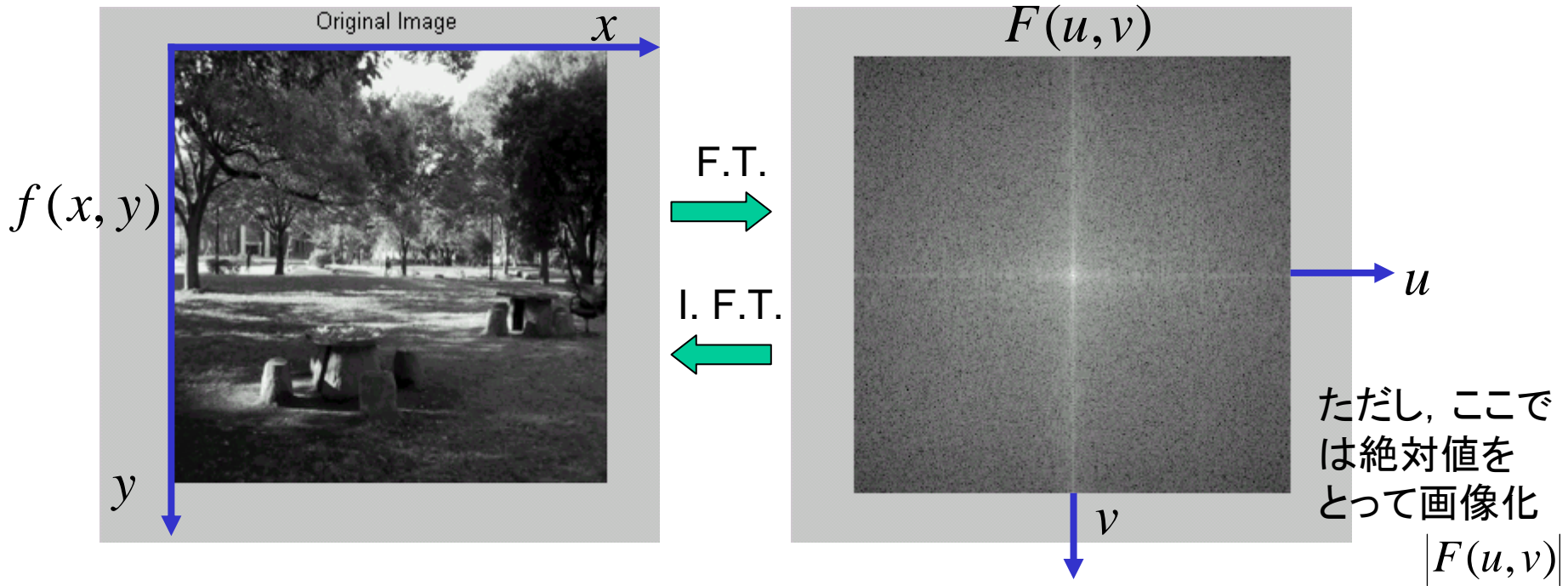


2次元フーリエ変換

講義内容

- 空間周波数の概念
- 2次元フーリエ変換
- 代表的な2次元フーリエ変換対
- 2次元離散フーリエ変換

フーリエ変換と逆変換



連続系

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-j2\pi(ux + vy)\} dx dy$$

順変換

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\{-j2\pi(ux + vy) / N\}$$

離散系

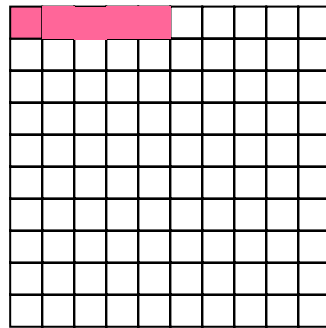
逆変換

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) \exp\{j2\pi(ux + vy) / N\}$$

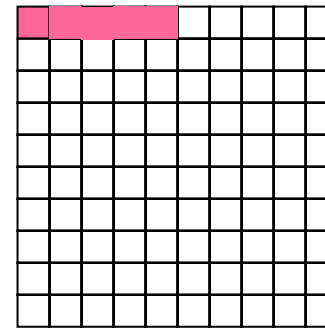
2次元フーリエ変換の具体的なイメージ

離散系での説明

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(x, y) \exp\{-j2\pi(ux + vy) / N\}$$



$f(x, y)$



$\exp\{-j2\pi(ux + vy) / N\}$

対応する画素ごとに積をとって
最後に総和をとる。

それでは $\exp\{-j2\pi(ux + vy) / N\}$ はどんなパターンか？

2次元フーリエ変換の具体的なイメージ

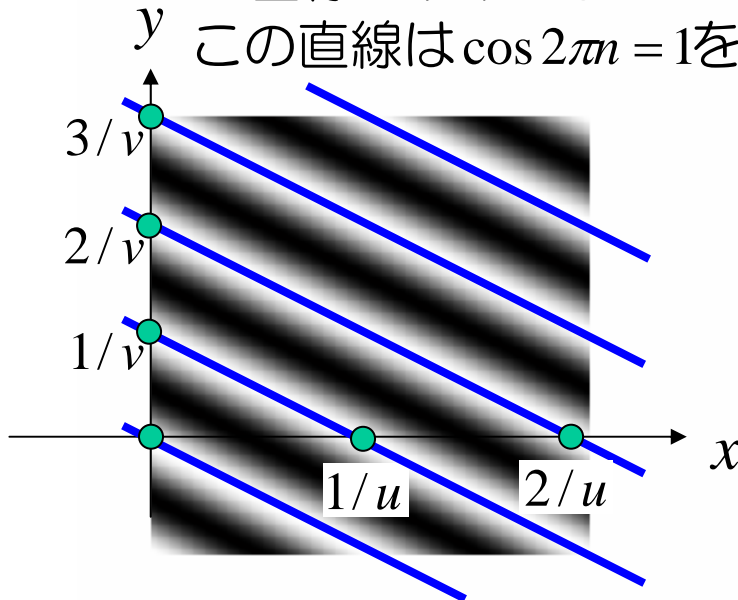
$$\exp\{-j2\pi(ux + vy)\} = \cos 2\pi(ux + vy) - j \sin 2\pi(ux + vy)$$

