

## カオス時系列解析とコンピュータ

株式会社 あいはら 研究開発チーム  
高橋 純 山田 泰司

### 1 はじめに

決定論的カオスとは、システムにはなんら確率的な要因が存在しないにも関わらず、その決定論的システム自体が持つ「非線形性」に起因して複雑な振る舞いが生じる現象をいう。決定論的カオスの特徴として、初期値に対する鋭敏な依存性、軌道不安定性、長期予測不能性、短期予測可能性などをあげることができる [1, 2, 3]。

初期値に対する鋭敏な依存性は「バタフライ効果」とも呼ばれ、ごくわずかな誤差の影響が時間とともに指数関数的に拡大し、短期間で対象のグローバルスケールにまで拡大してしまう性質をいう。初期値に限らず、微小な外乱によっても同様の性質が生じ、これは軌道不安定性と呼ばれる。一方でカオスは、微小な外乱による軌道不安定性が生じて、状態空間において定常的な振る舞いを表すアトラクタの幾何学的構造は基本的には変化しないという安定性も有する。

さて、実世界において、無限の精度での観測や初期値の指定などは不可能である。よって、カオスの特徴である初期値に対する鋭敏な依存性、軌道不安定性を考えると、たとえ対象のシステムが完全に分かっているとしても、長期の予測は不可能ということになる。しかし、カオスは決定論に従って振る舞うので、初期値に対する鋭敏な依存性や軌道不安定性の影響が現れる前までの短期であれば、決定論的予測が可能であり、正にここに工学応用的な価値を見い出すことができる。

決定論的カオスという概念は、世の中に存在するさまざまな複雑な現象が確率的な現象ではなく、決定論に従った現象かもしれないという新たな視点を与えてくれる。つまり、複雑な現象の解析において、従来は確率的な手法からのアプローチしかなかったが、決定論的カオスという概念によって、新たなアプローチを選択することが

できる。このような決定論的カオス理論に立脚した時系列解析を「カオス時系列解析」という。

さて、「決定論的カオス」の発見と発展は、コンピュータによる演算や可視化によって支えられてきたわけだが [1, 4]、その一分野である「カオス時系列解析」においても、その技術的な側面には、コンピュータによる高速演算やグラフィックス技術が不可欠である。本稿ではまず、簡単にカオス時系列解析のエッセンスについてまとめた上で、カオス時系列解析のためのソフトウェアである「ChaosTimes」を題材にして、特にコンピュータグラフィックスに関連する技術を紹介する。

### 2 カオス時系列解析

カオス時系列解析 [5] は、対象となる時系列データのカオスの特徴の解析を行い、システムに内在する決定論的なからくりを解明することを目的としている。

決定論的カオスの重要な特徴の一つである軌道不安定性は「リアプノフスペクトラム」によって表され、それらから予測限界時間推定のための重要な指標である「KS エントロピー」の上限值や最大リアプノフ指数が求められる。また、アトラクタの幾何学的構造は、カオスであれば一般にフラクタル構造を持ち、「フラクタル次元」によって定量化される。

時系列予測は、なんらかの予測モデルを用意し、そのモデルに従って将来の予測値を算出することが基本的なアプローチであるが、カオス時系列解析では、予測モデルとして局所線形モデルや非線形モデルなどを用いる。また、決定論的カオスの特徴である、長期予測不能性、短期予測可能性から、予測モデルの「予測精度の特性」によって、元の力学系がカオスであるかを推測することができる。さらに、時系列予測において、先の KS エント

ロピーは「予測精度の予測」へ、フラクタル次元推定値は最適なモデル推定への知見を与えることが可能となる。

対象となる時系列データが、もし定常でなければ、力学系の定常性を仮定している統計量の計算、埋め込み、次元推定、リアプノフスペクトラム推定などでは信頼できる結果を得ることは難しい。そこで、予め時系列データの定常性を調べておく必要があるが、これは非常に難しい問題である。「リカレンスプロット法」は、周期的な振る舞いやカオス的な振る舞い、雑音などの違いが視覚的に明らかになるとともに、過渡状態や観測時間が不十分なデータに対しても適用できるため、定性的ではあるが時系列データの定常性を視覚的にとらえるのに有効な手法である。

