла уравнений (1).

Для трёхмерных процессов деформаций направляющие векторы напряжений и деформаций представляются в локальном репере Френе разложениями:

$$\bar{n}_\sigma = \cos \theta_1 \bar{n}_1 - \sin \theta_1 (\cos \theta_2 \bar{n}_2 - \sin \theta_2 \bar{n}_3), \quad \bar{n}_\varepsilon = \cos \varphi_1 \bar{n}_1 - \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \bar{n}_2 - \sin \varphi_2 \bar{n}_3).$$

Тогда из уравнения (1) следует система уравнений для углов θ_1, θ_2 :

$$\frac{d\theta_1}{ds} = \kappa_1 \cos \theta_2 - \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \theta_1 \Delta, \quad (3)$$

$$\frac{d\theta_2}{ds} = \kappa_2 - \kappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \sin \theta_2 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \varphi_1 \sin(\theta_2 - \varphi_2), \quad (4)$$

$$\omega^2 \equiv \frac{\Delta^2}{\Psi}, \Delta \equiv \sin \theta_1 \cos \varphi_1 - \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos(\theta_2 - \varphi_2), \quad N_1 \equiv \frac{Q - N}{\sqrt{\Psi}} \omega.$$

Здесь κ_1, κ_2 – кривизна и кручение траектории. В (3) и (4) участвует комбинация из функционалов, фигурировавших ранее, – функционал N_1 , который регулирует скорость изменения угла θ_2 , определяющего положение вектора напряжений относительно соприкасающейся плоскости, вдоль траектории процесса.

Рассмотрим векторы

$$\bar{n}_\sigma^* \equiv \cos \theta_1 \bar{n}_1 + \sin \theta_1 (\cos \theta_2 \bar{n}_2 - \sin \theta_2 \bar{n}_3), \quad \bar{n}_\varepsilon^* \equiv \cos \varphi_1 \bar{n}_1 + \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \bar{n}_2 - \sin \varphi_2 \bar{n}_3).$$

Нетрудно проверить соотношения: $(\bar{n}_\sigma^*, \bar{n}_\varepsilon^*) = 0$, $\Delta = (\bar{n}_\sigma^*, \bar{n}_\varepsilon^*)$. При этом $\Psi = \Delta^2 + \sin^2 \varphi_1 \sin^2(\theta_2 - \varphi_2)$. Следовательно, два определяющих функционала входят в правую часть уравнения (3) равноправно, что говорит о том, что они ограничены.

Далее будет показано, что функционалы Q/σ и N_1/σ определяют две величины следовых реакций в смысле [3], которые, в свою очередь, порождают соответствующие принципы запаздывания векторных свойств, которые хорошо известны из экспериментов. Первая из них аналогична следу запаздывания по первой кривизне, вторая, как видно из (4), – по второй.

Уравнения (3) и (4) определяют геометрический смысл основных функционалов Q и N_1 только на трехмерных процессах деформаций. Но и на процессах произвольной размерности данная пара функционалов определяет векторные свойства материала. В этом случае основное уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = Q\bar{n}_1 + (P - Q) \cos \theta_1 \bar{n}_\sigma + N_1 \sin \theta_1 (\bar{n}_\varepsilon - (\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon) \bar{n}_\sigma). \quad (5)$$

Поскольку функционал P не входит в уравнения (3) и (4), он может быть исключен из уравнения (5) с помощью первого из соотношений (2). Этот факт позволяет записать определяющее уравнение связи векторов напряжений и деформаций в еще одной форме:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = Q(\bar{n}_1 - \cos \theta_1 \bar{n}_\sigma) + \frac{d\sigma}{ds} \bar{n}_\sigma + N_1 \sin \theta_1 (\bar{n}_\varepsilon - (\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon) \bar{n}_\sigma). \quad (5^*)$$

В экспериментах Р. А. Васина и др. [4] изучались процессы с трехмерными траекториями деформаций в виде спиралей с постоянными кривизнами и кручениями (m обозначает номер витка спирали), которые описывались уравнениями:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} + c \cos \alpha, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{20} + a \left(\frac{\alpha}{2\pi} + (m-1) \right), \quad \varepsilon_3 = c \sin \alpha, \quad c = \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}, \quad a = \frac{2\pi\kappa_2}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}. \quad (6)$$

Анализ данных [4] показал, что в экспериментах для мягких сталей с точностью, допускаемой условиями эксперимента, уже на втором витке спирали устанавливается особый периодический режим нагружения. В каждом опыте траектория нагружения уже к концу первого витка с определенной точностью ложится на круговой цилиндр:

$$\sigma_1 = \sigma_{10} + R \cos(\alpha + \alpha_0), \quad \sigma_3 = \sigma_{30} + R \sin(\alpha + \alpha_0), \quad \sigma_2 = \sqrt{\sigma(s)^2 - \sigma_1^2 - \sigma_3^2}, \quad \sigma(s) = \sigma_0 + G'/s. \quad (7)$$

Величины $R, \alpha_0, \sigma_{10}, \sigma_{30}$ в рамках каждого эксперимента постоянны. Результаты обработки экспериментов [4] для стали 45 ($G'=6580$) на разных винтовых траекториях деформаций сведены в таблицу.

Таблица

№ эксп.	a	c	κ_1	κ_2	σ_0	R	σ_{10}	σ_{30}	α_0
21	0.0094	0.0015	333	333	340	130	25	-10	0.35
25	0.00755	0.0006	333	666	372	55	55	-13	0.32
27	0.0251	0.002	100	200	344	117	20	-10	0.514
29	0.0157	0.0025	200	200	337	170	20	-30	0.43
35	0.0125	0.001	200	400	323	85	20	-10	0.38
31	0.00865	0.0046	200	60	362	320	25	-10	0.19

Вычислениями показано, что аппроксимация истинной траектории нагружения соотношениями (7) в ответ на траекторию деформации (6) согласуется с результатом экспериментов [4]. Определяющие функционалы вычисляются на основе данных, приведённых в таблице. Таким образом, аппроксимация (6) и параметры, полученные с помощью экспериментальных значений (7), позволяют получить решение уравнения (5) на траекториях деформаций (6), притягивающимся к траекториям нагружения вида (7). Анализ показывает, что траектории нагружения выходят на эти решения в течение половины первого витка траектории деформаций. Поэтому независимое нахождение параметров траектории нагружения только через характеристики внутренней геометрии траектории деформаций позволяет решить задачу идентификации функционалов уравнения (1).

Анализ определяющих уравнений.

Практическая оценка параметров траекторий нагружения

Два из четырех параметров процесса нагружения находятся из соотношений:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 \alpha_0 + \left(\frac{G'}{\sigma_0 \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} - \frac{a}{2\pi\lambda} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \left(1 - \frac{c^2}{\lambda^2} \right) \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{G'}{\sigma_0 \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} - \frac{a}{2\pi\lambda} = 0, \\ \frac{R}{\sigma} = \frac{c}{\lambda} \cos \alpha_0, \end{aligned} \quad (8)$$

которые следуют из трехчленной формулы А.А. Ильюшина [1, 3] при $N = \frac{\sigma}{\lambda}$, где λ – след запаздывания векторных свойств (по первой кривизне). Указанных соотношений достаточно для того, чтобы решения (7) удовлетворяли уравнению $\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N(\bar{n}_1 - \cos \theta_1 \bar{n}_\sigma) + \bar{n}_\sigma \frac{d\sigma}{ds}$ с точностью до малых первого порядка – σ_{10}/σ и σ_{30}/σ . Во всех экспериментах [4] указанные величины являются малыми. Поэтому в рамках трехчленной формулы невозможно получить соотношения для определения σ_{10} и σ_{30} .

Из векторного уравнения (5) можно получить линейную систему уравнений для нахождения оставшихся двух параметров формулы (7).

Свойства главных функционалов. Из второго уравнения системы (2) с учетом (6) и (7) следует представление через параметры процесса основного функционала Q

$$Q = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_1} \frac{R}{\cos \alpha_0} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} \frac{c \sigma}{R \varepsilon} \right) + \cos \alpha \left(\frac{\sigma_{30}}{R} \sin \alpha_0 - \frac{1}{R} \left(\sigma_{10} - \varepsilon_{10} \frac{\sigma}{\varepsilon} \right) \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} \right) - \sin \alpha \left(\frac{\sigma_{30}}{R} \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} + \frac{1}{R} \left(\sigma_{10} - \varepsilon_{10} \frac{\sigma}{\varepsilon} \right) \sin \alpha_0 \right) \quad (9)$$

с коэффициентами, зависящими от геометрических параметров траекторий деформации κ_1, κ_2 , скалярных свойств материала и характеристик (7) траектории нагружения. Вполне пригодным приближением функционала является $Q = \frac{R}{\cos \alpha_0} \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_1}$. Относительная погрешность этого представления в большинстве экспериментов [4] не превосходит 10%.

Определяющий функционал N_1 вычисляется из уравнения (2) с учетом (6), (7) по формуле:

$$N_1 \sin \theta_1 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 (\theta_2 - \varphi_2) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{d\sigma_2}{ds} - \frac{R}{\varepsilon} \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \left(\varepsilon_{10} \sin(\alpha + \alpha_0) + \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \sin \alpha_0 \right) - CП \frac{d\sigma}{ds} - \frac{\frac{d\varepsilon}{ds} - CП \cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} \left(R \kappa_1 \cos \alpha_0 + \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \frac{d\sigma_2}{ds} - \cos \theta_1 \frac{d\sigma}{ds} \right).$$

Приближенный результат дается соотношением:

$$\frac{N_1}{\sigma} \frac{\kappa_1 \kappa_2 \operatorname{tg} \alpha_0}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} = 1 + \frac{c \sigma}{R \varepsilon} \frac{1}{\cos \alpha_0} - \left(\frac{c \sigma}{R \varepsilon} \frac{1}{\cos \alpha_0} \right)^2 - \frac{1}{\cos \alpha_0} \left(1 - \frac{c \sigma}{R \varepsilon} \frac{2}{\cos \alpha_0} \right) \left(\frac{\sigma_{30}}{R} \sin \alpha + \frac{1}{R} \left(\sigma_{10} - \varepsilon_{10} \frac{\sigma}{\varepsilon} \right) \cos \alpha \right).$$

В нулевом приближении: $\frac{N_1}{\sigma} = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_1} \operatorname{tg} \alpha_0$.

В большинстве экспериментов [4] формулы для функционалов имеют погрешность порядка 10%, что сравнимо с точностью экспериментальных данных. Кроме этого, вычисления подтверждают факт периодичности Q и N_1 / σ .

Другим свойством функционалов Q и N_1 / σ является свойство порождать в упругопластическом материале следовые реакции, что также согласуется и с экспериментальными данными [4], и с представленными выше формулами для функционалов.

Литература

1. Ильющин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
2. Молодцов И.Н. Процессы сложного нагружения в теории пластичности // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел,

посвященного 95-летию со дня рождения А.А.Ильюшина // М.: Издательство московского университета, 2006. с. 204-210.

3. Малый В.И. Исследование некоторых функционалов теории упругопластических процессов // Упругость и неупругость. М.: Издательство московского университета, 1978. Вып. 5. С. 107-116.

4. Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В., Широков Р.И. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций. Деп. в ВИНТИ, 16.10.86. № 7298-В86. 66 с.

Аналитический расчет прогиба плоской решетчатой фермы треугольного очертания

Кирсанов М. Н.
НИУ “МЭИ”

Рассмотрим плоскую статически определимую балочную ферму (рис. 1). Стержни фермы предполагаем упругими (модуль упругости E) одинакового сечения F . Поставим задачу получить аналитическое решение для прогиба фермы при произвольном числе панелей n в половине пролета. Ферма нагружена по нижнему поясу силами P . Ферма содержит $4n$ шарниров и $m=8n-3$ стержней. Аналогичные решения для плоских ферм балочных и консольных, с различными решетками и очертаниями верхнего пояса в конечной форме получены в [1-8]. Предлагаемая схема фермы ранее аналитически не исследовалась. Проблема поиска схем статически определимых ферм («охота за фермами») отражена в [9]. Примененный в этих работах метод индукции показал свою эффективность, а полученные формулы для прогиба в зависимости от числа панелей позволили найти некоторые оптимальные по жесткости конструктивные решения и указали на особенности конструкции. Более того, метод применим и для пространственных систем [10- 12].

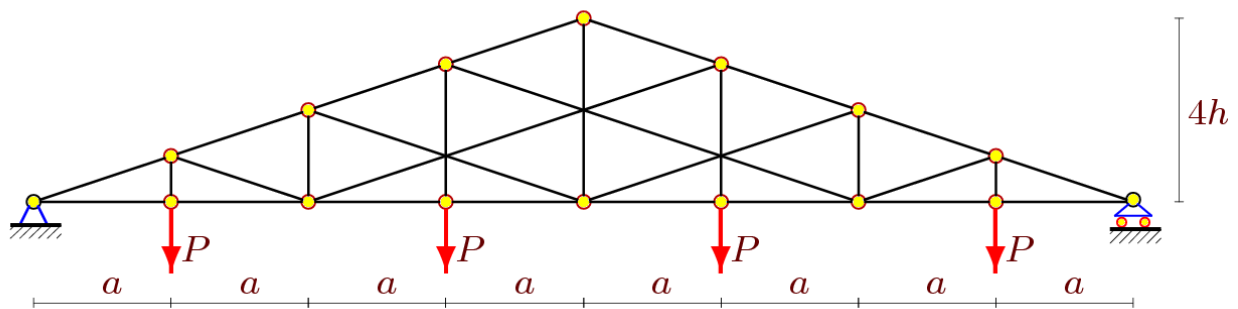


Рис. 1. Ферма, $n = 4$

Для определения усилий в стержнях фермы используем метод вырезания узлов. Пронумеруем шарниры фермы (нижний пояс слева направо, затем – верхний пояс). Выбирая начало координат в левой шарнирной опоре, получим:

$$x_i = (i-1)a, \quad y_i = 0, \quad x_{i+2n+1} = ia, \quad i = 1, \dots, 2n+1,$$

$$y_{i+2n+1} = ih, \quad y_{i+3n} = (n-i+1)h.$$

Для составления конфигурации решетки стержни фермы представим условными векторами $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$, координаты которых являются номера шарниров по их концам. Для стержней нижнего пояса имеем следующие вектора: $\bar{N}_i = [i, i+1], i = 1, \dots, 2n$. Векторы стоек: $\bar{N}_{i+4n} = [i, i+1+2n], i = 1, \dots, 2n-1$, раскосы решетки: $\bar{N}_{i+6n-1} = [2i+1, i+2n+1], \bar{N}_{i+7n-2} = [2i+1, i+3n+1], i = 1, \dots, n-1$. Для вычисления направляющих косинусов, входящих в уравнения узлов фермы, потребуются длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

где $m_0 = m + 3$ – число стержней фермы, включая три стержня, которые моделируют неподвижную и подвижную опоры. Первый индекс в номере $N_{j,i}$ означает номер компоненты вектора \bar{N}_i , второй – номер стержня. Матрица направляющих косинусов имеет следующие элементы

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, k = 2N_{i,2} - 2 + j, k \leq m_0, j = 1, 2, i = 1, \dots, m_0,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, k = 2N_{i,1} - 2 + j, k \leq m_0, j = 1, 2, i = 1, \dots, m_0.$$

Задача определения усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме $\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}$. Здесь \bar{S} – вектор неизвестных усилий, \bar{B} – вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные – в четные B_{2i} . Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^m S_k s_k l_k / (EF), \text{ где } S_k, s_k \text{ – усилия в } k\text{-м стержне фермы от приложенной нагрузки и}$$

от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу. Суммирование ведется по всем стержням фермы, опорные стержни приняты жесткими и в эту сумму не входят. Последовательное решение задачи с использованием системы символьной математики для ферм с одной, двумя, тремя и т.д. панелями в половине пролета позволило методом индукции (по аналогии с [1-8]) получить следующее выражение

$$\Delta = \frac{Pn(na^3 + (n+1)c^3 / 2 + 2h^3)}{2h^2 EF}, \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Если зависимости от числа панелей коэффициентов при a^3 и h^3 оказались довольно очевидными, то для получения коэффициента при c^3 применялись операторы **rgf_findrecur** и **rsolve** системы Maple [13, 14]. Зададим длину пролета $L = 2na$ и введем обозначение $\tilde{\Delta} = EF\Delta / P$. Зависимость (1) обнаруживает минимум (рис. 2). Кроме того, оказывается, что при одном числе панелей увеличение высоты фермы приводит к уменьшению прогиба, при другом – к увеличению.

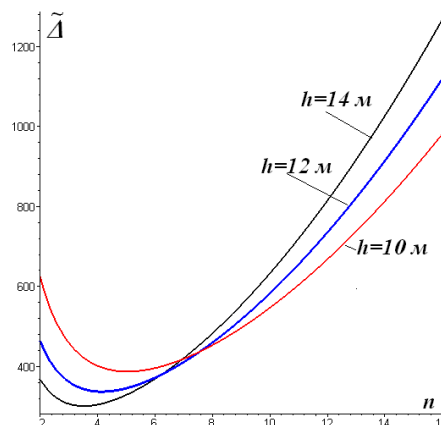


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей при $L = 100$ м

Литература

1. Кужелев П. А. Оптимизация прогиба плоской балочной фермы // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г. в 11 частях. Часть 11. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 109-110.
2. Дзабиев А. А., Черепанов С. П. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г. в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 63-64.
3. Бадертдинов Р. Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. в 11 частях. Часть 7. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 21-22.
4. Дегтярев Н.Р., Троцило А.П. Прогиб балочной фермы шпренгельного типа // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 52-53.
5. Кабрера Пантоха Х.Х., Поддубный-Литвинов М.А. Индуктивный метод определения прогиба многопролетной плоской фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 78-79.
6. Афанасьев В.А., Бойко О.О. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 15-16.
7. Сайпулаев Г.Р. Расчет регулярных стержневых систем на примере арочной фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 128-129.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №6. С. 2-6.
9. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85. No. 9. Pp. 607 – 617.
10. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
11. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-40.
12. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
13. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
14. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.

Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы

Канатова М. И.
НИУ "МЭИ"

Метод индукции, развитый в [1-6] для вывода формул прогиба стержневых конструкций (плоских и пространственных) с применением системы компьютерной математики Maple, может быть применен и для исследования колебаний узлов фермы при произвольном числе панелей в аналитической форме. Колебание одной сосредоточенной массы в узле фермы с использованием этого метода рассмотрены в [7-9]. Полученное точное решение позволило провести однопараметрическую оптимизацию динамики конструкции. В настоящей работе рассматривается балочная ферма с грузами (рис. 1), закрепленными во всех узлах нижнего пояса.

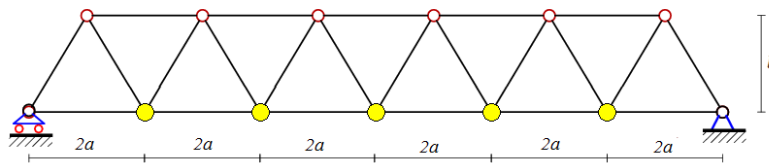


Рис. 1. $n=6$

В качестве обобщенных координат выбираем вертикальные смещения грузов. Горизонтальными колебаниями (с высшими частотами) пренебрегаем. Записывается уравнение колебаний грузов:

$$[M_n]\ddot{Y} + [D_n]Y = 0,$$

где Y – вектор вертикальных перемещений узлов с массами, $[M_n]$ – матрица инерции, $[D_n]$ – матрица жесткости. Принимая массы грузов одинаковыми, матрицу инерции получаем диагонального вида

$$M_n = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}.$$

Система имеет $n-1$ степеней свободы, частотное уравнение получается степени $n-1$. Коэффициенты матрицы податливости $[B_n]$ (обратной к матрице жесткости $[D_n]$) определяются по формуле Максвелла-Мора:

$$b_{i,j} = \frac{1}{EF} \sum_{\mu=1}^k S_{i,\mu} S_{j,\mu} l_{\mu},$$

где $S_{i,\mu}$ – усилие в стержне μ от действия единичной вертикальной силы в узле i нижнего пояса (нумерация идет от первого узла после опорного); l_{μ} – длина стержня μ , $k=4n+2$ – число стержней, EF – продольная жесткость стержней. Усилия определяются методом вырезания узлов с использованием Maple-программы, разработанной в [10].

Полученная бисимметричная [11] матрица имеет вид:

$$[B_n] = (4a^3[A_n]/3n + 2c^3[C_n]/n)/h^2,$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $[A_n]$ и $[C_n]$ – числовые бисимметричные матрицы.

При $n=4$, $n=5$ матрица $[C_n]$ имеет вид:

$$C_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad C_5 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Найдена закономерность построения таких матриц, позволяющая получать результаты для больших значений n без каких-либо временных затрат и без потери точности:

$$c_{1,j} = n - j, j=1, \dots, n-1; \quad c_{i,j} = ic_{1,j}, \quad i=2, \dots, n/2, j=1, \dots, n-i.$$

Бисимметричные матрицы не описаны в системе Maple [12, 13], поэтому для работы с ними пришлось создать специальные подпрограммы. Например, для организации симметрии относительно побочной диагонали выполняются следующие операторы:

```
> for i to n do
>   for j from i to n do
>     c[n-j+1,n-i+1]:=c[i,j];
>   od;
> od;
```

Замечено также, что определитель матрицы $[C_n]$ равен $n(n-2)$, результат непосредственно не относящийся к теме исследований, но позволяющий контролировать решение. При $n=4$, $n=5$ матрица $[A_n]$ имеет вид:

$$A_4 = \begin{vmatrix} 21 & 24 & 15 \\ 24 & 36 & 24 \\ 15 & 24 & 21 \end{vmatrix}, \quad A_5 = \begin{vmatrix} 36 & 48 & 42 & 24 \\ 48 & 78 & 72 & 42 \\ 42 & 72 & 78 & 48 \\ 24 & 42 & 48 & 36 \end{vmatrix}.$$

Для матрицы $[A_n]$ найдена закономерность, имеющая вид:

$$a_{i,j} = i(2jn - i^2 - j^2 + 1)(n - j), \quad i=1, \dots, n/2, \quad j=i, \dots, n-i.$$

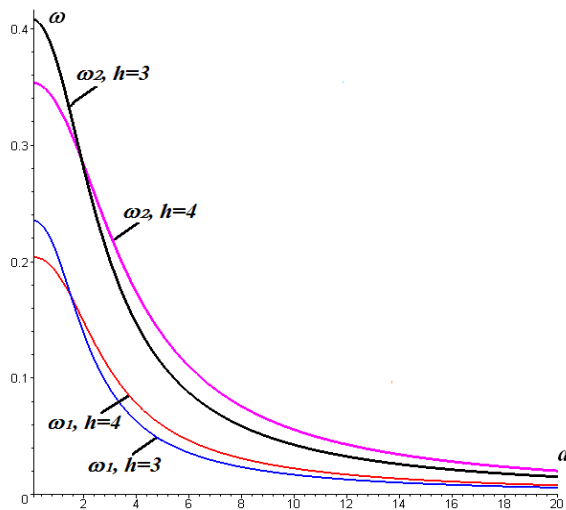
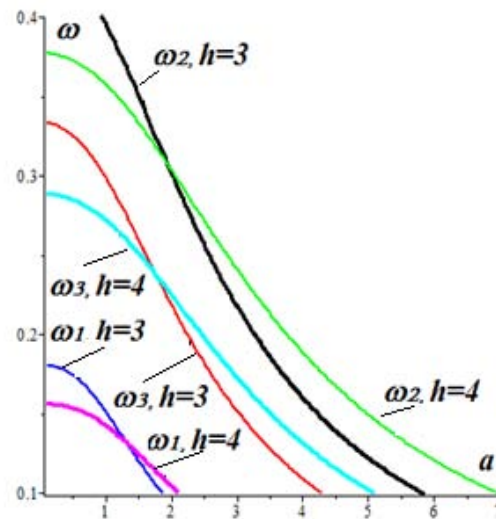
Также как и в случае с матрицей $[C_n]$, для матрицы $[A_n]$ необходимо применить операторы по организации симметрии относительно побочной диагонали.

Например, для $n=4$ матрица $[B_n]$ будет иметь вид:

$$B_4 = \begin{vmatrix} \frac{1,5c^3 + 7a^3}{h^2} & \frac{c^3 + 8a^3}{h^2} & \frac{0,5c^3 + 5a^3}{h^2} \\ \frac{c^3 + 8a^3}{h^2} & \frac{2c^3 + 12a^3}{h^2} & \frac{c^3 + 8a^3}{h^2} \\ \frac{0,5c^3 + 5a^3}{h^2} & \frac{c^3 + 8a^3}{h^2} & \frac{1,5c^3 + 7a^3}{h^2} \end{vmatrix}.$$

Частоты колебаний определяются по формуле: $\omega_k = 1/\sqrt{m\lambda_k}$, где m – массы грузов в узлах, λ_k – собственные числа матрицы $[B_n]$.

Зависимость частот (в с^{-1}) от размера a при различных высотах h (все размеры в метрах) при $m=1\text{кг}$ дана на рисунках 2 и 3.

Рис.2. $n=3$ Рис.3. $n=4$

Заметно, что при различных значениях h для одной и той же частоты есть пересечения графиков. Следовательно, в этих точках собственные частоты колебаний ω совпадают. Также, при устремлении значения a к бесконечности мы можем наблюдать сближение графиков к нулю при любых значениях высот h .

Аналитическое выражение характеристической матрицы для произвольного числа панелей существенно уточняет решение задачи о собственных колебаниях грузов на балке. Если в обычных численных методах в решении таких задач наибольшая трудность (дающая при этом основную часть погрешностей) приходилась на процедуру определения усилий в стержнях, связанная с решением систем линейных уравнений, размерность которых зависит от числа панелей, то предложенное решение сразу дает характеристическую матрицу, а численный метод используется только для определения собственных чисел матрицы, что заметно снижает погрешность решения. Разработанная методика может быть применена в экспериментальных исследованиях сложных стержневых структур [14-16].

Литература

1. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №6. С. 2-6.
2. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
3. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-40.

4. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. №1(53). С. 32-38.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №6. С. 2-6.
6. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
7. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры//Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 31 октября 2014. С. 17-18.
8. Ахмедова Е. Р., Канатова М. И. Частотное уравнение для плоской балочной фермы регулярной структуры с треугольной решеткой //Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики" // Материалы конференции и труды семинара. Казань: Изд-во ООО "Фолиант", 2014. С. 198-199.
9. Кирсанов М. Н., Кленова И. Г. Индуктивный метод исследования колебаний систем с периодической структурой // Всероссийская научно-практическая конференция "Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе", МФЮА, 2009. 113-114 с.
10. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика / Под ред. А.И. Кириллова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 384 с.
11. Vorobiev O., Kirsanov M., Cherepanov S. About some bisymmetric matrix of regular type // Наука и образование в XXI веке. Сборник трудов по материалам Международной научно-практической конференции. 30 сентября 2013 г. Часть 23. Тамбов, 2013. Изд-во ТРОО "Бизнес-Наука-Общество", С. 8-9.
12. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
13. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
14. Jing G., Yu M., Yong-yi W. Experimental Study on the Mode of Active Truss // Energy Procedia Vol. 17. 2012. pp. 24 – 31.
15. Jankowska-Sandberg J., Kolodziej J. Experimental study of steel truss lateral–torsional buckling // Engineering Structures. Vol. 46. N 1. 2013. pp. 165-172.
16. Han Q.H., Xu Y., Lu Y., Xu J., Zhao Q.H. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis // Engineering Structures. Vol. 82. N. 1 2015. pp. 186-198.

Задача об оценке планируемых показателей объемов производства нефти на основе модернизированного принципа максимума статистической энтропии

Соловьев И.А., Петрушко И.М., Петрушко М.И.
НИУ "МЭИ"

Проблема планирования показателей различных характеристик в технике, технологиях, экономике, экологии и т.д. заключается в их информационной достоверности. На практическую реализацию плановых показателей влияет множество случайных факторов.

В масштабах всей страны ежегодно планируется производство нефтяных продуктов, их стоимость и общая предопределяемая выручка за произведенную продукцию. Каждый руководитель планирует ожидаемые результаты своих предположений, исходя из разного рода качества и объема статистики прежних лет и интуитивного представления о возможности влияния случайных погодных явлений и других неопределенных внешних воздействий. Наблюдаемые в настоящее время природные явления, а также политические ситуации не позволяют точно прогнозировать стоимость и объем производства нефти. Возникает необходимость вероятностного подхода к оценкам влияния такого рода случайных явлений на реализацию планов добычи нефти. Именно в этом и состоит преимущество применения стохастических математических моделей для прогнозирования вероятностей ожидаемых величин. Одним из таких методов определения вероятности ожидаемых результатов основан на принципе максимума статистической энтропии. Он позволяет с учетом смысла энтропии как среднего значения информации оценить вероятности прогноза. Существует много инструментариев, позволяющих оценивать как объемы, так и стоимость произведенной продукции. В большинстве случаев такие прогнозы строятся на основе многолетнего опыта прагматических оценок. Такие оценки носят слишком приблизительный характер и не позволяют делать математически обоснованные выводы. В настоящей работе предложен новый подход к использованию принципа максимума статистической энтропии к предсказанию исполнения планируемых показателей добычи нефти в РФ и информационной достоверности плана.

Настоящее рассмотрение основано на классических работах Шеннона [1], который ввел понятие статистической энтропии, и работе А. К. Прица [2]. В работе И. А. Соловьева [3] использовался принцип максимума статистической энтропии для оценки урожайности пшеницы, на основе этой работы продолжены исследования для изучения вероятностных характеристик нефтяного рынка.

1. Теоретические основы вероятностного анализа достоверности планируемых показателей.

Классическая постановка задачи о максимуме статистической энтропии имеет следующий вид. Найти максимум статистической энтропии

$$S = -\sum_{k=1}^n p_k \ln p_k,$$

где p_k есть вероятность принимаемого значения x_k дискретной случайной величины X , при условии априори заданного среднего значения этой величины X

$$\sum_{k=1}^n p_k x_k = M[X]$$

и соблюдения нормировки

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1.$$

Нами здесь предложен следующий новый вариант реализации классической постановки задачи о максимуме статистической энтропии.

Найти максимум статистической энтропии

$$S = -\sum_{k=1}^n p_k \ln p_k, \quad (1)$$

когда априори задается дисперсия σ^2 случайной величины X

$$\sum_{k=1}^n p_k x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right)^2 = \sigma^2 \quad (2)$$

и соблюдается условие нормировки

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1. \quad (3)$$

Задание среднего значения \bar{X} должно удовлетворять условию $\bar{X} < x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Лучше всего выбирать средним значением $\bar{X} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n}$ при этом вероятности

$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$, однако не всегда такие вероятности реально сочетаются с

относительной частотой и не соответствует этой желательной действительности. Почему лучше ставить задачу для максимума статистической энтропии при заданной дисперсии? Дело в том, что априори заданное среднее квадратическое отклонение σ выбираемое, например, так $n\sigma / (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \approx 0.3 - 0.5$ часто наблюдается в физических экспериментах. Такое значение для σ более реально, чем выбираемое произвольно среднее значение \bar{X} .

Таким образом, найдем максимум статистической энтропии (1)

$$S = -\sum_{k=1}^n p_k \ln p_k \quad (4)$$

при условиях (2) и (3)

$$\sum_{k=1}^n p_k x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right)^2 = \sigma^2,$$

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1,$$

методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$L(p_1, p_2, \dots, p_n, \lambda_1, \lambda_2) = -\sum_{k=1}^n p_k \ln p_k + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right)^2 - \sigma^2 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{k=1}^n p_k - 1 \right).$$

Вероятности и множители Лагранжа λ_1, λ_2 находятся из системы уравнений, выражающих необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \partial L / \partial p_k = -\ln p_k - 1 + \lambda_1 (2p_k x_k - 2x_k \sum_{k=1}^n p_k x_k) + \lambda_2 = 0, & k = 1 \dots n; \\ \partial L / \partial \lambda_1 = \sum_{k=1}^n p_k x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right)^2 - \sigma^2 = 0; \\ \partial L / \partial \lambda_2 = \sum_{k=1}^n p_k - 1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Численное решение данной системы находится методом итераций.

Практическая реализация принципа максимума статистической энтропии
Таблица 1

Производство нефти по областям России

	2009	2010	2011	2012
Урал	45,3	47,5	46,5	47,3
Поволжье	61,8	64,1	69,1	70,4
Северный кавказ	9,9	9,3	8,6	6,7
Тимано-Печора	32,2	31,5	28,5	27,2
Западная Сибирь	322,1	318,3	316,3	317,2
Восточная сибирь	7,5	19,7	27,2	35,1
Дальний восток	15,4	14,8	15,2	14,2
всего	494,2	505,1	511,4	518,1

В качестве исходных данных брались объемы добычи нефти в миллионах тонн в 2010-2012 гг. в различных регионах Российской Федерации. Эти данные приведены в таблице 1.

Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа для нахождения максимума статистической энтропии (5), получим соответствующие значения оптимальных вероятностей и максимумов статистической энтропии. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2

Вероятностные характеристики добычи нефти в регионах РФ, при которых достигается максимум статистической энтропии.

Года	2010	2011	2012
P1	0,041	0,042	0,044
P2	0,049	0,054	0,056
P3	0,027	0,028	0,029
P4	0,034	0,035	0,035
P5	0,791	0,775	0,766
P6	0,03	0,034	0,039
P7	0,029	0,03	0,031
S	0,884	0,929	0,956

Анализ поведения максимума статистической энтропии показывает, что структура добычи нефти в Российской Федерации в расчетные годы носит оптимальный характер. Об этом свидетельствует стабильный рост величины статистической энтропии. Также, на основании проведенных вычислений можно сделать вывод о том, что максимальное влияние

на величину статистической энтропии вносят изменения в регионе с максимальной добычей нефти.

Заключение. Предложенный модифицированный метод максимума статистической энтропии позволяет прогнозировать как медленно текущие случайные процессы, так и быстрые. Прогнозировать на год, на пять лет, или на месяц. Среднее значение информации (статистической энтропии) в будущем зависит от многих факторов, которые не могут быть учтены без учета внешних условий. Тем не менее, прогнозы нужно делать, исходя подчас из субъективных оценок политологов и экономистов..

Возможность предсказания нужно использовать для вероятностного характера изменения рыночной ситуации. Были теоретически исследованы информационные свойства планов по добыче нефти в регионах России. Получены и проанализированы новые решения задачи о максимуме статистической энтропии, позволяющие оценивать стохастические свойства намеченных планов и найти пути формирования новых вероятностных оценок их показателей. Основной вывод заключается в следующем: чем сильнее отличается априори задаваемое из прагматических оценок хозяйствующих субъектов среднее значение показателей $\bar{X} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = const$ от среднего арифметического значения $\tilde{X} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$, тем меньше вероятность его истинной реализации. Метод позволил найти оценки не только плана в целом, но и оценить прагматические запросы отдельных хозяйств, Представляется, что предложенный метод оценки плановых показателей, будет успешным при рассмотрении различных планов как в объеме прогнозирования отдельных показателей регионов, так и в объеме общегосударственных показателей.

Авторы считают также необходимым указать трудности использования предложенной методики. Поскольку в качестве исходных данных использовались значения годовой добычи нефти, следовательно, и результат может быть использован лишь для прогноза среденегодовой добычи нефти в различных регионах. В реальных условиях зачастую требуется большая точность. Для ее обеспечения необходимо использовать в расчетах меньшие интервалы времени. Идеальным вариантом было бы проводить расчеты, используя данные дневного производства нефти, для прогнозирования добычи на следующий день.

Литература

1. Shannon C.E. F Mathematical Theory of communication. // Bell System Technical Journal. 1948. V. 27. pp. 379-423.
2. Приц А.К. Принцип стационарных состояний открытых систем и динамика популяций. // Калининград.: 1974. 123 с.
3. Соловьев И.А. Применение принципа максимума статистической энтропии для оценки планируемых показателей урожая и его стоимости в землеустройстве // Землеустройство, кадастр и мониторинг земель. 2014. № 6. С. 14-16.

Поведение микромеханического гироскопа L-L типа в режиме вынужденных колебаний

Подалков В.В., Антонов Е.А.
НИУ "МЭИ"

В последнее время микросистемная техника стала одной из наиболее быстро развивающихся технических областей. Изначально микросистемные устройства разрабатывались и внедрялись для военной промышленности, но в настоящее время данные устройства нашли широкое применение и в изделиях гражданского назначения. Создание гироскопических приборов (микромеханические и волновые твердотельные гироскопы) малого размера – одно из направлений в микросистемных технологиях.