のうち、実部 $\cos 2\pi(ux + vy)$ に注目して考える。

$$ux + vy = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

の直線は以下のようなになる。

この直線は $\cos 2\pi n = 1$ を与える。



(u, v) は空間的な波の周波数を与える。

⇒ 『空間周波数』 と呼ばれる。

u : x 方向の周波数成分

v : y 方向の周波数成分

$$ux + vy = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

において、 $y = 0$ とおくと

(すなわち x 軸上に注目すると) ,

$$ux = 0, 1, 2, \dots \Leftrightarrow x = 0, 1/u, 2/u, \dots$$

で $\cos(ux) = 1$ となる。

「 u が小さい」 \Leftrightarrow 「間隔が大きい」

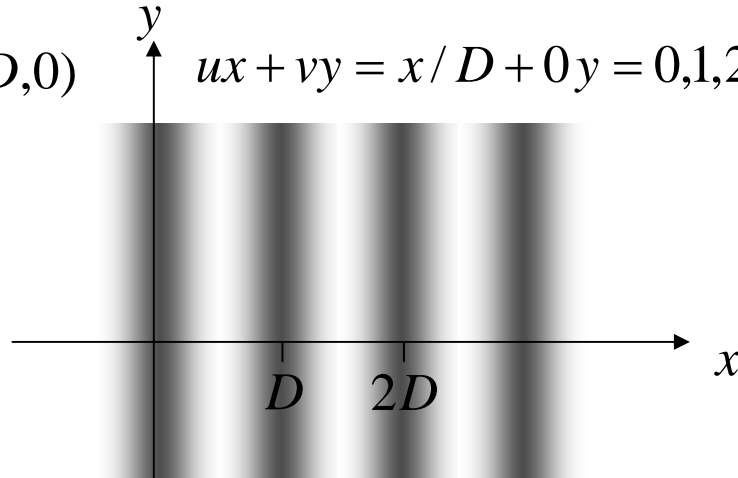
空間周波数の例

$$\cos 2\pi(ux + vy)$$

例 1)

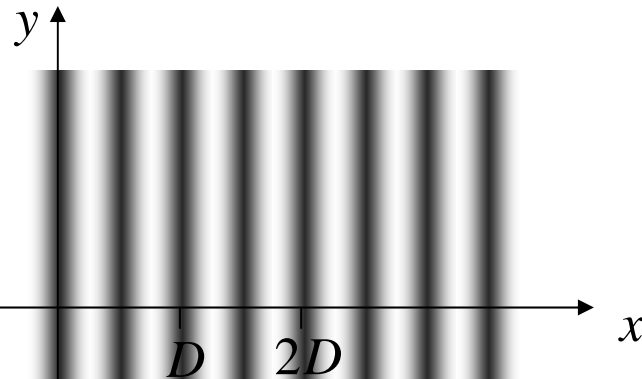
$$(u, v) = (1/D, 0)$$

$$ux + vy = x/D + 0y = 0, 1, 2, \dots \Leftrightarrow x = 0, D, 2D, \dots$$



例 2)

$$(u, v) = (2/D, 0)$$

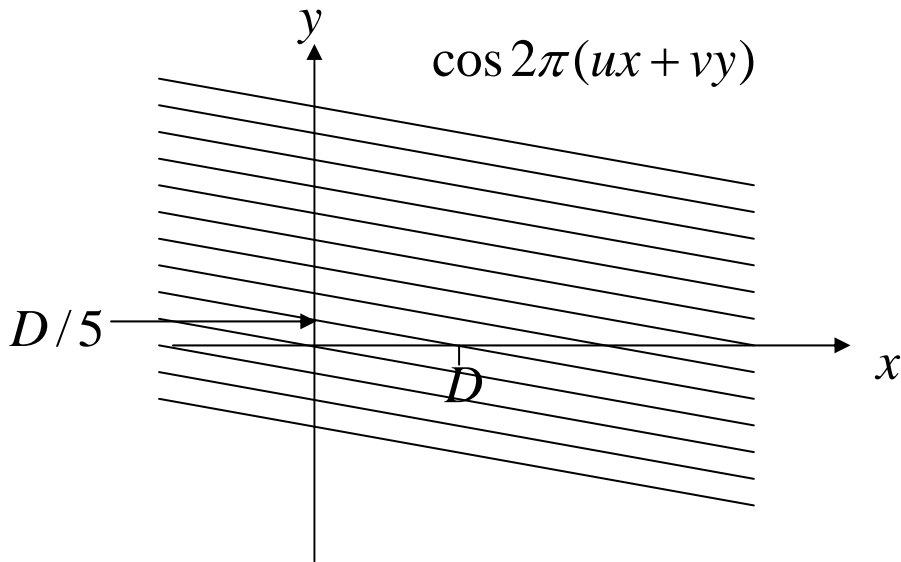


$$ux + vy = 2x/D + 0y = 0, 1, 2, \dots \Leftrightarrow x = 0, D/2, D, 3D/2, \dots$$