通常、対象システムのすべての状態変数を観測できるわけではなく、観測できるのは1変数のみであるという場合も少なくない。カオス時系列解析では、1変数の時系列データから「埋め込み」によって状態空間にアトラクタを再構成することができる。再構成されたアトラクタは「埋め込み」が成立していれば、元のアトラクタと微分同相となり、リアプノフスペクトラム、KSエントロピー、フラクタル次元などが位相的に保存される。つまり、1変数しか観測できなくとも、埋め込みによって再構成されたアトラクタによってさまざまな解析を行うことができるということである。

以上の各手法は、互いに密接に関わり合っており、単一の手法のみで、時系列データのカオス性の判定を行うことは、誤った判断へと導きかねない。つまり、上記の各手法を用いて、多角的に時系列データを解析すべきであって、そのためには、総合的なカオス時系列解析ツールを提供するソフトウェア環境が必要不可欠である。

### 3 カオス時系列解析システム「ChaosTimes」

カオス時系列解析では、埋め込み、リアプノフスペクトラム解析、フラクタル次元解析、非線形モデリングによる予測などを多面的・統合的に行うことが、解析の信頼性の強化や、応用可能性の拡大のために重要である。ここで紹介する「ChaosTimes」は、上述のさまざまな解析ツールを提供するカオス時系列解析システムである[6, 8]。ChaosTimesの主な特徴は例えば以下の点である。

データと解析結果の可視化 ChaosTimesが解析した結果はグラフ化されて表示される。可視化のバリエーションは、基本的な2次元グラフに加えて、インタラクティブに回転可能な3次元グラフ、さらには、3次元を超える任意の $n$ 次元空間の投影グラフやグラデーションカラーを利用したデータ可視化も提供される。さらに、ディスプレイ上での3次元空間の視覚的理解を補助するため、立体視技術も提供されている。

GUIとコマンドラインプログラム ChaosTimesの機能は、GUI (Graphical User Interface) で提供され、簡単なマウス操作で解析を行うことができる。さらに、すべての機能は、個々にシェルで利用できるコマンドラインプログラムでも提供される。これにより、例えばシェルスクリプトなどを利用して、バッチ処理を行うことも可能となり、幾種類ものデータを一括処理するのに有効である。

GUIによる統合的な機能の提供と、コマンドラインプログラムによる個々の機能の提供が両立されていることは、特に大量の解析を行う場合に都合が良い。例えば、GUIを用いて簡単に解析の目安をつけておき、その結果をもとに、コマンドラインプログラムを用いて、大量な検証実験をCPU負荷の低い夜間にバックグラウンドジョブとして実行させることも可能である。

また、ChaosTimesで提供される主な機能については文献[6, 8]に譲るが、特筆すべき機能には以下のようなものがある。

フラクタル次元推定 相関積分法による推定法、及び、2点間距離分布の最尤推定法による次元推定法が提供される。特に後者の手法は、実装方法によっては推定結果が不安定化しやすいが、ChaosTimesが提供する推定方法は極めて安定している。

ポアンカレ切断面 切断面は $n$ 次元状態空間上の超平面であり、効率的なアルゴリズムにより、時系列データから高速にポアンカレ切断面上の新たな時系列を生成する。リカレンスプロット プロットのバリエーションが多種用意されており、通常のプロットだけでなく、グラデーションカラーにより2点間距離を可視化でき、さらにその色空間をログスケールで表現可能であるなど、

リカレンスプロット法において実用的に充実した表現力が備わっている。

非線形モデリングと予測 動径基底関数ネットワークによる非線形モデルによる大域的モデリング, 及び, ヤコビ行列推定による局所線形モデリングが提供されており, 時系列データの特性に応じて適した予測手法を選択可能である。