Гироскоп, название которого можно перевести как «наблюдатель вращений», был предложен в 1852 году французским ученым Леоном Фуко для изобретенного им прибора, который предназначен для демонстрации вращения Земли вокруг своей оси [1].

Конструктивная схема рассматриваемого микромеханического гироскопа представлена на рисунке 1 и 2:

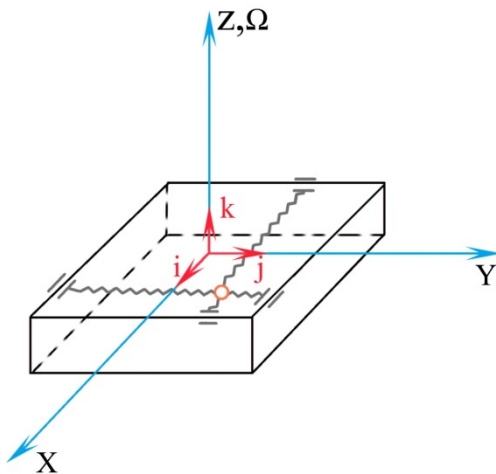


Рис. 1

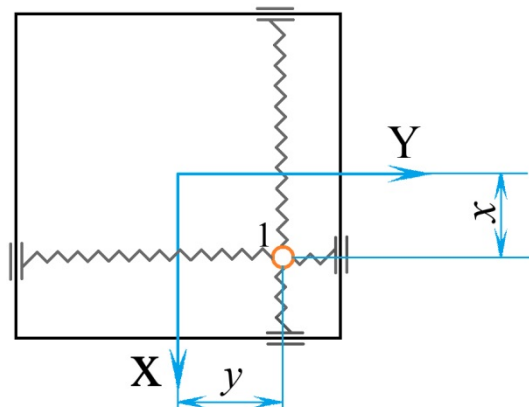


Рис. 2

Чувствительный элемент (ЧЭ) 1, который подвешен в рамке при помощи упругих торсионов, которые обеспечивают ЧЭ одну степень свободы вдоль оси Y и одну степень свободы вдоль оси X [2].

Лагранжиан системы имеет следующий вид:

$$L = T - \Pi, \quad (1)$$

где:

L – функция Лагранжа;

T – кинетическая энергия механической системы;

Π – потенциальная система механической системы.

Подробное построение лагранжиана данной системы рассматривается в работе [3].

Кинетическая энергия записывается следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} m V^2.$$

Абсолютная скорость чувствительного элемента V состоит из суммы переносной и относительной скоростей:

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_{\text{пер}}.$$

Кинетическая энергия тогда:

$$T = \frac{1}{2} m \{ (\dot{x} - y\Omega)^2 + (\dot{y} + x\Omega)^2 \}.$$

Потенциальная энергия данной механической системы:

$$\Pi = \frac{cx^2}{2} + \frac{cy^2}{2},$$

где: c – жесткость торсионов.

В итоге лагранжиан системы L примет вид:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m[(\dot{x} - y\Omega)^2 + (\dot{y} + x\Omega)^2] - \frac{cx^2}{2} - \frac{cy^2}{2}. \quad (2)$$

Чтобы записать уравнения движения рассматриваемой механической системы, воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-ого рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (3)$$

где: q – вектор обобщенных координат:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Найдем производные от лагранжиана системы (2) по каждой из обобщенных координат.

Проведя необходимое дифференцирование, согласно (3), и считая, что на систему действует внешняя сила $f\sin(\psi)$, получаем два симметричных дифференциальных уравнения движения:

$$\begin{cases} m(\ddot{x} - \dot{\Omega}y - \Omega\dot{y}) - m\Omega(\dot{y} + x\Omega) + cx = -f\sin(\psi); \\ m(\ddot{y} + \dot{\Omega}x + \Omega\dot{x}) + m\Omega(\dot{x} - y\Omega) + cy = 0. \end{cases} \quad (4)$$

После нормализации (делим уравнения на 1кгм) система (4) примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha - 2\Omega\dot{\beta} - \Omega^2\alpha - \dot{\Omega}\beta = -f_0\sin(\psi); \\ \ddot{\beta} + \omega_0^2\beta + 2\Omega\dot{\alpha} - \Omega^2\beta + \dot{\Omega}\alpha = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где:

α и β – безразмерные амплитуды;

f_0 – нормализованная амплитуда вынуждающей силы (размерность c^{-2});

$\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ – собственная частота колебаний (размерность c^{-2}).

Система без учета сил трения.

Целью данной работы является рассмотрение поведения ММГ в режиме вынужденных колебаний с переменной во времени вынуждающей силы. Для этого требуется ввести некую внешнюю произвольную силу, зависящую от времени:

$$F = -f_0\sin(\psi),$$

где:

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau); \\ \omega(\tau) = \omega_1 + \sigma\tau; \\ \sigma = 10^{-4} \frac{1}{c}, \quad \omega_1 = \omega_0 + \delta; \\ \delta - \text{малая добавка.} \end{cases}$$

Также требуется ввести нормализованную угловую скорость основания и нормализованную амплитуду вынуждающей силы следующим образом:

$$\begin{cases} \omega_0 \frac{\Omega}{\omega_0} = \varepsilon \omega_0 \nu; \\ \omega_0^2 \frac{f_0}{\omega_0^2} = \varepsilon \omega_0^2, \end{cases}$$

где:

ε – малый параметр;

$\nu \sim 1$ – безразмерная угловая скорость основания.

В итоге система (5) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = \varepsilon(2\omega_0 \nu \dot{\beta} - \omega_0^2 \sin(\psi)); \\ \ddot{\beta} + \omega_0^2 \beta = -2\omega_0 \nu \dot{\alpha} \varepsilon. \end{cases} \quad (6)$$

Решение ищем методом двух масштабов в переменных амплитуда-фаза:

$$\begin{cases} \alpha = A(\tau) \sin(\psi(\tau) + \varphi_1(\tau)); \\ \beta = B(\tau) \sin(\psi(\tau) + \varphi_2(\tau)). \end{cases} \quad (7)$$

В таком случае, интересующие производные примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \varepsilon \frac{\partial A}{\partial \tau} \sin(\psi + \varphi_1) + A \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \right) \cos(\psi + \varphi_1); \\ \dot{\beta} = \varepsilon \frac{\partial B}{\partial \tau} \sin(\psi + \varphi_2) + A \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \right) \cos(\psi + \varphi_2). \end{cases}$$

Вторая производная:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \varepsilon^2 \ddot{A} \sin(\psi + \varphi_1) + 2\varepsilon \dot{A}(\omega + \varepsilon \dot{\varphi}_1) \cos(\psi + \varphi_1) - \\ - A(\omega + \varepsilon \dot{\varphi}_1)^2 \sin(\psi + \varphi_1) + A\varepsilon(\dot{\omega} + \varepsilon \ddot{\varphi}_1) \cos(\psi + \varphi_1); \\ \ddot{\beta} = \varepsilon^2 \ddot{B} \sin(\psi + \varphi_2) + 2\varepsilon \dot{B}(\omega + \varepsilon \dot{\varphi}_2) \cos(\psi + \varphi_2) - \\ - B(\omega + \varepsilon \dot{\varphi}_2)^2 \sin(\psi + \varphi_2) + B\varepsilon(\dot{\omega} + \varepsilon \ddot{\varphi}_2) \cos(\psi + \varphi_2). \end{cases}$$

Проведя необходимые преобразования тригонометрических функций, после подстановки производных в систему (6), и оставив слагаемые порядка ε , получаем:

$$\begin{aligned} & \left[2\dot{A}\omega + A\dot{\omega} - 2\nu\omega_0 B\omega \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \omega_0^2 \sin(\varphi_1) \right] \cos(\psi + \varphi_1) + \\ & + \left[A - A(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_1) + 2\nu\omega_0 B\omega \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \omega_0^2 \cos(\varphi_1) \right] \sin(\psi + \varphi_1) = 0; \\ & \left[2\dot{B}\omega + B\dot{\omega} + 2\nu\omega_0 A\omega \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \cos(\psi + \varphi_2) + \\ & + \left[\omega_0^2 B - B(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_2) - 2\nu\omega_0 A\omega \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \sin(\psi + \varphi_2) = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы избежать появления резонансных слагаемых в уравнениях первого приближения, приравняем к нулю коэффициенты при $\cos(\psi + \varphi_1)$, $\sin(\psi + \varphi_1)$, $\cos(\psi + \varphi_2)$ и $\sin(\psi + \varphi_2)$. Причем:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega) \cdot (\omega_0 + \omega) = 2\omega \cdot \Delta\omega. \quad (8)$$

В итоге можно записать систему дифференциальных уравнения движения в медленных переменных $A(\tau)$, $B(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ в первом приближении

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A} = v\omega_0 B \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \sin(\varphi_1) - \frac{A}{2\omega} \dot{\omega}; \\ A\dot{\varphi}_1 = \Delta\omega A + v\omega_0 B \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \cos(\varphi_1); \\ \dot{B} = -v\omega_0 A \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{B}{2\omega} \dot{\omega}; \\ B\dot{\varphi}_2 = \Delta\omega B - v\omega_0 A \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{array} \right. \quad (9)$$

Полученные уравнения могут быть использованы для измерения угловой скорости основания по измерениям медленно меняющихся амплитуд A , B и фаз φ_1 , φ_2 .

Рассмотрим стационарные колебания системы (9). В этом случае следует считать амплитуды и фазы постоянными:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = v\omega_0 B \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \sin(\varphi_1); \\ 0 = \Delta\omega A + v\omega_0 B \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \cos(\varphi_1); \\ 0 = -v\omega_0 A \cos(\varphi_1 - \varphi_2); \\ 0 = \Delta\omega B - v\omega_0 A \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{array} \right. \quad (10)$$

Воспользуемся методом Боголюбова – Митропольского. Учитывая, что тригонометрические функции входят в уравнения (10) линейно, представим тогда эти уравнения в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi_1) = 0; \\ \cos(\varphi_1) = \frac{\Delta\omega}{A} (B^2 - A^2) \cdot \frac{2\omega}{\omega_0^2}; \\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\Delta\omega B}{v\omega_0 A}; \\ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

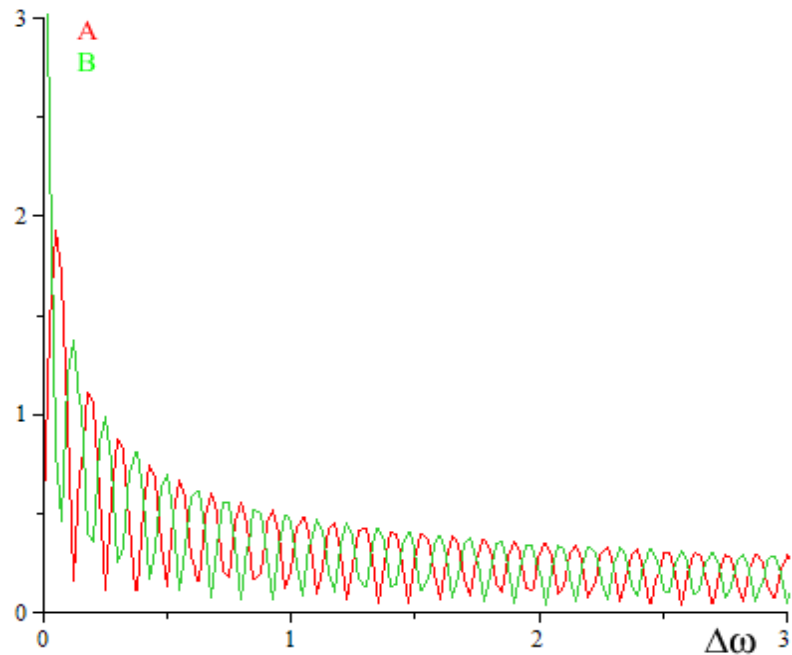
Исключая тригонометрические функции из (11), можно получить выражения для амплитуд чувствительного элемента:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \left| \frac{\omega_0^2}{2\omega(v\omega_0 - \Delta\omega)} \right|; \\ B = A \cdot \left| \frac{v\omega_0}{\Delta\omega} \right|. \end{array} \right. \quad (12)$$

По известным значениям амплитуд (12) можно определить значения фаз. При помощи математического пакета Maple [4] были построены графики амплитуд A и B . Пусть заданы:

– частота собственных колебаний $\omega_0 = 0.01 \left[\frac{1}{c} \right]$;

– частотная расстройка $\Delta\omega = 10^{-4} \tau \left[\frac{1}{c} \right]$.

Рис. 3 Амплитудно-частотные характеристики амплитуд $A(\tau)$ и $B(\tau)$

Из рис.3 видно, что при нулевой частотной расстройке в системе без трения находится в режиме резонанса, т.е. амплитуда бесконечно возрастает. Причем, так как в системе отсутствует вязкое трение, после прохождения резонанса колебания продолжают.

Система с учетом вязкого трения.

Чтобы более точно изучить поведение системы, требуется ввести вязкое трение. Тогда уравнения (6) примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = \varepsilon(2\nu\omega_0 \dot{\beta} - 2\gamma\omega_0 \dot{\alpha} - \omega_0^2 \sin(\psi)); \\ \ddot{\beta} + \omega_0^2 \beta = (-2\gamma\omega_0 \dot{\beta} - 2\nu\omega_0 \dot{\alpha})\varepsilon, \end{cases} \quad (13)$$

где: $\gamma \sim 1$ – безразмерный коэффициент вязкости.

Решение также ищем методом двух масштабов в переменных амплитуда-фаза (7). После нахождения необходимых производных, их подстановки и преобразований, можно записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \left[2\dot{A}\omega + A\dot{\omega} + 2\gamma\omega_0 A\omega - 2\nu\omega_0 B\omega \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \omega_0^2 \sin(\varphi_1) \right] \cos(\psi + \varphi_1) + \\ & + \left[\omega_0^2 A - A(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_1) + 2\nu\omega_0 B\omega \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \omega_0^2 \cos(\varphi_1) \right] \sin(\psi + \varphi_1) = 0, \\ & \left[2\dot{B}\omega + B\dot{\omega} + 2\gamma\omega_0 B\omega + 2\nu\omega_0 A\omega \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \cos(\psi + \varphi_2) + \\ & + \left[\omega_0^2 B - B(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_2) - 2\nu\omega_0 A\omega \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \sin(\psi + \varphi_2) = 0. \end{aligned}$$

Приравняв к нулю коэффициенты при $\cos(\psi + \varphi_1)$, $\sin(\psi + \varphi_1)$, $\cos(\psi + \varphi_2)$ и $\sin(\psi + \varphi_2)$ для исключения резонансных слагаемых, запишем в итоге систему дифференциальных уравнений движения в медленных переменных $A(\tau)$, $B(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A} = v\omega_0 B \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \gamma\omega_0 A + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \sin(\varphi_1) - \frac{A}{2\omega} \dot{\omega}; \\ A\dot{\varphi}_1 = \Delta\omega A + v\omega_0 B \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \cos(\varphi_1); \\ \dot{B} = -v\omega_0 A \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \gamma\omega_0 B - \frac{B}{2\omega} \dot{\omega}; \\ B\dot{\varphi}_2 = \Delta\omega B - v\omega_0 A \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{array} \right. \quad (14)$$

Стационарный режим:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = v\omega_0 B \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \gamma\omega_0 A + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \sin(\varphi_1); \\ 0 = \Delta\omega A + v\omega_0 B \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \cos(\varphi_1); \\ 0 = -v\omega_0 A \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \gamma\omega_0 B; \\ 0 = \Delta\omega B - v\omega_0 A \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{array} \right. \quad (15)$$

Воспользовавшись методом Боголюбова – Митропольского. Представим уравнения (15) в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi_1) = \frac{2\omega\gamma(B^2 - A^2)}{A\omega_0}; \\ \cos(\varphi_1) = -\frac{2\omega\Delta\omega(B^2 + A^2)}{A\omega_0^2}; \\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{B\Delta\omega}{A\omega_0 v}; \\ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{B\gamma}{Av}. \end{array} \right. \quad (16)$$

Исключив тригонометрические функции из (16), можно записать выражения для амплитуд чувствительного элемента:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{\frac{1}{2[a(b^2 - b + 1) + c(b^2 + b + 1)]}}; \\ B = A \sqrt{\frac{v^2 \omega_0^2}{\Delta\omega^2 + \gamma^2 \omega_0^2}}, \end{array} \right. \quad (17)$$

где:

$$a = \left(\frac{2\omega\gamma}{\omega_0} \right)^2; \quad c = \left(\frac{2\omega\Delta\omega}{\omega_0^2} \right)^2; \quad b = \frac{v^2 \omega_0^2}{\Delta\omega^2 + \gamma^2 \omega_0^2}.$$

По известным значениям амплитуд (17) можно определить значения фаз.

Требуется рассмотреть два случая движения к частоте резонанса: слева и справа.

Снова воспользуемся математическим пакетом Maple [4]. Необходимо построить графики амплитуд A и B . Пусть заданы:

– частота собственных колебаний $\omega_0 = 0.01 \left[\frac{1}{c} \right];$

– частотная расстройка $\Delta\omega = 10^{-4} \tau \left[\frac{1}{c} \right].$

Движение к частоте резонанса слева (слева – направо):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau); \\ \omega(\tau) = \omega_1 + \sigma\tau; \\ \sigma = 10^{-4} \frac{1}{c}, \quad \omega_1 = \omega_0 + \delta; \\ \delta - \text{малая добавка} . \end{array} \right.$$

Графики безразмерных амплитуд A и B :

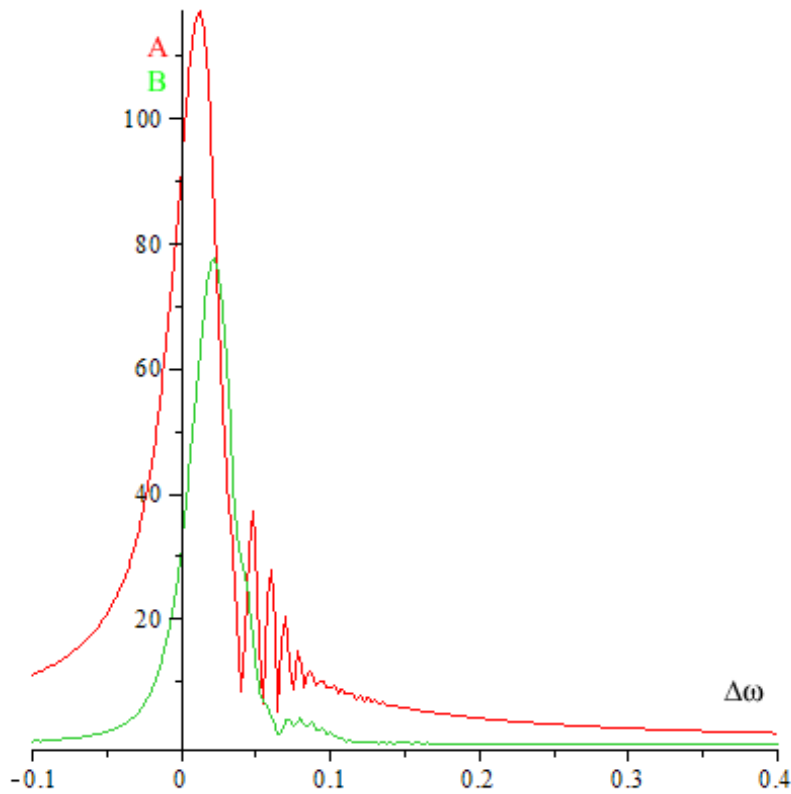


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики амплитуд $A(\tau)$ и $B(\tau)$.
(слева – направо)

Движение к частоте резонанса слева (справа – налево):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau); \\ \omega(\tau) = \omega_2 - \sigma\tau; \\ \sigma = 10^{-4} \frac{1}{c}, \quad \omega_2 = \omega_0 + \delta; \\ \delta - \text{малая добавка} . \end{array} \right.$$

Имеем следующие графики амплитуд A и B :

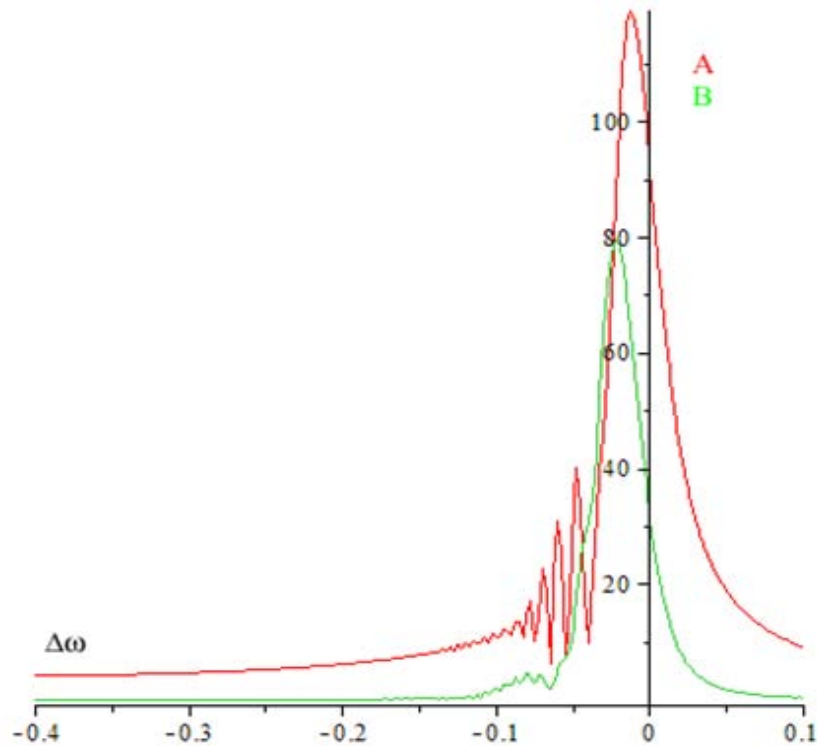


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики амплитуд $A(\tau)$ и $B(\tau)$.
(справа-налево)

Из графиков, изображенных на рис.4 и рис.5, видно, что в системе присутствует биение частот, из-за угловой скорости основания. Наличие трения в системе способствует гашению амплитуды, она уже не уходит в бесконечность, также происходит смещение резонансных пиков. В то же время, вязкое трение способствует быстрому затуханию колебаний в системе, после прохождения резонансных пиков, в отличие от системы, где трение отсутствует (см. рис.3).

Из полученных выражений для амплитуд (17) видно, что амплитуда вторичных колебаний пропорциональна угловой скорости основания, то есть в режиме вынужденных колебаний при наличии сил трения гироскоп является датчиком угловой скорости основания.

В ходе данной работы были получены и проанализированы уравнения движения микромеханического гироскопа L-L типа; рассмотрена система с частотой вынуждающей силы, которая зависела от времени. Построены амплитудно-частотные характеристики; сделан вывод, что в режиме вынужденных колебаний гироскоп является датчиком угловой скорости основания.

Литература

1. <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/gamm.201110029/pdf>
2. Меркурьев И.В., Подалков В. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 228 с.
3. Антонов Е.А., Подалков В.В. Динамика микромеханического гироскопа L-L типа в режиме вынужденных колебаний//Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: Двадцатая Междунар. науч.-техн.конф. студентов и аспирантов (27 – 28 февраля 2014, Москва): Тезисы докладов. В 4-х тт. Т. 4. М.: Издательский дом МЭИ, 2014. С. 229.
4. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.

Математическая модель микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней

Степанов А. С., Сбытова Е.С., Подалков В.В.
НИУ "МЭИ"

Постановка задачи

Рассматривается конструктивная схема микромеханического вибрационного гироскопа [1] (рис. 1), чувствительный элемент которого – четыре одинаковых упругих стержня 1. Рамка 2, на которой жестко закреплены стержни, посредством торсиона 3 соединена с основанием 4. Длины стержней с прямоугольным поперечным сечением обозначены через l .

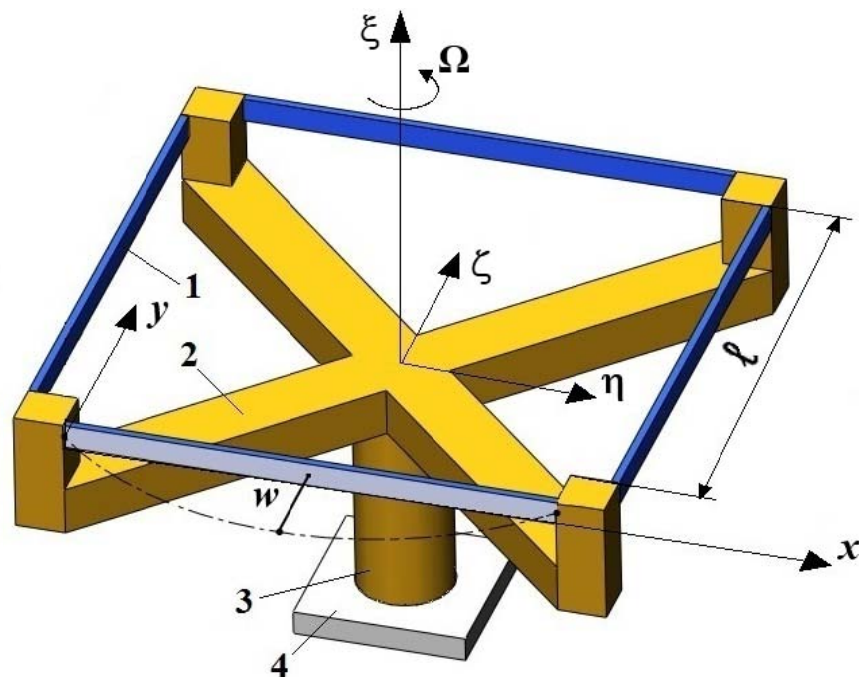


Рис. 1. Конструктивная схема микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней

Под действием электростатической системы управления резонатор совершает периодическое движение, измерение которого позволяет определить вращение основания гироскопа в инерциальном пространстве.

С подвижной рамкой связана система координат $\xi\eta\zeta$, при этом ось ξ является осью чувствительности гироскопа. Предполагается, что основание вращается вокруг оси ξ с угловой скоростью Ω , в общем случае являющейся некоторой функцией времени.

Для описания колебаний стержня введена функция прогиба поверхности упругого стержня $w = w(x, t)$, зависящая от времени t и координаты x , связанной со стержнем.

В рамках данной статьи рассматриваются следующие задачи динамики микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней:

1. Записать кинетическую и потенциальную энергии гироскопа и, используя вариационный принцип Гамильтона–Остроградского, получить систему интегродифференциальных уравнений, описывающих динамику прибора.
2. Применяя процедуру Бубнова–Галеркина, получить дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы.

3. В линейной постановке задачи исследовать влияние разночастотности и разнородности на угловую скорость прецессии гироскопа, помещенного на неподвижное основание.

Уравнения движения чувствительного элемента микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней

Кинетическая энергия гироскопа имеет вид:

$$T = 2\rho F \int_0^l \left\{ \left(\frac{l}{2} + w \right)^2 (\Omega + \dot{\alpha})^2 + \left[\dot{w} + \left(x - \frac{l}{2} \right) (\Omega + \dot{\alpha}) \right]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} J_0 (\Omega + \dot{\alpha})^2,$$

где ρ – плотность материала стержня, $F = bh$ – площадь его поперечного сечения, где b и h – геометрические размеры поперечного сечения стержня, α – малый угол поворота рамки относительно основания гироскопа, J_0 – момент инерции рамки относительно главной оси ξ . Здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по времени t , а по координате x – штрихом.

Потенциальная энергия гироскопа имеет вид:

$$\Pi = 2EJ_{cm} \int_0^l (w'')^2 dx + \frac{1}{2} c\alpha^2,$$

где EJ_{cm} – жесткость стержня при изгибе, $J_{cm} = \frac{bh^3}{12}$ – момент инерции поперечного сечения стержня, E – модуль Юнга, c – жесткость торсиона на кручение.

После применения вариационного принципа Гамильтона–Остроградского [5], были получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие динамику гироскопа:

$$\begin{aligned} \dot{w} + \frac{EJ_{cm}}{\rho F} w^{IV} + \frac{E_* J_{cm}}{\rho F} \dot{w}^{IV} + (\dot{\Omega} + \ddot{\alpha}) \left(x - \frac{l}{2} \right) - (\Omega + \dot{\alpha})^2 \left(\frac{l}{2} + w \right) &= 0, \\ J(\dot{\Omega} + \ddot{\alpha}) + c\alpha + k_* \dot{\alpha} + 4\rho F \left[2(\Omega + \dot{\alpha}) \int_0^l \left(\frac{l}{2} + w \right) \dot{w} dx + (\dot{\Omega} + \ddot{\alpha}) \int_0^l (tw + w^2) dx + \int_0^l \left(x - \frac{l}{2} \right) \dot{w} dx \right] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $J = \frac{4}{3} \rho Fl^3 + J_0$ – обобщенный момент инерции системы. В (1) учтено внутреннее трение по модели Кельвина–Фойгта [4] и введены обозначения E_* – вязкоупругий модуль материала стержней, характеризующий внутреннее трение в материале, k_* – коэффициент вязкого трения торсиона.

В качестве динамической модели принимается стержень с жестко заделанными концами. Функция нормального прогиба w задается в виде [5]:

$$w = \beta(t) \left[(\operatorname{sh} r_1 - \sin r_1) \left(\operatorname{ch} \left(r_1 \frac{x}{l} \right) - \cos \left(r_1 \frac{x}{l} \right) \right) - (\operatorname{ch} r_1 - \cos r_1) \left(\operatorname{sh} \left(r_1 \frac{x}{l} \right) - \sin \left(r_1 \frac{x}{l} \right) \right) \right] = 0, \quad (2)$$

где $\beta(t)$ – искомая функция формы колебаний, характеризующая прогиб в середине стержня; $\beta \ll 1$.

В (2) $r_1 = 4.73$ – первый корень трансцендентного уравнения $\operatorname{ch} r_1 \cos r_1 = 1$ [5].

После применения процедуры Бубнова–Галеркина, получены дифференциальные уравнения для обобщенных координат β и α :

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} + \omega_1^2 \beta &= -d_1 \dot{\beta} + 2\Omega k_1 \dot{\alpha} + k_1 \dot{\alpha}^2 + \beta \dot{\alpha}^2, \\ \ddot{\alpha} + \omega_2^2 \alpha &= -d_2 \dot{\alpha} - 2\Omega k_2 \dot{\beta} - 2k_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} - 2k_2 \beta \ddot{\alpha} - \frac{k_2}{k_1} \beta^2 \ddot{\alpha} - 2 \frac{k_2}{k_1} \beta \dot{\beta} \dot{\alpha} - 2k_2 \dot{\Omega} \beta - \frac{k_2}{k_1} \dot{\Omega} \beta^2 - \dot{\Omega}.\end{aligned}\quad (3)$$

В формуле (3) введены следующие обозначения: ω_1^2 , ω_2^2 – квадраты собственных частот колебаний резонатора на неподвижном основании; d_1 , d_2 – коэффициенты демпфирования; k_1 , k_2 – коэффициенты при гироскопических слагаемых в математической модели движения.

Значения параметров системы ω_1^2 , ω_2^2 , d_1 , d_2 , k_1 , k_2 :

$$\omega_1^2 = \frac{EJ_{\text{ст}} r_1^4}{\rho F l^4}, \quad d_1 = \frac{E_* J_{\text{ст}} r_1^4}{\rho F l^4}, \quad k_1 = 1.319, \quad \omega_2^2 = \frac{c}{J}, \quad d_2 = \frac{\kappa_*}{J}, \quad k_2 = 0.523 \frac{\rho F l^3}{J}.$$

Числовой пример 1. Для стержней длиной $l = 20$ мм с прямоугольным сечением $b = 0.33$ мм и $h = 1$ мм, изготовленных из плавленного кварца ($\rho = 2201$ кг/м³, $E = 7.3 \cdot 10^{10}$ Па), и обобщенного момента инерции $J = 3 \cdot 10^{-8}$ кг·м² с учетом совмещения частот собственных колебаний имеем $c = 254.9$ Н·м, $J = 3 \cdot 10^{-8}$ кг·м², $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 92987$ рад/с (14.806 кГц), $k_1 = 1.319$, $k_2 = 0.1013$.

Влияние разночастотности и разнодобротности на прецессию гироскопа

Введем коэффициенты демпфирования $d_1 = 2\gamma_0 \omega_1$, $d_2 = 2k\gamma_0 \omega_2$, где $k > 0$ и $\gamma_0 \ll 1$. Без учета нелинейных слагаемых в математической модели (3) на неподвижном основании ($\Omega = 0$) при неточном совмещении частот, а именно при $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega_1 + \sigma \omega_1$, где $|\sigma| \ll 1$, уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} + \omega_1^2 \beta &= -d_1 \dot{\beta}, \\ \ddot{\alpha} + \omega_2^2 \alpha &= -d_2 \dot{\alpha}.\end{aligned}$$

Решение для β и α с точностью до величин первого порядка малости ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\beta &= e^{-\gamma_0 \omega_1 t} (A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t), \\ \alpha &= e^{-k\gamma_0 \omega_1 t} (B_1 \sin(\omega_1 + \sigma \omega_1)t + B_2 \cos(\omega_1 + \sigma \omega_1)t),\end{aligned}\quad (4)$$

где A_1 , A_2 , B_1 , B_2 – постоянные, определяемые начальными условиями.

Далее осуществлен переход от переменных β и α к медленным переменным p_1 , q_1 , p_2 , q_2 Ван-дер-Поля посредством замены

$$\begin{aligned}\beta &= p_1 \sin \omega_1 t + q_1 \cos \omega_1 t, \\ \alpha &= p_2 \sin \omega_1 t + q_2 \cos \omega_1 t.\end{aligned}\quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), получаем, что p_1 , q_1 , p_2 , q_2 определяются через постоянные A_1 , A_2 , B_1 , B_2 и σ следующим образом:

$$\begin{aligned}p_1 &= A_1 e^{-\gamma_0 \omega_1 t}, \quad q_1 = A_2 e^{-\gamma_0 \omega_1 t}, \\ p_2 &= e^{-k\gamma_0 \omega_1 t} (B_1 \cos \sigma \omega_1 t - B_2 \sin \sigma \omega_1 t), \\ q_2 &= e^{-k\gamma_0 \omega_1 t} (B_1 \sin \sigma \omega_1 t + B_2 \cos \sigma \omega_1 t).\end{aligned}$$

Поведение гироскопа удобно представить в орбитальных координатах θ, χ, r, k [2], переход к которым осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} p_1 &= -r \cos \theta \sin \chi - k \sin \theta \cos \chi, \\ q_1 &= r \cos \theta \cos \chi - k \sin \theta \sin \chi, \\ p_2 &= -r \sin \theta \sin \chi + k \cos \theta \cos \chi, \\ q_2 &= r \sin \theta \cos \chi + k \cos \theta \sin \chi. \end{aligned}$$

Выражения для угла прецессии имеет аналитическое представление вида

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \tilde{f} \tilde{g} \sin(\sigma \omega_1 t + \phi_0 + \psi_0)}{e^{(k-1)\gamma_0 \omega_1 t} \tilde{f}^2 - e^{(1-k)\gamma_0 \omega_1 t} \tilde{g}^2} \right), \quad (6)$$

а для угловой скорости прецессии:

$$\dot{\theta} = \tilde{f} \tilde{g} \omega_1 \frac{A-B}{C},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \sqrt{(A_1^2 + A_2^2)}, \quad \tilde{g} = \sqrt{(B_1^2 + B_2^2)}, \\ A &= \sigma \cos(\sigma \omega_1 t + \phi_0 + \psi_0) \left(e^{(k-1)\gamma_0 \omega_1 t} \tilde{f}^2 - e^{(1-k)\gamma_0 \omega_1 t} \tilde{g}^2 \right), \\ B &= \gamma_0 \sin(\sigma \omega_1 t + \phi_0 + \psi_0) \left((k-1) e^{(k-1)\gamma_0 \omega_1 t} \tilde{f}^2 - (1-k) e^{(1-k)\gamma_0 \omega_1 t} \tilde{g}^2 \right), \\ C &= \left(e^{(k-1)\gamma_0 \omega_1 t} \tilde{f}^2 - e^{(1-k)\gamma_0 \omega_1 t} \tilde{g}^2 \right)^2 + 4 \tilde{f}^2 \tilde{g}^2 \sin^2(\sigma \omega_1 t + \phi_0 + \psi_0). \end{aligned}$$

Для оптимального функционирования гироскопов требуется, чтобы амплитуда вторичных колебаний (в нашем случае – по второй обобщенной координате α) была минимальной, то есть \tilde{g} должно быть много меньше \tilde{f} . Тогда угловая скорость прецессии определяется следующей формулой:

$$\dot{\theta} = \frac{\tilde{f}^2 \tilde{g} \sigma \omega_1 \cos(\sigma \omega_1 t + \phi_0 + \psi_0) - \tilde{g} \omega_1 (k-1) \gamma_0 \sin(\sigma \omega_1 t + \phi_0 + \psi_0)}{\tilde{f}^3 e^{(k-1)\gamma_0 \omega_1 t}}.$$

Таким образом, на неподвижном основании в условиях линейной постановки задачи возникает прецессия волновой картины колебаний гироскопа, определяемая формулой (6).