演習

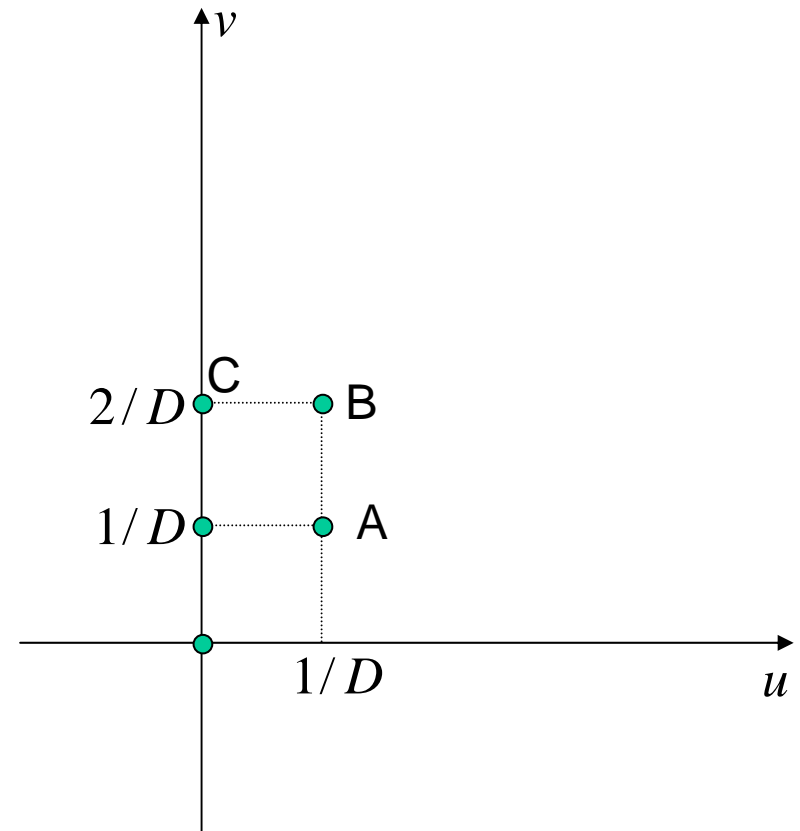
例題 1

下の図に対応する余弦関数を式で書きなさい。ただし黒い線は1の値をもち、余弦関数の最大値を描いているものとする。

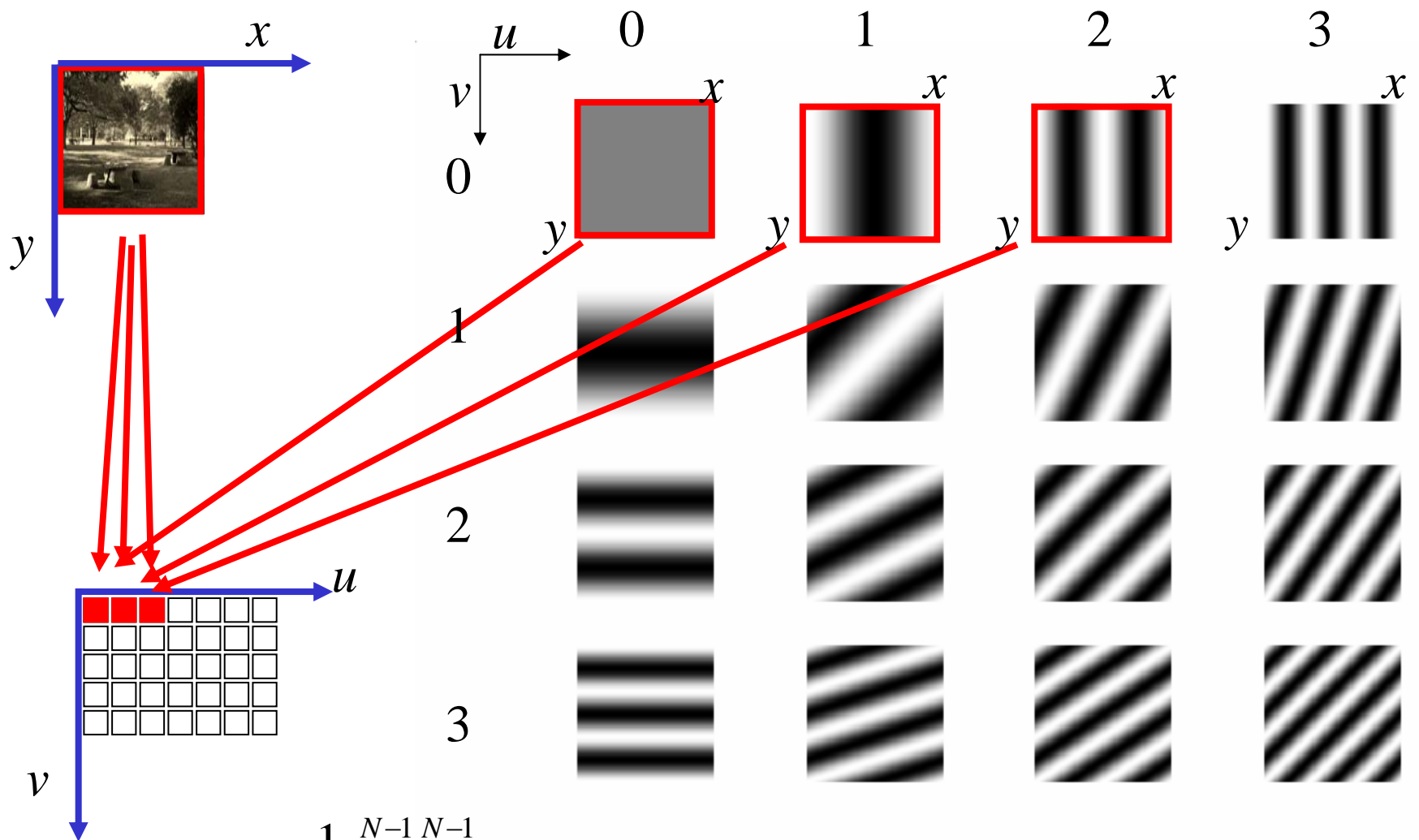


例題 2

上図A,B,Cの位置に対応する空間周波数のパターン（余弦波）をスケッチしなさい。

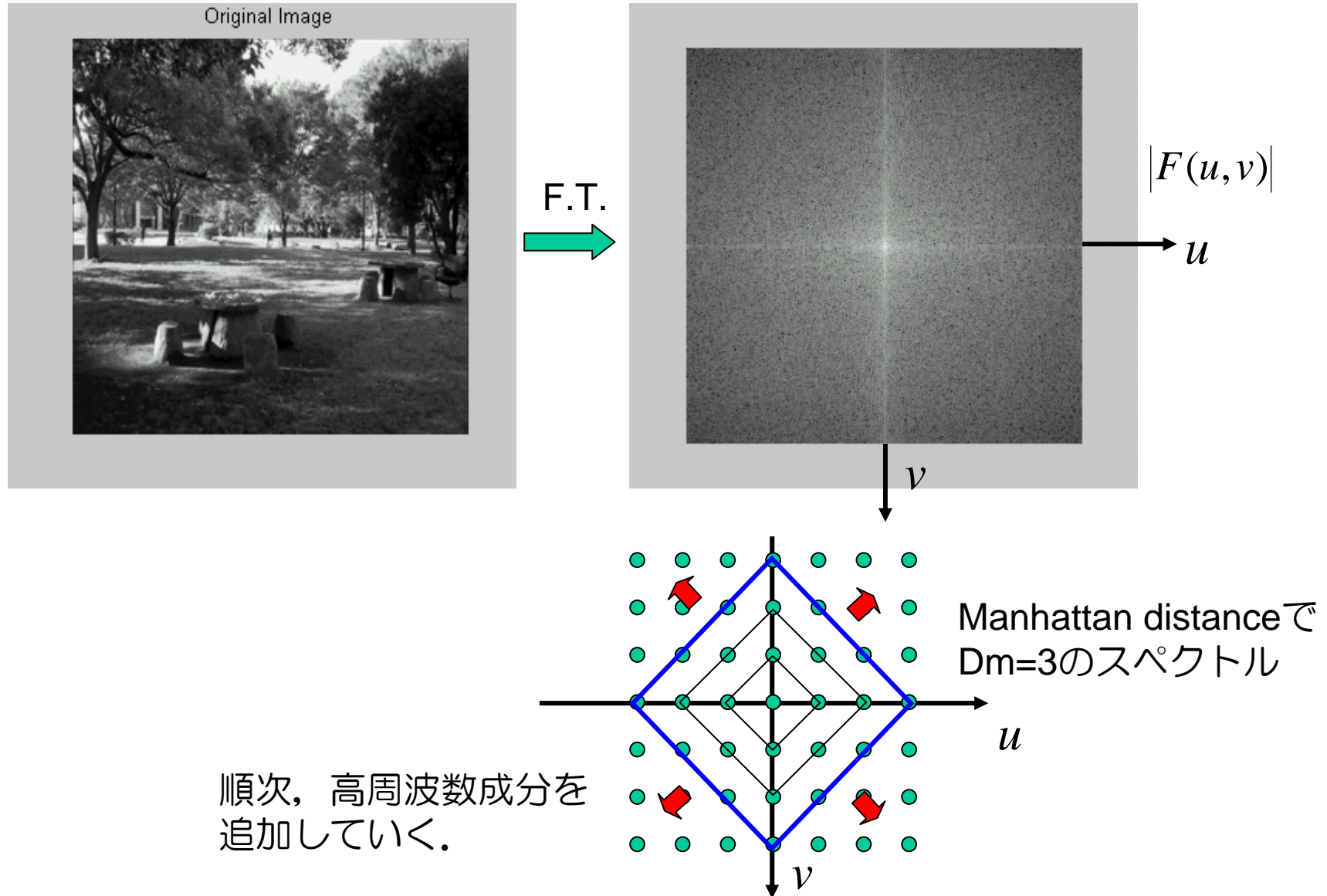


フーリエ変換演算のまとめ

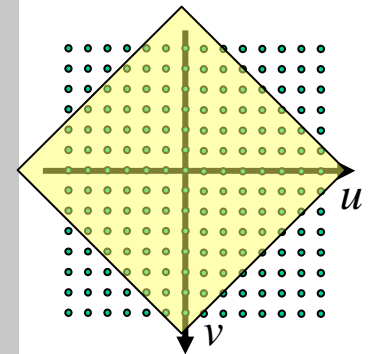
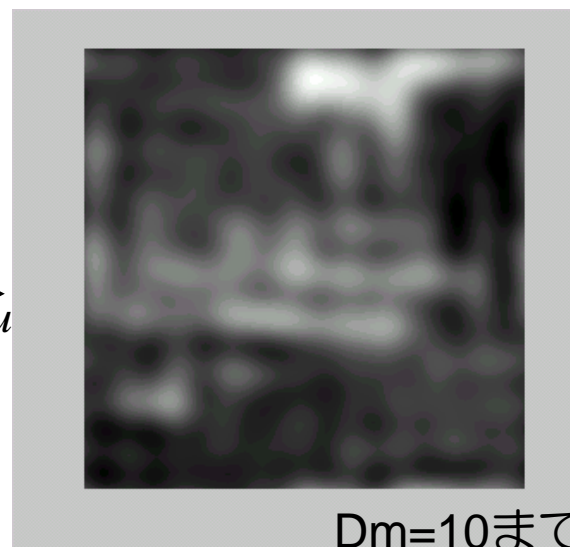