サロゲートデータ法 カオス時系列解析における統計的仮説検定法で用いられるサロゲートデータ生成アルゴリズムが, 現在 5 種類提供されている。

次章より, 上述の ChaosTimes の特徴と機能の中から 2 つの可視化に関する理論的背景と技術を紹介する。

#### 4 埋め込みとアトラクタ表示

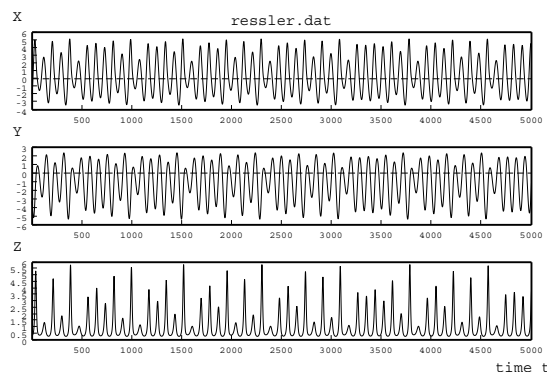
##### 4.1 埋め込み

$k$  次元の力学系のある時刻の状態は,  $k$  個の状態変数によって表すことができる。しかし, 2章でも述べた通り, 実際の実験などでは,  $k$  個の状態変数をすべて観測できるとは限らない。そもそも, 元の力学系が何次元であるかも未知であることが多い。そこで, 最悪の場合を想定して, 1 個の状態変数から得られる 1 本の時系列データからアトラクタを再構成する。そのためには, 時間遅れ座標系への変換を用いて, 観測された 1 個の状態変数の時系列データ  $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$  から, 適当な遅れ時間 (ラグ)  $\tau$  ごとの  $n$  個の状態変数を取り出し, それらから  $n$  次元ベクトル  $V(t) = (x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(n-1)\tau))$  ( $t = 0, 1, \dots, N-1-(n-1)\tau$ ) を作成する。

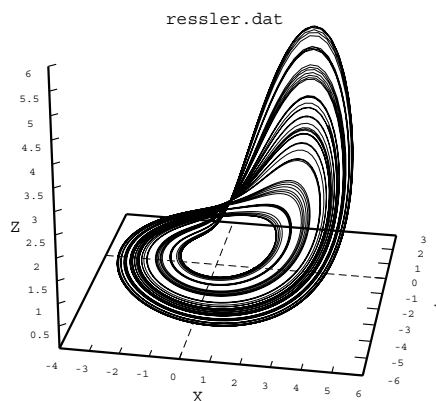
$n$  次元の時間遅れ座標系に再構成されたアトラクタが, 元の力学系の埋め込みになるためには, 十分条件として  $n \geq 2k + 1$  (Takens の埋め込み定理) であることが示されている。また, 他にもいくつかの埋め込み定理が示されている。

例として, 連続時間力学系である次式の Rössler 方程式を取り上げる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1)$$

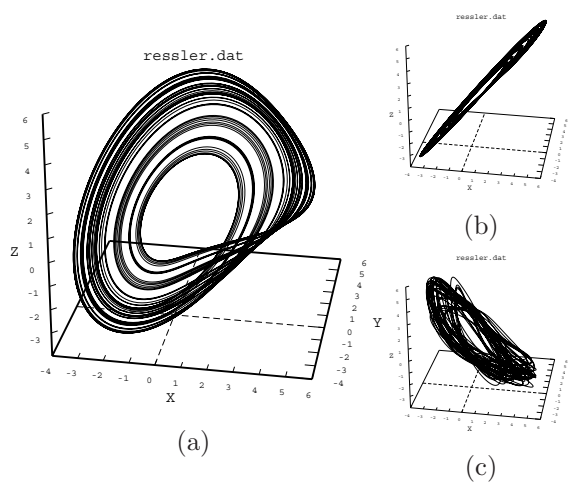


(a)



(b)

図 1: Rössler 方程式の (a) 時系列データ (b) アトラクタ



(a)

(c)

図 2: Rössler 方程式の変数  $x$  を 3 次元状態空間に埋め込んだ結果 (a)  $\tau = 10$  (b)  $\tau = 1$  (c)  $\tau = 500$