Числовой пример 2. Рассмотрим гироскоп на неподвижном основании, геометрические размеры которого приведены в числовом примере 1. Коэффициент вязкого трения $\gamma_0 = 10^{-5} 1/\text{с}$. Пусть собственная частота резонатора изменяется по закону $\omega_2 = \omega_1(1 + \sigma)$, где $\omega_1 = 92987 \text{ рад/с}$.

На рис. 2 графики иллюстрируют зависимость изменения угла прецессии θ от времени t при различной добротности.

Случай совмещения частот ($\sigma = 0$) проиллюстрирован на рис.2а. Из графика видно, что при одинаковом трении $k = 1$ (сплошная линия) прецессия волновой картины не меняется. Аналогичные результаты получены для других гироскопов класса маятника Фуко [3]. При $k = 1.5$ (пунктирная линия) и при дальнейшем увеличении коэффициента пропорциональности добротности k угол прецессии с течением времени все быстрее будет стремиться к нулю.

Случай фиксированной разночастотности, где $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 20 \text{ Гц}$ ($\sigma = 10^{-3}$), проиллюстрирован на рис.2б. При $k = 1$ (сплошная линия) наблюдается прецессия волновой картины колебаний гироскопа, которая во времени имеет постоянную амплитуду. При $k = 1.5$ (пунктирная линия) наблюдается затухание амплитуды с течением времени. При дальнейшем увеличении коэффициента пропорциональности добротности k скорость уменьшения амплитуды возрастает.

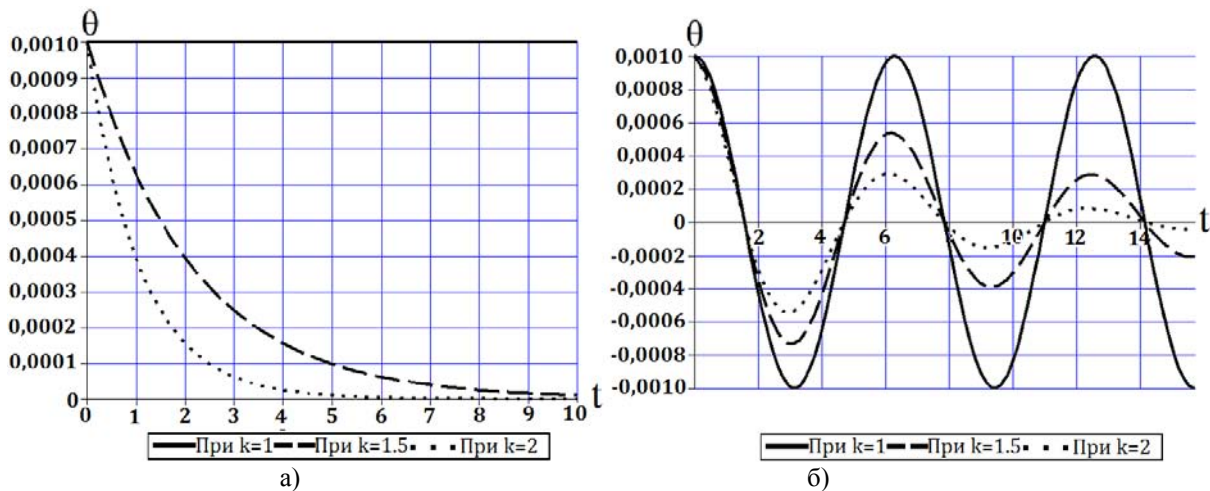


Рис. 2. Зависимость $\theta(t)$ при различных k

а – при совмещении частот;

б – при близких, но не равных частотах ($\Delta\omega = 20 \text{ Гц}$)

Заключение

Получена математическая модель микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стрижней. Установлено, что на неподвижном основании при неточном совмещении частот колебаний по двум обобщенным координатам возникает прецессия волновой картины колебаний гироскопа, что приводит к дополнительным погрешностям в измерении угла поворота основания в режиме свободных колебаний

Литература

1. Астахов С.В., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние конечных деформаций резонатора на динамику и точность микромеханического гироскопа камертонного типа // Вестник МЭИ. 2010. №6. С. 148–154.
2. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов. // Изв. РАН. МТТ. 1997. №6. С. 27–35.
3. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. – М.: Физматлит, 2009. – 228 с.
4. Стретт Дж.В.(лорд Релей) Теория звука. – М.: ГИТТЛ, 1955. Т.1 – 484 с.
5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. 733 с.

Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами

Тиньков Д. В.
НТИЦ АиАТЭК-Дубна

Расчет и анализ периодических статически определимых систем (плоских и пространственных ферм, покрытий) представляет важную теоретическую и практическую задачу [1].

Рассмотрим плоскую статически определимую балочную ферму (рис. 1). Стержни фермы предполагаем упругими (модуль упругости E) одинакового сечения F . Поставим задачу получить аналитическое решение для прогиба фермы при произвольном числе панелей n в половине пролета и провести анализ влияния условий закрепления (влияние величин b и d). Ферма нагружена по нижнему поясу силами P , в крайних узлах – $P/2$. Ферма закреплена при помощи жестких стержней на неподвижную шарнирную опору с одной стороны и на катковую (подвижный шарнир) с другой. Ферма содержит $4n+4$ шарниров, включая опорные, и $m=8n+5$ стержней. Аналогичные решения для прогиба плоских ферм, с различными решетками в зависимости от числа панелей и размеров получены в [2-12]. Примененный в этих работах метод индукции показал свою эффективность, а полученные формулы для прогиба позволили найти некоторые оптимальные по жесткости конструктивные решения и указали на особенности конструкции. Предлагаемая схема фермы с приведённым условием закрепления ранее аналитически не исследовалась.

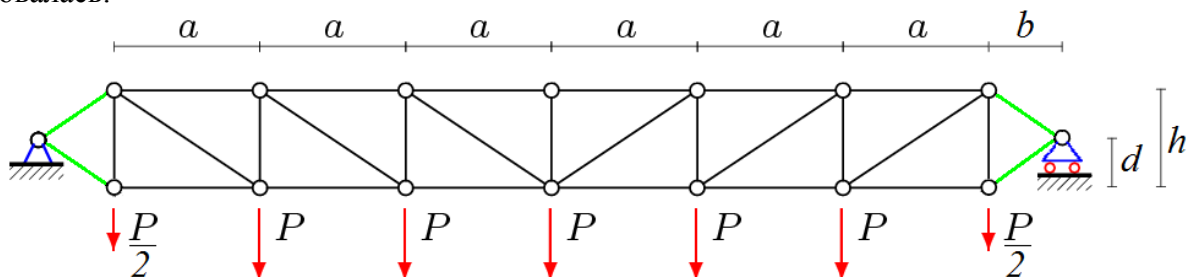


Рис. 1. Ферма, $n = 3$

Для определения усилий в стержнях фермы используем метод вырезания узлов. Задача определения усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{B}}.$$

Здесь \mathbf{G} – матрица направляющих косинусов, $\bar{\mathbf{S}}$ – вектор неизвестных усилий, $\bar{\mathbf{B}}$ – вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные – в четные B_{2i} .

Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^m \frac{S_k s_k l_k}{EF},$$

где S_k, s_k – усилия в k -м стержне фермы от приложенной нагрузки и от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу. Суммирование ведется по всем стержням фермы, стержни, при помощи которых ферма опирается на опоры, в эту сумму не входят. Последовательное решение задачи с использованием системы символьной математики Maple для ферм с одной, двумя, тремя и т.д. панелями в половине пролета позволило методом индукции (по аналогии с [2-12]) получить следующее выражение

$$\Delta = \frac{P}{2h^2 EF} \left[4n^2 b^2 a + \frac{a^2 bn}{3} (10n^2 - 1) + 2d^2 hn - h^2 d + \frac{a^3 n^2}{6} (5n^2 + 1) + (n-1)h^3 + n^2 c^3 \right], \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Для получения коэффициента при $b^2 a$, $a^2 b$, $d^2 h$, $h^2 d$, a^3 , h^3 , c^3 применялись операторы **rgf_findrecur** и **rsolve** системы Maple [13, 14].

Для оценки влияния условий закрепления необходим анализ слагаемых зависящих от переменных b и d . Зададим длину фермы $L = 2na$ и суммарную нагрузку $Q = 2nP$. Следовательно, $a = L/2n$ и $P = Q/2n$.

Введем обозначение для слагаемого в (1), зависящего от b , $\tilde{\Delta} = \Delta EF / Q$. Проведём анализ этой величины:

$$\tilde{\Delta}_b = \frac{bL}{2h^2} \left[b + L \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{24n^2} \right) \right]. \quad (2)$$

Очевидно, $\tilde{\Delta}_b$ принимает положительные значения при $b > 0$ и $b < -L \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{24n^2} \right)$.

Минимальное же значение получается при $b = -L \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{48n^2} \right)$. Следовательно, оптимальная

(по жесткости) величина: $b^* = -L \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{48n^2} \right)$.

В зависимости от числа панелей n значение оптимальной величины b^* лежит в интервале $\left[b_{n=1}^*; \lim_{n \rightarrow \infty} b^* \right] = \left[-\frac{3L}{16}; -\frac{5L}{24} \right]$.

Минимальное значение слагаемого уменьшающего суммарный прогиб за счет величины $b - \tilde{\Delta}_b$ лежит в интервале $\left[\tilde{\Delta}_{b^*}; \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}_b \right] = \left[-\frac{9L^3}{512h^2}; -\frac{25L^3}{1152h^2} \right]$.

Величина b при положительных значениях увеличивает прогиб. Т.к. увеличивает длину перекрываемого пролёта фермой (расстояния между опорами – $L + 2b$). Следовательно, при невозможности конструктивно выполнить закрепление при котором $b < 0$, оптимальное значение равно $b^* = 0$.

Аналогично проведём анализ слагаемых зависящих от переменной d (высоты закрепления):

$$\tilde{\Delta}_d = \frac{d(2dn - h)}{4nh}, \quad (3)$$

Где $\tilde{\Delta}_d$ – кривая зависимости отдельного слагаемого, положительные значения принимает при $d < 0$ и $d > \frac{h}{2n}$, минимальное значение слагаемое принимает при $d = \frac{h}{4n}$.

Следовательно, оптимальная величина: $d^* = \frac{h}{4n}$.

Минимальное значение слагаемого уменьшающего суммарный прогиб за счет величины $d - \tilde{\Delta}_d$ лежит в интервале $\left[\tilde{\Delta}_{d^*}; \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}_d \right] = \left[-\frac{h}{32n^2}; 0 \right]$.

Зададим длину фермы $L = 100$ м. Отообразим график $\tilde{\Delta}_b$ как функцию переменной b при различных значениях n и h – рис. 2 (все размеры даны в метрах). Аналогично график $\tilde{\Delta}_d$ как функцию переменной d при различных значениях n и h – рис. 3.

Из графиков представленных на рис. 2, 3 и анализа минимальных значений слагаемых $\tilde{\Delta}_b$, $\tilde{\Delta}_d$ видно, что, как и следовало ожидать, степень влияния размера b на суммарный прогиб больше, чем высоты d .

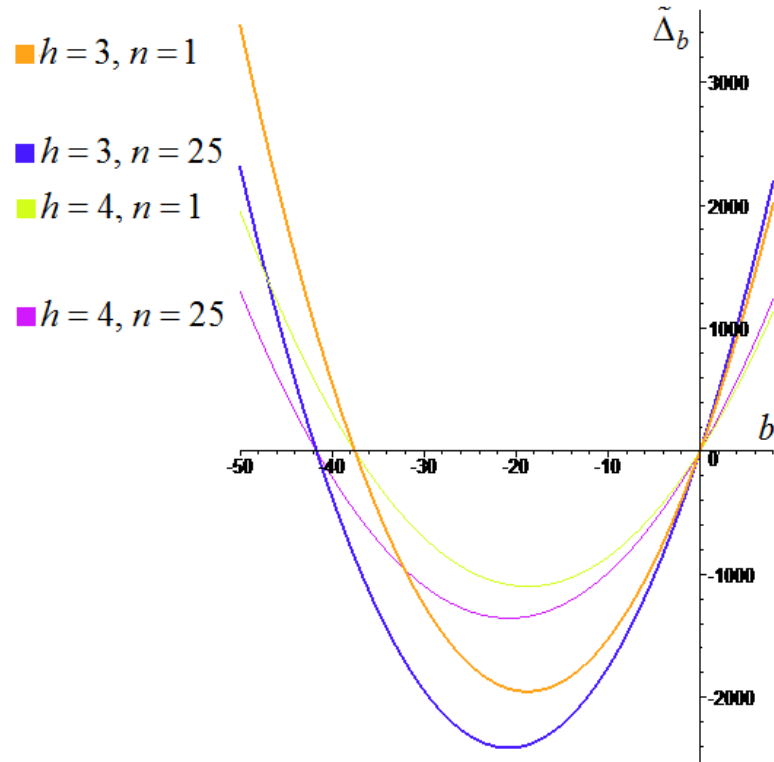


Рис. 2. График влияния величины b на прогиб $\tilde{\Delta}_b$

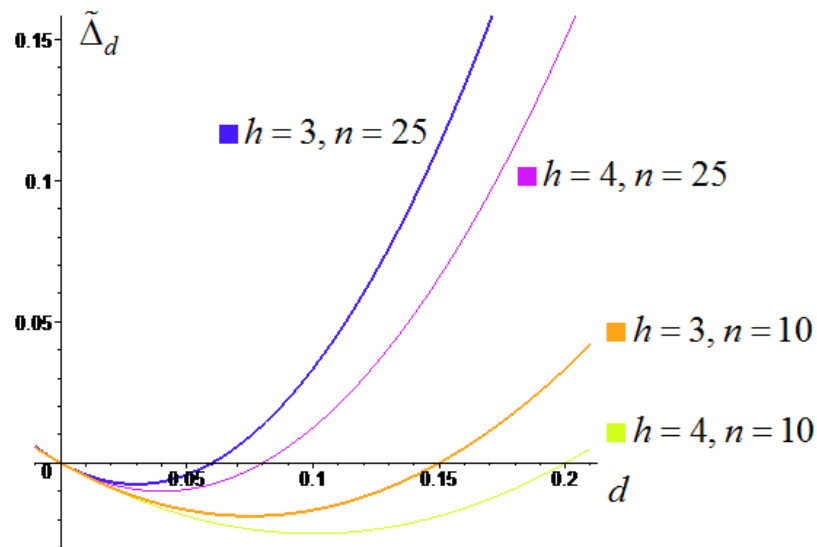


Рис. 3. График влияния величины d на прогиб $\tilde{\Delta}_d$

Отообразим график $\tilde{\Delta}$ для фермы $L = 100$ м, $h = 3$ м как функцию переменной n при различных значениях b и d – рис. 4. Обозначены найденные оптимальные значения:

$b^* = -L \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{48n^2} \right)$, $d^* = \frac{h}{4n}$. Получены кривые, указывающие на возможность выбора оптимального числа панелей и указывающие что степень влияния величины b на суммарный прогиб больше, чем для величины d .

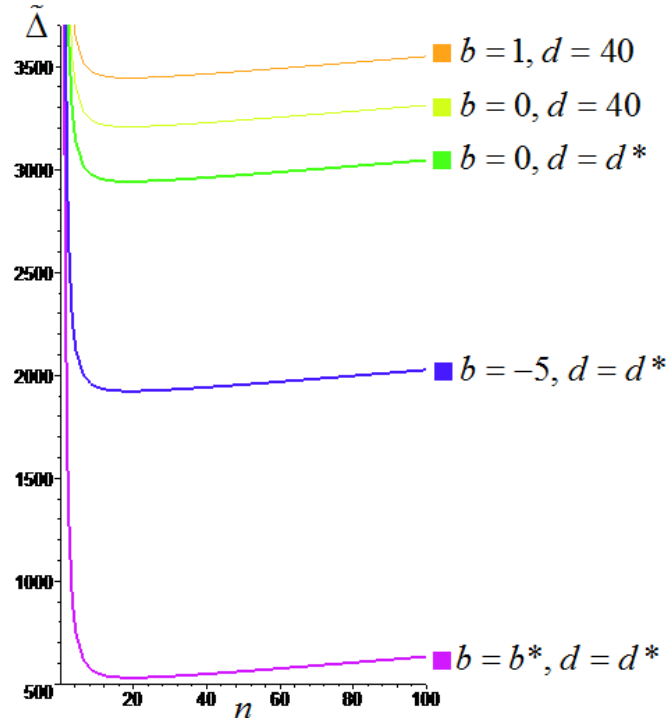


Рис. 4. Зависимость прогиба $\tilde{\Delta}$ от числа панелей n при различных значениях b , d

Выводы

Методом индукции получено точное решение для прогиба фермы с нестандартным расположением опор. Формула содержит восемь параметров фермы (нагрузка, размеры, материал). Найдены размеры конструкции, при которых для заданного пролета и нагрузки прогиб минимален. Зависимость от числа панелей позволила выявить предельные значения этих размеров.

Литература

1. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85. No. 9. Pp. 607 – 617.
2. Кужелев П. А. Оптимизация прогиба плоской балочной фермы // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г. в 11 частях. Часть 11. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 109-110.
3. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
4. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-40.
5. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
6. Дзабиев А. А., Черепанов С. П. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по

- материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г. в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 63-64.
7. Бадертдинов Р. Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. в 11 частях. Часть 7. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 21-22.
 8. Дегтярев Н.Р., Трошило А.П. Прогиб балочной фермы шпренгельного типа //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 52-53.
 9. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. №1(53). С. 32–38.
 10. Афанасьев В.А., Бойко О.О. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами//Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 15-16.
 11. Сайпулаев Г.Р. Расчет регулярных стержневых систем на примере арочной фермы //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 128-129.
 12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №6. С. 2-6.
 13. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
 14. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.

Поведение микромеханического гироскопа L-L типа в режиме свободных колебаний

Подалков В.В., Шустова Т.И., Сбытова Е.С.

НИУ “МЭИ”

Одним из самых перспективных направлений в технике является создание сверхминиатюрных электротехнических систем, применяемых не только в военной, космической и авиационной промышленности, но и в изделиях гражданского назначения [1]. Это новое направление в области приборостроения получило название технологии МЭМС (микроэлектромеханических систем). Наиболее сложными МЭМС устройствами являются микромеханические гироскопы (ММГ), появившиеся на рынке сравнительно недавно. Работы по созданию ММГ начались с 1990-х гг. в ряде ведущих лабораторий и институтов зарубежных стран [2], [3]. Современные цели и задачи проектирования ММГ в настоящее время отражены в работах российских [4], [5], [6] и зарубежных авторов [7], [8].

В данной статье предметом исследования является микромеханический гироскоп L-L типа, схема которого представлена на рисунке 1. Ставится актуальная для этого класса приборов задача исследования влияния погрешностей изготовления на показания прибора.

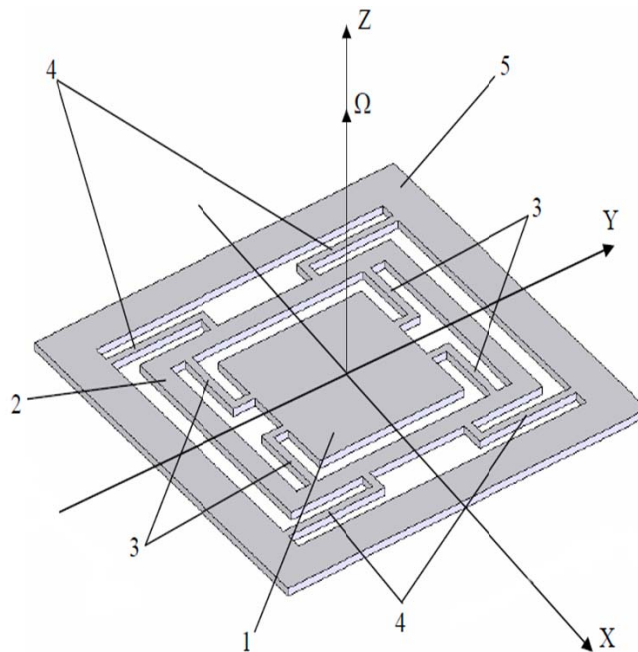


Рис. 1

Для математического описания колебаний введем систему координат $OXYZ$, связанную с корпусом прибора. Ось OY является осью возбуждения, OX – осью съема информации, а OZ является измерительной осью датчика.

Чувствительный элемент (ЧЭ) 1 подвешен в рамке 2 при помощи упругих торсионов (внутренних) 3, которые обеспечивают ЧЭ одну степень свободы вдоль оси OY . Рамка с ЧЭ с помощью опять же упругих торсионов (наружных) 4 подвешена в основании 5, что обеспечивает ЧЭ еще одну степень свободы вдоль оси OX .

За счет специальной формы торсионов 3, 4 обеспечивается работа данных торсионов в большей степени на изгиб, при этом снижая их растяжение. В итоге получаем, что торсионы дают ЧЭ свободу линейных перемещений [9].

Вводя обобщенные координаты x и y , определяющие положение ЧЭ в выбранной системе координат, запишем Лагранжиан системы L в виде:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} - y\Omega)^2 + (\dot{y} + x\Omega)^2 \right] - \frac{cx^2}{2} - \frac{cy^2}{2}, \quad (1)$$

где Ω – угловая скорость вращения основания, на которое помещен микромеханический гироскоп; c – жесткость торсионов.

Для получения уравнения движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Здесь q – вектор обобщенных координат:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Найдя производные от Лагранжиана системы (1) по каждой обобщенной координате согласно приведенным уравнениям Лагранжа, получаем систему дифференциальных уравнений движения ЧЭ гироскопа:

$$\begin{cases} m(\ddot{x} - \ddot{\Omega}y - \Omega\dot{y}) - m\Omega(\dot{y} + x\Omega) + cx = 0; \\ m(\ddot{y} + \ddot{\Omega}x + \Omega\dot{x}) + m\Omega(\dot{x} - y\Omega) + cy = 0; \end{cases}$$

Нормализованные уравнения движения системы:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha - 2\Omega\dot{\beta} - \Omega^2 \alpha - \dot{\Omega}\beta = 0; \\ \ddot{\beta} + \omega_0^2 \beta + 2\Omega\dot{\alpha} - \Omega^2 \beta + \dot{\Omega}\alpha = 0; \end{cases} \quad (2)$$

где:

$$\alpha = \frac{x}{l\sqrt{\varepsilon}}; \quad \beta = \frac{y}{l\sqrt{\varepsilon}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}};$$

α и β – безразмерные переменные, ω_0 – собственная частота колебаний, ε – малый параметр ($\varepsilon \ll 1$).

Влияние разночастотности и разнодобротности на угол прецессии гироскопа на неподвижном основании

Рассмотрим поведение микромеханического гироскопа на неподвижном основании в условиях свободных колебаниях и наличия разночастотности и разнодобротности. А именно, рассматривается система дифференциальных уравнений с учетом трения γ_1 и γ_2 вида:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha + 2\omega_1 \gamma_1 \dot{\alpha} = 0; \\ \ddot{\beta} + \omega_2^2 \beta + 2\omega_2 \gamma_2 \dot{\beta} = 0; \end{cases} \quad (3)$$

где: $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_1$, $\omega_1 = \omega$.

$$\omega_2^2 = (\omega_1 + \Delta\omega)^2 = \omega_1^2 + 2\omega_1\Delta\omega + \Delta\omega^2.$$

$$2\omega_1\Delta\omega = 2\omega_1 \frac{\Delta\omega}{\omega_1} \omega_1 = 2\omega_1^2 \delta\varepsilon, \text{ где } \frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \delta\varepsilon, \varepsilon \ll 1.$$

Пусть $\gamma_1 = \varepsilon\tilde{\gamma}_1, \gamma_2 = \varepsilon\tilde{\gamma}_2$ тогда имеем:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \omega^2\alpha + 2\omega\varepsilon\tilde{\gamma}_1\dot{\alpha} = 0; \\ \ddot{\beta} + \omega^2\beta + 2\varepsilon(\delta\omega^2\beta + \omega\tilde{\gamma}_2\dot{\beta}) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы (4) ищем, используя метод двух масштабов в переменных Ван-Дер-Поля [10]:

$$\begin{cases} \alpha = p_1(\tau)\sin\omega t + q_1(\tau)\cos\omega t + \varepsilon f_1(t, \tau); \\ \beta = p_2(\tau)\sin\omega t + q_2(\tau)\cos\omega t + \varepsilon f_2(t, \tau). \end{cases} \quad (5)$$

Найдем производные от α и β по времени t :

$$\dot{\alpha} = \dot{p}_1 \sin\omega t + p_1\omega \cos\omega t + \dot{q}_1 \cos\omega t - q_1\omega \sin\omega t + \varepsilon \frac{\partial f_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial f_1}{\partial \tau},$$

где $\varepsilon^2 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} = 0$.

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & \ddot{p}_1 \sin\omega t + 2\dot{p}_1\omega \cos\omega t - p_1\omega^2 \sin\omega t + \ddot{q}_1 \cos\omega t - 2\dot{q}_1\omega \sin\omega t - \\ & - q_1\omega^2 \cos\omega t + \varepsilon \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

$$\dot{\beta} = \dot{p}_2 \sin\omega t + p_2\omega \cos\omega t + \dot{q}_2 \cos\omega t - q_2\omega \sin\omega t + \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau},$$

где $\varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = 0$.

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} = & \ddot{p}_2 \sin\omega t + 2\dot{p}_2\omega \cos\omega t - p_2\omega^2 \sin\omega t + \ddot{q}_2 \cos\omega t - 2\dot{q}_2\omega \sin\omega t - \\ & - q_2\omega^2 \cos\omega t + \varepsilon \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и подставляя производные в систему дифференциальных уравнений, получаем уравнения для первого приближения:

$$1) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + 2\dot{p}_1\omega \cos\omega t - 2\dot{q}_1\omega \sin\omega t + 2\varepsilon\omega\tilde{\gamma}_1(p_1\omega \cos\omega t - q_1\omega \sin\omega t) = 0$$

$$2) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} + 2\dot{p}_2\omega \cos\omega t - 2\dot{q}_2\omega \sin\omega t + 2\varepsilon(\delta\omega^2(p_2 \sin\omega t + q_2 \cos\omega t) + \omega\tilde{\gamma}_2(p_2\omega \cos\omega t - q_2\omega \sin\omega t)) = 0.$$

Коэффициенты в данных уравнениях при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ необходимо приравнять к нулю, чтобы избежать появления резонансных слагаемых в решении уравнения для первого приближения. Имеем:

$$1) \quad \dot{p}_1 + \varepsilon\omega\tilde{\gamma}_1 p_1 = 0 \quad \text{и} \quad -\dot{q}_1 - \varepsilon\omega\tilde{\gamma}_1 q_1 = 0 \quad (6)$$

$$2) \quad \dot{p}_2 + \varepsilon\omega\delta q_2 + \varepsilon\omega\tilde{\gamma}_2 p_2 = 0 \quad \text{и} \quad \dot{q}_2 + \varepsilon\omega\delta p_2 + \varepsilon\omega\tilde{\gamma}_2 q_2 = 0. \quad (7)$$

Решение уравнений (6) имеет вид:

$$\dot{p}_1 = -\varepsilon\omega\tilde{\gamma}_1 p_1, \quad \dot{q}_1 = -\varepsilon\omega\tilde{\gamma}_1 q_1,$$

$$p_1 = p_0 e^{-\varepsilon\omega\tilde{\gamma}_1 t}, \quad q_1 = q_0 e^{-\varepsilon\omega\tilde{\gamma}_1 t}.$$

Для поиска решения уравнений (7) умножим 2-ое уравнение в (7) на i и прибавим его к 1-ому уравнению:

$$(\dot{p}_2 + i\dot{q}_2) + \varepsilon\omega\tilde{\gamma}_2(p_2 + iq_2) + \varepsilon\omega\delta(p_2 + iq_2) = 0.$$

Пусть $p_2 + iq_2 = S$, тогда:

$$\dot{S} + (\varepsilon\omega\tilde{\gamma}_2 + i\varepsilon\delta\omega)S = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и сделаем следующую замену:

$$\lambda + (a + ib) = 0,$$

где $a = \varepsilon\omega\tilde{\gamma}_2$ и $b = \varepsilon\delta\omega$.

$$\lambda = -(a + ib).$$

$$S = Ce^{\lambda t} = Ce^{-(a+ib)t}.$$

$$S = (C_1 + iC_2)e^{-(a+ib)t} = e^{-at}(C_1 + iC_2)e^{-ibt} = e^{-at}(C_1 + iC_2)(\cos bt - i \sin bt). \quad (8)$$

Из условия (8), медленные переменные p_2 и q_2 принимают вид:

$$p_2 = e^{-at}(C_1 \cos bt - C_2 \sin bt),$$

$$q_2 = e^{-at}(-C_1 \sin bt + C_2 \cos bt).$$

Константы определяются выражениями:

$$p_1(0) = \alpha(0) = \alpha_0, q_1(0) = \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_0}, C_2 = \beta(0) = \beta_0, C_1 = \frac{\dot{\beta}_0}{\omega_0}.$$

Подставив найденные константы, выражения для медленных переменных p_1, p_2, q_1, q_2 примут вид:

$$p_1 = \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_0} e^{-\varepsilon\omega\tilde{\gamma}_1 t},$$

$$q_1 = \alpha_0 e^{-\varepsilon\omega\tilde{\gamma}_1 t},$$

$$p_2 = e^{-at} \left(\frac{\dot{\beta}_0}{\omega_0} \cos bt - \beta_0 \sin bt \right),$$

$$q_2 = e^{-at} \left(-\frac{\dot{\beta}_0}{\omega_0} \sin bt + \beta_0 \cos bt \right).$$

Угол прецессии θ определяется по формуле [1]:

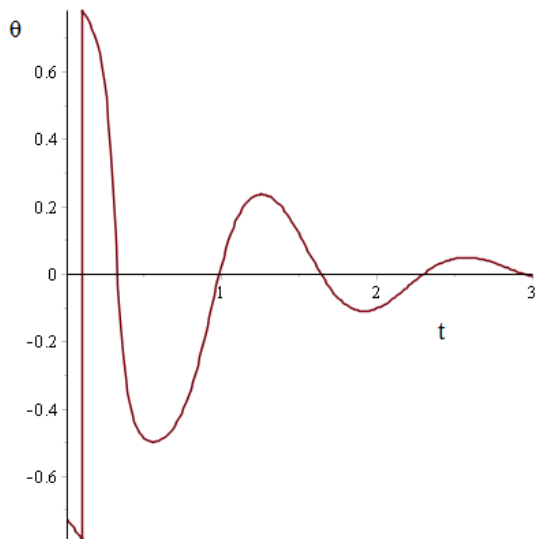
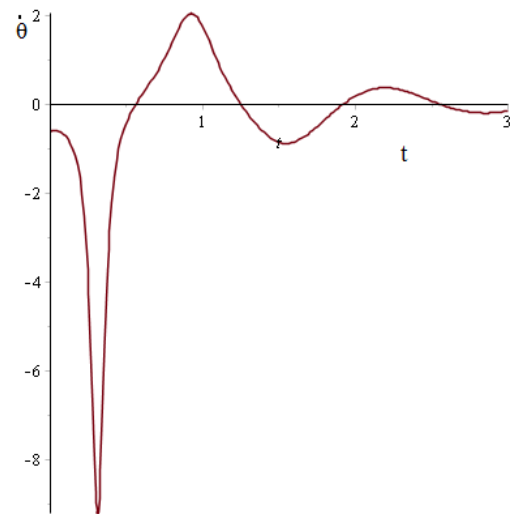
$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2(q_1 q_2 + p_1 p_2)}{q_1^2 + p_1^2 - p_2^2 - q_2^2}.$$

Подставив и преобразовав значения p_1, p_2, q_1, q_2 , угол прецессии запишем в виде:

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2e^{-\varepsilon\omega t(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2)} \left(\left(\alpha_0 \beta_0 + \frac{\dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0}{\omega_0^2} \right) \cos(\varepsilon\delta\omega t) - \left(\frac{\alpha_0 \dot{\beta}_0}{\omega_0} + \frac{\dot{\alpha}_0 \beta_0}{\omega_0} \right) \sin(\varepsilon\delta\omega t) \right)}{e^{-2\varepsilon\omega t\tilde{\gamma}_1} \left(\alpha_0^2 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{\omega_0^2} \right) - e^{-2\varepsilon\omega t\tilde{\gamma}_2} \left(\frac{\dot{\beta}_0^2}{\omega_0^2} + \beta_0^2 - 2 \frac{\dot{\beta}_0 \beta_0}{\omega_0} \sin(2\varepsilon\delta\omega t) \right)} \right). \quad (9)$$

Определив значение угла прецессии (9), при помощи математического пакета Maple[11] были получены графики зависимости угла прецессии θ и угловой скорости угла

прецессии $\dot{\theta}$ от времени t при параметрах системы: $\Omega=50$ рад/с, $\omega_0 = 6 \cdot 10^4$ рад/с, $\alpha_0 = 0.8$, $\beta_0 = 0.9$, $\varepsilon = 10^4$, $\delta = 0.8$, $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 1$.

Рис. 2. График (θ , t)Рис. 3. График ($\dot{\theta}^2$, t)

Литература

1. Меркурьев И.В., Вопилкин Е. А. Возможности микроэлектромеханических систем (пер. с англ. Брошюры «Microelectromechanics Systems Opportunities», пп. 1-3) // Нано- и микросистемная техника. 2009. Т 11. №8. С. 149-163.
2. Гольцова М.М., Юдинцев В. А. МЭМС: большие рынки малых устройств // Нано- и микросистемная техника. 2008. №4 (93). С. 9-13.
3. Яшин К. Д., Осипович В. С., Божко Т. Г., Логин В. М. Современные разработки МЭМС // Нано- и микросистемная техника. 2008. №5 (94). С. 57-64.
4. Тимошенко С.П., Зотов С. А., Морозова Е.С., Балычев В.Н., Прокопьев Е.П. Передаточные функции чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа LL-типа // Нано- и микросистемная техника. 2007. №9 (86). С. 32-34.
5. Лестев А.М., Ефимовская А.В. О влиянии нелинейных факторов на динамику микромеханического гироскопа с двухмассовым чувствительным элементом. // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2012, май. Т. 55. №5. С. 40-46.
6. Меркурьев И. В., Панкратьева Г.В., Подалков В. В., Сбытова Е.С. Нелинейные колебания микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // Вестник МЭИ. 2013. №4. С. 13-18.
7. Cheng P., Zhang Y., Gu W., Hao Zh. Effect of polarization voltage on the measured quality factor of a multiple-beam tuning-fork gyroscope // Sensors and Actuators A:Physical. 2012. Vol. 187. P. 118-126.
8. Cho J., Gregory J.A., Najafi K. High-Q, 3kHz single-crystal-silicon cylindrical rate-integrating gyro (CING) // The 25th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems IEEE MEMS 2012 – Paris, France 29 Jan. – 2 Feb. 2012. pp. 172-175.
9. Меркурьев И.В., Подалков В. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 228 с
10. Найфэ А.Х. Методы возмущений. Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 456 с.
11. Кирсанов М. Н. Maple и Maplelet. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.

Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой

Ахмедова Е.Р.
НИУ “МЭИ”

Шпренгельные фермы, содержащие в своей решетке более короткие стержни, имеют ряд преимуществ перед фермами с классическими простыми решетками. Короткие стержни дешевле, критическая нагрузка, в тех случаях, когда они сжаты, существенно больше, монтаж коротких стержней проще. Однако расчет шпренгельных систем сложнее – большее число стержней приводит к системам линейных уравнений большей размерности, а метод Риттера зачастую просто неприменим. Особенно трудно получить аналитические решения для таких ферм.