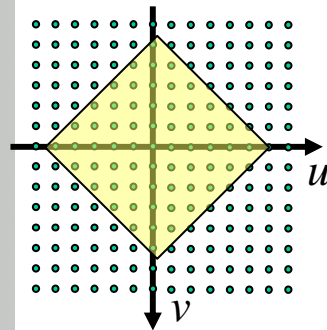
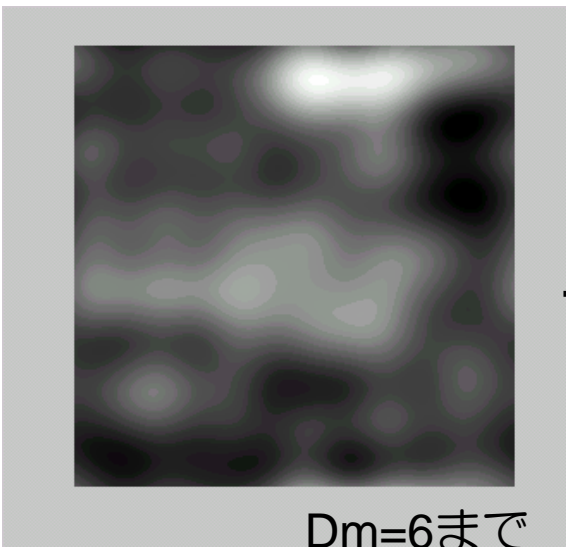
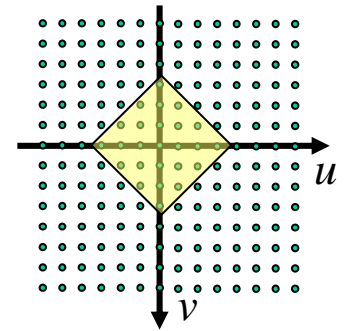
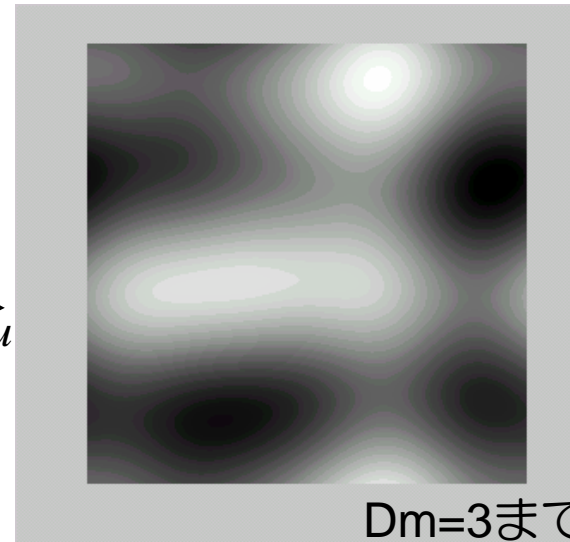
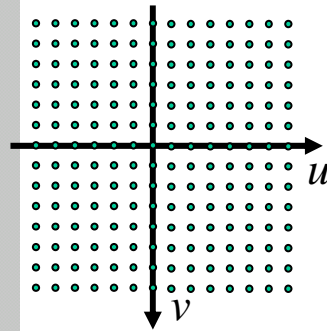


$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(x, y) \exp\{-j2\pi(ux + vy) / N\}$$