図1(a)は式(1)の全変数  $x, y, z$  を時系列データとしてグラフ表示したものである。ただし,  $a = 0.398, b = 2, c = 4$  とし, サンプル周期 0.07 でルンゲクッタ法を用いて数値計算を行なった。すべての状態変数を用いて軌道を描いたものが図1(b)のアトラクタである。次に, 式(1)の3変数のうち,  $x$  のみを観測したと仮定して, 上記の手法に従って3次元状態空間に再構成したものが図2(a)-(c)である。図を見ると, ラグが極端に小さい図2(b)では, アトラクタが対角線近傍に潰れてしまい, 各状態点間の相関が極度に高くなる。逆にラグが極端に大きい図2(c)では, 各状態点間の相関が失われ, 構造が保存されなくなってしまふ。図2(b),(c)のような再構成データを用いて定量的解析を行うのは適切ではなく, 図2(a)で示したような, 元のアトラクタの位相構造に近い再構成データを用いるべきである。

ここでの例のように, 必ずしも Takens の埋め込み定理の条件を満たしていなくても, 元の力学系の位相的構造が保存されていることが視覚的に理解できる。これは, Takens の埋め込み定理や他のいくつかの埋め込み定理は, あくまで十分条件であるからである。また, アトラクタの再構成を適切に行うには, 時系列データの自己相関関数やパワースペクトラムなどにより, 適切なラグを決める必要があるが, ここで示したように, 次元が比較的低く, アトラクタを視覚的にとらえることが可能であるならば, 時間遅れ座標系での視覚的な情報が有効である。

#### 4.2 $n$ 次元状態空間の可視化

アトラクタを視覚的にとらえると言っても, 3次元を超えるイメージを人間が理解するのは困難である。通常の3次元コンピュータグラフィックスにしても, 3次元の物体を2次元の画面に投影して表示しているに過ぎない。しかし, カオス時系列解析において, 3次元以上のアトラクタは例外的なものではなく, 視覚的な情報が重要であることを考えると, なんらかの方法で3次元を超える物体を表現する方法を導入し, 3次元を超える状態空間をイメージする試みは重要であると考えられる。

一つの方法は, 色を使うことである。カラーグラデーションに値を割り当て, 色情報を一つの変数の値, すなわち一つの次元と考える。ChaosTimes では, データの

視覚化のバリエーションとしてグラデーションカラーによるグラフ表示も提供しており, 例えば4次元のデータに対して, 3次元までは通常の3次元座標系で表示して, 4次元目をグラデーションカラーで表すといった表示ができる。

また, ハイパーキューブ(超立方体)による  $n$  次元座標系を用いるという方法も考えられる。表示する対象が, 2次元の場合は正方形(長方形)の座標系のグラフ, 3次元の場合は立方体(直方体)の座標系のグラフで表すと同様に,  $n$  次元の物体を  $n$  次元超立方体の座標系のグラフで表す。例えば, 4次元であれば, 8個の3次元立方体に囲まれた4次元超立方体を用いる。ChaosTimes では, このハイパーキューブによる  $n$  次元座標系を, 一度3次元座標系に投影し, それを画面上(2次元平面)に投影表示させている。また, すべての軸で適当にリアルタイムに回転させることも可能である。

図3は, 次式で表される Rössler の Hyper Chaos のアトラクタの可視化例である。ただし,  $a = 0.25, b = 2.2, c = 0.05, d = 0.5$  とした。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay + w \\ \frac{dz}{dt} = b + xz \\ \frac{dw}{dt} = cw - dz \end{cases} \quad (2)$$

図3(a)は, 3次元座標系での投影グラフである。一方, 図3(b)-(d)は, すべての軸で適当に4次元座標系を回転させたときのスナップショットである<sup>1</sup>。

図3(a)を見ると,  $x-y$  平面( $z = 0$ )付近に, アトラクタに交わりのあるところがあり, 3次元座標系ではこのアトラクタを表示するのに十分でないことがわかる。図3(b)-(d)を見ると, 図3(a)で交わっていたところがほぐれていて, このアトラクタを表示するには4次元の座標系が必要であることがわかる。

ちなみに, ChaosTimes では,  $n$  次元座標系をリアルタイムに回転することにより, より視覚的に理解し易くなる。なぜならこれは, アニメーションによってオペレータの時間軸を積極的に活用するからである。

<sup>1</sup>このアニメーション画像が下記の URL から閲覧できます。  
<http://www.aihara.co.jp/rdteam/chaostimes/nDattract.html>