Рассмотрим шпренгельный вариант балочной фермы с нисходящими раскосами (рис. 1). Раскосы заменены шпренгелями с дополнительным шарниром, введенным в раскос. Пусть шпренгели, соединенные с узлами нижнего пояса имеют одинаковую длину. При $b = h/2$ усилия в стержнях такой фермы не отличается от усилий простой раскосной фермы (в одном из шпренгелей усилие равно нулю). Стержни фермы упругие с модулем упругости E , сечения одинаковые, равные F . Найдем аналитическое решение для прогиба фермы при произвольном числе панелей n в половине пролета. Рассмотрим нагрузку фермы силами P по узлам нижнего пояса. В ферме $4n$ шарниров и $m = 8n - 3$ стержней. Используем метод индукции, примененный для решения аналогичных задач для плоских ферм в [1-6]. В пространственных системах [7-10] этим же методом разыскивались аналитические решения для прогиба и усилий в стержнях.

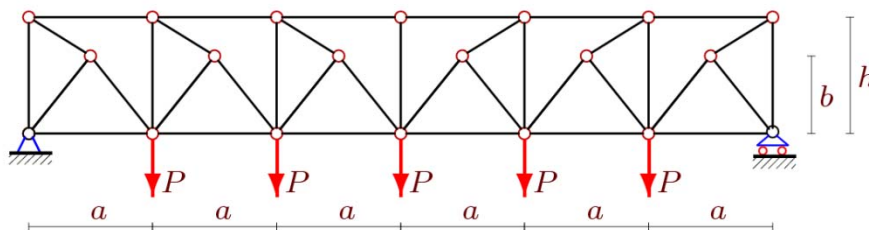


Рис. 1. Ферма, $n = 3$

Методом вырезания узлов определим усилия в стержнях. Координаты шарниров фермы (начало координат в левой шарнирной опоре) имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)a, & y_i &= 0, & x_{i+2n+1} &= x_i, & y_{i+2n+1} &= h, \\ x_{i+4n+2} &= ai - a/2, & y_{i+4n+2} &= b, & i &= 1, \dots, 2n+1. \end{aligned}$$

Метод вырезания узлов сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{B}}.$$

Здесь \mathbf{G} – матрица направляющих косинусов векторов усилий, $\bar{\mathbf{S}}$ – вектор неизвестных усилий, $\bar{\mathbf{B}}$ – вектор нагрузок. По формуле Максвелла-Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^m \frac{S_k s_k l_k}{EF},$$

определяем прогиб центрального узла нижнего пояса фермы. Здесь S_k – усилия в k -м стержне фермы от приложенной нагрузки, s_k – усилия от единичной вертикальной силы в центральном узлу. По стержням, моделирующим опорные стержни, суммирование не ведется – эти стержни приняты жесткими. Методом индукции получаем следующее выражение:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4,$$

где общая сумма для удобства анализа разбита на части, соответствующие стержням поясов

$$\Delta_1 = \sum_{k=1}^{4n} \frac{S_k s_k l_k}{EF} = \frac{Pn^2 a^3 (\psi_1 b^2 + h^2 - \psi_2 bh)}{8h^2 b^2 EF}$$

с коэффициентами ψ_1 и ψ_2 , задаваемые соотношениями:

$$\psi_1 = \frac{2(n+1)(5n+1)}{3},$$

$$\psi_2 = 2(1+n);$$

стоек

$$\Delta_2 = \sum_{k=4n+1}^{6n+1} \frac{S_k s_k l_k}{EF} = \frac{2Pn^2 (h-b)^2}{hEF};$$

шпренгелей, прикрепленных к нижнему поясу

$$\Delta_3 = \sum_{k=6n+2}^{10n+1} \frac{S_k s_k l_k}{EF} = \frac{Pn^2 (a^2 + 4b^2)^{\frac{3}{2}} (2b^2 - 2bh + h^2)}{8b^2 h^2 EF},$$

и шпренгелей, прикрепленных к верхнему поясу:

$$\Delta_4 = \sum_{k=10n+2}^{12n+1} \frac{S_k s_k l_k}{EF} = \frac{Pn^2 (a^2 + 4b^2 - 8bh + 4h^2)^{\frac{3}{2}}}{4h^2 EF}.$$

Коэффициенты в выражениях для $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ получены с помощью операторов составления и решения рекуррентных уравнений `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple [11].

Пусть задана суммарная нагрузка $Q = (2n-1)P$, длина пролета $L = 2na$. Введем обозначение $\tilde{\Delta} = EF\Delta/Q$. На рисунке 2 приведены графики зависимости (1) от высоты b (все размеры в метрах), на рисунке 3 – зависимости относительного прогиба от числа панелей.

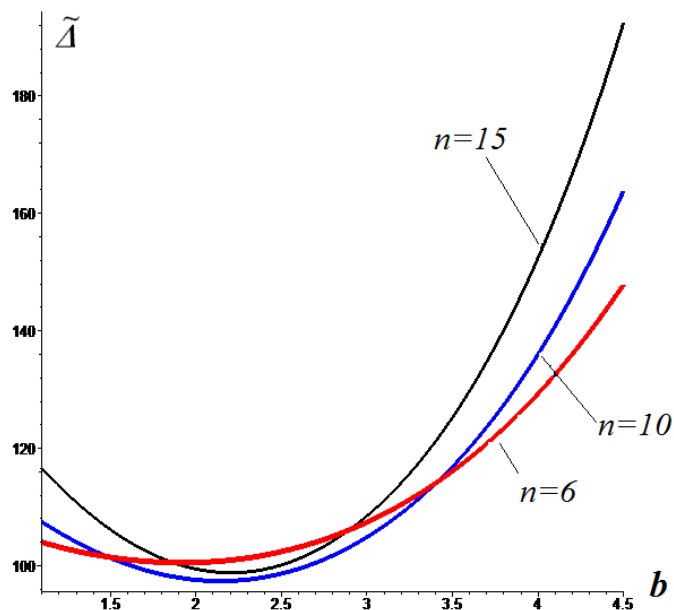


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей n при $L = 30\text{ м}$

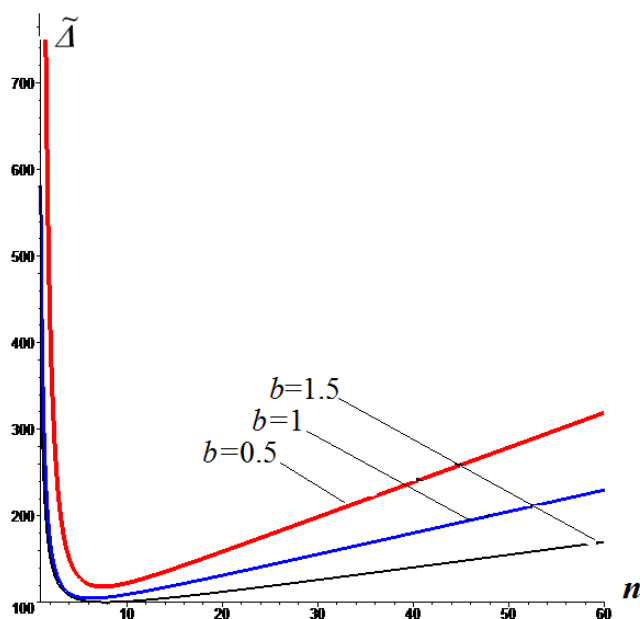


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа b при $L = 30\text{ м}$

Кривые обнаруживают явно выраженные экстремальные значения прогиба. Это позволяет проектировщику выбирать оптимальные значения конструкции. Для более точного расчета анализ конструкции следует дополнить проверкой сжатых стержней на устойчивость, а растянутых на прочность. Кроме того, на оптимальные характеристики системы влияет также перераспределение материала между поясами и стержнями решетки фермы. Актуальность исследования регулярных статически определимых стержневых конструкций отмечена в [12].

Литература

1. Жакетов Д. Д., Яцков В. Б. Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 7. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. С. 34-36.
2. Ерзунов И.А., Гудожников Р.А. Прогиб плоской статически определимой шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 4. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. С. 55-56.
3. Реутов Д.О. Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики" // Материалы конференции и труды семинара. Казань: Изд-во ООО "Фолиант", 2014. С. 256-261.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6. С. 2-6.
5. Кирсанов М.Н. Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 4. С. 9-12.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. №5(31). С. 38-42.
7. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
8. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-40.
9. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
10. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. №1(53). С. 32-38.
11. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
12. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitctured cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. V. 85. No. 9. pp. 607 – 617.

Программное обеспечение комплекса аппаратного моделирования алгоритмов группового управления

Александров В. А., Кирик К.А., Кобрин А. И.
НИУ “МЭИ”

Разработка алгоритмического обеспечения для роботов, а тем более для групп роботов, является трудоемким процессом и сопровождается многократно повторяемой процедурой тестирования с использованием целевого аппаратного обеспечения [1]. В данном исследовании кроме подхода к разработке алгоритмов, предлагается использование асинхронного событийно-ориентированного подхода в разработке программного обеспечения (ПО) для роботов. На рис. 1 в упрощенном виде изображен традиционный процесс разработки алгоритмов для робототехнических приложений. Традиционный процесс включает в себя достаточно длительный этап адаптации алгоритмов для использования с реальным аппаратным обеспечением. Программно-аппаратный комплекс предполагает использование иного подхода к разработке и отладке алгоритмов, изображенного на рис. 2.

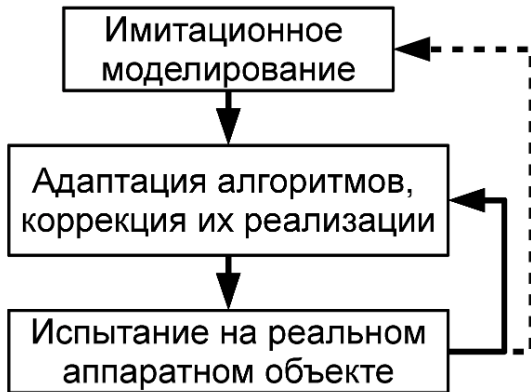


Рис. 1. Традиционный процесс разработки

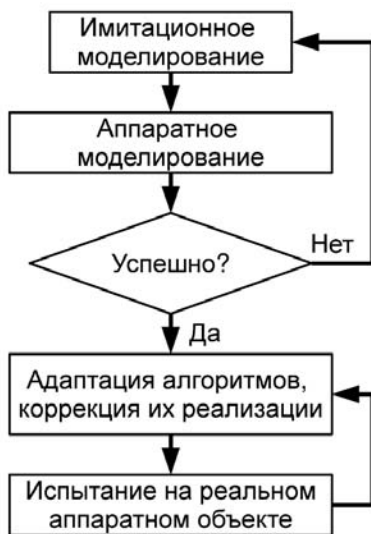


Рис. 2. Предлагаемый процесс разработки

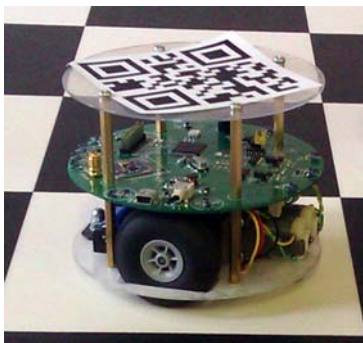


Рис. 3. Автономный мобильный робот

Предлагаемый процесс отличается более быстрыми итерациями разработки и тестирования алгоритмов с помощью аппаратного обеспечения. В процессе тестирования алгоритмов с помощью исследовательского аппаратного комплекса, возможно использование алгоритмического обеспечения реализованного максимально близко к алгоритмическому обеспечению, используемому в имитационном моделировании, что позволит устранить ошибки, неизбежно вносимые на этапе адаптации алгоритмов для использования с целевым аппаратным обеспечением.

В отличие от ряда известных исследовательских проектов по изучению групп роботов, таких как: RoboCup system [2], FIRA [3], SwarmBot [4] и пр., рассматриваемый комплекс оснащен активным испытательным полигоном, широким спектром датчиков и двумя системами передачи данных в пределах группы роботов [5].

В этой статье описывается программное обеспечение второго поколения мобильных роботов для исследования кооперативных алгоритмов. Первое поколение роботов описано в [6]. Программно-аппаратный комплекс состоит

из системы имитационного моделирования и тестового полигона с обзорной камерой, набором препятствий, зарядными станциями, и целевыми точками с инфракрасными (ИК) метками. Габаритные размеры испытательного полигона 1,5х2м. Исследовательские роботы, используемые для тестирования алгоритмов на реальном полигоне, представляют собой однотипные автономные мобильные платформы (рис. 3) с дифференциальным приводом, набором датчиков и систем коммуникации. Диаметр мобильного робота 120мм, а высота не превышает 70мм. Питание осуществляется от бортовых аккумуляторов. Сводная информация об аппаратном обеспечении приведена в таблице 1.

Таблица 1. Техническая информация

Элемент	Техническая информация
Процессор	LPC1769, ARM Cortex-M3
SRAM	64 kB
Flash	512 kB
Привод	Дифференциальный, 2 ДПТ
Макс. Скорость	0.3 м/с
Датчики	Энкодеры, ИК-локаторы, ИК-дальномеры
Доп. порты ввода/вывода	I2C, SPI, USB, GPIO
Источник питания	Батарея Li-Ion/Li-Po, 800mAh
Интерфейсы связи	2.4ГГц Simpliciti, ИК, USB
Геометрические размеры	60 x 120 x 120мм
Масса	300 г



Рис. 4. Архитектура программного обеспечения робота

В программном обеспечении роботов можно выделить несколько основных уровней (рис. 4): верхний уровень реализует исследуемый алгоритм с помощью асинхронного фреймворка, обеспечивающего асинхронный доступ к аппаратным драйверам и к библиотеке асинхронного обмена данными с сетью роботов.

Ввиду того, что исследовательский комплекс предназначается для использования в учебных заведениях и не должен требовать глубокого знания языков программирования, для разработки алгоритмов используется виртуальная машина DSVM [7].

Асинхронный событийно-ориентированный подход в последнее время привлекает всё больше внимания в различных областях техники и технологии как высокопроизводительная альтернатива традиционному многопоточному синхронному подходу. Высокая производительность достигается за счет исключения

переключений контекста, отсутствия необходимости в синхронизации потоков и устранения прочих проблем многопоточного программирования. В тоже время задачи, для решения которых лучше всего подходит многопоточное программирование, например использования ресурсов нескольких процессоров и т.п., в микроконтроллерах с одним вычислительным ядром не стоят.

Основными абстракциями в событийно-ориентированном подходе, являются события и обработчики событий. Обработчики событий заменяют собой синхронные процедуры. События могут создаваться как драйверами аппаратного обеспечения, например драйвер модуля дальномеров может создать событие после того как сбор и обработка данных с датчиков завершены. Так же события могут создаваться пользовательским программным

обеспечением, например, с целью выполнения некоторых действий периодически или через фиксированный промежуток времени.

Фреймворк разрабатывается для встраиваемых приложений с ограниченными вычислительными ресурсами, памятью и электропитанием, ввиду чего поддержка режимов ограниченного электропитания, использование статической памяти и реализация на языке C, являются приоритетами для данного проекта.

Программный модуль асинхронного обмена данными представляет собой событийно-ориентированную библиотеку, абстрагирующую низкоуровневые операции взаимодействия



Рис. 5. Структура модуля асинхронного обмена данными

с драйвером сетевого оборудования и предоставляющую удобный интерфейс передачи информации в группе роботов. В отличие от традиционно используемого интерфейса подобного BSD sockets, данный модуль предоставляет неблокирующий событийный программный интерфейс. Основные элементы, составляющие модуль обмена данными представлены на рис. 5. Прикладной интерфейс предоставляет верхним программным уровням событийный асинхронный интерфейс, интерфейс протокола отвечает за упаковку данных в пакеты, аутентификацию, если она требуется и т.п., модуль кодирования-декодирования данных преобразует пакеты в массивы байт и передает их транспортному

интерфейсу, который отправляет данные драйверу сетевого оборудования для передачи другому роботу или роботам, на принимающей стороне этот процесс повторяется в обратном порядке.

Доступ ко всем аппаратным модулям робота производится посредством интерфейса, предоставляемого драйверами аппаратного обеспечения (рис. 6).

Драйвер модуля привода реализует ПИД контроллер и съём одометрической информации с помощью данных инкрементального энкодера. На вход подаются целевые

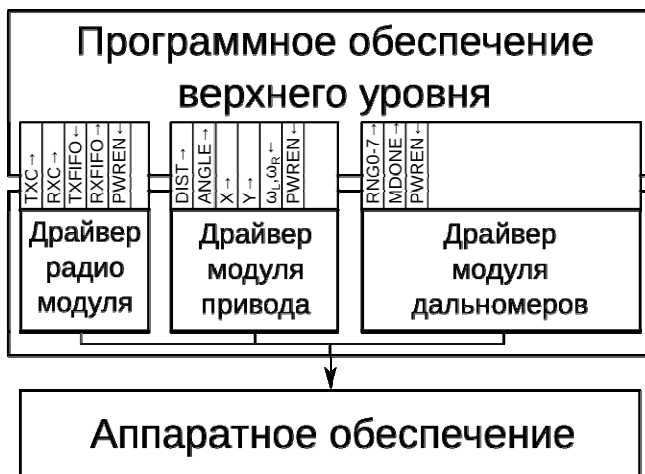


Рис. 6. Структура модуля драйверов и основные драйверы

угловые скорости (ω_L , ω_R), а на выходе драйвер выдает расчетные координаты x , y , α (ориентация) и пройденное расстояние.

Драйвер радио модуля используется только через модуль асинхронного обмена данными. В драйвере реализованы очереди входящих (RXFIFO) и исходящих сообщений (TXFIFO), кроме того доступны флаги наличия входящих сообщений (RXC) и завершения передачи (TXC).

Драйвер модуля дальномеров реализует съём информации с 8ми оптических пар, фильтрацию методом скользящего среднего, компенсацию фоновой засветки.

Каждый модуль имеет возможность управлять питанием соответствующего аппаратного модуля посредством вызова метода "pwgen" (power enable), что позволяет тонко управлять общим энергопотреблением робота.

Виртуальная машина DSVM представляет собой регистровую виртуальную машину с тегированными типами, имеет встроенную поддержку списков и ассоциативных массивов.

Управление выделением и освобождением памяти может осуществляться автоматически или вручную. Основное предназначение виртуальной машины заключается в том, чтобы избежать перехода к асинхронной парадигме программирования. ПО роботов устроено асинхронно, обращение к виртуальной машине происходит так же асинхронно, но для программы, запущенной внутри виртуальной машины работа продолжается в синхронном режиме. Таким образом, обучение использованию роботов сводится к изучению особенностей реализации того или иного языка программирования, запущенного поверх виртуальной машины, отсутствует необходимость в изучении особенностей событийно-ориентированного асинхронного программирования.

В состав ПО испытательного полигона входит: программа визуального слежения, программа для мониторинга радио обмена, программа для визуализации собираемых данных. Программа визуального слежения распознает уникальные QR-коды, которыми помечены роботы, сохраняет информацию о положении и ориентации роботов в системе координат полигона и передает широковещательные сообщения в локальную сеть. Назначение программы мониторинга радиообмена близко к назначению программы визуального слежения: сообщения принимаются и сохраняются для дальнейшего анализа, текущая информация так же передается в локальную сеть. Программа для визуализации данных принимает широковещательные сообщения от двух предыдущих программ и выводит на экран текущую информацию для анализа экспериментатором. Кроме того, широковещательные сообщения могут быть использованы иными программами для автоматизированного анализа данных в реальном времени.

В работе рассмотрен новый подход в исследовании и разработке алгоритмов для групп роботов. Особенности этого подхода являются: новый процесс разработки и тестирования алгоритмов, событийно-ориентированный подход разработки ПО роботов, оригинальный мобильный робот системы аппаратного моделирования, оборудованный широким спектром датчиков. Комбинация перечисленных идей позволяет ускорить перенос разрабатываемых алгоритмов на реальное аппаратное обеспечение роботов, позволяет сделать процесс разработки более контролируемым и менее подверженным ошибкам, связанным с адаптацией алгоритмов для работы на целевом аппаратном обеспечении.

Литература

1. C. Hartland. Evolutionary robotics: from simulation to the real world using anticipation / C. Hartland, N. Bredeche // CD proceedings of SAB 2006 Workshop on Anticipatory Behavior in Adaptive Learning Systems (Abials 06), Roma, Italy. — 2006.
2. The Robocup Federation [Электронный ресурс] // Bern, Switzerland. URL: <http://www.robocup.org> (дата обращения: 15.03.2015)
3. Federation of International Robot-soccer Association [Электронный ресурс] // Yuseong-gu, Daejeon, South Korea. URL: <http://www.fira.net> (дата обращения: 15.03.2015)
4. Jasmine – An open-source micro-robotic project [Электронный ресурс] // Karlsruhe/Stuttgart, Germany URL: <http://www.swarmrobot.org> (дата обращения: 15.03.2015)
5. В.А. Александров. Патент Российской Федерации на полезную модель «Система мобильных роботов, объединенных посредством радио и инфракрасного каналов связи» №123361. Начало действия: 28.05.2012, публикация: 27.12.2012.
6. В. А. Александров, А. И. Кобрин, Архитектура мобильного робота - элемента программно-аппаратного комплекса для исследования алгоритмов группового управления // *Журнал радиоэлектроники. Электронный журнал*, ISSN 1684-1719, № 5, 2011
7. Виртуальная машина DSVM [Электронный ресурс] // Москва, Россия. URL: <https://bitbucket.org/snegovick/dsvm> (дата обращения: 15.03.2015)

Анализ движения робота на линии в окрестности опор высоковольтных ЛЭП

Киселева А.В., Корецкий А.В.
НИУ "МЭИ"

Работа посвящена исследованию колебаний аппарата, подверженного ветровой нагрузке, при его подходе к мачте опоры, удерживающей провода. Поскольку значительное количество существующих линий электропередач эксплуатируется несколько десятков лет, их автоматизированное обследование является важной актуальной задачей [1]. Кинематика движения робота вдоль линии электропередачи и обход им препятствий, в виде крепежа проводов на мачте опоры, подробно излагается в работе [2].

В штатном режиме инспекции ЛЭП робот движется с постоянной скоростью, при этом его двухзвенный манипулятор с противовесом на конце нижней балки находится в сомкнутом виде (одна балка располагается над другой), центр тяжести всей конструкции находится на вертикальной оси, параллельной оси крестовины (рис.1). Таким образом, нагрузка от веса всей конструкции равномерно распределится как на переднюю, так и на заднюю ось кареток робота.

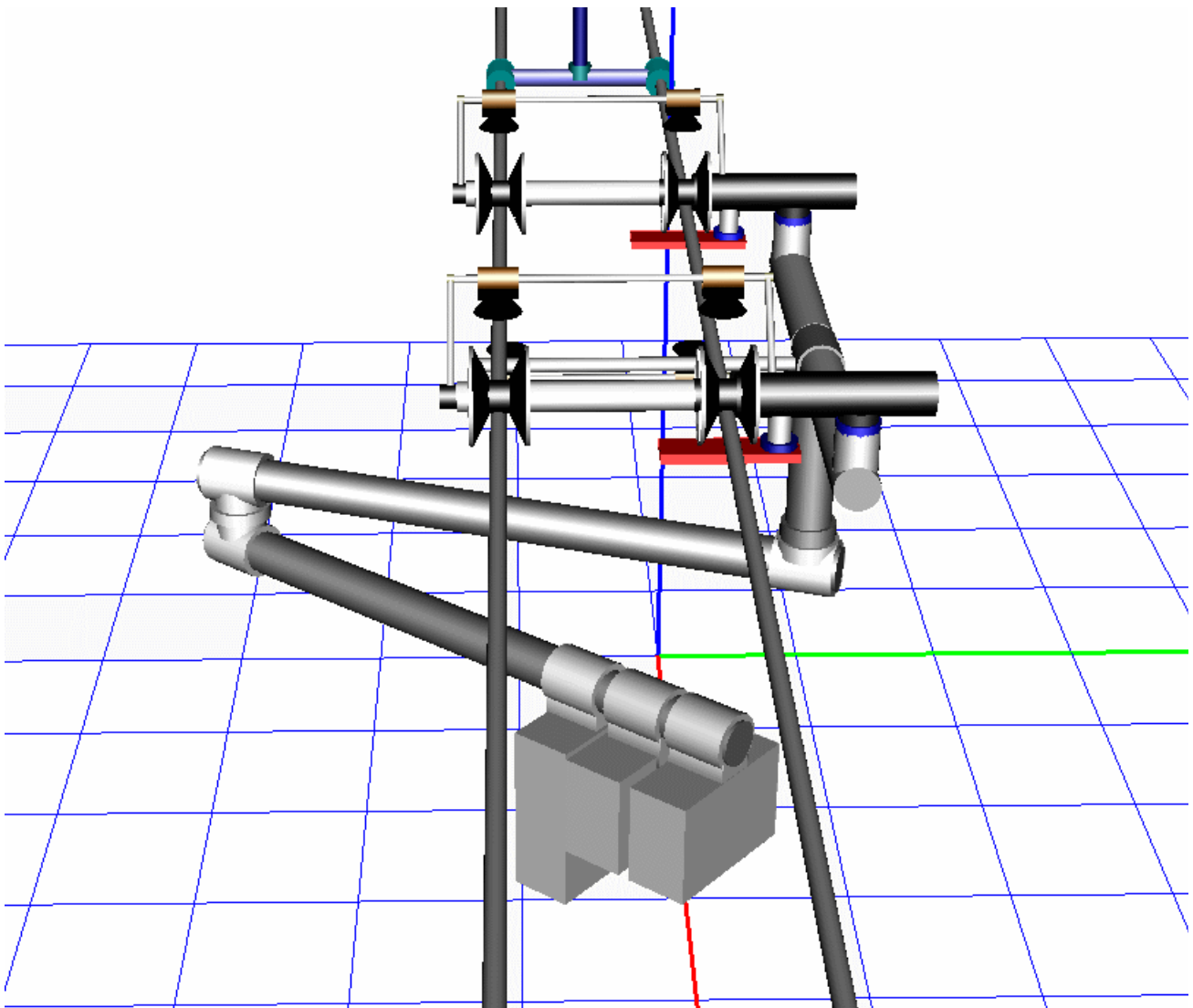


Рис. 1

При возникающей необходимости обойти препятствие, манипулятор робота раскрывается, в результате чего его центр тяжести смещается, робот наклоняется и зависает на од-

ной каретке, а приподнятая каретка свободно разворачивается (рис. 2). Центр тяжести конструкции располагается на вертикальной оси, проходящей через ось опорной каретки.

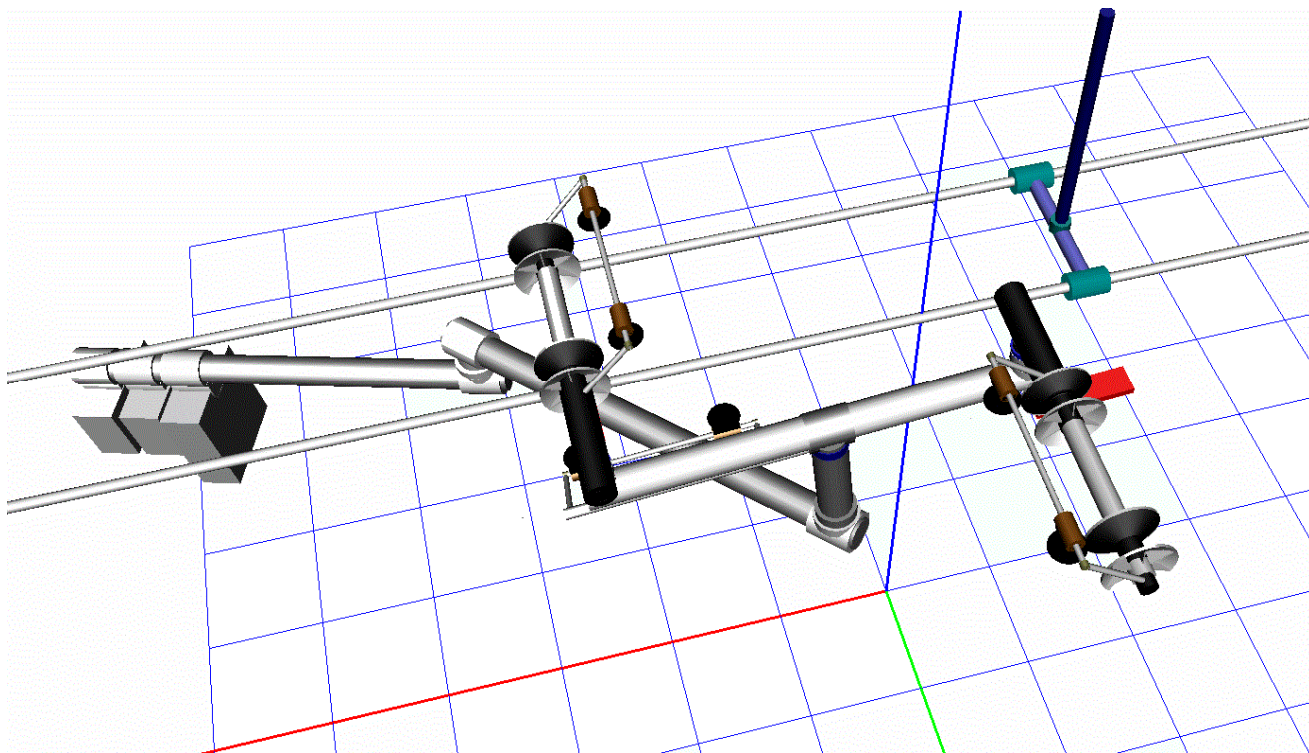


Рис. 2

Далее робот продолжает перемещение вперед на одной каретке и вплотную приближается к препятствию. Миновав препятствие, передняя каретка разворачивается в противоположную сторону (рис.3), что позволяет роботу при возврате манипулятора в исходное положение, стать на обе каретки. Далее происходит аналогичный алгоритм движения, но манипулятор раскрывается в обратную сторону, приподнимая тем самым другую каретку [2].

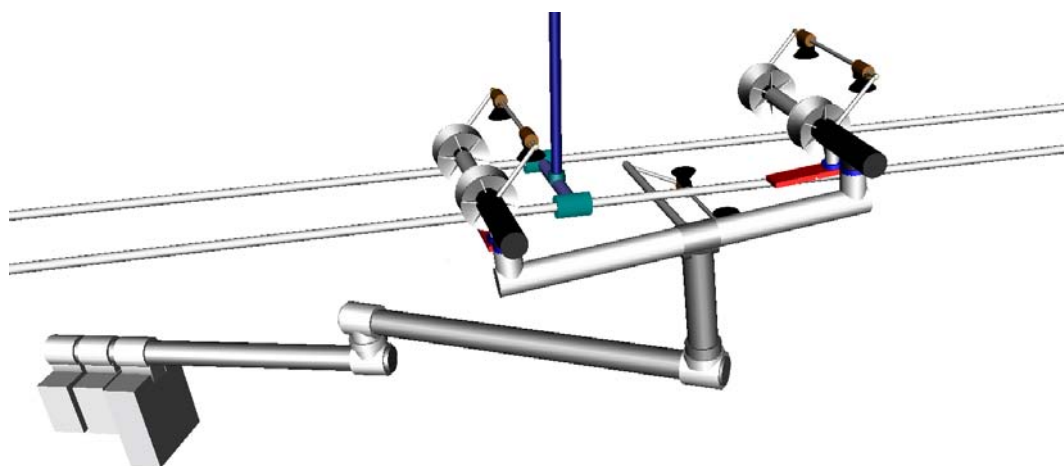


Рис. 3

Формулами (1) и (2) представлены кинематические законы движения робота и вращения каждой его каретки соответственно:

$$s(t) = -0.32 \pi \cdot [\sin(\pi \cdot t / 4.0) \cdot \chi(2.0 - t) + \chi(t - 2.0)], \quad (1)$$

$$\theta(t) = -2.832 \pi \cdot [\sin(\pi \cdot t / 4.0) \cdot \chi(2.0 - t) + \chi(t - 2.0)]. \quad (2)$$

Далее в работе рассматривается модельная задача динамики робота в фазе его движения, изображенного на рис. 2, т.е. движение робота с приподнятой кареткой и раскрытым манипулятором. На рис. 4 представлена его кинематическая схема. Звенья рассматриваемой механической системы имеют следующие геометрические и массовые характеристики [4]:

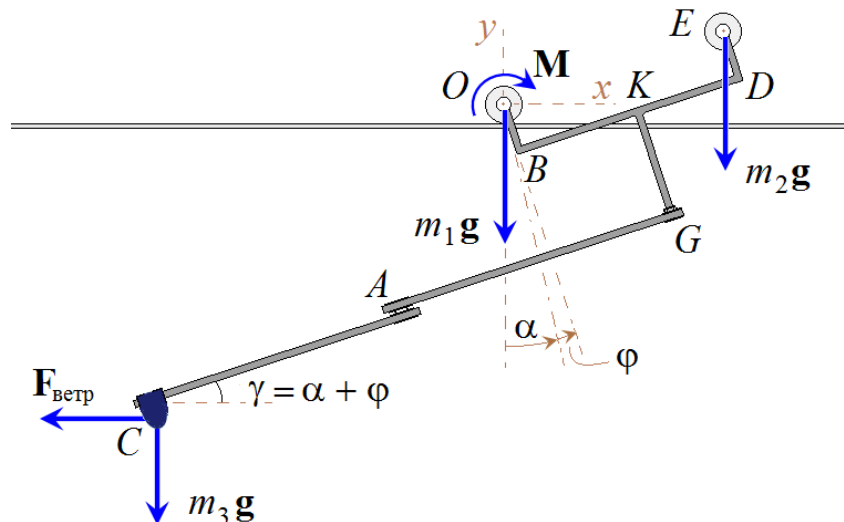


Рис. 4

Массы обеих кареток O и E (в дальнейшем будем говорить колес) одинаковы:

$$m_1 = m_2 = 20 \text{ [кг]},$$

радиусы колес также одинаковы:

$$R_1 = R_2 = R = 0.12 \text{ [м]},$$

длины стержней, соединяющих колеса со штангой BD :

$$OB = ED = a = 0.114 \text{ [м]},$$

размер штанги BD :

$$BD = 2BK = 2b = 1.3 \text{ [м]},$$

плечо крестовины:

$$KG = h = 0.35 \text{ [м]},$$

длины звеньев манипулятора AG и AC :

$$l_1 = l_2 = l = 1.2 \text{ [м]}.$$

Массами перечисленных выше звеньев пренебрегаем. Масса противовеса C , расположенного на конце второго звена:

$$m_3 = 15.31 \text{ [кг]}.$$

Дифференциальные уравнения движения манипулятора строятся исходя из уравнений Лагранжа второго рода [5]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

здесь T – кинетическая энергия механической системы, Q_i – обобщенные силы.

Принимая во внимание, что силовая нагрузка для большинства элементов механической системы относится к потенциальным силам, уравнения Лагранжа второго рода (1) запишем в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

здесь:

$L = T - \Pi$ – функция Лагранжа;

Π – потенциальная энергия механической системы;

Q_i – обобщенные силы от непотенциальных сил;

q_i – обобщенные координаты.

В данной задаче в качестве обобщенных координат выбраны (см. рис.4):

x – перемещение колеса O вдоль электропроводной линии;

φ – угол отклонения от положения равновесия наклоненной конструкции.

Далее вычисляется кинетическая и потенциальная энергии механической системы.

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

Кинетическая энергия колеса O на основании теоремы Кёнига может быть представлена в виде:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_O^2 + \frac{1}{2} J_{1z} \omega_{1z}^2. \quad (5)$$

Потенциальная энергия колеса O :

$$\Pi_1 = 0.$$

Уравнения связей для точки O :

$$V_{Ox} = \dot{x} \quad \text{и} \quad V_{Oy} = 0.$$

Таким образом, скорость центра масс колеса O , имеет вид:

$$V_O^2 = V_{Ox}^2 + V_{Oy}^2 = \dot{x}^2.$$

Момент инерции колеса O относительно оси Oz , проходящей через его центр масс:

$$J_{1z} = m_1 \varrho^2,$$

где ϱ – радиус инерции колеса.