フーリエの合成のデモ



フーリエの合成のデモ（つづき）



2次元フーリエ変換

講義内容

- 空間周波数の概念
- 2次元フーリエ変換
- 代表的な2次元フーリエ変換対
- 2次元離散フーリエ変換

代表的な2次元フーリエ変換対(1)

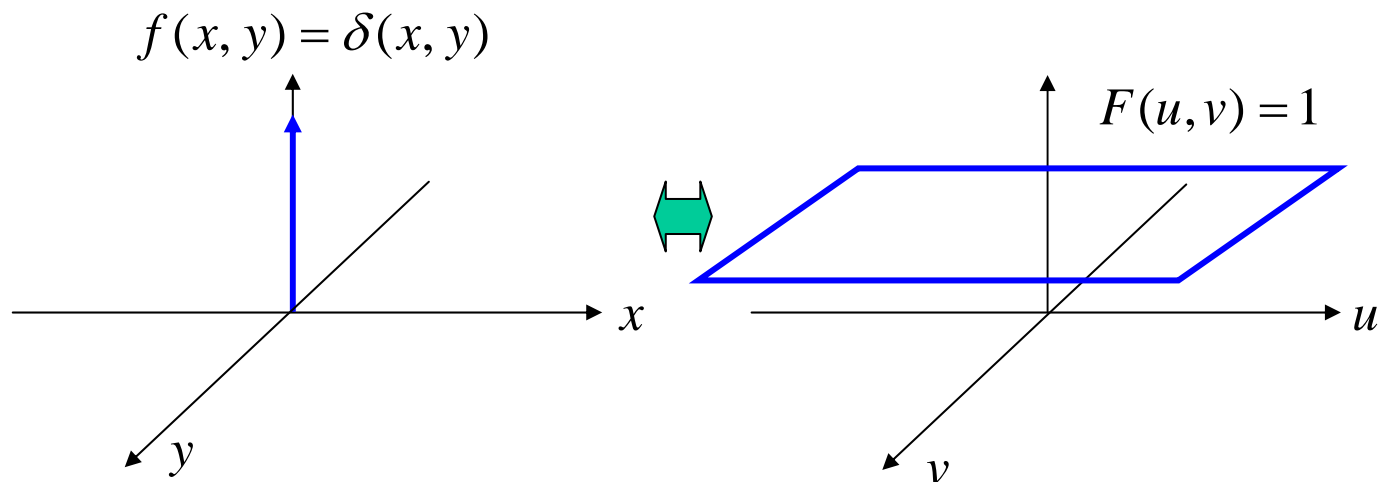
2変数のデルタ関数：

$\delta(x, y)$: $x = 0, y = 0$ で無限大になり，他で0の関数.



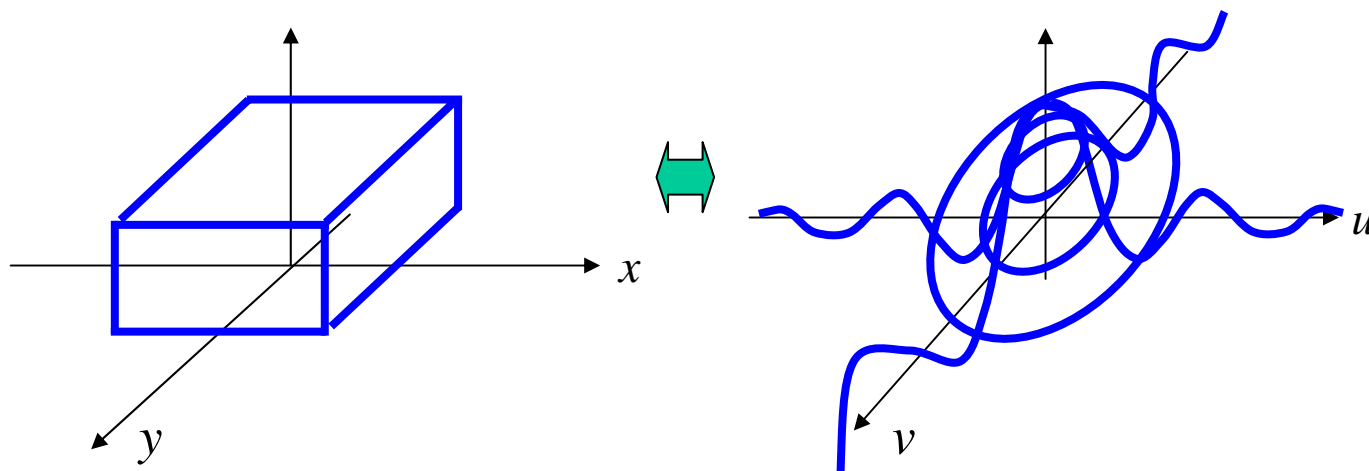
$\delta(x-a, y-b)$: $x = a, y = b$ で無限大になり，他で0の関数.

$$f(x, y) = \delta(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) = 1$$

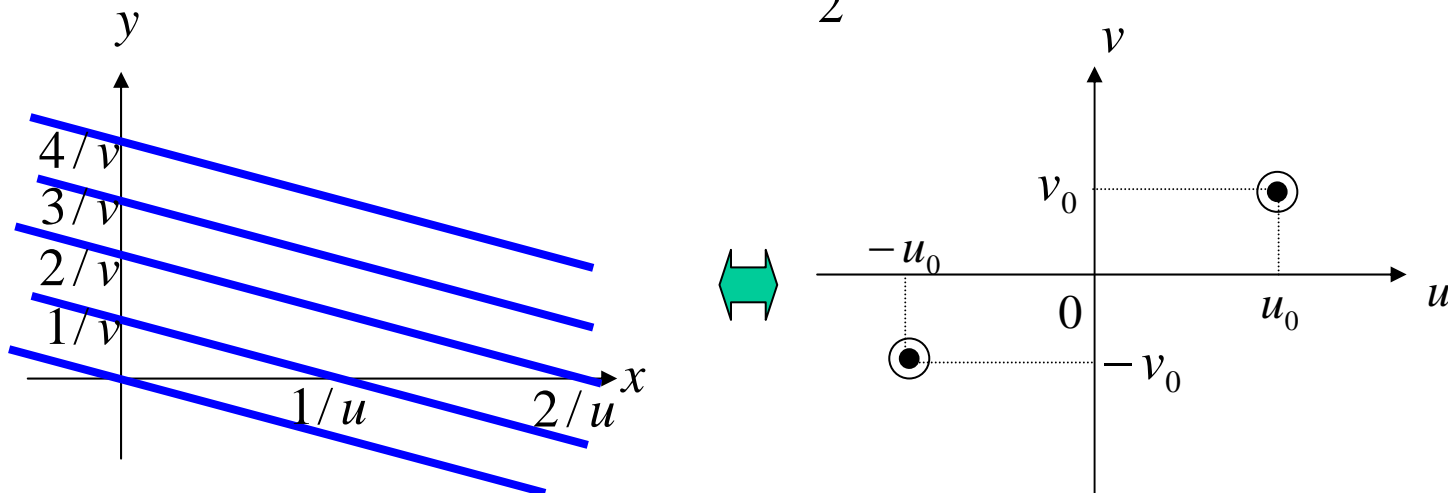


代表的な2次元フーリエ変換対(2)

$$f(x, y) = \text{rect}(x)\text{rect}(y) \Leftrightarrow F(u, v) = \text{sinc}(u)\text{sinc}(v)$$