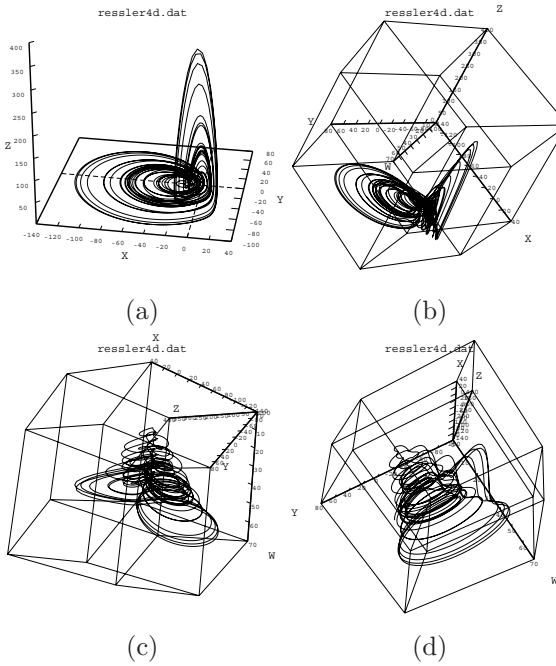


図 3: Rössler の Hyper Chaos をハイパーキューブによる 4 次元座標系で表示

### 5 リカレンスプロット

前章の  $n$  次元座標系でのデータ可視化は、カオス時系列解析におけるコンピュータグラフィックスの『高次元化へのアプローチ』であるが、本章のリカレンスプロットは、カオス時系列解析における基本特徴量の可視化の『低次元化へのアプローチ』である。

リカレンスプロットでは、時系列  $X(t)$  (ただし、 $X(t) \in R^k, t = 0, 1, \dots, N - 1$ ) について、時刻  $i$  のときの状態  $X(i)$  と時刻  $j$  のときの状態  $X(j)$  との間の距離  $d(i, j)$  を計算し、その値によって 2 次元平面上の点  $(i, j)$  にプロットする。

このように 2 点間の相関の計算に距離の情報、時間経過に 2 次元平面を用いて表現するので、プロットした結果の空間的なパターンには、周期的な振る舞いをする時系列であれば周期的な空間パターン、カオス的な振る舞いをする時系列であれば非周期的な空間パターンが現れることになる。さらに、カオスであれば時系列データの軌道の近傍において短期の時間相関を有するので、その特性がリカレンスプロットの空間パターンに現れる。

また、定常な時系列であればリカレンスプロットの空間パターン全体の質感が一様になり、逆に様でないならば、対象の時系列データは、システムとして非定常であるか、システムの過渡状態であるか、観測時間がシステムの現象をとらえるには短すぎるということなどが考えられる。

具体的なプロットの仕方として、距離  $d(i, j)$  に関して閾値を設け、閾値より距離が小さければ黒をプロットする方法や、距離  $d(i, j)$  の最大値、最小値を調べ、その間をグラデーションカラーあるいはグレイスケールで配色しプロットする方法などが考えられる。さらに、図4では、上対角成分をログスケールで配色する方法を用いて、準周期、ノイズ、カオス、及び観測時間が極端に短いときのカオスの場合のリカレンスプロットを示している。

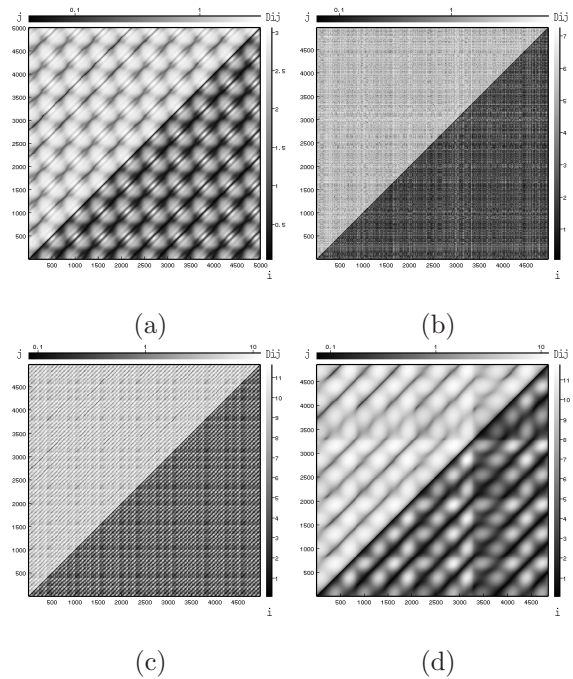


図 4: リカレンスプロット (a)Langford の準周期アトラクタ (b) ガウスノイズデータ (c)Rössler アトラクタ (d)Rössler アトラクタ (サンプリング周期 0.01)