Принимая во внимание соотношение

$$\omega_{1z} = - \frac{V_{Ox}}{R},$$

итоговая формула (5) кинетической энергии для колеса O принимает вид:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 \left[1 + \frac{\varrho^2}{R^2} \right].$$

Кинетическая энергия колеса E может быть представлена в виде:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_E^2. \quad (6)$$

Потенциальная энергия колеса E :

$$\Pi_2 = m_2 g y_E.$$

Координаты центра E определяются по формулам:

$$x: \quad x_E = x(t) + a \cos \left(\frac{3}{2} \pi + \gamma \right) + 2b \cos \gamma + a \cos \left(\frac{1}{2} \pi + \gamma \right), \quad (7)$$

$$y: \quad y_E = a \sin \left(\frac{3}{2} \pi + \gamma \right) + 2b \sin \gamma + a \sin \left(\frac{1}{2} \pi + \gamma \right). \quad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$$OB = DE = a,$$

$$BD = 2b,$$

$$\gamma = \alpha + \varphi.$$

Используя формулы приведения для соотношений (7) и (8), находим:

$$x_E = x(t) + 2b \cos(\alpha + \varphi), \quad (9)$$

$$y_E = 2b \sin(\alpha + \varphi). \quad (10)$$

Продифференцировав по времени выражения (9) и (10), получим:

$$V_{Ex} = \dot{x} - 2b \dot{\varphi} \sin(\alpha + \varphi),$$

$$V_{Ey} = 2b \dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi).$$

Таким образом, скорость центра масс колеса E , имеет вид:

$$V_E^2 = V_{Ex}^2 + V_{Ey}^2 = \dot{x}^2 + 4b^2 \dot{\varphi}^2 - 4b \dot{x} \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha).$$

Итоговая формула (6) для кинетической энергии второго колеса принимает вид:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 [\dot{x}^2 + 4b^2 \dot{\varphi}^2 - 4b \dot{x} \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha)].$$

Формула для потенциальной энергии второго колеса:

$$\Pi_2 = 2m_2 g b \sin(\alpha + \varphi).$$

Кинетическая энергия манипулятора с противовесом C на конце второго звена может быть представлена в виде:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2. \quad (11)$$

Потенциальная энергия противовеса C :

$$\Pi_3 = m_3 g y_C.$$

Координаты точки C находятся по формулам:

$$x: x_C = x(t) + a \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \gamma\right) + b \cos \gamma + h \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \gamma\right) + 2l \cos(\pi + \gamma), \quad (12)$$

$$y: y_C = a \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \gamma\right) + b \sin \gamma + h \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \gamma\right) + 2l \sin(\pi + \gamma). \quad (13)$$

Здесь введены обозначения:

$$KG = h,$$

$$GC = (l_1 + l_2) = 2l.$$

Используя формулы приведения для соотношений (12) и (13), находим:

$$x_C = x(t) + (a + h) \sin(\alpha + \varphi) - (2l - b) \cos(\alpha + \varphi), \quad (14)$$

$$y_C = -(a + h) \cos(\alpha + \varphi) - (2l - b) \sin(\alpha + \varphi). \quad (15)$$

Продифференцировав по времени выражения (14) и (15), получим:

$$V_{Cx} = \dot{x} + (a + h) \dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi) - (b - 2l) \dot{\varphi} \sin(\alpha + \varphi),$$

$$V_{Cy} = (a + h) \dot{\varphi} \sin(\alpha + \varphi) + (b - 2l) \dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi).$$

Таким образом, скорость точки C имеет вид:

$$V_C^2 = V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2 = \dot{x}^2 + [(a + h)^2 + (b - 2l)^2] \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{x} \dot{\varphi} [(a + h) \cos(\varphi + \alpha) + (2l - b) \sin(\alpha + \varphi)],$$

или

$$V_C^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 \left((2l - b)^2 + (a + h)^2 \right) + 2 \dot{x} \dot{\varphi} \sqrt{(a + h)^2 + (2l - b)^2} \sin(\alpha + \beta + \varphi),$$

где

$$\sin(\beta) = \frac{a+h}{\sqrt{(a+h)^2 + (2l-b)^2}},$$

$$\cos(\beta) = \frac{2l-b}{\sqrt{(a+h)^2 + (2l-b)^2}}.$$

Формула для кинетической энергии противовеса C (11) принимает вид:

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3 [\dot{x}^2 + \dot{\phi}^2((2l-b)^2 + (a+h)^2) + 2\dot{x}\dot{\phi}\sqrt{(a+h)^2 + (2l-b)^2} \sin(\alpha + \beta + \phi)].$$

Итоговая формула для потенциальной энергии противовеса:

$$\Pi_3 = -m_3 g [(a+h) \cos(\alpha + \phi) - (2l-b) \sin(\alpha + \phi)].$$

Далее запишем выражение для мощности:

$$N = (\bar{M}, \bar{\omega}_{1z}) + (\bar{F}_{вemp}, \bar{V}_C) = -M_z \frac{\dot{x}}{R} - F_{вemp} V_{Cx} = \dot{x} \left(-M_z \frac{1}{R} - F_{вemp} \right) + \dot{\phi} \left(-F_{вemp} [(a+h) \cos(\alpha + \phi) + (2l-b) \sin(\alpha + \phi)] \right).$$

В рассматриваемом случае дифференциальные уравнения движения имеет смысл представить в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = Q_\phi,$$

где $Q_x = -M_z - F_{вemp}$,

$$Q_\phi = -F_{вemp} [(a+h) \cos(\alpha + \phi) - (b-2l) \sin(\alpha + \phi)]$$

– обобщенные силы [6].

Принимая во внимание записанные выше выражения для кинетической и потенциальной энергии рассматриваемой механической системы, функция Лагранжа принимает вид:

$$\begin{aligned} L = T - \Pi &= T_1 + T_2 + T_3 - \Pi_2 - \Pi_3 = \\ &= \frac{1}{2}m_1 \dot{x}^2 \left[1 + \frac{\rho^2}{R^2} \right] + \frac{1}{2}m_2 [\dot{x}^2 + 4b^2 \dot{\phi}^2 - 4b \dot{x} \dot{\phi} \sin(\phi + \alpha)] + \\ &\quad + \frac{1}{2}m_3 [\dot{x}^2 + \dot{\phi}^2((2l-b)^2 + (a+h)^2) + \\ &\quad + 2\dot{x}\dot{\phi}\sqrt{(a+h)^2 + (2l-b)^2} \sin(\alpha + \beta + \phi)] - 2m_2 g b \sin(\alpha + \phi) + \\ &\quad + m_3 g [(a+h) \cos(\alpha + \phi) + (b-2l) \sin(\alpha + \phi)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Введя обозначение:

$$d = \sqrt{(a+h)^2 + (2l-b)^2},$$

и принимая во внимание выражение (4), дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы после упрощения принимают следующий вид (17) и (18):

$$\ddot{x} \left(m_1 \left[1 + \frac{\rho^2}{R^2} \right] + m_2 + m_3 \right) + \ddot{\phi} \left(m_3 d \sin(\alpha + \beta + \phi) - 2m_2 b \sin(\phi + \alpha) \right) +$$

$$+ \dot{\varphi}^2 \left(m_3 d \cos(\alpha + \beta + \varphi) - 2 m_2 b \cos(\varphi + \alpha) \right) = M_z \frac{1}{R} - F_{ветр}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{x} \left(m_3 d \sin(\alpha + \beta + \varphi) - 2 m_2 b \sin(\varphi + \alpha) \right) + \ddot{\varphi} \left(4 m_2 b^2 + m_3 d^2 \right) + \\ & + 2 m_2 g b \cos(\alpha + \varphi) - m_3 g \left((b - 2l) \cos(\alpha + \varphi) - (a + h) \sin(\alpha + \varphi) \right) = \\ & = -F_{ветр} \left((a + h) \cos(\alpha + \varphi) - (b - 2l) \sin(\alpha + \varphi) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

В качестве математической модели описания ветровой нагрузки было решено использовать модель (17), разработанную «Electronic Industries Association» [7]:

$$F_{ветр} = A \cdot P_{ветр} \cdot C_d \cdot K_z \cdot G_h, \quad (19)$$

где:

A – площадь объекта, подвергающегося ветровому воздействию;

$P_{ветр}$ – давление ветра;

C_d – коэффициент лобового сопротивления;

K_z – коэффициент экспозиции;

G_h – коэффициент чувствительности к порыву ветра.

В результате было получено численное значение для ветровой нагрузки: $F_{ветр} = 3.62$ [Н].

Для того чтобы проанализировать колебания механической системы, были рассмотрены различные вариации задания закона изменения момента на колесе в сочетании с различными вариациями задания ветровой нагрузки.

На рис. 5 представлены графики линейной скорости робота на малом промежутке времени в зависимости от различных заданных законов изменения вращающего момента.

Вращающий момент от электродвигателя двигателя рассматривается как некоторые функции времени. Величина крутящего момента составляет $M_0 = 40,4$ Нм. Здесь момент двигателя, на этапе разгона робота, задан следующими функциональными зависимостями:

– в виде линейной характеристики $M_{Дв} = M_0 - kV_x/R$, где $k = 3.14$, V_x – скорость робота при движении вдоль линии электропередач;

– в виде функции Кунса [8]: $M = M_{Дв} \cdot K_1(t)$, где функция Кунса обращается в 0 при $t = 0$, в 1 при $t = 1$, и имеет вид $K_1(t) = 3t^2 - 2t^3$;

– в виде функции синусоидальной зависимости $M = M_{Дв} \sin\left(\frac{1}{4}\pi \cdot 2t\right)$.

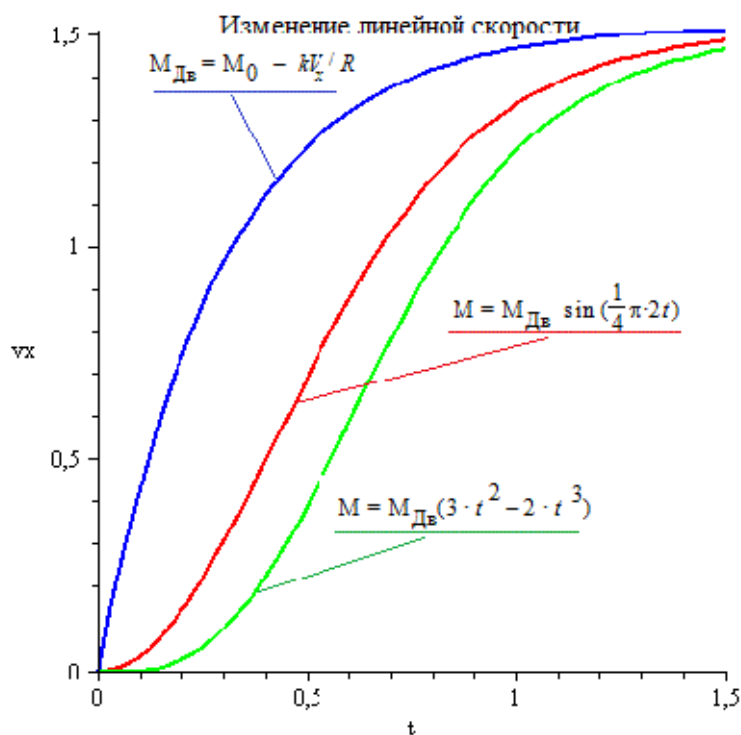


Рис. 5

На рис.6 приведены законы изменения линейной координаты и скорости робота при задании вращающего момента, обладающего линейной характеристикой. Данные результаты получены с помощью пакета символьных вычислений **Maple 13** [9, 10].

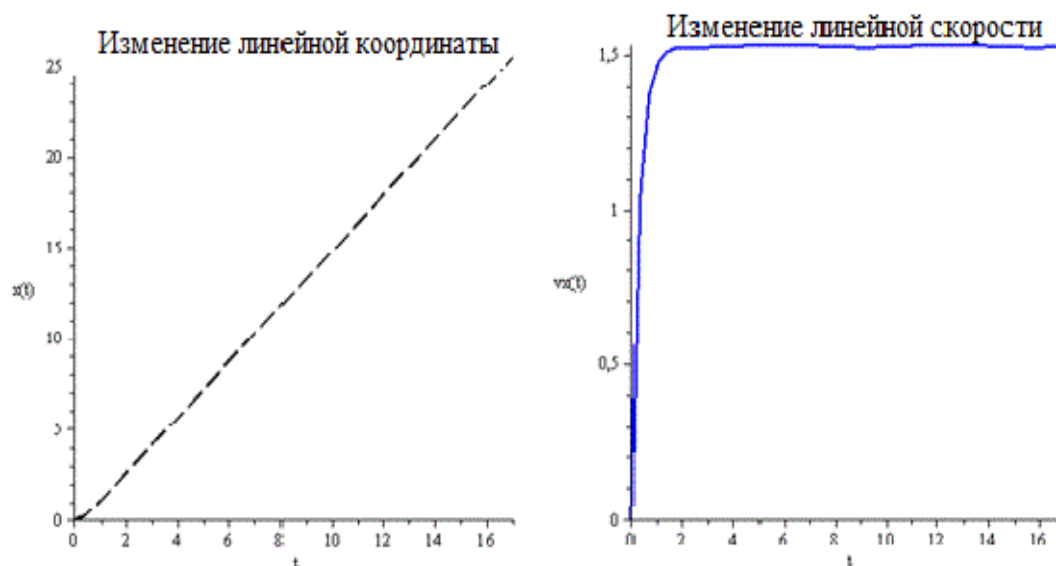


Рис. 6

На рис.7 приведены законы изменения угловой координаты и угловой скорости при задании вращающего момента в виде линейной характеристики.

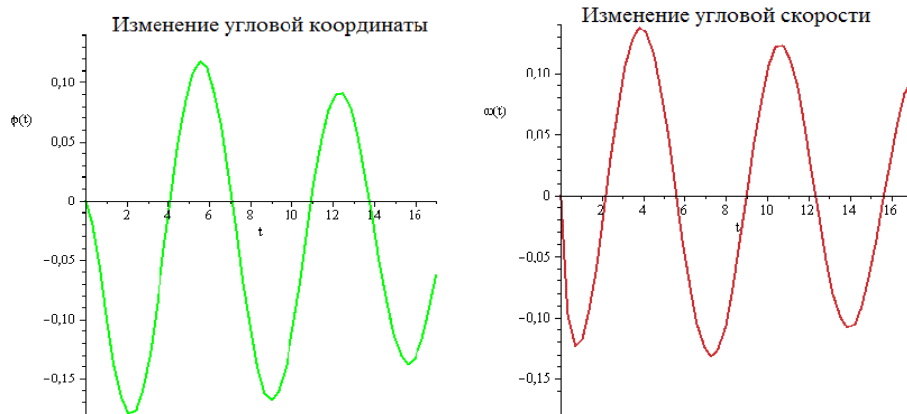


Рис. 7

Для исследования поведения механической системы были сопоставлены результаты, полученные при значении коэффициента $k=3,14$ (рис. 6 и рис. 7) и результаты, полученные при уменьшении коэффициента k в два раза. На рис. 8 и рис. 9 приведены результаты сравнения графиков изменения линейной скорости и угловой координаты соответственно. Таким образом, при уменьшении коэффициента наблюдается увеличение амплитуды колебаний робота относительно положения равновесия.

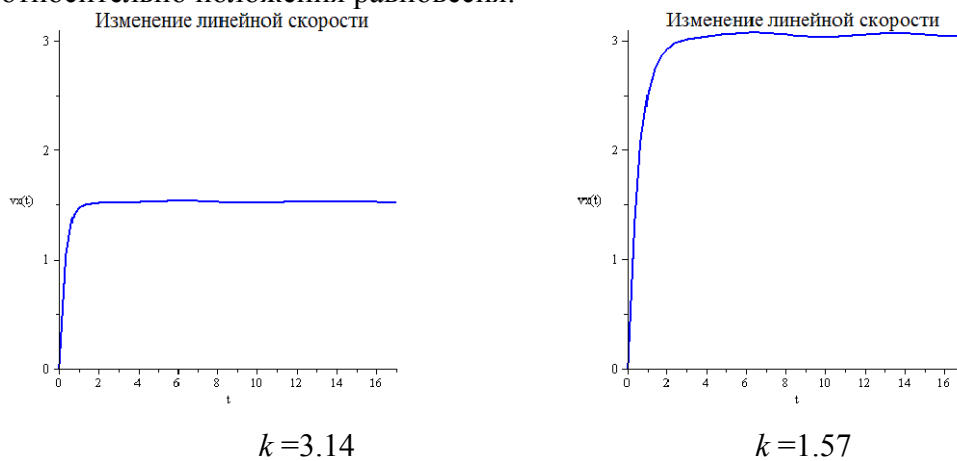
 $k=3.14$ $k=1.57$

Рис.8

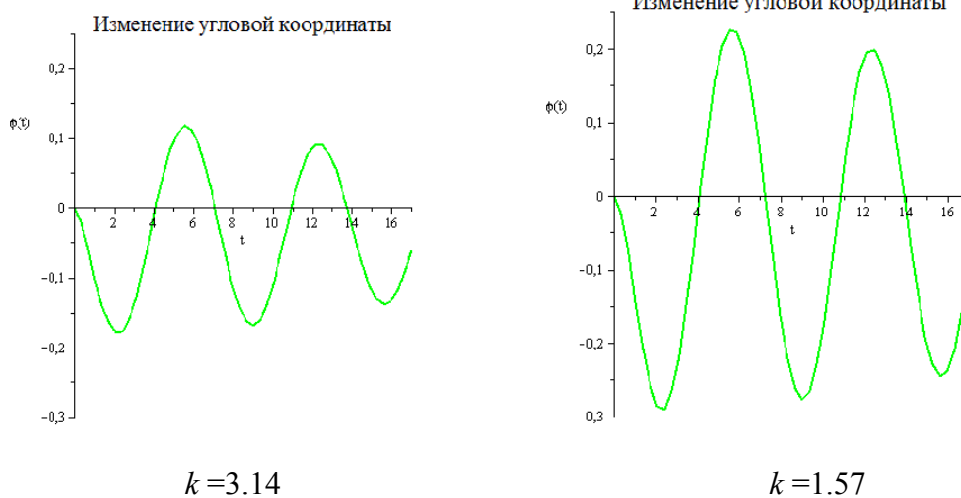
 $k=3.14$ $k=1.57$

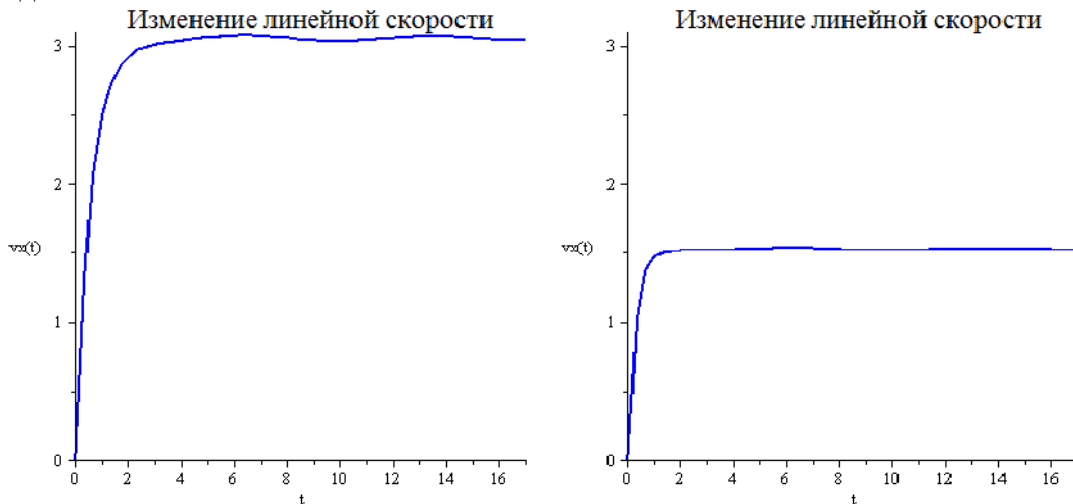
Рис.9

На рис.10 приведены графики зависимости линейной скорости робота, движущегося вдоль линии электропередач, при уменьшенном значении коэффициента $k = 1.57$ и различных

заданиях вращающего момента: в виде линейной характеристики и в виде функции Кунса. На рис. 11, соответственно, приведены графики зависимости от времени угла φ относительно положения равновесия.

Необходимо отметить, что задание вращающего момента на колесе в виде синусоидальной зависимости от времени приводит к практически идентичным результатам, представленным на рис. 10 и рис. 11, т.е. как при задании вращающего момента в виде функции Кунса. Особенно данное замечание характерно для значительных интервалов времени. Поэтому в последующих сравнительных примерах синусоидальная зависимость крутящего момента на двигателе колеса от времени не приводится.

Также в ходе исследований была отмечена сходная закономерность относительно изменения линейной координаты робота. При различных способах задания вращающего момента на двигателе колеса и различных вариациях задания ветровой нагрузки график зависимости линейной координаты от времени существенно не отличается от вида, представленного на рис. 6. Поэтому график указанной зависимости в дальнейшем также не приводится.



$$M = M_{\text{Дв}} = M_0 - kV_x / R$$

$$M = M_{\text{Дв}} \left((3 \cdot t^2 - 2 \cdot t^3) \cdot \chi(1-t) + \chi(t-1) \right)$$

Рис.10

Был рассмотрен случай, когда ветровая нагрузка имеет отрицательное численное значение $F_{\text{ветр}} = -3.62$ [Н], т.е. направлена не навстречу движению робота, как показано на рис. 3, а по его движению. Также приведено сравнение законов изменения линейной скорости робота (рис. 12) в зависимости от различного задания момента на двигателе колеса: в виде линейной характеристики и в виде функции Кунса. Сравнивая колебания при смене знака ветровой нагрузки, при положительном значении ветровой нагрузки (рис.9, 11) и отрицательном (рис.13), можно заметить, что ось симметрии гармоник на графиках смещается, в первом случае вверх, во втором случае вниз, что, в конечном счете, сказывается на изменении угла крена конструкции.

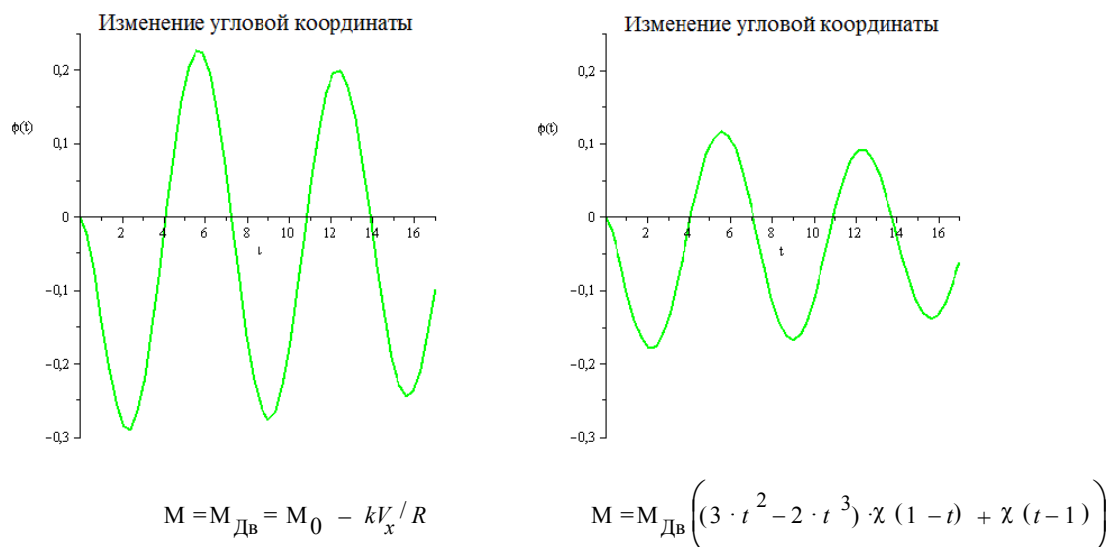


Рис.11

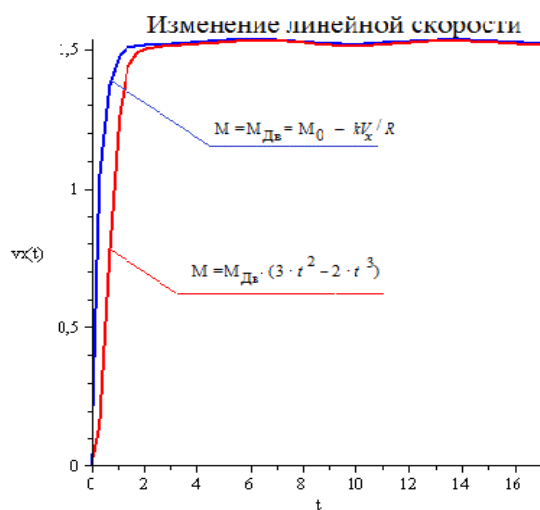


Рис.12

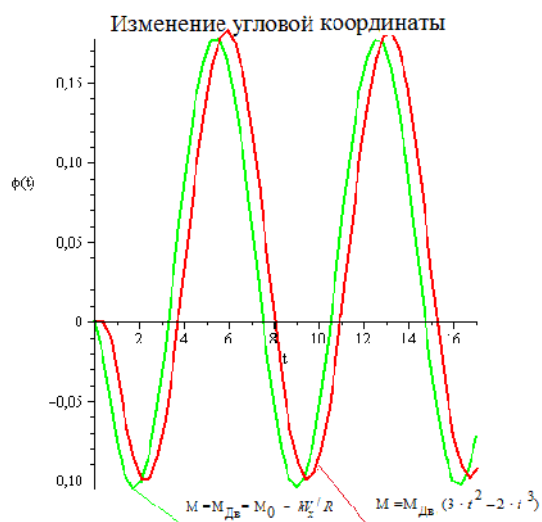


Рис.13

В ходе работы также был исследован случай изменения линейных и угловых характеристик робота при увеличении значения ветровой нагрузки на порядок $F_{ветр} = 30.62$ [Н]. На рис. 14 представлены результаты сравнения линейных скоростей робота в зависимости от различных способов задания момента. Для графиков изменения угла $\varphi = \varphi(t)$ (рис.15) наблюдается еще более заметное смещение оси симметрии колебаний, чем в представленных выше случаях (см. рис. 11 – 13).

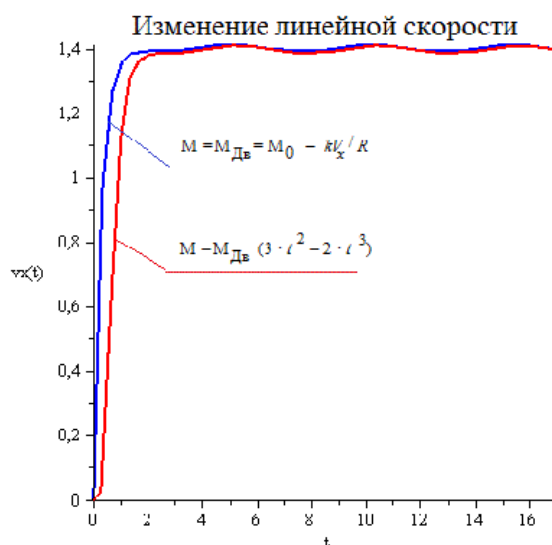


Рис.14

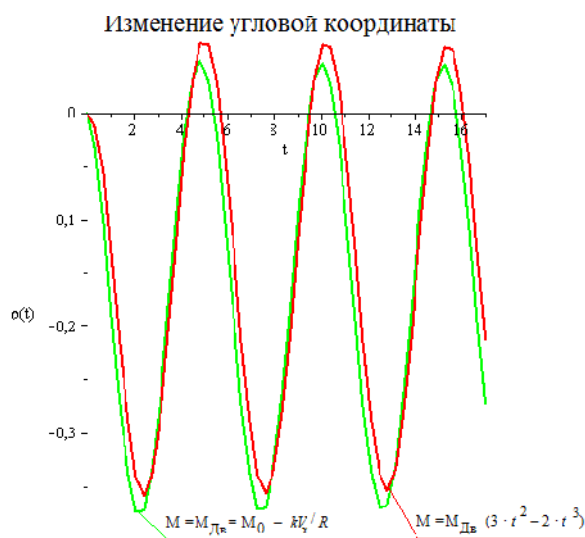


Рис.15

Также были исследованы кинематические характеристики робота при задании действующей на него ветровой нагрузки в виде статической и динамической составляющих [11]:

$$F_{ветр} = 3.62 + 1.21 \sin\left(\frac{1}{4}\pi \cdot t\right).$$

Сравнение результатов изменения линейной скорости робота при заданном выше значении ветровой нагрузки приведены на рис. 16. Графики колебаний робота относительно положения равновесия отображены на рис. 17. В данном случае также отмечается смещение

оси симметрии на графиках изменения угловой координаты. Таким образом, можно сделать вывод о том, что вид заданной ветровой нагрузки существенным образом влияет на угол крена конструкции.

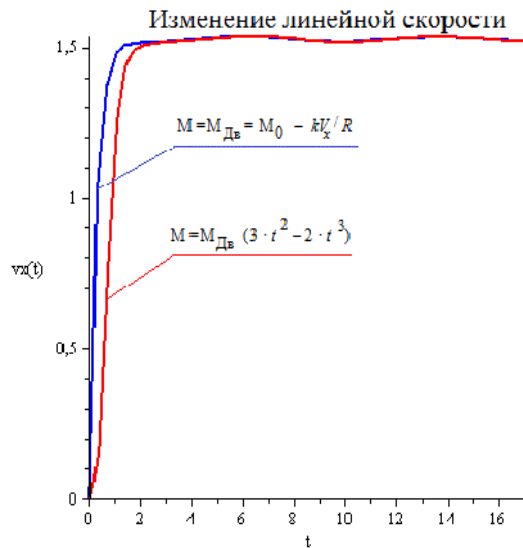


Рис.16

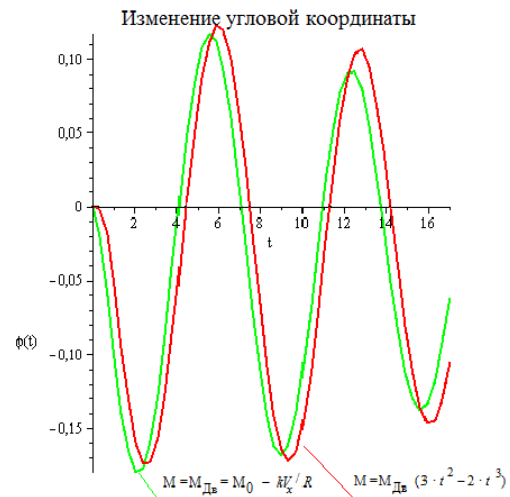


Рис.17

В ходе данной работы были подобраны массовые и геометрические характеристики механической системы; получены дифференциальные уравнения движения робота в виде уравнений Лагранжа второго рода; выбраны математические модели задания ветровой нагрузки; получены основные способы задания момента на двигателе колеса робота; исследованы законы изменения линейных и угловых координат и скоростей в зависимости от различных способов задания значений ветровой нагрузки и вращающего момента на колесе.

Литература

1. Арбузов Р.С., Овсянников А.Г. Современные методы диагностики воздушных линий электропередачи. Новосибирск: Наука, 2009. 136 с.
2. Киселева А.В., Корецкий А.В. Кинематический анализ робота типа EXPLINER для сканирования высоковольтных ЛЭП. // Радиотехника, электротехника и энергетика: Двадцатая Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов (27 – 28 февраля 2014, Москва): Тезисы докладов. В 4-х тт. Т. 4. М.: Издательский дом МЭИ, 2014. 372 с. С. 232.
3. Корецкий А.В., Осадченко Н.В. Компьютерное моделирование кинематики манипуляционных роботов. М.: Издательство МЭИ, 2000. 48 с.
4. http://www.hibot.co.jp/#no_1.
5. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: Учебник. СПб.: Лань, 2002. 736 с.
6. <http://ru.wikihow.com/рассчитать-ветровую-нагрузку>
7. Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел. Брянск: Брянский гос. техн. ун-т, 1997. 156 с.
8. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.
9. <http://maple.plusby.com/>
10. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решение задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
11. Подобед В. А. Математическое моделирование ветровых нагрузок на портовые порталы краны / В. А. Подобед // Вестник МГТУ: труды Мурман. гос. техн. ун-та. 2006. Т. 9. № 2. - С. 318-331.

Вынужденные колебания микромеханического гироскопа на вращающемся основании

Панкратьева Г.В., Русаков А.М.
НИУ "МЭИ"

В данной работе проводится анализ вынужденных колебаний чувствительного элемента микромеханического гироскопа, корпус которого установлен на вращающемся с постоянной угловой скоростью Ω основании. В качестве модели чувствительного элемента (рис.1) взята точечная масса, связанная с корпусом прибора двумя парами пружин. Движение точечной массы происходит под действием сил со стороны пружин и гармонической силы по приборной оси Ox . При выводе уравнений принимаются во внимание малые силы трения.

Существенным отличием данной работы от подобных [1-3] является предположение о том, что угловая скорость основания соизмерима с частотой колебаний чувствительной массы на неподвижном основании. Анализ движения выполнен для случая, когда частота возмущающей силы близка к первой собственной частоте системы.

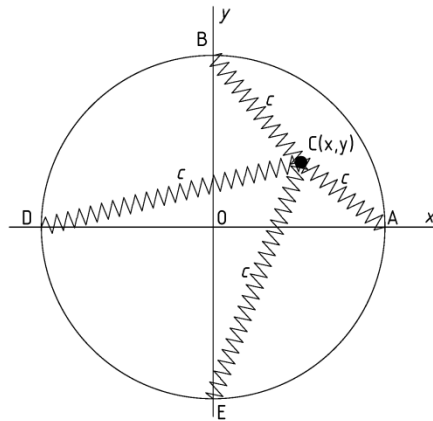


Рис. 1

На рисунке точечная масса обозначена точкой S . Оси Oxy связаны с корпусом прибора. Пружины не напряжены, если чувствительная масса находится в начале координат. Жесткости пружин AC , CD , CB и CE одинаковы и равны c . В ненапряженном состоянии длины пружин равны a . Удлинения пружин равны соответственно: Δl_1 - пружина AC , Δl_2 - пружина CB , Δl_3 - пружина CD , Δl_4 - пружина CE .

Потенциальная энергия пружин равна

$$\Pi = \frac{1}{2}c(\Delta l_1^2 + \Delta l_3^2) + \frac{1}{2}c(\Delta l_2^2 + \Delta l_4^2), \quad (1)$$

удлинения пружин

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \sqrt{(a-x)^2 + y^2} - a, & \Delta l_2 &= \sqrt{x^2 + (a-y)^2} - a, \\ \Delta l_3 &= \sqrt{(a+x)^2 + y^2} - a, & \Delta l_4 &= \sqrt{x^2 + (a+y)^2} - a. \end{aligned}$$

Будем считать, что отклонения от положения равновесия x , y чувствительной массы малы по сравнению с характерными размерами корпуса, т.е. $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$ малы. Тогда с

точностью до $\left(\frac{x}{a}\right)^4$, $\left(\frac{y}{a}\right)^4$, потенциальную энергию (1) системы пружин можно записать в виде

$$\Pi = 2\frac{1}{2}c(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}c\left[\frac{1}{2a^2}(x^2 + y^2)^2 - \frac{5}{a^2}x^2y^2\right]. \quad (2)$$

Кинетическая энергия чувствительной массы равна

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2\right]. \quad (3)$$

Уравнения движения запишем в форме уравнений Лагранжа второго рода, принимая во внимание неконсервативные обобщенные силы, обусловленные силами трения и возмущающей периодической силой

$$Q_x^{\text{неконсерв.}} = -\mu\dot{x} + F_0 \cos vt, \quad Q_y^{\text{неконсерв.}} = -\mu\dot{y}. \quad (4)$$

Согласно (2), (3) и (4), уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \left(\frac{2c}{m} - \Omega^2\right)x &= -\frac{cx}{ma^2}(x^2 - 4y^2) - \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{F_0}{m}\cos vt, \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + \left(\frac{2c}{m} - \Omega^2\right)y &= -\frac{cy}{ma^2}(-4x^2 + y^2) - \frac{\mu}{m}\dot{y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для безразмерных переменных $f = \frac{x}{a}$, $g = \frac{y}{a}$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{f} - 2\Omega\dot{g} + \left(\frac{2c}{m} - \Omega^2\right)f &= -\frac{c}{m}f(f^2 - 4g^2) - \frac{\mu}{m}\dot{f} + \frac{F_0}{ma}\cos vt, \\ \ddot{g} + 2\Omega\dot{f} + \left(\frac{2c}{m} - \Omega^2\right)g &= -\frac{c}{m}g(-4f^2 + g^2) - \frac{\mu}{m}\dot{g}. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим в (6) собственную частоту колебаний чувствительной массы $\frac{2c}{m} = \omega^2$.