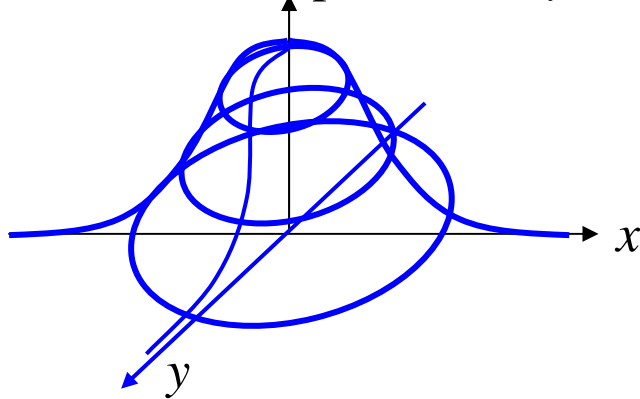


$$f(x, y) = \cos[2\pi(u_0x + v_0y)] \Leftrightarrow F(u, v) = \frac{1}{2} \{ \delta(u - u_0, v - v_0) + \delta(u + u_0, v - v_0) \}$$

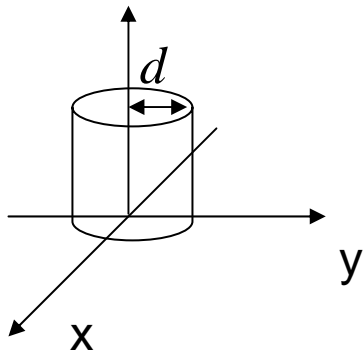
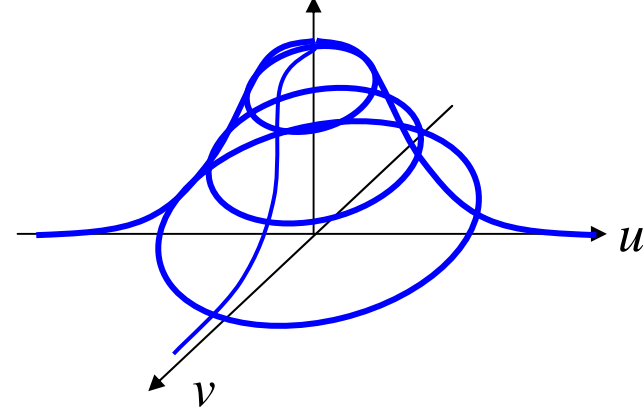


代表的な2次元フーリエ変換対(3)

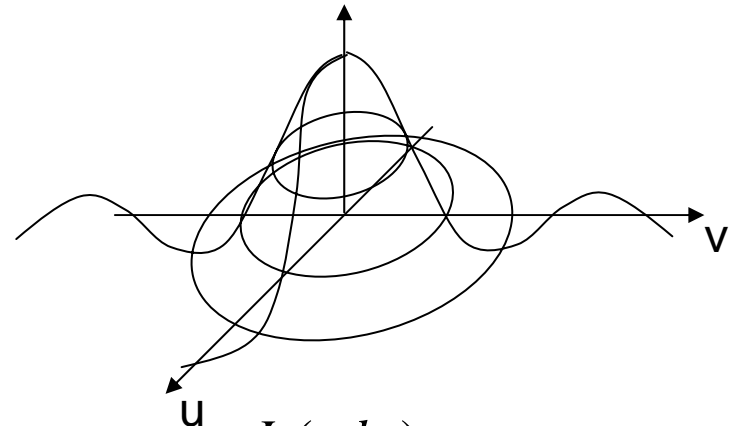
Gauss関数 $f(x, y) = \exp[-\pi r^2]$
 $= \exp[-\pi(x^2 + y^2)]$



$F(u, v) = \exp[-\pi \rho^2]$
 $= \exp[-\pi(u^2 + v^2)]$



$f(x, y) = \text{circ}\left(\frac{r}{d}\right) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

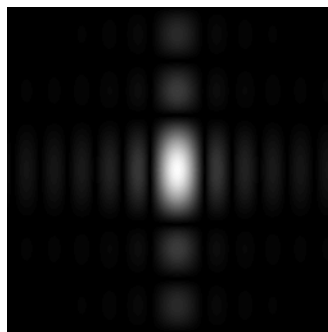
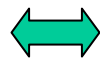
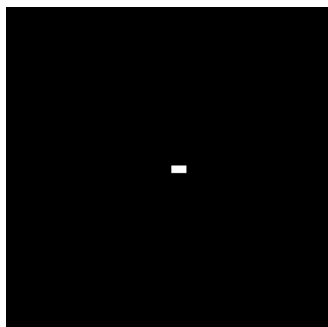


$F(u, v) = \pi d^2 \frac{J_1(\pi d \rho)}{\pi d \rho}, \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}$

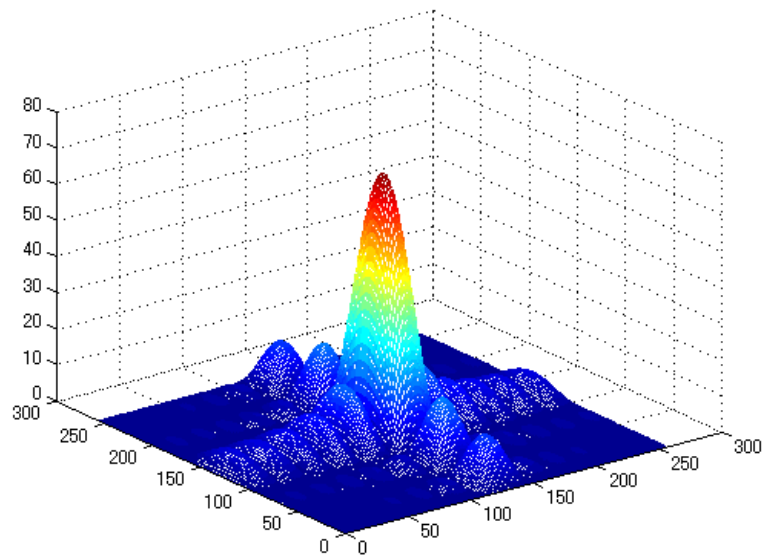
J_1 : ベッセル関数

2次元フーリエ変換の計算例－矩形1－

$$f(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \Leftrightarrow F(u, v) = \text{sinc}(au)\text{sinc}(bv)$$