図4からわかるように、リカレンスプロットにより 2 次元平面上に表された 2 点間距離から、準周期的現象、確率的現象、カオス的な現象の端的な特徴が視覚的に理解できる。また、決定論的現象を観測する場合に、サンプリ

ング周期が極端に細かいと、解析したい対象となるアトラクタ構造に対して、時系列データの長さが短くなる。このようなデータは、定常性を仮定している特徴量の解析には適していない。図4(d)は図4(c)と比較して、空間パターン全体の質感が一様でないことがわかる。

リカレンスプロットを用いた非定常性の検出として、もうひとつ例をあげる。例えば、システムパラメータがゆっくりと変動しているような現象も、非定常的な現象の典型例である。そのような時変システムとして、次式で表されるテント写像を取り上げる [7, 11]。

$$f(x, \gamma) = \begin{cases} \frac{a(2x + \gamma)}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1-\gamma}{2} \\ \frac{a(-2x + 2 - \gamma)}{2}, & \frac{1-\gamma}{2} < x \leq \frac{2-\gamma}{2} \\ \frac{a(2x + \gamma - 2)}{2}, & \frac{2-\gamma}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

ここで  $a = 2$  であり、 $\gamma = 0$  のときに通常のテント写像となる。パラメータ  $\gamma$  をゆっくりと不規則に変動させ、解の軌道を2次元再構成状態空間へプロットしたものが図5(a)である。

図5(b)は、その時系列データを4次元で埋め込んだデータを、微小な2点間距離の閾値によるモノクロのリカレンスプロットで描いたものである。このように、時変システムの非定常性の様相が現れているわけであるが、変動するパラメータ自体のリカレンスプロットを描いたのが図5(c)であり、まったく同じ様相が現れていることがわかる。つまり、図5(b)を用いて、時変システムのパラメータの変動を検出し再構成することも可能になる。

以上からわかるように、リカレンスプロットは時系列データの定常性や力学系の構造を定量的に特徴づけるものではないものの、他の特徴量ではとらえにくい時間構造に関する情報を視覚的にとらえることができるので、定性的にシステムの振る舞いをとらえるために有効な手段である。また、リカレンスプロット法を定量的な解析に応用するために、最近さまざまな研究がなされている。それらの詳細は文献 [7, 11, 5] を参照されたい。

## 6 おわりに

本稿で述べてきたような、埋め込みの視覚的な確認や、リカレンスプロットによる時系列データの定常性の視覚的な確認は、カオス時系列解析の基礎的なもので、本来、

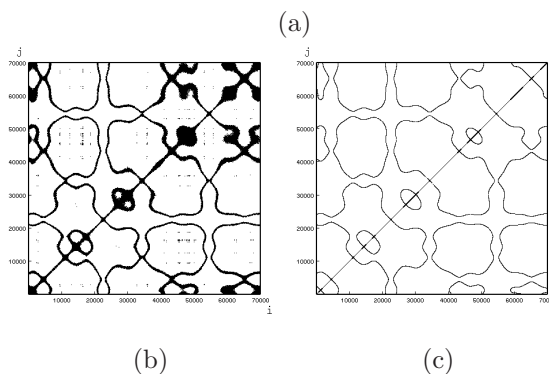
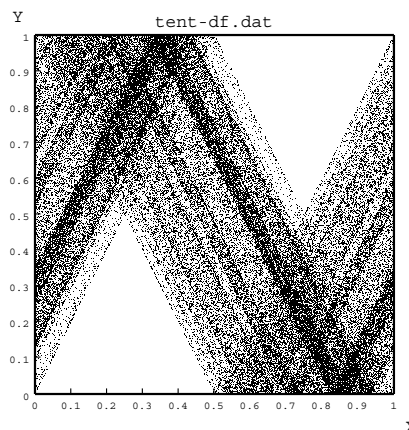