Предполагая, что безразмерные переменные f, g малы, введем новые безразмерные переменные состояния α, β , имеющие порядок 1 и связанные с f, g соотношениями

$$f = \sqrt{\varepsilon}\alpha, \quad g = \sqrt{\varepsilon}\beta. \quad (7)$$

Тогда нелинейные слагаемые в правой части уравнений (6) имеют порядок ε .

Допустим, что размерный коэффициент трения $\mu\left[\frac{kZ}{c}\right]$ достаточно мал, введем безразмерный коэффициент k , имеющий порядок 1

$$\frac{\mu}{m} = 2\varepsilon\omega k.$$

Будем считать, что характерная величина возмущающей силы F_0 соизмерима с кубическими слагаемыми упругих сил $ac\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$, введем безразмерную амплитуду возмущающей силы f_0

$$F_0 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon}ta\omega^2 f_0 = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}ca f_0.$$

Тогда уравнения (6) запишем

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - 2\Omega\dot{\beta} + (\omega^2 - \Omega^2)\alpha &= -2\varepsilon k\omega\dot{\alpha} - \varepsilon\frac{1}{2}\omega^2\alpha(\alpha^2 - 4\beta^2) + \varepsilon\omega^2 f_0 \cos vt, \\ \ddot{\beta} + 2\Omega\dot{\alpha} + (\omega^2 - \Omega^2)\beta &= -2\varepsilon k\dot{\beta} - \varepsilon\frac{1}{2}\omega^2\beta(-4\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Для вектора переменных $(z_1, z_2, z_3, z_4)^T$

$$z_1 = \alpha, \quad z_2 = \beta, \quad z_3 = \dot{\alpha}, \quad z_4 = \dot{\beta}. \quad (9)$$

система уравнений (8) в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{f}(D) \underset{(4 \times 1)}{\mathbf{z}} = \underset{(4 \times 4)}{(\mathbf{E}D + \mathbf{H})} \underset{(4 \times 1)}{\mathbf{z}} = \varepsilon \left[-\frac{1}{2} \omega^2 \underset{(4 \times 1)}{\boldsymbol{\Psi}}(z_1, z_2) - 2\omega k \underset{(4 \times 4)}{\mathbf{K}} \underset{(4 \times 1)}{\mathbf{z}} + \omega^2 f_0 \underset{(4 \times 1)}{\mathbf{e}_3} \cos vt \right]. \quad (10)$$

В (10) постоянные матрицы \mathbf{H} , \mathbf{K} и столбец \mathbf{e}_3 равны

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \omega^2 - \Omega^2 & 0 & 0 & -2\Omega \\ 0 & \omega^2 - \Omega^2 & 2\Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нелинейное слагаемое $\boldsymbol{\Psi}(z_1, z_2)$ в правой части (10)

$$\boldsymbol{\Psi}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1(z_1^2 - 4z_2^2) \\ z_2(-4z_1^2 + z_2^2) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Характеристическое уравнение системы

$$\det \mathbf{f}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ \omega^2 - \Omega^2 & 0 & \lambda & -2\Omega \\ 0 & \omega^2 - \Omega^2 & 2\Omega & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2(\omega^2 + \Omega^2)\lambda^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2 = 0,$$

имеет две пары мнимых корней

$$\lambda_{1,3} = \pm i\omega_1 = \pm i(\omega - \Omega), \quad \lambda_{2,4} = \pm i\omega_2 = \pm i(\omega + \Omega). \quad (12)$$

Известно [4], что при отсутствии кратных корней левая линейная часть системы дифференциальных уравнений (10) может быть приведена к системе с матрицей Кэйли, имеющей в случае двух пар мнимых корней следующий вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такое преобразование получается при переходе к координатам $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \xi_4)^T$, с помощью замены переменных

$$\underset{(4 \times 1)}{\mathbf{z}} = \underset{(4 \times 4)}{\mathbf{v}} \underset{(4 \times 1)}{\boldsymbol{\xi}}, \quad (13)$$

где \mathbf{v} модальная матрица, и последующего умножения уравнения (10) слева на матрицу \mathbf{v}^{-1} , обратную к модальной

$$\mathbf{v}^{-1} \mathbf{f}(D) \mathbf{v} \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{E}D - \mathbf{Q}) \boldsymbol{\xi} = \varepsilon \left[-\frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{v}^{-1} \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) - 2\omega k \mathbf{v}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{v} \boldsymbol{\xi} + \omega^2 f_0 \mathbf{v}^{-1} \mathbf{e}_3 \cos vt \right]. \quad (14)$$

Вычисляя модальную матрицу и обратную к ней, получим

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \omega_1 & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{-1} = \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 1 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, формулы (13) перехода к нормальным координатам имеют вид

$$z_1 = \xi_1 - \xi_4, \quad z_2 = \xi_2 - \xi_3, \quad z_3 = \omega_2 \xi_2 + \omega_1 \xi_3, \quad z_4 = \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_4. \quad (15)$$

В результате преобразований запишем систему дифференциальных уравнений (14) для переменных ξ_i

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 - \omega_1 \xi_3 &= \varepsilon \left[-\frac{\omega}{4} \psi_2(\xi) - k(\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_4) \right], \\ \dot{\xi}_2 - \omega_2 \xi_4 &= \varepsilon \left[-\frac{\omega}{4} \psi_1(\xi) - k(\omega_2 \xi_2 + \omega_1 \xi_3) + \frac{\omega}{2} f_0 \cos vt \right], \\ \dot{\xi}_3 + \omega_1 \xi_1 &= \varepsilon \left[-\frac{\omega}{4} \psi_1(\xi) - k(\omega_2 \xi_2 + \omega_1 \xi_3) + \frac{\omega}{2} f_0 \cos vt \right], \\ \dot{\xi}_4 + \omega_2 \xi_2 &= \varepsilon \left[-\frac{\omega}{4} \psi_2(\xi) - k(\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_4) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Нелинейные слагаемые $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi)$ из правой части уравнений, согласно (11) и формулам (15) замены переменных $z \rightarrow \xi$, будут

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi) &= (\xi_1 - \xi_4) \left[(\xi_1 - \xi_4)^2 - 4(\xi_2 - \xi_3)^2 \right], \\ \psi_2(\xi) &= (\xi_2 - \xi_3) \left[-4(\xi_1 - \xi_4)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Перейдем от системы (16) уравнений первого порядка для переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ к системе уравнений второго порядка для переменных $\xi_1, \dot{\xi}_1, \xi_2, \dot{\xi}_2$. Продифференцируем первое уравнение и сложим с третьим, умноженным на ω_1 . Аналогично преобразуем второе и четвертое уравнения. В результате получим систему

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 &= \\ &= \varepsilon \left\{ -\frac{\omega}{4} [\dot{\psi}_2(\xi) + \omega_1 \psi_1(\xi)] - k \left[(\omega_1 \dot{\xi}_1 + \omega_2 \dot{\xi}_4) + \omega_1(\omega_2 \xi_2 + \omega_1 \xi_3) \right] + \frac{\omega \omega_1}{2} f_0 \cos vt \right\}, \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 &= \\ &= \varepsilon \left\{ -\frac{\omega}{4} [\dot{\psi}_1(\xi) + \omega_2 \psi_2(\xi)] - k \left[(\omega_2 \dot{\xi}_2 + \omega_1 \dot{\xi}_3) + \omega_2(\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_4) \right] - \frac{\nu \omega}{2} f_0 \sin vt \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Правые части уравнений полученных уравнений определены с точностью до первой степени малого параметра ε . Сохраняя порядок точности правых частей уравнений, возьмем координаты ξ_3, ξ_4 и их производные из уравнений (16), положив в них $\varepsilon = 0$, то есть примем

$$\dot{\xi}_1 = \omega_1 \xi_3, \quad \dot{\xi}_2 = \omega_2 \xi_4, \quad \dot{\xi}_3 = -\omega_1 \xi_1, \quad \dot{\xi}_4 = -\omega_2 \xi_2. \quad (19)$$

Тогда уравнения (18), будут

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 &= \varepsilon \left\{ -\frac{\omega}{4} [\dot{\psi}_2(\xi) + \omega_1 \psi_1(\xi)] - k \left[2\omega_1 \dot{\xi}_1 - \omega_2(\omega_2 - \omega_1) \xi_2 \right] + \frac{\omega \omega_1}{2} f_0 \cos vt \right\}, \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 &= \varepsilon \left\{ -\frac{\omega}{4} [\dot{\psi}_1(\xi) + \omega_2 \psi_2(\xi)] - k \left[\omega_1(\omega_2 - \omega_1) \xi_1 + 2\omega_2 \dot{\xi}_2 \right] - \frac{\nu \omega}{2} f_0 \sin vt \right\}. \end{aligned}$$

Переходя в формулах (17) для функций $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi)$ от переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ к переменным $\xi_1, \dot{\xi}_1, \xi_2, \dot{\xi}_2$, получим

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi) &= \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right) \left[\left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right)^2 - 4 \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right)^2 \right], \\ \psi_2(\xi) &= \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right) \left[-4 \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right)^2 + \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right)^2 \right].\end{aligned}$$

Производные нелинейных функций $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi)$ с точностью до ε^0 получим дифференцируя (17) и подставляя формулы (19)

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1(\xi) &= (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_4) \left[3(\xi_1 - \xi_4)^2 - 4(\xi_2 - \xi_3)^2 \right] - 8(\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_3)(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_3) = \\ &= (\dot{\xi}_1 + \omega_2 \xi_2) \left[3 \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right)^2 - 4 \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right)^2 \right] - 8 \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right) \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right) (\dot{\xi}_2 + \omega_1 \xi_1), \\ \dot{\psi}_2(\xi) &= (\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_3) \left[3(\xi_2 - \xi_3)^2 - 4(\xi_1 - \xi_4)^2 \right] - 8(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_4)(\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_3) = \\ &= (\dot{\xi}_2 + \omega_1 \xi_1) \left[3 \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right)^2 - 4 \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right)^2 \right] - 8(\dot{\xi}_1 + \omega_2 \xi_2) \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right) \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right).\end{aligned}$$

Окончательно получаем систему уравнений для переменных $\xi_1, \dot{\xi}_1, \xi_2, \dot{\xi}_2$

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 &= \varepsilon \left\{ -\frac{\omega}{4} [\dot{\psi}_2(\xi) + \omega_1 \psi_1(\xi)] - k [2\omega_1 \dot{\xi}_1 - \omega_2 (\omega_2 - \omega_1) \xi_2] + \frac{\omega \omega_1}{2} f_0 \cos vt \right\}, \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 &= \varepsilon \left\{ -\frac{\omega}{4} [\dot{\psi}_1(\xi) + \omega_2 \psi_2(\xi)] - k [\omega_1 (\omega_2 - \omega_1) \xi_1 + 2\omega_2 \dot{\xi}_2] - \frac{\nu \omega}{2} f_0 \sin vt \right\}, \\ \psi_1(\xi) &= \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right) \left[\left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right)^2 - 4 \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right)^2 \right], \\ \psi_2(\xi) &= \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right) \left[-4 \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right)^2 + \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right)^2 \right],\end{aligned}\tag{20}$$

$$\dot{\psi}_1(\xi) = (\dot{\xi}_1 + \omega_2 \xi_2) \left[3 \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right)^2 - 4 \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right)^2 \right] - 8 \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right) \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right) (\dot{\xi}_2 + \omega_1 \xi_1),$$

$$\dot{\psi}_2(\xi) = (\dot{\xi}_2 + \omega_1 \xi_1) \left[3 \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right)^2 - 4 \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right)^2 \right] - 8(\dot{\xi}_1 + \omega_2 \xi_2) \left(\xi_1 - \frac{1}{\omega_2} \dot{\xi}_2\right) \left(\xi_2 - \frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1\right).$$

Анализ уравнений (20) для нормальных координат ξ_1, ξ_2 показывает, что в случае, когда частота ν возмущающей силы существенно отличается от собственных частот ω_1, ω_2 , амплитуда частного решения, отвечающего периодическому возмущению, для обеих нормальных координат имеет порядок малого параметра. Если же частота возмущающей силы близка к какой либо собственной частоте, то амплитуда вынужденных колебаний соответствующей нормальной координаты имеет порядок единицы.

Рассмотрим резонансный случай. Будем считать, что частота возмущения ν близка к первой собственной частоте ω_1 . В этом случае амплитуда вынужденных колебаний второй нормальной координаты ξ_2 имеет порядок ε , и в уравнениях (20) можно пренебречь

слагаемыми с ξ_2 и $\dot{\xi}_2$, оставляя в уравнениях только ξ_1 и $\dot{\xi}_1$. Тогда из системы (20) для первой обобщенной координаты имеем

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = \varepsilon \left\{ -\frac{\omega}{4} \left[\psi_2(\xi_1, \dot{\xi}_1) + \omega_1 \psi_1(\xi_1, \dot{\xi}_1) \right] - 2k\omega_1 \dot{\xi}_1 + \frac{\omega\omega_1}{2} f_0 \cos vt \right\}, \quad (21)$$

где

$$\psi_1(\xi) = \xi^3 - 4 \frac{1}{\omega_1^2} \xi_1 \dot{\xi}_1^2, \quad \psi_2(\xi) = 11 \frac{1}{\omega_1} \xi_1 \dot{\xi}_1^2 - 4\omega_1 \xi_1^3. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получим

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = \varepsilon \left[-\frac{\omega}{4} \left(-3\omega_1 \xi_1^3 + 7 \frac{1}{\omega_1} \xi_1 \dot{\xi}_1^2 \right) - 2k\omega_1 \dot{\xi}_1 + \frac{\omega\omega_1}{2} f_0 \cos vt \right]. \quad (23)$$

Введем малую частотную расстройку

$$\varepsilon \Delta v = v - \omega_1.$$

Тогда с точностью до первой степени малого параметра

$$\omega_1^2 = (v - \varepsilon \Delta v)^2 = v^2 - 2\varepsilon v \Delta v,$$

и перенося в уравнении (23) слагаемое с малой расстройкой в правую часть, представим его следующим образом

$$\ddot{\xi}_1 + v^2 \xi_1 = \varepsilon \left[2v \Delta v \xi_1 - \frac{\omega}{4} \left(-3\omega_1 \xi_1^3 + 7 \frac{1}{\omega_1} \xi_1 \dot{\xi}_1^2 \right) - 2k\omega_1 \dot{\xi}_1 + \frac{\omega\omega_1}{2} f_0 \cos vt \right]. \quad (24)$$

Воспользуемся методом осреднения [5]. Решение соответствующего невозмущенного уравнения $\ddot{\xi}_1 + v^2 \xi_1 = 0$, имеет вид

$$\xi_1 = A \cos(vt + \varphi), \quad \dot{\xi}_1 = -vA \sin(vt + \varphi). \quad (25)$$

При $\varepsilon = 0$, амплитуда и фаза колебаний постоянны, и решение (25) является порождающим решением для уравнения (24). Формулы (25) будем рассматривать как формулы перехода от переменных $\xi_1(t)$, $\dot{\xi}_1(t)$ к медленно изменяющимся, в силу возмущенных уравнений, переменным: амплитуде $A(t)$ и фазе $\varphi(t)$ колебаний.

Проводя стандартную процедуру замены переменных [5], получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{A} = -\varepsilon \left[2\Delta v A \cos(vt + \varphi) \sin(vt + \varphi) + \frac{3\omega}{4} A^3 \cos^3(vt + \varphi) \sin(vt + \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{7\omega}{4} A^3 \cos(vt + \varphi) \sin^3(vt + \varphi) + 2k\omega_1 A \sin^2(vt + \varphi) + \frac{\omega}{2} f_0 \cos vt \sin(vt + \varphi) \right], \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon \left[2\Delta v \cos^2(vt + \varphi) + \frac{3\omega}{4} A^2 \cos^4(vt + \varphi) - \frac{7\omega}{4} A^2 \cos^2(vt + \varphi) \sin^2(vt + \varphi) + \right. \\ \left. + 2k\omega_1 \sin(vt + \varphi) \cos(vt + \varphi) + \frac{\omega}{2A} f_0 \cos vt \cos(vt + \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Осреднение правых частей уравнений (26) по быстрому времени дает

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = -\varepsilon \left(\Delta v + \frac{\omega}{16} A^2 + \frac{\omega}{4A} f_0 \cos \varphi \right), \\ \dot{A} = -\varepsilon \left(k(\omega - \Omega) A + \frac{\omega}{4} f_0 \sin \varphi \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Амплитуда A_* и фаза φ_* стационарного режима вынужденных колебаний определяется из условия равенства нулю правых частей осредненных уравнений (27)

$$\left(\frac{\omega}{4} f_0\right)^2 = A_*^2 \left[k^2 (\omega - \Omega)^2 + \left(\Delta v + \frac{\omega}{16} A_*^2 \right)^2 \right], \quad \operatorname{tg} \varphi_* = \frac{k(\omega - \Omega)}{\Delta v + \frac{\omega}{16} A_*^2}.$$

Таким образом, в первом приближении получаем стационарное решение уравнения (23) в следующем виде

$$\xi_1 = A_* \cos(\nu t + \varphi_*), \quad \dot{\xi}_1 = -\nu A_* \sin(\nu t + \varphi_*). \quad (28)$$

Возвращаясь, в соответствии с соотношениями (15), (19), к переменным z_1, z_2 и пренебрегая слагаемыми ξ_2, ξ_4 порядка ε , получим

$$z_1 = \xi_1, \quad z_2 = -\xi_3 = -\frac{1}{\omega_1} \dot{\xi}_1 = -\frac{1}{\nu} \dot{\xi}_1. \quad (29)$$

Тогда из (7), (9) следует, что в первом приближении стационарное решение уравнений вынужденных колебаний (5) для частот, близких к первой собственной частоте (12), в исходных переменных будет иметь вид

$$x = \sqrt{\varepsilon} a A_* \cos(\nu t + \varphi_*), \quad y = \sqrt{\varepsilon} a A_* \sin(\nu t + \varphi_*). \quad (30)$$

Литература

1. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.
2. Астахов С.В. Нелинейные эффекты в динамике волнового твердотельного и микромеханического гироскопов в условиях медленно меняющихся параметров: дисс. ... канд. техн. наук: 01.02.06: защищена 24.05.12: утв. 04.02.13. – М., 2012. – 157 с.
3. Сбытова Е.С. Динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01: защищена 25.03.14: утв. 08.12.14. – М., 2014. – 128 с.
4. Булгаков Б.В. Колебания. М: Гостехиздат, 1954. 891 с.
5. Боголюбов Н.Н, Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Обратная задача кинематики и прямая задача динамики о вертикальном подъеме груза четырехзвенным манипулятором

Корецкий А.В., Созинова Е.Л.
НИУ “МЭИ”

Повышение культуры производства и необходимость оградить людей от вредных и, в ряде случаев, опасных для их здоровья каких-либо операций в исключительных экстремальных ситуациях побуждает разрабатывать multifunctional установки, готовые полностью заменить человека [1]. Поэтому не возникает сомнений в актуальности исследования таких комплексов.

В работе [2] решался ряд прямых и обратных задач кинематики для робота, обладающего двумя семизвенными манипуляторами (см. рис. 1) [1,3].

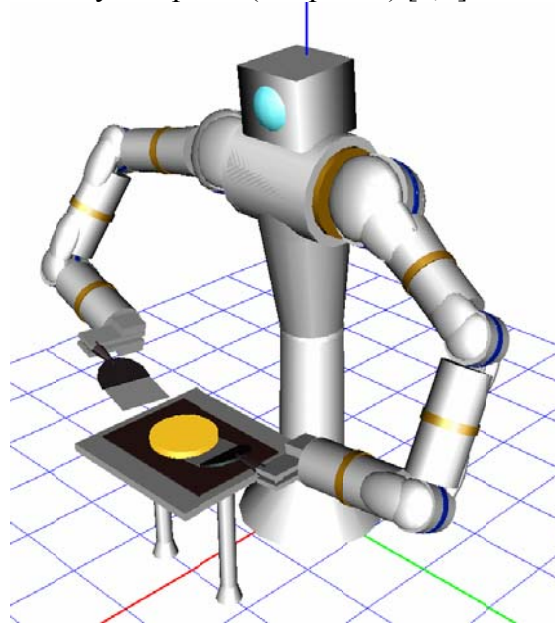


Рис. 1

В данной работе рассматривается одна из целого ряда задач, а именно обратная задача геометрии движения о подъеме манипулятором груза на заданную высоту [4]. По найденным результатам такого решения, ниже решается прямая задача динамики.

Обратная задача кинематики заключается в том, чтобы определить углы в кинематических сочленениях манипулятора, отражающих перемещение груза на определенную высоту [5].

Алгоритм построения модельного движения состоит из нескольких этапов:

1. Определяем начальное и конечное положения схвата.
2. Запись уравнений, описывающих положение схвата.
3. Вычисление углов в сочленениях.
4. Построение уравнений движения по найденным значениям для каждого из углов.

Приступаем к определению положения схвата в качестве его начального положения, зададимся положением лопатки, подведённой под груз рис. 1.

Для угла φ_4 , определяющего положение схвата с учетом необходимости подвода лопатки в горизонтальном положении, можно задать уравнение движения следующим образом для схвата и удержания груза на нём необходимо выдержать $\varphi_4 = 2\pi$. Далее, задаем координаты груза $x_{гр}$ по оси x и $y_{гр}$ соответственно по оси y в начальный момент времени t_0 и конечный t_1 :

$$\begin{aligned} x_{\text{гр}}(t_0) &= 0.5, & x_{\text{гр}}(t_1) &= 0.5, \\ y_{\text{гр}}(t_0) &= -0.4, & y_{\text{гр}}(t_1) &= -0.16. \end{aligned}$$

Зная указанные выше начальные и конечные координаты груза и длины звеньев манипулятора, можно описать положение схвата, удерживающего груз:

$$x_{\text{гр}}(t) = l_1 \cos(\varphi_1) t + l_2 \cos(\varphi_2) t + l_3 \cos(\varphi_3) t + l_4,$$

$$y_{\text{гр}}(t) = l_1 \sin(\varphi_1) t + l_2 \sin(\varphi_2) t + l_3 \sin(\varphi_3) t.$$

Процесс подъема груза изображен на рис.2

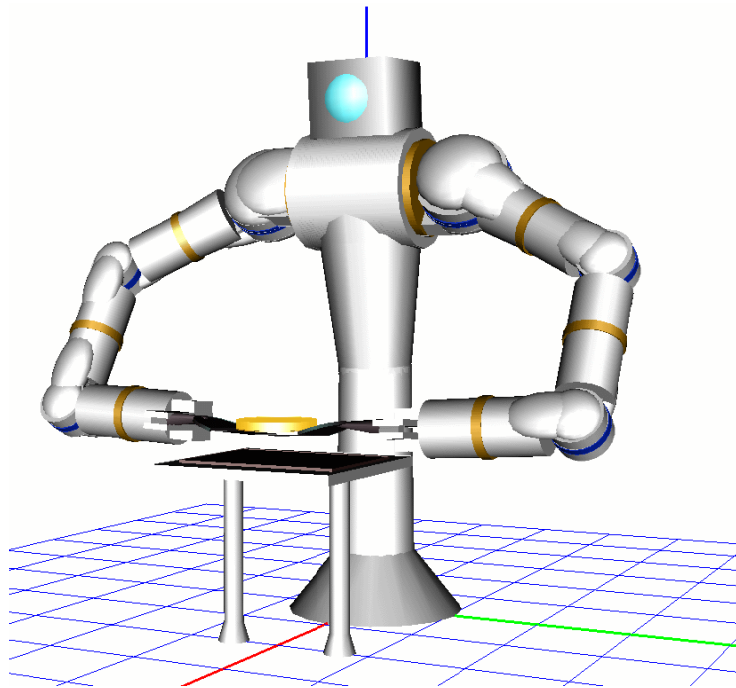


Рис. 2

Решаем приведенную выше систему уравнений в момент времени t_0 , когда схват манипулятора подведен под груз, при значениях $\varphi_4 = 0$, т.е. таким образом, характеризуется горизонтальное положение лопатки, на которой располагается груз, и $\varphi_1 = 13\pi/9$, поскольку манипулятор имитирует человеческую руку, получаем следующие значения углов:

$$\varphi_1(t_0) = 4.537856054,$$

$$\varphi_2(t_0) = 6.506376945,$$

$$\varphi_3(t_0) = 5.343390258.$$

В момент времени t_1 , когда схват уже поднял груз на заданную высоту при прежнем значении угла $\varphi_4 = 0$ и небольшом изменении угла $\varphi_1 = 14\pi/9$:

$$\varphi_1(t_1) = 4.886921908,$$

$$\varphi_2(t_1) = 7.258116070,$$

$$\varphi_3(t_1) = 5.552638805.$$

По найденным начальным и конечным значениям углов можно построить модельные уравнения движения для каждого из углов, пользуясь функцией Хевисайда (χ):

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(t_0) + \left(\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_0) \right) \left(\sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) \chi(t) \chi(t_1 - t) + \chi(t - t_1) \right), \quad (1)$$

$$\varphi_4(t) = 0. \quad (2)$$

где $i = 1, 2, 3$.

Интервал времени, в течение которого происходит указанная выше процедура, полагаем $t \in [0; 1]$ – это модельное время, используемое в программном комплексе **УМ**, которое при необходимости можно соотнести с реальным временем, итак принимаем:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

Далее переходим к решению прямой задачи динамики. Здесь рассматривается модельная задача, конструктивная схема робота, представлена на рис. 3. Звенья манипулятора, характеризующие его геометрические и массовые характеристики, подобраны исходя из существующих данных у реальной модели робота [1]:

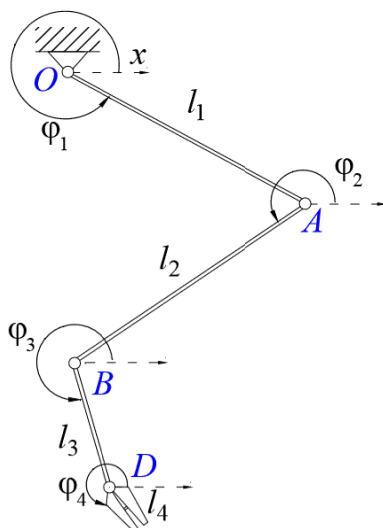


Рис. 3 Схема манипулятора

$l_1 = 0.36$ [м] – длина стержня OA , массой $m_1 = 30$ [кг],

$l_2 = 0.36$ [м] – длина стержня AB , массой $m_2 = 25$ [кг],

$l_3 = 0.155$ [м] – длина стержня BD , массой $m_3 = 15$ [кг],

$l_4 = 0.12$ [м] – длина схвата D , массой $m_4 = 1$ [кг].

Переходим к решению прямой задачи динамики т.е. при известных уравнениях движения в соответствующих кинематических сочленениях манипулятора формулы 1-2, и по построенным уравнениям динамики, для рассматриваемой механической системы, находятся вращающие моменты в этих кинематических парах [6]. Уравнения динамики выводятся исходя из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Здесь:

T – кинетическая энергия механической системы;

Q_i – обобщенные силы.

Для решения поставленной задачи, необходимо найти кинетическую энергию системы, которая для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}\omega_{1z}^2\left(\frac{1}{3}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + m_3l_1^2 + m_4l_1^2\right) + \frac{1}{2}\omega_{2z}^2\left(\frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_3l_2^2 + m_4l_2^2\right) + \\ & + \frac{1}{2}\omega_{3z}^2\left(\frac{1}{3}m_3l_3^2 + m_4l_3^2\right) + \frac{1}{2}\omega_{4z}^2\left(m_4l_4^2 + m_4\rho^2\right) + \omega_{1z}\omega_{2z}l_1l_2\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_4\right)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & + \omega_{1z}\omega_{3z}l_1l_3\left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)\cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \omega_{2z}\omega_{3z}l_2l_3\left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)\cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \\ & + \omega_{3z}\omega_{4z}l_3l_4m_4\cos(\varphi_3 - \varphi_4) + \omega_{1z}\omega_{4z}l_1l_4m_4\cos(\varphi_1 - \varphi_4) + \omega_{2z}\omega_{4z}l_2l_4m_4\cos(\varphi_2 - \varphi_4). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что силовая нагрузка для большинства элементов механической системы относятся к потенциальным силам, уравнения Лагранжа второго рода запишем в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad (i = 1..4) \quad (3)$$

Здесь:

$L = T - \Pi$ – функция Лагранжа,

Π – потенциальная энергия механической системы,

Q_i – обобщенные силы от непотенциальных сил (искомые вращающие моменты в кинематических сочленениях),

φ_i – обобщенные координаты (углы поворота i – го звена относительно $i - 1$ – го в соответствующих кинематических парах).

Потенциальная энергия механической системы:

$$\begin{aligned} \Pi = & gl_1\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right)\sin(\varphi_1) + gl_2\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_4\right)\sin(\varphi_2) + \\ & + gl_3\left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)\sin(\varphi_3) + m_4gl_4\sin(\varphi_4). \end{aligned}$$

Тогда функция Лагранжа, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} L = T - \Pi = & \frac{1}{2}\omega_{1z}^2l_1^2\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right) + \frac{1}{2}\omega_{2z}^2l_2^2\left(\frac{1}{3}m_2 + m_3 + m_4\right) + \\ & + \frac{1}{2}\omega_{3z}^2\left(\frac{1}{3}m_3l_3^2 + m_4l_3^2\right) + \frac{1}{2}\omega_{4z}^2\left(m_4l_4^2 + m_4\rho^2\right) + \\ & + \omega_{1z}\omega_{2z}l_1l_2\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_4\right)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ & + \omega_{1z}\omega_{3z}l_1l_3\left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)\cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \omega_{2z}\omega_{3z}l_2l_3\left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)\cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \\ & + \omega_{3z}\omega_{4z}l_3l_4m_4\cos(\varphi_3 - \varphi_4) + \omega_{1z}\omega_{4z}l_1l_4m_4\cos(\varphi_1 - \varphi_4) + \omega_{2z}\omega_{4z}l_2l_4m_4\cos(\varphi_2 - \varphi_4) - \\ & - gl_1\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right)\sin(\varphi_1) - gl_2\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_4\right)\sin(\varphi_2) - \end{aligned}$$

$$-gl_3\left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)\sin(\varphi_3) - m_4gl_4\sin(\varphi_4). \quad (4)$$

На рис.4 приведено схематичное изображение манипулятора, на котором показаны все неконсервативные силовые факторы: M_1, M_2, M_3, M_4 – искомые вращающие моменты в соответствующих кинематических парах.

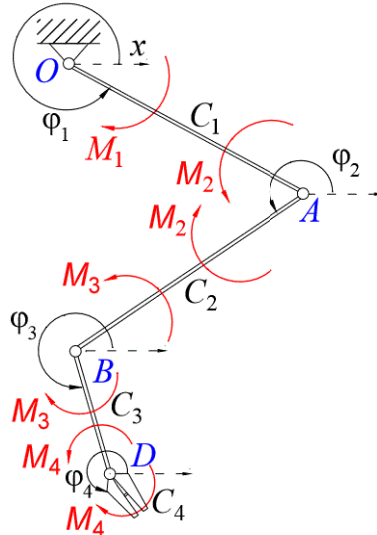


Рис. 4 Схема манипулятора

Углы в кинематических сочленениях O, A, B выбраны в качестве обобщенных координат. В этих точках размещены электродвигатели, создающие вращающие моменты M_1, M_2, M_3 и M_4 , уравнения для которых необходимо получить. При составлении уравнений движения приняты следующие допущения:

1. Стержни тонкие и однородные;
2. Центр масс тела OA совпадает с точкой C_1 ;
3. Центр масс элемента AB совпадает с точкой C_2 ;
4. Центр масс стержня BD совпадает с точкой C_3 ;
5. Центр масс груза и схвата совпадают с точкой C_4 .

Как следует из вышеуказанных допущений, центр масс каждого стержня находится в его геометрическом центре.

Запишем мощность системы с учетом всех вращающих моментов:

$$N = \sum_{i=1}^4 \omega_{iz} (M_{i+1} - M_i), \quad M_5 = 0.$$

Принимая во внимание записанные выше выражения для кинетической и потенциальной энергии, рассматриваемой механической системы, для системы дифференциальных уравнений (3), запишем соотношения для вращающих моментов в кинематических парах.

В рассматриваемом случае, дифференциальные уравнения движения для манипулятора принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = M_{i+1} - M_i,$$

где $\dot{\varphi}_i = \omega_{iz}$, $i = 1 \dots 4$.

Для построения первого дифференциального уравнения движения, выполним соответствующие операции дифференцирования над функцией Лагранжа (4):

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) -$$

$$- \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_4 l_1 l_4 m_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) - g l_1 \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \dot{\varphi}_1 l_1^2 \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) + \dot{\varphi}_2 l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$+ \dot{\varphi}_3 l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \dot{\varphi}_4 l_1 l_4 m_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \ddot{\varphi}_1 l_1^2 \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) + \ddot{\varphi}_2 l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$+ \ddot{\varphi}_3 l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \ddot{\varphi}_4 l_1 l_4 m_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) -$$

$$- \dot{\varphi}_2 \left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 \right) l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) -$$

$$- \dot{\varphi}_3 \left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3 \right) l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - \dot{\varphi}_4 \left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4 \right) l_1 l_4 m_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_4),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \ddot{\varphi}_1 l_1^2 \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) + \ddot{\varphi}_2 l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$+ \ddot{\varphi}_3 l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \ddot{\varphi}_4 l_1 l_4 m_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) +$$

$$+ \dot{\varphi}_2^2 l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_3^2 l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) +$$

$$+ \dot{\varphi}_4^2 l_1 l_4 m_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) + g l_1 \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1).$$

Итак, первое дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\ddot{\varphi}_1 l_1^2 \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) + \ddot{\varphi}_2 l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$+ \ddot{\varphi}_3 l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \ddot{\varphi}_4 l_1 l_4 m_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) +$$

$$+ \dot{\varphi}_2^2 l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_3^2 l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) +$$

$$+ \dot{\varphi}_4^2 l_1 l_4 m_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) + g l_1 \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1) = M_2 - M_1. \quad (5)$$

Для построения очередного дифференциального уравнения, выполним аналогичные операции над функцией Лагранжа по второй обобщенной координате, в результате чего получим:

$$\ddot{\varphi}_2 l_2^2 \left(\frac{1}{3} m_2 + m_3 + m_4 \right) + \ddot{\varphi}_1 l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$+ \ddot{\varphi}_3 l_2 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \ddot{\varphi}_4 l_2 l_4 m_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) -$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{\phi}_1^2 l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\phi}_3^2 l_2 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \\
& + \dot{\phi}_4^2 l_2 l_4 m_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) + g l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2) = M_3 - M_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Таким же образом находится третье дифференциальное:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\phi}_3 l_3^2 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) + \ddot{\phi}_1 l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \ddot{\phi}_2 l_2 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \\
& + \ddot{\phi}_4 l_3 l_4 m_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) - \dot{\phi}_1^2 l_1 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - \\
& + \dot{\phi}_2^2 l_2 l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \dot{\phi}_4^2 l_3 l_4 m_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) + \\
& + g l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_3) = M_4 - M_3.
\end{aligned} \tag{7}$$

При построении четвертого дифференциального уравнения, сразу получаем вращающий момент в кинематическом сочленении:

$$\begin{aligned}
M_4 = & -\ddot{\phi}_4 m_4 (l_4^2 + \varrho^2) - \ddot{\phi}_1 l_1 l_4 m_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) - \ddot{\phi}_2 l_2 l_4 m_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) - \\
& - \ddot{\phi}_3 l_3 l_4 m_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) + \dot{\phi}_1^2 l_1 l_4 m_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) + \dot{\phi}_2^2 l_2 l_4 m_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) + \\
& + \dot{\phi}_3^2 l_3 l_4 m_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) - g l_4 m_4 \cos(\varphi_4).
\end{aligned} \tag{8}$$

Для нахождения третьего вращающего момента, воспользуемся выражением для третьего дифференциального уравнения (7) и найденной формулой для M_4 :

$$\begin{aligned}
M_3 = & -\ddot{\phi}_1 l_1 \left(l_4 m_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \right) - \\
& - \ddot{\phi}_2 l_2 \left(l_4 m_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \right) - \\
& - \ddot{\phi}_3 l_3 \left(l_4 m_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \right) - \ddot{\phi}_4 m_4 (l_4^2 + \varrho^2) - \\
& - \ddot{\phi}_4 l_3 l_4 m_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) + \dot{\phi}_1^2 l_1 \left(l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + l_4 m_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) \right) + \\
& + \dot{\phi}_2^2 l_2 \left(l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + l_4 m_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) \right) + \dot{\phi}_3^2 l_3 l_4 m_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) + \\
& - \dot{\phi}_4^2 l_3 l_4 m_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) - g l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_3) - g l_4 m_4 \cos(\varphi_4).
\end{aligned} \tag{9}$$

Второй вращающий момент находится аналогично, как и M_3 :

$$\begin{aligned}
M_2 = & -\ddot{\phi}_1 l_1 \left(l_4 m_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \right) + \\
& + l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \ddot{\phi}_2 l_2 \left(l_4 m_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \right) + \\
& + l_2 \left(\frac{1}{3} m_2 + m_3 + m_4 \right) - \ddot{\phi}_3 l_3 \left(l_4 m_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \right) + \\
& + l_2 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - \ddot{\phi}_4 m_4 (l_4^2 + \varrho^2) - \\
& - \ddot{\phi}_4 l_4 \left(l_2 m_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) + l_3 m_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \right) + \dot{\phi}_1^2 l_1 \left(l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + l_4 m_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) + l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \Big) + \\
& + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \left(l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + l_4 m_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) \right) + \\
& + \dot{\varphi}_3^2 l_3 \left(l_4 m_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) - l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \right) - \\
& - \dot{\varphi}_4^2 l_4 \left(l_3 m_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) + l_2 m_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) \right) - g l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2) - \\
& - g l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_3) - g l_4 m_4 \cos(\varphi_4). \tag{10}
\end{aligned}$$

Первый вращающий момент, исходя из полученного выше выражения для M_2 и уравнения (5), приобретает вид:

$$\begin{aligned}
M_1 = & - \ddot{\varphi}_1 l_1 \left(l_1 \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) + l_4 m_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + \right. \\
& + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \Big) - \\
& - \ddot{\varphi}_2 l_2 \left(l_1 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_4 m_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \right. \\
& + l_2 \left(\frac{1}{3} m_2 + m_3 + m_4 \right) \Big) - \ddot{\varphi}_3 l_3 \left(l_1 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_4 m_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) + \right. \\
& + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) + l_2 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \Big) - \ddot{\varphi}_4 m_4 (l_4^2 + \varrho^2) - \ddot{\varphi}_4 l_4 \left(l_1 m_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + \right. \\
& + l_2 m_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) + l_3 m_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \Big) + \dot{\varphi}_1^2 l_1 \left(l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + \right. \\
& + l_4 m_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) + l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \Big) + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \left(l_4 m_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) - \right. \\
& - l_1 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \Big) + \\
& + \dot{\varphi}_3^2 l_3 \left(l_4 m_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) - l_1 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \right) - \\
& - \dot{\varphi}_4^2 l_4 \left(l_1 m_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) + l_3 m_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) + l_2 m_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) \right) - \\
& - g l_1 \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_1) - g l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_2) - \\
& - g l_3 \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) \cos(\varphi_3) - g l_4 m_4 \cos(\varphi_4). \tag{11}
\end{aligned}$$

Найденные выражения вращающих моментов в кинематических парах (8) – (11) и есть решение прямой задачи динамики, причём полученное в общем виде. Следует отметить, что построенная здесь система дифференциальных уравнений (5) – (8), допускает решение не только прямой, но и обратной задачи динамики для механической системы, представленной на рис. 4.