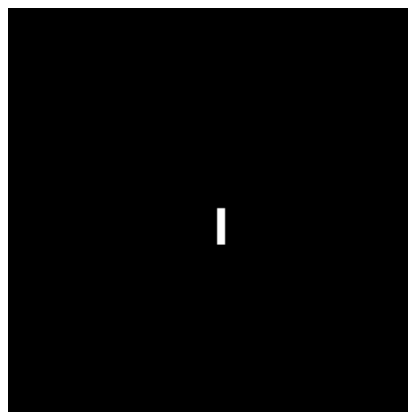


$$a = 12, b = 6$$

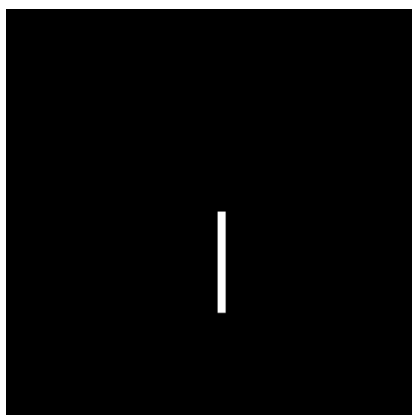
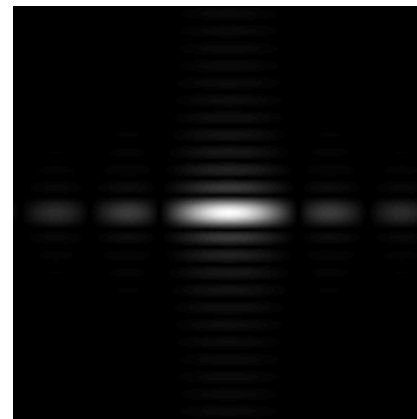


2次元フーリエ変換の計算例－矩形1－

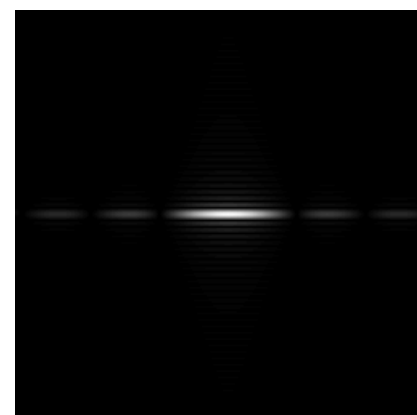
$$f(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \Leftrightarrow F(u, v) = \text{sinc}(au)\text{sinc}(bv)$$



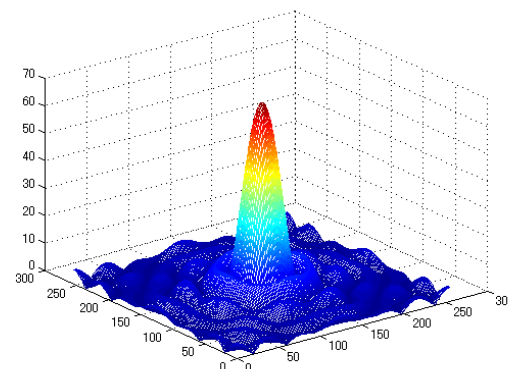
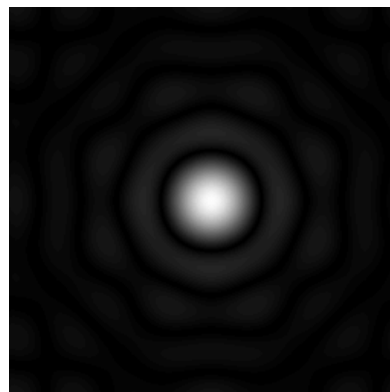
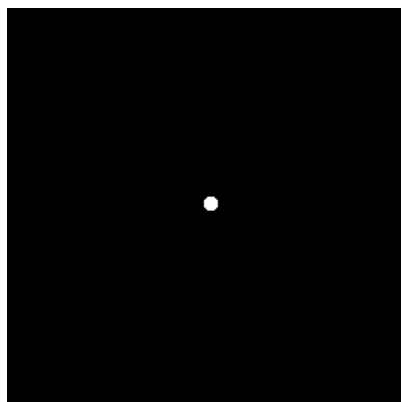
$$a = 6, b = 24$$



$$a = 6, b = 64$$



2次元フーリエ変換の計算例－円形1－



$$f(x, y) = \text{circ}\left(\frac{r}{d}\right) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