図 5: 時変のテント写像 (a)2次元状態空間への再構成 (b)4次元状態空間への再構成したもののリカレンスプロット (c)変動するパラメータのリカレンスプロット

詳細な定量的解析の前の段階で行なわれるべきものであるが、案外おろそかにされることが多い。特に時系列データの定常性や、時系列データが過渡的な状態もしくは観測時間が不十分である可能性などについて、何のチェックもせずに時系列データの定常性が仮定されている解析手法を適用してしまうと、その後の解析結果の信頼性に大きな疑問が残る [12]。同様な理由で、観測時系列の再構成状態空間データを、視覚的な確認もせずに、その後の定量的な解析を行うことはできる限り避けるべきである。そういった意味で、カオス時系列解析にはコンピュータグラフィックス技術が不可欠であるといっても過言ではない。

カオス時系列解析においては、これらの基礎的な解析を行い、解析の対象となる時系列データが、その後の解析の前提条件をクリアしているか確認してから、フラクタル次元推定やリアプノフスペクトラム推定などの詳細な解析を行うべきである。

本稿では、カオス時系列解析とコンピュータの重要性について、特にコンピュータグラフィックスに関連する事項について述べてきた。その他の重要な定量的解析手法である「リアプノフスペクトラム推定法」や「フラクタル次元推定法」、「非線形モデリングによる予測手法」、「カオス時系列解析における統計的仮説検定法」についての具体例を紹介できなかったが、これらの話題については、文献 [5, 9, 13] をご参照頂きたい。また、カオス理論の発展に伴い、カオス工学応用は時系列解析のみならず、多くの可能性に満ちている。カオス時系列解析のその中の位置付けやカオス工学応用の話題については、文献 [10, 1, 4] をご参照頂きたい。

#### 参考文献

- [1] 合原 一幸, “カオス — まったく新しい創造の波,” 講談社, October 1993.
- [2] 合原 一幸, “カオスの数理と技術 — カオス, そしてフラクタル, 複雑系への序章,” 放送大学教育振興協会, March 1997.
- [3] 合原 一幸, “カオス学入門,” 放送大学教育振興協会, March 2001.
- [4] 合原 一幸, 黒崎 政男, 高橋 純, “神はカオスに宿りたもう,” アスキー出版局, August 1999.
- [5] 合原 一幸 (編), 池口 徹, 山田 泰司, 小室元政, “カオス時系列解析の基礎と応用,” 産業図書, 2000.
- [6] 山田 泰司, 高橋 純, “決定論的カオス理論に基づく時系列解析システム,” 計装, vol.40, no.8, pp. 56-62, August 1997.
- [7] 山田 泰司, 合原 一幸, “リカレンスプロットと2点間距離分布による非定常時系列解析,” 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J82-A, no.7, pp. 1016-1028, July 1999.
- [8] 山田 泰司, 高橋 純, “非線形現象の時系列解析手法を提供するソフトウェア「カオス時系列解析システム — ChaosTimes」,” 実用産業情報, 12, pp. 57-64, 1998.
- [9] 山田 泰司, “カオスの解析法,” 日本ファジィ学会誌, vol.10, no.5, pp. 827-835, October 1998.
- [10] 山田 泰司, “カオスの実用化状況と今後の動向,” in “知的コンピューティングは今 II,” 日本ファジィ学会, pp. 39-42, November, 1998.
- [11] 寶来 俊介, 山田 泰司, 合原 一幸, “同方向性リカレンスプロットによる決定論性解析,” 電気学会論文誌 C, Vol. 122-C, No. 1, pp. 141-147, 2002.
- [12] 岡部 靖憲, “定常解析と因果解析,” in “確率過程 — 応用と話題,” 第4章, 培風館, June 1994.
- [13] S. Murashige, T. Yamada & K. Aihara, “Nonlinear analyses of roll motion of a flooded ship in waves,” Phil. Trans. Royal Society Lond. A, 358, pp. 1793-1812, 2000.