В частном случае, когда манипулятор совершает подъем груза, можно, используя кинематические соотношения (1) – (2), из приведенных формул (8) – (11), найти численные значения вращающих моментов в кинематических сочленениях, соответственно, ориентируясь на полученные значения, можно подобрать требуемые характеристики электродвигателей. Подобранные таким образом электродвигатели обеспечат движение схвата манипулятора по заданной траектории.

Поскольку выражения для моментов слишком громоздки, численные значения находились с помощью пакета символьных вычислений **Maple 15** [7,8]. На рис. 5 – рис. 6 полученные результаты для моментов представлены в виде графиков их зависимостей от времени. Интервал времени выбирался исходя из полученного решения обратной задачи кинематики о подъеме груза схватом манипулятора $t \in [0; 1]$.

На рис.5 приведены графики зависимостей от времени вращающихся моментов M_1 и M_2 на интервале времени $t \in [0;1]$.

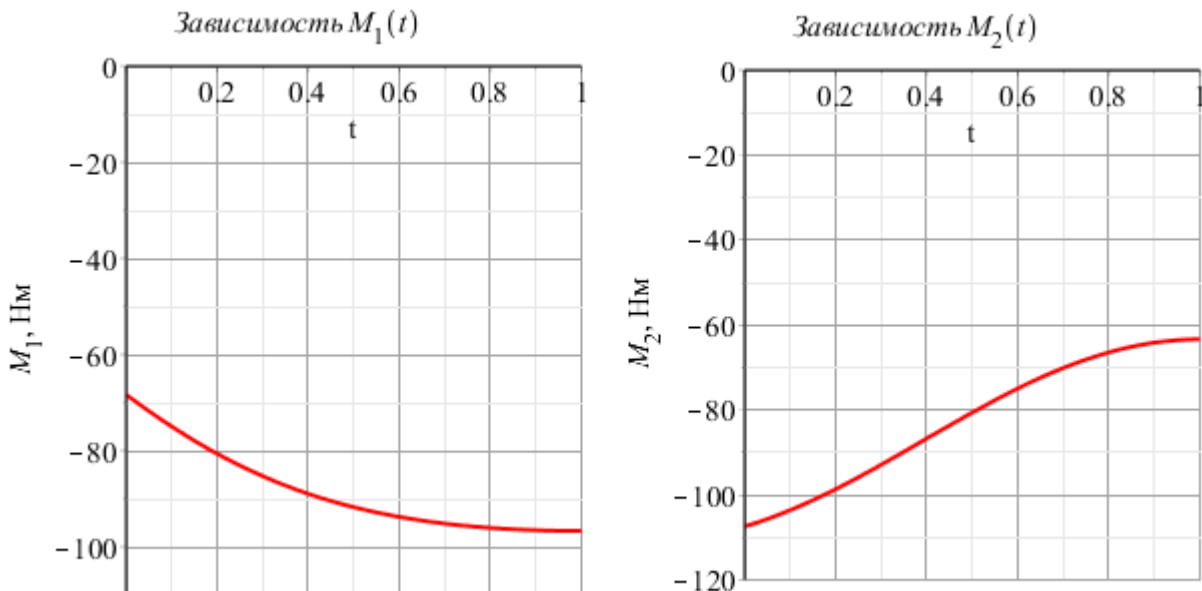


Рис. 5 Зависимость моментов M_1 и M_2 от времени

На рис. 6 приведены графики зависимостей от времени вращающихся моментов M_3 и M_4 на интервале времени $t \in [0;1]$.

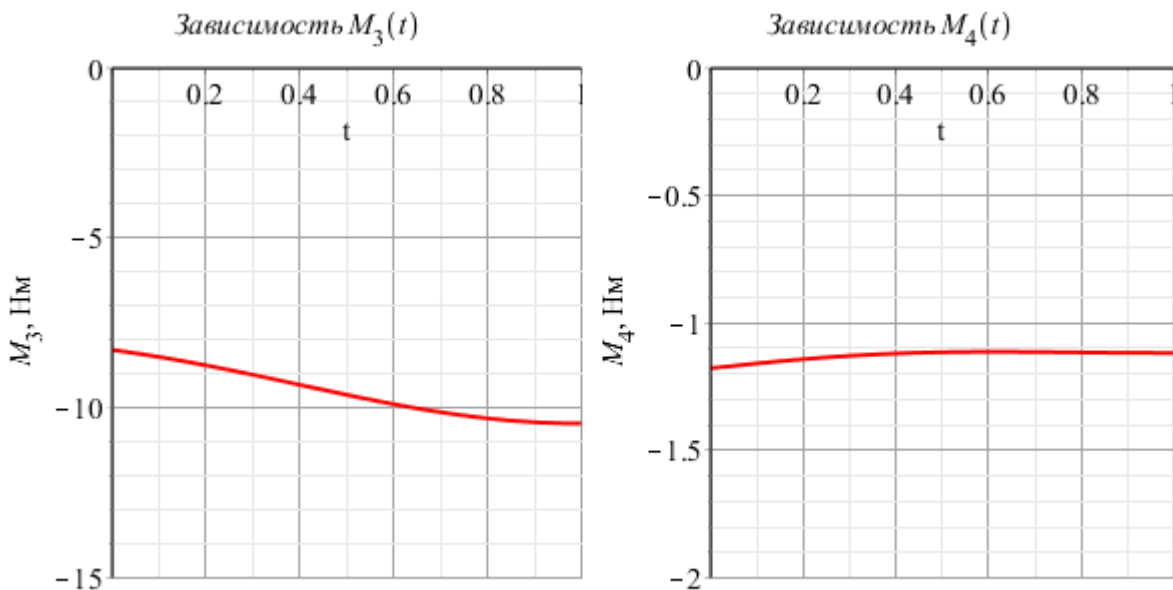


Рис. 6 Зависимость моментов M_3 и M_4 от времени

Отмеченное движение, совершается на протяжении одной временной единицы используемой в программном комплексе **UM**.

Литература

1. <http://www.motoman.com/motomedia/manuals/docs/156402-1CD-R2.pdf>
2. Созинова Е.Л., Корецкий А.В. Кинематический анализ совместной работы двух семизвенных манипуляторов // Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: Двадцатая Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов (27 – 28 февраля 2014, Москва): Тезисы докладов. В 4-х тт. Т. 4. М.: Издательский дом МЭИ, 2014. С. 239.
3. Yahui Gan, Xianzhong Dai Human-like Manipulation Planning for Articulated Manipulator Journal of Bionic Engineering, Volume 9, Issue 4, December 2012, pp. 434-445.
4. Корецкий А.В., Осадченко Н.В. Компьютерное моделирование кинематики манипуляционных роботов. М.: Издательство МЭИ, 2000. 48 с.
5. Biryukova E.V., A. Roby-Brami, Frolov A.A., M. Mokhtari, Kinematics of human arm reconstructed from spatial tracking system recordings, Journal of Biomechanics, Volume 33, Issue 8, August 2000, pp. 985-995.
6. C.W. Gear, B. Leimkuhler, G.K. Gupta, Automatic integration of Euler- Lagrange equations with constraints // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 12-13, May 1985, pp. 77-90.
7. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
8. <http://maple.plusby.com/>

Метрические соотношения в барицентрическом исчислении

Осадченко Н. В.
НИУ “МЭИ”

В статье обсуждается применение формализма *барицентрического исчисления* для записи различных соотношений, относящихся к геометрии евклидовых точечных пространств.

Барицентрическое исчисление представляет собой раздел геометрии, в котором изучаются алгебраические операции над точками аффинного или евклидова точечного пространства. Основы данного исчисления были заложены А.Ф.Мёбиусом в 1827 г. в его книге «Барицентрическое исчисление» [1].

В этой книге Мёбиус, в частности, ввёл *барицентрические координаты*, которые позднее нашли весьма разнообразные применения. К традиционным областям их использования следует отнести, например, метод конечных элементов (где их нередко именуют также треугольными координатами в плоском случае и тетраэдральными – в пространственном) [2,3], или колориметрию – в вычислениях на плоскости цветности [4]. Возникают и относительно новые области применения: геометрия движения пространственных механизмов [5], решение задач локализации в беспроводных сенсорных сетях [6] или компьютерная анимация [7].

Идея барицентрического исчисления основана на том, что вектор \overline{MN} с началом в точке M и концом в точке N представляется как разность этих точек: $\overline{MN} = N - M$. При этом обретает смысл понятие *линейной комбинации* произвольного числа точек P_0, \dots, P_k аффинного пространства с коэффициентами λ_i , однако лишь в следующих двух случаях:

- 1) при $\sum_i \lambda_i = 1$ (*барицентрическая* линейная комбинация);
- 2) при $\sum_i \lambda_i = 0$ (*сбалансированная* линейная комбинация) [5, 8–11].

В первом из этих случаев значением линейной комбинации точек оказывается снова точка, а во втором – вектор. Например, пусть D и E – соответственно середина стороны BC и точка пересечения медиан в некотором треугольнике ABC ; тогда

$$D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \quad \text{и} \quad E = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C;$$

в самом деле, при произвольном выборе начала O для радиус-вектора точки D имеем:

$$\bar{\mathbf{r}}_D \equiv D - O = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}O - \frac{1}{2}O = \frac{1}{2}(B - O) + \frac{1}{2}(C - O) \equiv \frac{1}{2}\bar{\mathbf{r}}_B + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{r}}_C$$

(аналогичные выкладки нетрудно провести и для точки E).

Переход на координатный уровень описания в барицентрическом исчислении обеспечивает аппарат барицентрических координат. Для этого в рассматриваемом аффинном пространстве выбирают *точечный базис* (некоторые предпочитают термин “аффинный базис” [12]), т.е. семейство из $n+1$ аффинно независимой точки P_0, \dots, P_n , где n – размерность пространства (точки из некоторого конечного семейства аффинно независимы, если ни одна из них не является барицентрической комбинацией остальных); из аффинной независимости вытекает, что базисные точки служат вершинами невырожденного n -мерного симплекса. Тогда любую точку M аффинного пространства можно однозначно представить в виде барицентрической комбинации

$$M = \sum_j \lambda_j P_j \quad (1)$$

базисных точек; коэффициенты данной комбинации и являются барицентрическими координатами точки M в данном точечном базисе [5, 9].

Определяемая формулой (1) точка M интерпретируется как точка, радиус-вектор которой относительно некоторого полюса O определяется равенством

$$\bar{\mathbf{r}}_M = \sum_j \lambda_j \bar{\mathbf{r}}_j, \quad \bar{\mathbf{r}}_j \equiv \overline{OP_j};$$

известно, что при выполнении условия барицентричности значение указанной суммы не зависит от конкретного выбора полюса O [9, 10].

Аналогично, любой вектор из пространства свободных векторов данного аффинного пространства можно однозначно представить в виде сбалансированной комбинации

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_j \lambda_j P_j; \quad (2)$$

конкретные значения коэффициентов в данной комбинации (т.е. барицентрических компонент вектора $\bar{\mathbf{u}}$), разумеется, отличаются от значений коэффициентов из формулы (1), поскольку сумма всех коэффициентов должна теперь равняться нулю, а не единице.

Переход от формализма барицентрических координат к более привычному описанию средствами векторной алгебры и аналитической геометрии и обратно несложен и допускает эффективную программную реализацию. Рассмотрим, например, случай $n = 3$ и выберем в трёхмерном пространстве систему декартовых координат $Oxyz$. Спроектируем соответствующее формуле (1) векторное равенство $\bar{\mathbf{r}}_M = \lambda_0 \bar{\mathbf{r}}_0 + \lambda_1 \bar{\mathbf{r}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{r}}_2 + \lambda_3 \bar{\mathbf{r}}_3$ на координатные оси x, y, z и добавим равенство $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, выражающее собой условие барицентричности, к трём получаемым при проектировании скалярным соотношениям. Результатом будет система из четырёх соотношений, которую представим в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \\ 1 \end{pmatrix} = M_C \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } M_C = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица, столбцами которой служат тройки декартовых координат базисных точек, дополненные единицами.

Обсудим программную реализацию данных соотношений в системе аналитических вычислений **Maple**. В программу, созданную в среде **Maple**, можно поместить такие описания указанных двух столбцов и матрицы:

```
> r[M] := Vector (<x[M], y[M], z[M], 1>);
> Lambda := Vector (<lambda[0], lambda[1], lambda[2], lambda[3]>);
> M[C] := Matrix (<<x[0], y[0], z[0], 1> | <x[1], y[1], z[1], 1> |
                 <x[2], y[2], z[2], 1> | <x[3], y[3], z[3], 1> >);
```

Здесь и далее использованы средства пакета **LinearAlgebra** системы **Maple** (компактное описание основных операторов данного пакета, сопровождаемое примерами, содержится в учебном пособии [13]). Для подключения пакета в первой строке программы следует записать:

```
> restart; with(LinearAlgebra);
```

Далее предполагаем, что декартовы координаты базисных точек заданы. Тогда нетрудно решить две задачи. Во-первых, если известны барицентрические координаты $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ точки M , то столбец $\mathbf{r}[M]$ и его элементы находим умножением матрицы M_C на столбец λ барицентрических координат:

```
> X := M[C] . Lambda;
> ( x[M], y[M], z[M] ) := ( X[1], X[2], X[3] );
```

заметим, что прямое присваивание

```
> r[M] := M[C] . Lambda;
```

также допустимо, но приводит к потере возможности обращаться к элементам столбца, используя обозначения x_M, y_M, z_M . В порядке комментария к записанным строкам напомним, что индексы элементов векторов и матриц в пакете **LinearAlgebra** отсчитываются от единицы, а не от нуля.

Во-вторых, если известны декартовы координаты точки M , то её барицентрические координаты находим, умножая столбец $\mathbf{r}[M]$ на обратную матрицу M_C^{-1} :

```
> x := 1 / M[C] . r[M];
```

```
> ( lambda[0], lambda[1], lambda[2], lambda[3] ) := ( x[1], x[2], x[3], x[4] );
```

Совершенно аналогичные операции позволяют переходить от декартовых компонент вектора $\bar{\mathbf{u}}$ из формулы (2) к его барицентрическим компонентам и обратно. При этом столбец \mathbf{U} , отвечающий вектору $\bar{\mathbf{u}}$, разумно описать так:

```
> U := Vector (<u[0], u[1], u[2], 0>);
```

(появление нуля вместо единицы вызвано тем, что барицентрические компоненты вектора образуют уже не барицентрическую, а сбалансированную линейную комбинацию).

В монографиях и учебниках, где излагаются основы барицентрического исчисления (уже упоминавшиеся книги [8–11] и ряд других), это исчисление служит базой, на которой строится последующее изложение аффинной геометрии; впрочем, при переходе к геометрии евклидова точечного пространства аппарат барицентрического исчисления практически уже не используется, уступая место традиционному языку аналитической геометрии и линейной алгебры. Исключение составляет монография [14]: в ней представлена интерпретация средствами барицентрического исчисления весьма обширного набора понятий и соотношений евклидовой геометрии.

Представляется, что исходным пунктом при регулярном применении языка барицентрического исчисления к евклидовой геометрии должен стать перевод на этот язык основных операций векторной алгебры: скалярного и векторного умножения. При этом будем опираться на понятия *матрицы Грама* и *взаимного базиса*, т.е. на фундаментальные понятия тензорного исчисления [15,16].

Начнём с операции скалярного умножения. В силу соотношения

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \sum_{i,k} u_i v_k (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_k) \equiv \sum_i u_i \sum_k g_{ik} v_k, \quad (3)$$

справедливого в произвольном базисе $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$, вычисление скалярного произведения двух векторов сводится к умножению матрицы Грама базисных векторов (элементы g_{ik} которой совпадают с попарными скалярными произведениями векторов базиса) на столбец компонент вектора $\bar{\mathbf{v}}$ в данном базисе, а затем остаётся просуммировать произведения элементов полученного столбца на соответствующие компоненты вектора $\bar{\mathbf{u}}$.

В барицентрическом исчислении разложению вектора по базису $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ соответствует разложение по точечному базису, даваемое формулой (2). Базисные точки здесь можно заменить их радиус-векторами относительно произвольного полюса, и удобнее всего принять за полюс барицентр базисных точек, т.е. точку

$$E = \sum_j \frac{1}{n+1} P_j.$$

Тогда формула (2) и аналогичная формула для вектора $\bar{\mathbf{v}}$ переходят в формулы

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_i \lambda_i \bar{\mathbf{e}}_i, \quad \bar{\mathbf{v}} = \sum_k \mu_k \bar{\mathbf{e}}_k; \quad (4)$$

здесь $\bar{\mathbf{e}}_i = \overline{EP_i} \equiv P_i - E$, $i = 0, \dots, n$.

Семейство введённых только что векторов $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ уже не является базисом (поскольку сумма данных векторов равна нулю; разумеется, нетрудно превратить это семейство в базис, отбросив один из векторов – например, последний, но хотелось бы пока сохранить равноправие барицентрических компонент векторов). Однако по-прежнему для любого вектора разложение по векторам из рассматриваемого семейства оказывается однозначным (единственность разложения обеспечивается требованием сбалансированности получаемой линейной комбинации).

Соотношение (3) переходит в соотношение

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \sum_i \lambda_i \sum_k g_{ik} \mu_k,$$

где через g_{ik} обозначены уже элементы матрицы Грама G семейства векторов $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$. Таким образом, для скалярного произведения векторов, заданных в барицентрическом представлении, получаем формулу

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \lambda^T G \mu, \quad (5)$$

в которой λ и μ – столбцы барицентрических компонент векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$, а T – знак операции транспонирования, которая сопоставляет столбцам строки и наоборот.

Для проведения расчётов с использованием формулы (5) нужно уметь вычислять матрицу G для заданного точечного базиса. Если декартовы координаты базисных точек известны, то проще всего воспользоваться формулой $g_{ik} = (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_k)$. Если же в постановке задачи декартовы координаты не используются, то при вычислении G следует опираться на имеющуюся информацию о метрических соотношениях между базисными точками.

Наиболее простой способ задания такой информации – указать расстояния между данными точками (т.е. длины соединяющих их отрезков $P_i P_k$); в этом случае положения точек будут определены однозначно – с точностью до перемещения точечного базиса как абсолютно твёрдого тела (здесь и далее мы предполагаем, что нумерация базисных точек существенна).

На практике удобнее, впрочем, пользоваться не самими длинами отрезков, а их квадратами, и хранить последние в виде *матрицы квадратов длин*. При $n = 3$ она имеет следующий вид:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{10} & L_{20} & L_{30} \\ L_{10} & 0 & L_{21} & L_{31} \\ L_{20} & L_{21} & 0 & L_{32} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & 0 \end{pmatrix};$$

представляя её в этой форме, мы учитывали, что данная матрица симметрична: $L_{ik} = L_{ki} \equiv (P_i - P_k, P_i - P_k)$. В **Maple**-программе её можно описать так:

```
> LL := Matrix (<<0, L[10], L[20], L[30]> | <L[10], 0, L[21], L[31]> |
               <L[20], L[21], 0, L[32]> | <L[30], L[31], L[32], 0>>);
```

Если матрица M_C задана, то элементы матрицы L могут быть найдены как скалярные квадраты разностей столбцов матрицы M_C :

```
> X := VectorAdd ( Column (M[C], 1), Column (M[C], 2), 1, -1);
> L[10] := DotProduct ( X, X, conjugate=false);
```

и аналогично для остальных пяти элементов, задающих матрицу L . В противном случае следует задать эти элементы непосредственно.

Получим выражение матрицы Грама G через элементы матрицы L . Начнём с диагональных элементов; в ходе преобразований будем пользоваться соотношением

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = \frac{1}{2} \left[(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) + (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}) - (\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}) \right], \quad (6)$$

которое является следствием хорошо известного из векторной алгебры тождества

$$(\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) + (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}) - 2(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}).$$

Имеем:

$$g_{ii} = (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_i) = (P_i - E, P_i - E);$$

так как

$$P_i - E = P_i - \sum_k \frac{1}{n+1} P_k = \frac{1}{n+1} \sum_k (P_i - P_k),$$

то, выразив по формуле (6) скалярные произведения $(P_i - P_k, P_i - P_l)$ через L_{ik} , найдём:

$$g_{ii} = \frac{1}{n+1} \sum_k L_{ik} - \frac{1}{2(n+1)^2} \sum_{i,k} L_{ik}. \quad (7)$$

Внедиагональные элементы матрицы G проще вычислять, используя соотношение (6). В результате для них получается такая формула:

$$g_{ik} = \frac{1}{2} (g_{ii} + g_{kk} - L_{ik}). \quad (8)$$

В частности, при $n = 3$ формулы (7) и (8) принимают следующий вид (где через i, k, l, m обозначены четыре различных числа из набора $0, 1, 2, 3$):

$$g_{ii} = \frac{1}{16} (3L_{ik} + 3L_{il} + 3L_{im} - L_{kl} - L_{km} - L_{lm}), \quad (9)$$

$$g_{ik} = \frac{1}{16} (-5L_{ik} + L_{il} + L_{im} + L_{kl} + L_{km} - L_{lm}). \quad (10)$$

Предположим, что векторы $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ представлены в **Maple**-программе столбцами своих барицентрических компонент, описанными следующим образом:

```
> Lambda := Vector (<lambda[0], lambda[1], lambda[2], lambda[3]>);
```

```
> Mu := Vector (<mu[0], mu[1], mu[2], mu[3]>);
```

а элементы матрицы Грама G , представляемой переменной **GG** типа **Matrix**, уже вычислены (например, по формулам (9)–(10)). Тогда скалярное произведение s векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ в соответствии с (5) находим так:

```
> s := DotProduct ( Lambda, GG.Mu, conjugate=false);
```

Рассмотрим столбец $G\mu$ в формуле (5). В силу равенства $\bar{\mathbf{e}}_0 + \bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + \bar{\mathbf{e}}_n = 0$ из определения матрицы G непосредственно следует, что все её строки подчиняются условию сбалансированности: сумма элементов строки равна нулю. Поскольку матрица G – симметричная, то условие сбалансированности выполнено и для её столбцов; отсюда вытекает, что и сумма элементов столбца $\mu' \equiv G\mu$ равна нулю, так что его элементы μ'_k можно трактовать как барицентрические компоненты некоторого вектора $\bar{\mathbf{v}}'$. Этот вектор представляет собой линейную комбинацию

$$\bar{\mathbf{v}}' = \sum_k \mu_k \bar{\mathbf{e}}'_k \equiv \sum_k \mu'_k \bar{\mathbf{e}}_k, \quad \text{где } \bar{\mathbf{e}}'_k = \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{e}}_k, \quad k = 0, \dots, n;$$

через $\bar{\mathbf{G}}$ здесь обозначен линейный оператор, переводящий векторы $\bar{\mathbf{e}}_k$ в векторы $\bar{\mathbf{e}}'_k$.

Таким образом, столбцы матрицы G – это одновременно столбцы барицентрических компонент вновь введённых векторов $\bar{\mathbf{e}}'_k$.

В тензорном исчислении мы встречаемся с аналогичной ситуацией. Умножая столбец компонент некоторого вектора $\bar{\mathbf{v}}$ на матрицу Грама выбранного в евклидовом векторном пространстве базиса, мы получаем набор чисел, представляющих собой скалярные про

изведения вектора $\bar{\mathbf{v}}$ на векторы исходного базиса (их называют *ковариантными* компонентами данного вектора). Одновременно эти числа можно трактовать как обычные (*контравариантные*) компоненты нового вектора $\bar{\mathbf{v}}'$ в исходном базисе. Базис, относительно которого вектор $\bar{\mathbf{v}}'$ имеет те же компоненты, которые вектор $\bar{\mathbf{v}}$ имел в исходном базисе, называют *взаимным базисом* (по отношению к исходному) [15,16].

Однако в рассматриваемой сейчас ситуации семейство векторов $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ базисом, как уже говорилось, не является, а единственным базисом, относительно которого определяют барицентрические компоненты рассматриваемых нами векторов, является исходный точечный базис. Возникает вопрос: что может служить аналогом понятия взаимного базиса в рамках барицентрического исчисления?

Для ответа на этот вопрос введём в рассмотрение точки $P'_k = E + \bar{\mathbf{e}}'_k$, $k = 0, \dots, n$. Поскольку выполняется равенство $\bar{\mathbf{e}}'_0 + \bar{\mathbf{e}}'_1 + \dots + \bar{\mathbf{e}}'_n = 0$, то точка E играет роль барицентра также и по отношению к новому точечному базису из точек P'_k . Этот новый точечный базис мы и будем трактовать как *взаимный точечный базис* (по отношению к исходному точечному базису из точек P_i).

Барицентрические координаты точек P'_k представляют собой суммы барицентрических компонент векторов $\bar{\mathbf{e}}'_k$ и барицентрических компонент точки E (у последней все такие компоненты одинаковы и равны $1/(n+1)$). Поэтому, обозначив через C матрицу, у которой все элементы равны 1, и прибавив к матрице Грама G эту матрицу C , умноженную на $1/(n+1)$, мы получим матрицу, столбцами которой служат столбцы барицентрических координат точек P'_k :

$$G' = G + \frac{1}{n+1} C .$$

У матрицы G' столбцы (впрочем, как и строки) подчиняются условию барицентричности: сумма элементов столбца равна единице. Поэтому её можно интерпретировать как барицентрическую матрицу некоторого аффинного отображения (а именно – такого, которое переводит точки исходного базиса $\{P_i\}$ в точки базиса $\{P'_k\}$ с теми же номерами) [5]; оператор $\bar{\mathbf{G}}$ служит ассоциированным линейным оператором этого аффинного отображения.

В частном случае, когда за точки исходного базиса взяты вершины правильного тетраэдра с квадратом длины ребра, равным 2, данное отображение оказывается тождественным, матрица G' – единичной, а взаимный точечный базис совпадает с исходным.

Заметим попутно, что аналогичная операция переводит матрицу H , столбцами которой служат столбцы барицентрических компонент векторов $\bar{\mathbf{e}}_k$, в единичную матрицу I :

$$I = H + \frac{1}{n+1} C ;$$

в самом деле, столбцы матрицы в левой части данного равенства – это столбцы барицентрических координат точек базиса $\{P_i\}$ в этом же базисе (так что соответствующее аффинное отображение вновь оказывается тождественным).

Произведение матрицы C на какой либо столбец даёт новый столбец, любой элемент которого равен сумме всех элементов исходного столбца. Поэтому $C\mu = 0$, а отсюда следует, что $G'\mu = G\mu \equiv \mu'$. Таким образом, в формуле (5), служащей для вычисления скалярных произведений, матрицу G можно заменить на G' , и мы приходим к следующей формуле:

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \lambda^T G' \mu . \quad (11)$$

В действительности имеется бесконечно много матриц, которые можно использовать в формуле (5) вместо матрицы G . Наличие такой неоднозначности кажется – на первый взгляд – парадоксальным; однако оно связано с тем, что произведения, стоящие в правых частях формул (5), (11) и подобных им, должны совпадать лишь в тех случаях, когда столб

цы λ и μ удовлетворяют условию сбалансированности, а для произвольных столбцов совпадать не обязаны.

В частности, заменить матрицу G в формуле (5) способна матрица $-(1/2)L$. Для доказательства этого сначала перейдём от разложения векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ по точечному базису $\{P_i\}$ к их разложению по базису из векторов $P_i - P_n$, для чего в формулах

$$\bar{\mathbf{u}} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{v}} = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \dots + \mu_n P_n$$

заменяем λ_n на $-\lambda_0 - \lambda_1 - \dots - \lambda_{n-1}$ и μ_n на $-\mu_0 - \mu_1 - \dots - \mu_{n-1}$:

$$\bar{\mathbf{u}} = \lambda_0 (P_0 - P_n) + \dots + \lambda_{n-1} (P_{n-1} - P_n), \quad \bar{\mathbf{v}} = \mu_0 (P_0 - P_n) + \dots + \mu_{n-1} (P_{n-1} - P_n). \quad (12)$$

Теперь в скалярное произведение $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ подставим разложения (12) и раскроем внешние скобки, а скалярные произведения векторов, записанных в круглых скобках, преобразуем, учитывая соотношение (6), по формулам

$$(P_i - P_n, P_i - P_n) = L_{in}, \quad (P_i - P_n, P_k - P_n) = \frac{1}{2} (L_{in} + L_{kn} - L_{ik}). \quad (13)$$

После этого в выражениях, стоящих при квадратах длин, выделим произведения компонент столбцов λ и μ с совпадающими индексами сомножителей (например, $\lambda_0 \mu_0$) и преобразуем их так:

$$\lambda_0 \mu_0 = \frac{1}{2} \lambda_0 \mu_0 + \frac{1}{2} \lambda_0 \mu_0 = \frac{1}{2} [(-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n) \mu_0 + \lambda_0 (-\mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_n)],$$

а затем вновь раскроем скобки и приведём подобные члены. В итоге имеем:

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{2} \sum_{i < k} L_{ik} (\lambda_i \mu_k + \lambda_k \mu_i),$$

откуда получаем следующую окончательную формулу:

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{2} \lambda^T L \mu. \quad (14)$$

Столбцы и строки матрицы $-(1/2)L$ уже не подчинены каким-либо специальным условиям (подобным условиям на строки и столбцы матриц G и G'), а потому произведение столбца μ на эту матрицу уже не будет, вообще говоря, совпадать с μ' . Однако в случае, когда требуется лишь умение вычислять скалярные произведения векторов, представленных своими барицентрическими компонентами, применение формулы (14) открывает возможность вообще обойтись без вычисления матрицы Грама G .

В частности, в этом случае в **Maple**-программе вычисление скалярного произведения осуществляется так:

```
> s := - (1/2) * DotProduct ( Lambda, LL.Mu, conjugate=false );
```

Переходим к операции векторного умножения и, соответственно, окончательно полагаем, что $n = 3$. Сейчас нам предстоит получить выражение для столбца \mathbf{v} из барицентрических компонент v_k вектора $\bar{\mathbf{w}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}]$, представляющего собой векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$, которые представлены столбцами λ и μ своих барицентрических компонент.

Стремление сохранить равноправие барицентрических компонент векторов привело бы нас к получению искомого выражения в виде линейной комбинации шести определителей второго порядка, составленных из элементов столбцов λ и μ ; вычисления по этой формуле были бы достаточно громоздкими. Поэтому на этот раз не будем пытаться сохранить равноправие компонент и перейдём к работе с базисом из векторов $P_i - P_n$, в котором векторы $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ представлены разложениями (12); искомому вектору $\bar{\mathbf{w}}$ отвечает разложение

$$\bar{\mathbf{w}} = v_0 (P_0 - P_n) + v_1 (P_1 - P_n) + v_2 (P_2 - P_n). \quad (15)$$

Наложим далее ограничение на порядок нумерации точек базиса $\{P_i\}$, считая её таковой, что базис из векторов $P_i - P_n$ является *правым* (при этом со стороны внешней нормали

к грани $P_0P_1P_2$ симплекса $P_0P_1P_2P_3$ обход точек P_0, \dots, P_2 , совершаемый в циклическом порядке, выглядит происходящим против хода часовой стрелки). Известно, что для правого базиса корень квадратный из определителя матрицы Грама базисных векторов (которую далее мы во избежание путаницы будем обозначать G_3) равен объёму V параллелепипеда, построенного на базисных векторах, а векторы \bar{e}^i взаимного базиса равны попарным векторным произведениям базисных векторов, делённым на V :

$$V = \sqrt{\det G_3}, \quad \bar{e}^0 = \frac{1}{V} [P_1 - P_n, P_2 - P_n], \text{ и т.д.};$$

(индексы в данных произведениях стоят в циклическом порядке) [15,16].

Пользуясь антикоммутативностью векторного произведения и его линейностью по каждому из сомножителей, преобразуем выражение для вектора $\bar{w} = [\bar{u}, \bar{v}]$ в линейную комбинацию

$$\bar{w} = \sigma_0 V \bar{e}^0 + \sigma_1 V \bar{e}^1 + \sigma_2 V \bar{e}^2, \quad (16)$$

где через σ_i обозначены определители второго порядка, составленные из элементов столбцов λ и μ :

$$\sigma_0 = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1), \quad \sigma_1 = (\lambda_2 \mu_0 - \lambda_0 \mu_2), \quad \sigma_2 = (\lambda_0 \mu_1 - \lambda_1 \mu_0).$$

Столбцы из компонент векторов \bar{e}^i в рассматриваемом базисе могут быть найдены как столбцы обратной матрицы G_3^{-1} ; вычисления, впрочем, упрощаются, если учесть, что обратная матрица равна присоединённой матрице A , делённой на $\det G_3$ (т.е. на V^2). В результате замены матрицы G_3^{-1} матрицей A вместо умножения на V мы получим уже деление, и формула (16) перейдёт в формулу

$$\tilde{v} = (\sigma_0 A_0 + \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2) / V, \quad (17)$$

где \tilde{v} – столбец, состоящий из первых трёх элементов столбца v , а A_i – это столбцы матрицы A (она составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы G_3). Расчётные формулы для вычислений элементов матрицы G_3 были выписаны ранее – это формулы (13).

Нахождение столбца \tilde{v} можно ещё более упростить, если заметить, что в формуле (17) выражение в скобках представляет собой произведение матрицы A на трёхэлементный столбец σ из определителей σ_i , причём данный столбец можно вычислить как формальное векторное произведение столбцов, получаемых из λ и μ отбрасыванием последнего элемента. В результате формула (17) принимает вид

$$\tilde{v} = A \sigma / V; \quad (18)$$

последний элемент v_3 столбца v находим из условия сбалансированности.