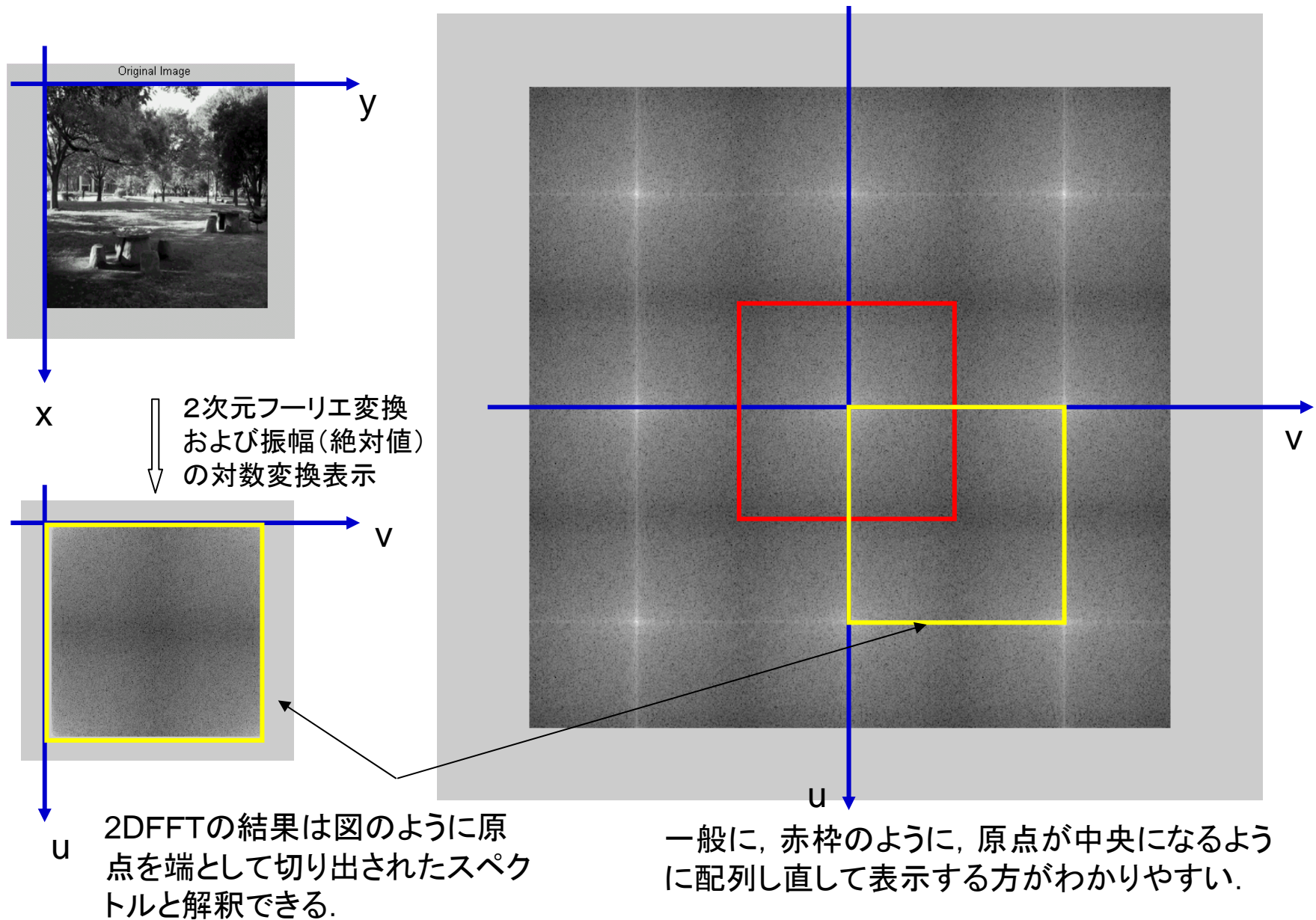
$$F(u, v) = \pi d^2 \frac{J_1(\pi d \rho)}{\pi d \rho}, \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$

2次元フーリエ変換

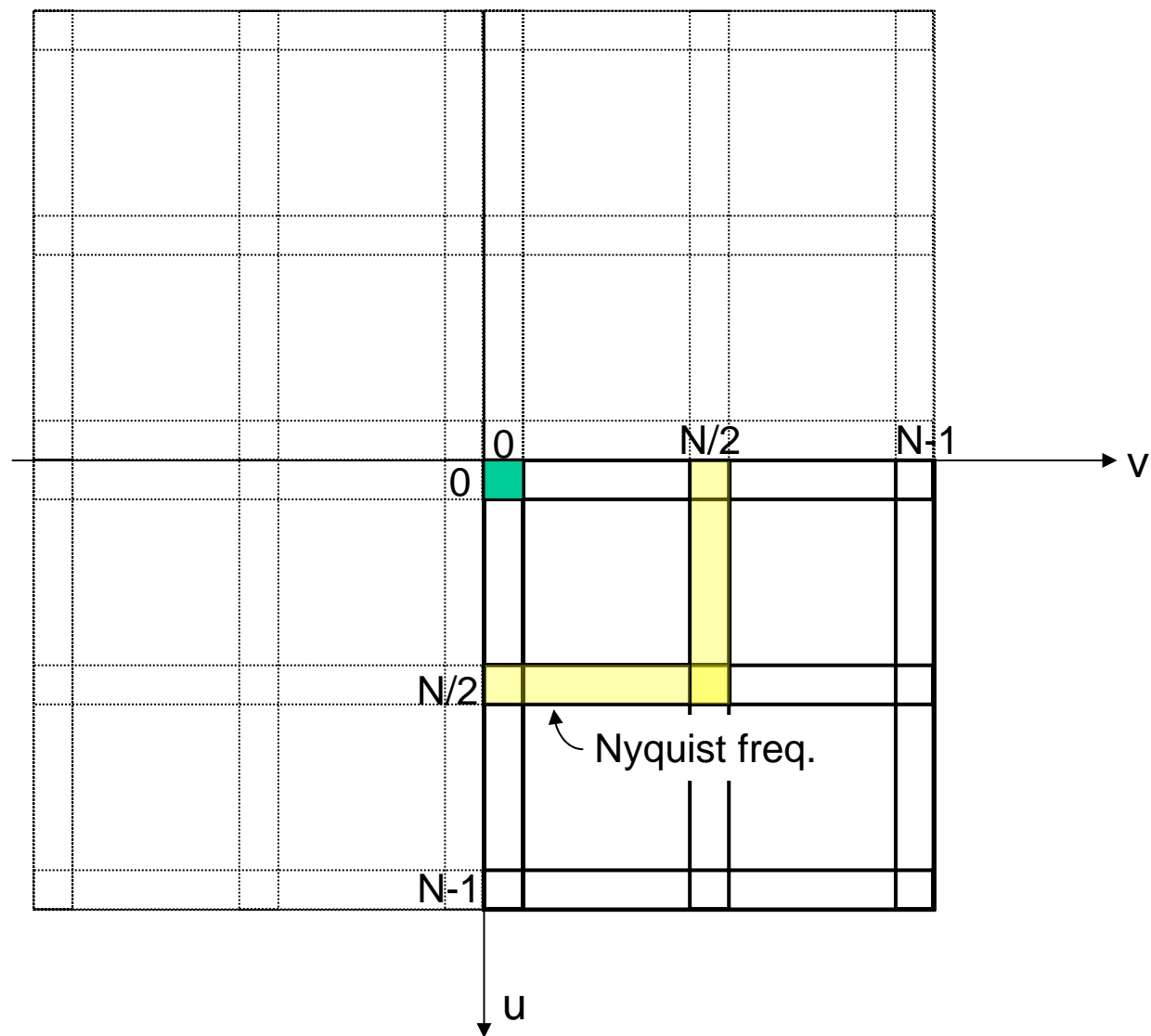
講義内容

- 空間周波数の概念
- 2次元フーリエ変換
- 代表的な2次元フーリエ変換対
- 2次元離散フーリエ変換

2次元離散フーリエ変換



2次元離散フーリエ変換のデータの並び



境界部分での不連続によるスペクトル