В соответствии со всем вышесказанным для вычисления векторного произведения в **Maple**-программе следует задать описание

```
> Nu := Vector (<nu[0], nu[1], nu[2], nu[3]>);
```

столбца v барицентрических компонент искомого вектора \bar{w} , а также вычислить матрицу 3-го порядка $G[3]$, после чего находим присоединённую матрицу A и объём V :

```
> A := Adjoint(G[3]);
```

```
> v := sqrt (Determinant(G[3]));
```

Для нахождения векторного произведения векторов \bar{u} и \bar{v} теперь можно записать:

```
> x := A . ( Lambda[1..3] &x Mu [1..3] ) / v;
```

```
> ( nu[0], nu[1], nu[2] ) := ( x[1], x[2], x[3] );
```

```
> nu[3] := - nu[0] - nu[1] - nu[2];
```

(знаком **&x** в системе **Maple** обозначается операция векторного умножения).

В нашем изложении мы умышленно не касались вопросов, связанных с физической размерностью элементов рассматриваемых столбцов и матриц (предполагая молчаливо, что единица длины выбрана и все встречающиеся величины можно трактовать как безразмерные). В этом плане отметим лишь, что если давать рассматриваемому евклидову точечному пространству обычную геометрическую интерпретацию (а возможны и иные), то расстояния между точками и длины векторов имеют размерность длины, барицентрические компоненты точек и векторов представляют собой безразмерные величины, а элементы матрицы квадратов длин L и матриц Грама G и G_3 имеют размерность площади.

Что касается элементов матрицы M_C , то они различны по своей размерности, а элементы матрицы G' вообще не удовлетворяют правилу, по которому складывать можно лишь величины одинаковой размерности (заметим, впрочем, что последняя матрица фигурирует лишь в промежуточных выкладках).

Литература

1. Möbius A. F. Der barycentrische Calcul: ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie. Leipzig: J. A. Barth, 1827. XXIV + 454 S.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
4. Луизов А. В. Цвет и свет. Л.: Энергоатомиздат, 1989. 256 с.
5. Корецкий А. В., Осадченко Н. В. Компьютерное моделирование кинематики манипуляционных роботов. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 48 с.
6. Hou Cuiqin, Hou Yibin, Huang Zhangqin. A framework based on barycentric coordinates for localization in wireless sensor networks // *Computer Networks*, 2013, **57** (13). Pp. 3701–3712.
7. Beacco A., Pelechano N., Kapadia M., Badler N. I. Footstep parameterized motion blending using barycentric coordinates // *Computers & Graphics*, 2015, **47**. Pp. 105–112.
8. Бурбаки Н. Алгебра. Том 1. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: ГИФМЛ, 1962. 516 с.
9. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 446 с.
10. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. 2-е изд. М.: Наука, 1986. 304 с.
11. Винберг Э. Б. Курс алгебры. 2-е изд. СПб.: Изд-во МЦНМО, 2013. 590 с.
12. Rees E. G. Notes on Geometry. Berlin: Springer, 2000. viii + 109 p.
13. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во «Лань», 2012. 512 с.
14. Ungar A. A. Barycentric Calculus in Euclidean and Hyperbolic Geometry: A Comparative Introduction. Singapore: World Scientific, 2010. xiv + 344 p.
15. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. 3-е изд. М.: Наука, 1984. 294 с.
16. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. 3-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 264 с.

Влияние вибраций и ударов на динамику микромеханического вибрационного гироскопа

Меркурьев И.В., Подалков В.В.
НИУ “МЭИ”

Объектом исследований является микромеханический гироскоп (ММГ) с кольцевым резонатором, применяемый в системах навигации и управления движения подвижных объектов. Рассматривается чувствительный элемент ММГ в виде упругой системы, состоящей из тонкого упругого кольцевого резонатора, поддерживаемого упругим подвесом. По измерению малых изгибных колебаний кольцевого резонатора определяется угловое движение основания гироскопа вокруг оси чувствительности, перпендикулярной плоскости кольцевого резонатора.

Ставится задача исследования динамики ММГ в условиях внешних ударных и вибрационных воздействий в целях оценки надежности механической конструкции резонатора ММГ.

Надежность механических систем определяется воздействием случайных внешних нагрузок, свойствами самой системы и ее элементов, характером взаимодействия элементов, конструктивными и технологическими особенностями системы [1,2]. Оценка надежности механической системы складывается из следующих основных этапов. Сначала выбирается расчетная схема механической системы и строится ее математическая модель с учетом особенностей функционирования [3-12]. Учитывая, что рассматриваемая механическая система представляет собой систему с распределенными параметрами, для построения математической модели движения резонатора ММГ используется вариационный принцип Гамильтона – Остроградского и проекционный метод Бубнова – Галеркина. Дифференциальные уравнения, описывающие в многомодовом приближении колебания упругой системы, исследуются асимптотическими методами механики [13] и статистической динамики [14-16]. В результате решения задачи определяются максимальные деформации и напряжения, по которым проводится оценка надежности механической конструкции.

1. Математическая модель кольцевого резонатора в упругом подвесе на подвижном вибрирующем основании

Кольцевой резонатор ММГ представляет собой тонкое упругое кольцо 2, связанное с основанием 1 ламелями 3 – элементами упругого подвеса (рис. 1). Толщина резонатора h , а осевая линия в недеформированном состоянии представляет собой окружность радиусом R . Резонатор 1 изготавливается методом плазмохимического травления совместно с элементами упругого подвеса. Колебания резонатора возбуждаются и регистрируются системой управляющих и измерительных контуров. Каждый контур образован двумя ближайшими ламелями и участком резонатора с окружным размером $\pi/4$.

Пусть $Ox_1x_2x_3$ – правая декартова система координат, связанная с основанием гироскопа и плоскостью Ox_1x_2 , содержащей упругое кольцо. Для описания деформаций резонатора введем ортогональную систему координат $y_1y_2y_3$, в осях которой зададим вектор упругого смещения элемента кольцевого резонатора $\mathbf{u} = (v, w, 0)^T$, где $v = v(t, \varphi)$ и $w = w(t, \varphi)$ – деформации в окружном и радиальном направлении соответственно, зависящие от времени t и угла φ .

Предположим, что ось крепления резонатора вращается вокруг оси Ox_3 с медленно изменяющейся угловой скоростью $\Omega(t)$, которую в дальнейшем будем считать малой по сравнению с основной частотой колебаний резонатора ω .

Для получения математической модели кольцевого резонатора в упругом подвесе, будем использовать модель винклеровского основания [7,9]. Для исследования влияния вибраций основания дополнительно учтем присоединенные к упругому кольцу массы восьми поддерживающих ламелей упругого подвеса.

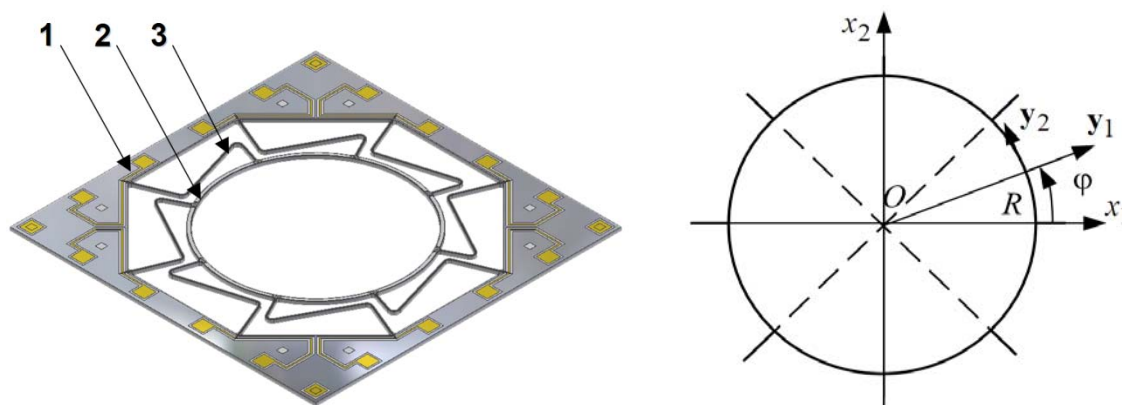


Рис. 1. Кольцевой микромеханический гироскоп

Учитывая, что движение резонатора происходит в плоскости Ox_1x_2 зададим абсолютную скорость $V_1(t), V_2(t)$ полюса O резонатора в проекциях на соответствующие оси. В этом случае удельная, отнесенная к единице длины осевой линии резонатора кинетическая энергия тонкого упругого кольца выражается в виде

$$T = \frac{\rho RS(1 + \mu_*(\varphi))}{2} \left[(\dot{v} + \Omega(w + R) - V_1 \sin \varphi + V_2 \cos \varphi)^2 + (\dot{w} - \Omega v + V_1 \cos \varphi + V_2 \sin \varphi)^2 \right], \quad (1)$$

где ρ, R – соответственно плотность материала и радиус резонатора; $S = bh$ – площадь поперечного сечения резонатора, h – толщина резонатора, b – высота поперечного сечения и торсионов подвеса; μ_* – относительная присоединенная масса упругого подвеса резонатора, представленная в виде разложения в ряд Фурье по окружной координате φ :

$$\mu_*(\varphi) = \mu_0 + \sum_{k=1}^N (\mu_k \cos k\varphi + \bar{\mu}_k \sin k\varphi),$$

здесь $\mu_k, \bar{\mu}_k$ – коэффициенты разложения, при этом, в случае идеально изготовленной симметричной упругой системы коэффициенты с номером 1, 2, ... 7 равны нулю. В (1) и далее точкой обозначена производная по времени t .

Упругие свойства монокристаллического резонатора подчиняются обобщенному закону Гука [17]. Методика расчета упругих свойств материала резонатора и получения дифференциальных уравнений движения упругой системы описана в [7].

Учитывая, что кольцевой резонатор находится в одноосном напряженном состоянии, запишем связь между напряжением σ , возникающем в резонаторе при окружной деформации e

$$\sigma = E e, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга, в общем случае зависящий от направляющих косинусов направления оси y_2 (рис. 1) в главных осях кристалла. По технологии резонатор изготавливается из монокристаллической пластины кремния L -среза, т.е. в плоскости (111), при этом величина модуля Юнга в плоскости (111) кристалла не зависит от направления оси y_2 .

Заметим, что вследствие инструментальных погрешностей изготовления резонато-

ра, ориентация монокристаллической пластины может отличаться от расчетной, что приведет к малому изменению модуля Юнга при изменении окружной координаты φ вдоль направления y_2 .

Величина расщепления частот колебаний резонатора, вызванная инструментальными погрешностями изготовления, как правило, не превосходит 1-3 Гц, что существенно (на четыре порядка) меньше основной собственной частоты колебаний резонатора.

Для исследования надежности механической конструкции будем использовать показатель надежности, рассчитываемый по максимальному значению напряжения в сечении кольцевого резонатора и ламелей упругого подвеса. Условием безотказной работы резонатора будем характеризовать отсутствием пластических деформаций элементов конструкции.

Энергия деформации единицы объема резонатора с учетом (2) имеет вид [7]:

$$\Pi = \int_0^e \sigma de = \frac{1}{2} E e^2. \quad (3)$$

Выражение для окружной деформации определяется соотношением [7]:

$$e = \frac{1}{R} (v' + w) - \frac{\zeta}{R^2} (v' - w''); \quad (4)$$

здесь штрихом обозначена частная производная по окружной координате φ ; ζ – координата, отсчитываемая от срединной линии резонатора в направлении внешней нормали ($-h/2 \leq \zeta \leq h/2$).

После подстановки и интегрирования по площади поперечного сечения резонатора S , получим удельную потенциальную энергию:

$$P = \frac{1}{2} \left[\frac{E S}{R} (v' + w)^2 + \frac{E I}{R^3} (v' - w'')^2 \right] + \frac{1}{2} c(\varphi) (v^2 + w^2) + q(t, \varphi) R w, \quad (5)$$

здесь I – момент инерции поперечного сечения резонатора (для прямоугольного поперечного сечения $I = bh^3 / 12$); $q(t, \varphi)$ – удельная сила электромагнитной системы возбуждения колебаний резонатора; $c(\varphi)$ – жесткость упругого подвеса кольцевого резонатора, которую зададим следующим образом:

$$c(\varphi) = C_m, \quad \frac{\pi}{4}(m-1) < \varphi \leq \frac{\pi}{4}(m-1) + \frac{h_T}{R}, \quad (m = 1, 2, \dots, 8) \quad (6)$$

где C_m – коэффициент жесткости m -ой ламели упругого подвеса, h_T – номинальная толщина ламели. Вследствие инструментальных погрешностей изготовления жесткость и геометрические параметры упругого подвеса могут отличаться от номинальных значений, но расщепление частот колебаний резонатора, вызванное указанными погрешностями существенно (на четыре порядка) меньше основной собственной частоты колебаний резонатора.

Для учета неравножесткости упругого подвеса кольцевого резонатора представим функцию (6) в виде ряда Фурье по окружному углу φ :

$$c(\varphi) = c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^N (c_k \cos k\varphi + s_k \sin k\varphi) \right), \quad c_0 = \frac{h_T}{2\pi R} \sum_{k=1}^8 C_k, \quad (7)$$

где c_k, s_k ($k = 1, 2, \dots, N$) – безразмерные коэффициенты разложения, характеризующие инструментальную погрешность изготовления упругого подвеса. Отметим, что в расчетном случае равножесткого упругого подвеса коэффициенты $c_k = s_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, 7$).

Для получения уравнений движения резонатора применим вариационный принцип Гамильтона–Остроградского [9]. Для этого составим удельный лагранжиан $L = T - P$, который с учетом (1), (5) и нормировки примет вид:

$$L = \frac{1}{2} \left[(\dot{v} + \Omega(w + R) - V_1 \sin \varphi + V_2 \cos \varphi)^2 + (\dot{w} - \Omega v + V_1 \cos \varphi + V_2 \sin \varphi)^2 \right] - \frac{1}{2} \delta^2 (v' + w)^2 - \frac{1}{2} \kappa^2 (v' - w'')^2 - \frac{1}{2} \zeta \kappa^2 (v^2 + w^2), \quad (8)$$

здесь введены параметры

$$\kappa^2 = \frac{EI}{\rho SR^4 (1 + \mu_0)}, \quad \zeta \kappa^2 = \frac{c_0}{\rho SR (1 + \mu_0)}, \quad \delta^2 = \frac{12R^2}{h^2} \kappa^2, \quad (9)$$

характеризующие упругие свойства системы и имеющие размерность квадрата частоты.

В отличие от известной математической модели движения резонатора с нерастяжимой срединной линией [7], построим более полную модель, описывающую независимые смещения v и w упругой системы.

Введем интеграл с фиксированными пределами:

$$H = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} L(v, w, \dot{v}, \dot{w}, v', w', w'') dt d\varphi,$$

называемый действием по Гамильтону. В соответствии с вариационным принципом Гамильтона–Остроградского первая вариация действия по Гамильтону δH на прямом пути системы равна нулю:

$$\delta H = 0.$$

Выполняя варьирование действия по Гамильтону, получим

$$\delta H = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \frac{\partial L}{\partial w} \delta w + \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \delta \dot{v} + \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial L}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial L}{\partial w'} \delta w' + \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' \right) dt d\varphi = 0. \quad (10)$$

Преобразуя уравнение (10) с использованием правила интегрирования по частям и принимая во внимание, что вариации δv и δw в фиксированных начальной (φ_1, t_1) и конечной точках (φ_2, t_2) равны нулю, получим

$$\delta H = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} + \frac{\partial L}{\partial v} \right] \delta v + \left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial w'} + \frac{\partial L}{\partial w} \right] \delta w \right) dt d\varphi = 0.$$

Учитывая, что обобщенными координатами системы являются упругие смещения v и w , вариации которых δv и δw независимы и произвольны, уравнения движения упругой системы принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} + \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} = Q_v^*, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} - \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} + \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial w'} - \frac{\partial L}{\partial w} = Q_w^*, \end{cases} \quad (11)$$

где Q_v^*, Q_w^* – диссипативные силы:

$$Q_v^* = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{v}}, \quad Q_w^* = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{w}}.$$

Полученные уравнения называются уравнениями Лагранжа для систем с распределенными параметрами.

2. Динамика сбалансированного резонатора на подвижном основании

Далее рассмотрим расчетный случай равножесткого упругого подвеса кольцевого резонатора. Применяя вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, получим уравнения движения кольца с учетом диссипативных сил:

$$\begin{aligned} \ddot{v} + 2\Omega\dot{w} - (\dot{V}_1 - \Omega V_2) \sin \varphi + (\dot{V}_2 + \Omega V_1) \cos \varphi - \\ - \delta^2 (v'' - w') + \kappa^2 (w'''' - v'' + \zeta v) + e_* \kappa^2 (\dot{w}'''' - \dot{v}''') = 0, \\ \ddot{w} - 2\Omega\dot{v} + (\dot{V}_2 + \Omega V_1) \sin \varphi + (\dot{V}_1 - \Omega V_2) \cos \varphi - \\ - \delta^2 (v' - w) + \kappa^2 (w'''' - v'''' + \zeta w) + e_* \kappa^2 (\dot{w}'''' - \dot{v}''') = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

здесь e_* , ζ_* – коэффициенты демпфирования:

$$e_* = \frac{E_*}{E}, \quad \frac{c_*}{\rho SR(1 + \mu_0)} = \zeta_* e_* \kappa^2. \quad (13)$$

В уравнениях (12) опущены малые слагаемые, пропорциональные угловому ускорению $\dot{\Omega}$ и квадрату угловой скорости основания Ω^2 .

Решение уравнения (12) будем искать в многомодовом приближении с помощью метода Бубнова–Галеркина для функции упругого смещения в виде:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=1}^N (r_k(t) \cos k\varphi + s_k(t) \sin k\varphi), \\ w &= \sum_{k=1}^N (f_k(t) \cos k\varphi + g_k(t) \sin k\varphi), \end{aligned} \quad (14)$$

здесь r_k, s_k, f_k, g_k – искомые функции времени, k – номер моды колебаний упругой системы, N – число мод.

В результате подстановки функций (14) в уравнения (12) и приравнивания коэффициентов при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ нулю, получим по методу Бубнова–Галеркина N систем обыкновенных дифференциальных уравнений, при $N \rightarrow \infty$ эквивалентных исходным уравнениям (12).

В расчетном случае система обыкновенных дифференциальных уравнений состоит из несвязанных между собой подсистем с вектором состояния $\mathbf{x}_k = (f_k, g_k, r_k, s_k)^T$, описывающих колебания резонатора по моде с заданным номером k .

Уравнения колебаний резонатора по первой форме запишем в векторно-матричном виде

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 + (2\Omega J + D_{*1}) \dot{\mathbf{x}}_1 + D_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{w}, \quad (15)$$

где D_1 – матрица позиционных сил; D_{*1} – матрица диссипативных сил, которая в соответствии с методом Кельвина – Фойхта совпадает по структуре с D_1 ; J – блочная кососимметрическая матрица гироскопических сил; \mathbf{w} – вектор возмущающих внешних воздействий:

$$\begin{aligned} D_1 = \begin{pmatrix} \delta^2 + (\zeta + 1)\kappa^2 & 0 & 0 & \delta^2 + \kappa^2 \\ 0 & \delta^2 + (\zeta + 1)\kappa^2 & -\delta^2 - \kappa^2 & 0 \\ 0 & -\delta^2 - \kappa^2 & \delta^2 + (\zeta + 1)\kappa^2 & 0 \\ \delta^2 + \kappa^2 & 0 & 0 & \delta^2 + (\zeta + 1)\kappa^2 \end{pmatrix}, \\ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{w} = (-\dot{V}_1 + \Omega V_2, -\dot{V}_2 - \Omega V_1, -\dot{V}_2 - \Omega V_1, \dot{V}_1 - \Omega V_2)^T.$$

Отметим, что на динамику резонатора по первой форме колебаний оказывает влияние абсолютное линейное ускорение основания гироскопа $\dot{V}_1 - \Omega V_2$, $\dot{V}_2 + \Omega V_1$.

Частоты колебаний консервативной упругой системы по первой форме колебаний на неподвижном основании можно определить из частотного уравнения

$$(\zeta \kappa^2 - \omega^2)^2 (h^2 ((\zeta + 2)\kappa^2 - \omega^2) + 24\kappa^2 R^2)^2 = 0,$$

корни которого – квадраты собственных частот упругой системы имеют вид

$$\omega_1^2 = \zeta \kappa^2, \quad \omega_2^2 = (\zeta + 2)\kappa^2 + 2\delta^2.$$

Учитывая, что толщина резонатора h намного меньше радиуса кольцевого резонатора R , имеем сильно разнесенные характерные значения квадратов частот, т.к. $\delta^2 = \kappa^2(12R^2/h^2)$. Низшие частоты колебаний могут быть определены экспериментально путем построения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) опытного образца резонатора ММГ.

Дифференциальные уравнения, описывающие свободные колебания консервативной системы на подвижном вибрирующем основании по модам колебаний с номером k имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_k - 2\Omega \dot{r}_k + k(\delta^2 + \kappa^2 k^2) s_k + (\delta^2 + \kappa^2(\zeta + k^4)) f_k &= 0, \\ \ddot{g}_k - 2\Omega \dot{s}_k - k(\delta^2 + \kappa^2 k^2) r_k + (\delta^2 + \kappa^2(\zeta + k^4)) g_k &= 0, \\ \ddot{r}_k + 2\Omega \dot{f}_k - k(\delta^2 + \kappa^2 k^2) g_k + (\delta^2 k^2 + \kappa^2(\zeta + k^2)) r_k &= 0, \\ \ddot{s}_k + 2\Omega \dot{g}_k + k(\delta^2 + \kappa^2 k^2) f_k + (\delta^2 k^2 + \kappa^2(\zeta + k^2)) s_k &= 0, \quad (k = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

Для последующего анализа динамики несбалансированного резонатора запишем уравнения колебаний резонатора (17) с учетом диссипативных сил в векторно-матричном виде

$$\ddot{\mathbf{x}}_k + (2\Omega J + D_{*k}) \dot{\mathbf{x}}_k + D_k \mathbf{x}_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots \quad (18)$$

$$D_k = \begin{pmatrix} \delta^2 + (\zeta + k^4)\kappa^2 & 0 & 0 & k(\delta^2 + \kappa^2 k^2) \\ 0 & \delta^2 + (\zeta + k^4)\kappa^2 & -k(\delta^2 + \kappa^2 k^2) & 0 \\ 0 & -k(\delta^2 + \kappa^2 k^2) & \delta^2 + (\zeta + k^4)\kappa^2 & 0 \\ k(\delta^2 + \kappa^2 k^2) & 0 & 0 & \delta^2 + (\zeta + k^4)\kappa^2 \end{pmatrix},$$

Отметим, что коэффициенты демпфирования D_{*k} могут быть определены экспериментально. Анализ уравнений (17) показывает, что удары и вибрации основания не оказывают влияния на динамику сбалансированного резонатора по второй основной форме колебаний.

3. Влияние ударных воздействий на механическую конструкцию сбалансированного гироскопа

На интервале времени действия максимального ударного ускорения потерями при колебаниях упругой системы можно пренебречь. Анализ исходных данных по внешним воздействующим факторам показывает, что при воздействии виброударов диапазон частот случайных процессов внешнего воздействия много меньше низшей собственной частоты изгибных колебаний упругой системы, так что процесс нагружения упругой системы можно рассматривать как квазистатический.

Для расчета максимальных деформаций конструкции выпишем частное решение уравнений (17)

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = D^{-1} \mathbf{w},$$

$$\bar{f}_1 = -\frac{\dot{V}_1}{\zeta \kappa^2}, \quad \bar{g}_1 = -\frac{\dot{V}_2}{\zeta \kappa^2}, \quad \bar{r}_1 = -\frac{\dot{V}_2}{\zeta \kappa^2}, \quad \bar{s}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\zeta \kappa^2}.$$

Анализ полученного частного решения уравнений (17) показывает, что максимальная деформация резонатора пропорциональна величине пикового ударного ускорения и обратно пропорциональна квадрату низшей собственной частоты по первой собственной форме колебаний.

Числовой пример. Проведем числовые оценки параметров модели кольцевого резонатора [8] радиуса $R = 3$ мм, прямоугольного поперечного сечения с толщиной $h = 120$ мкм, высотой $b = 100$ мкм, с плотностью материала резонатора $\rho = 2328$ кг/м³ и модулем Юнга $E = 168.9$ ГПа. Расчетное значение низшей собственной частоты колебаний резонатора по первой форме колебаний $\omega_1^{(1)} = \sqrt{\zeta} \kappa$ примем равной $\omega_1^{(1)} = 14$ кГц. При значении пикового ударного ускорения $\dot{V}_2 = 800$ м/с² направленного в плоскости кольцевого резонатора по оси x_2 , имеем

$$\bar{g}_1 = \bar{r}_1 = -\frac{\dot{V}_2}{\zeta \kappa^2} = -\frac{800}{(2\pi 14000)^2} = -0.1 \text{ мкм}, \quad \bar{f}_1 = \bar{s}_1 = 0.$$

В соответствии с одномодовым представлением (14) произойдет максимальное смещение упругой системы по первой форме

$$v = \bar{r}_1 \cos \varphi, \quad w = \bar{g}_1 \sin \varphi.$$

Дифференцируя полученные функции в соответствии с (4), получим выражение для окружной деформации кольца $e = 0$, т.к. $v' + w = 0$, $v' - w'' = 0$.

Анализ полученных результатов показывает, что при движении кольцевого резонатора по первой форме происходит смещение кольца как целого, при этом дополнительных напряжений в сечении кольца не возникает. Основная нагрузка распределяется на упругий подвес, максимальное смещение которого составляет $\bar{g}_1 = \bar{r}_1 = -0.1$ мкм, сопоставимое с номинальными значениями деформаций конструкции в расчетном безударном режиме работы.

При одноосной деформации растяжения – сжатия максимальное значение напряжения в сечении ламели составляет $\sigma = E e = 169$ ГПа 0.1 мкм = 17 кПа, что существенно меньше предельных значений.

4. Влияние случайных вибраций основания на механическую конструкцию сбалансированного гироскопа

Далее рассмотрим влияние случайных вибраций основания ММГ на динамику упругой системы по первой форме колебаний.

Запишем уравнения движения системы (15) по первой форме в форме Коши

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{w}, \quad (19)$$

где $\mathbf{y} = (f_1, g_1, r_1, s_1, \dot{f}_1, \dot{g}_1, \dot{r}_1, \dot{s}_1)^T$ – вектор состояния системы, \mathbf{w} – вектор случайных воздействий на систему; A – матрица системы.

Будем предполагать, что на систему действует стационарный случайный процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием $M[\mathbf{w}(t)] = 0$, с заданной интенсивностью G и корреляционной функцией

$$M[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = G\delta(t - \tau), \quad (20)$$

где $\delta(t - \tau)$ – дельта-функция.

Математические ожидания выходных переменных $M[\mathbf{y}] = \mathbf{m}_y$, рассматриваемой сис-

темы можно получить, если в системе дифференциальных уравнений (19) входные сигналы и начальные условия вектора состояния заменить их математическими ожиданиями $M[\mathbf{y}_0] = \mathbf{m}_{y_0}$.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений для математических ожиданий выходных переменных $\dot{\mathbf{m}}_y = A\mathbf{m}_y$ не представляет никаких практических трудностей. Учитывая, что на входе системы имеются сигналы с нулевым математическим ожиданием, то установившиеся значения переменных \mathbf{m}_y равны нулю.

Для определения дисперсий и корреляционных моментов выходных сигналов системы введем матрицу

$$M[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)] = R_y(t) \quad (21)$$

и запишем дифференциальное уравнение

$$\dot{R}_y = AR_y + R_yA^T + G, \quad (22)$$

полученное дифференцированием (21) в силу уравнений (19) и свойств решения дифференциального уравнения и дельта-функции [15-16]. Диагональные элементы матрицы $R_y(t)$ решения дифференциального уравнения (22) дают значения дисперсий выходных сигналов системы, а внедиагональные элементы определяют соответствующие корреляционные моменты.

Учитывая симметрию системы и размерность исходных дифференциальных уравнений равную восьми, требуется решить систему дифференциальных уравнений 36 порядка (8 уравнений для определения дисперсий и 28 уравнений для корреляционных моментов).

Отметим, что изложенный метод пригоден и в случае, когда входные сигналы системы не являются белыми шумами, но могут быть представлены в виде преобразования белых шумов формирующим фильтром, описываемым дифференциальным уравнением конечного порядка. При этом к дифференциальным уравнениям, описывающим исходную систему, добавляются уравнения формирующего фильтра.

Для стационарной случайной функции с нулевым математическим ожиданием, спектральной плотностью $s_w(\omega)$ и корреляционной функцией $r_w(\tau)$

$$s_w(\omega) = \frac{D}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad r_w(\tau) = De^{-\alpha|\tau|},$$

формирующим фильтром является апериодическое звено с передаточной функцией $\Phi(p) = \frac{K}{Tp + 1}$ с постоянной времени $T = 1/\alpha$ и коэффициентом усиления $K = \sqrt{2D/\alpha}$.

В этом случае спектральную плотность можно представить в виде

$$s_w(\omega) = \frac{1}{2\pi} |\Phi(i\omega)|^2.$$

Апериодическое звено обладает свойством фильтра и существенно уменьшает амплитуды гармонических воздействий с частотами, большими по сравнению с частотой среза $1/T = \alpha$.

В случае стационарного случайного сигнала на входе системы моменты выходных сигналов системы в установившемся режиме определяются частным решением уравнений (22), т.е. решением алгебраического матричного уравнения

$$AR_y + R_yA^T + G = 0. \quad (23)$$

Далее рассмотрим пример расчета упругих смещений колебательной системы при воздействии случайной вибрации основания в плоскости кольцевого резонатора.

Числовой пример. Учитывая существенно различающийся масштаб движения исходной упругой системы и числовые оценки частот колебаний системы по первой форме и

коэффициента демпфирования колебательного контура γ , зададим уравнения системы, описывающие низкочастотные колебания системы по первой форме и уравнение формирующего фильтра в виде

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \gamma \dot{f} + \omega_1^2 f &= W, \\ T\dot{W} + W &= KV. \end{aligned} \quad (24)$$

Входным воздействием формирующего фильтра является стационарный случайный процесс V типа белого шума единичной интенсивности. Выходным сигналом формирующего фильтра и входным воздействием на колебательную систему является абсолютное ускорение основания W в виде стационарного случайного процесса с заданной спектральной плотностью.

В соответствии с уравнениями (24), введем вектор состояния $\mathbf{y} = (f, \dot{f}, W)^T$ и запишем матрицы системы (22)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_1^2 & -\gamma & 1 \\ 0 & 0 & -1/T \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^2/T^2 \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix},$$

где r_{11} – дисперсия выходного виброперемещения упругой колебательной системы; r_{22} – дисперсия выходной линейной скорости виброперемещения системы; r_{33} – дисперсия виброускорения основания; внедиагональные элементы симметрической матрицы R_y являются корреляционными моментами компонентов вектора состояния и формирующего фильтра.

Решение дисперсионного уравнения (23) имеет вид:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{D(\alpha + \gamma)}{\gamma\omega_1^2(\alpha(\alpha + \gamma) + \omega_1^2)}, \quad r_{12} = 0, \quad r_{13} = \frac{D}{\alpha(\alpha + \gamma) + \omega_1^2}, \\ r_{22} &= \frac{\alpha D}{\gamma(\alpha(\alpha + \gamma) + \omega_1^2)}, \quad r_{23} = \frac{\alpha D}{\alpha(\alpha + \gamma) + \omega_1^2}, \\ r_{33} &= D. \end{aligned}$$

Анализ полученного решения показывает, что дисперсия выходного виброперемещения $r_{11} = \sigma_f^2$ упругой системы пропорциональна дисперсии виброускорения основания $D = \sigma_w^2$ и нелинейно зависит от коэффициента демпфирования γ , частоты среза формирующего фильтра α и собственной частоты по первой форме колебаний ω_1 .

При частоте среза формирующего фильтра $\alpha = \omega_1 / 3$ и коэффициенте демпфирования $\gamma = \omega_1 / Q$, где Q – добротность колебательного контура, имеем дисперсию выходного виброперемещения упругой системы

$$r_{11} = \frac{3DQ}{10\omega_1^4}.$$

Таким образом, среднеквадратичное отклонение при широкополосной случайной вибрации может быть оценена по формуле

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{3Q}{10}} \frac{\sigma_w}{\omega_1^2}.$$

При добротности $Q=2000$, частоте колебаний системы по первой форме $\omega_1=14$ кГц и среднеквадратичном отклонении $\sigma_w=40$ м/с² внешнего вибрационного воздействия с нулевым математическим ожиданием, имеем

$$\sigma_f = 0.1 \text{ мкм.}$$

Анализ полученных результатов показывает, что виброудары многократного действия, широкополосная вибрация в диапазоне частот до 4 кГц не оказывает влияния на механическую прочность конструкции. Таким образом, возникающие в механической конструкции напряжения при ударных и вибрационных воздействиях не превосходят допустимых предельных значений.

Выводы

Разработанная математическая модель движения чувствительного элемента микромеханического гироскопа в виде тонкого упругого кольцевого резонатора в упругом подвесе описывает в многомодовом приближении колебания упругой системы в условиях ударных и вибрационных внешних воздействий.

Определены упругие деформации и напряжения механической конструкции на подвижном основании, вызванные ударными и вибрационными воздействиями. Показано, что основное разрушающее влияние ударов и вибраций основания сказывается только на первой форме колебаний резонатора.

Максимальная деформация резонатора по первой форме колебаний в режиме квазистационарного нагружения пропорциональна величине пикового ударного ускорения и обратно пропорциональна квадрату низшей собственной частоты по первой собственной форме колебаний.

При движении кольцевого резонатора по первой форме происходит смещение кольца как целого. Основная нагрузка распределяется на упругий подвес, максимальное смещение которого сопоставимо с номинальными значениями деформаций конструкции в расчетном безударном режиме работы. При одноосной деформации растяжения – сжатия максимальное значение напряжения в сечении упругого подвеса не превышает предельных значений.

Удары и вибрации основания не оказывают влияния на динамику сбалансированного резонатора по второй основной форме колебаний в рамках исходных данных о типовом режиме функционирования ММГ.

Инструментальные погрешности изготовления приводят к нарушению симметрии резонатора и к связям между модами колебаний. На второй основной форме колебаний резонатора влияние ударов и вибраций сказывается только на точности измерений волновой картины колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов Б. А., Ушаков И. А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики М.: Советское радио, 1975. 472 с.
2. Надежность технических систем Справочник под ред. И.А. Ушакова М.: Радио и связь, 1985, 608 с.
3. Басараб М. А., Кравченко В. Ф., Матвеев В.А. Математическое моделирование физических процессов в гироскопии. –М.: Радиотехника, 2005. 176с.
4. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп.–М.: Наука, 1985. 125 с.
5. Журавлев В. Ф. Дрейф несовершенного ВТГ // Изв. РАН. МТТ. 2004. №4. С.19-23.
6. Кубышкин Е. П., Федотов Н. Б. Особенности влияния вибрации на поведение волновой картины кольцевого резонатора // Изв. РАН. МТТ. №5. 1995. С. 42-47.
7. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов // М.: Физматлит, 2009. 228 с.
8. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
9. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.

10. Ayazi F., Najafi K. A HARPSS polysilicon vibrating ring gyroscope // *Journal of Microelectromechanical Systems* 2001. No. 10. pp. 169–179.
11. Martynenko Y. G. , Merkuriev I.V., Podalkov V.V. Dynamics of a ring micromechanical gyroscope in the forced-oscillation mode // *Gyroscopy and Navigation* 2010, no. 1, pp. 43–51.
12. Yoon S.W., Lee S., Najafi K. Vibration sensitivity analysis of MEMS vibratory ring gyroscopes // *Sensors and Actuators A*. 2011, No. 171. pp. 163– 177.
13. Боголюбов Н.Н, Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
14. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
15. Пупков К.А., Воронов Е.М., Корнюшин Ю.П. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. 640 с.
16. Афанасьев В.А., Афанасьева Н.Ю, Казаков В.С. Теория автоматического управления. Непрерывные и импульсные системы, статистическая динамика линейных систем. Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2007. 388 с.
17. Сиротин И.Ю., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680с.