

# 4次元データの提示方法に関する研究

村田 誠

橋本 周司

早稲田大学理工学部応用物理学科橋本研究室

## 1. はじめに

われわれは、2次元上(例えば、紙面、ディスプレイ)に表示された3次元の物体からその3次元的な形状を推測することができる。同様に、4次元の物体を3次元上に表示することによって、4次元形状が推測できるのではないかと考えられる[1]。

4次元形状が推測できるようになると、3次元上には表わすことのできない高次元のデータ間の対応関係が捉えやすくなる。しかし、4次元空間での経験が無いわれわれにとって、3次元から4次元物体の構造はすぐにはわからない。3次元から4次元を想像するための訓練を行うシステムが必要になる。

これまで、CGを用い、4次元の光源によって4次元物体のレンダリングを行った表示[2],[3]が試みられているが、静止した画像から4次元の形状を把握するのは困難である。むしろ、4次元物体をインタラクティブに操作し表示された3次元形状の変化を感じた方が4次元を理解しやすいと思われる。

われわれは、4次元を直感的に把握することを目的に、投影と断面による表示とインタラクティブな操作を重視したCGを用いた4次元データの提示方法を検討している。

## 2. 4次元データの提示方法

本研究における4次元データの提示方法には、3次元の物体を2次元に表示するときに有効な投影および断面図による2つの方法を4次元から3次元の場合に拡張して用いる。扱う4次元空間は、4次元ユークリッド空間とする。X, Y, Z, W軸がそれぞれ直交しているとする。

### 2-1 投影による提示

3次元の物体を2次元の紙面やディスプレイ上に描画するように、4次元の物体を4次元空間内の視点から見える3次元のスクリーン上へ投影する。4次元データと4次元上の視点を入力して、3次元上のスクリーンに投影変換を行う。3次元空間への表示のために、Stereo Graphics社の液晶シャッター眼鏡を用いて時分割立体視を行っている。また、4次元空間内の回転、各軸方向への伸縮、拡大・縮小といった操作をインタラクティブに行うことができ、投影された3次元形状の変化が立体的に観察できる(図1)。

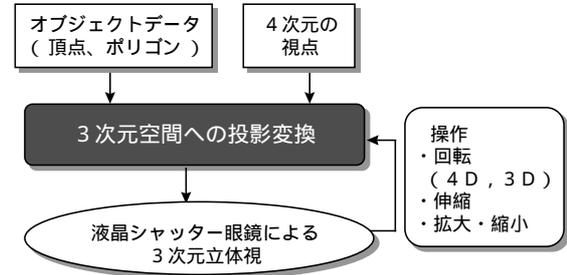


図1 投影変換システム概要

4次元から3次元への投影は、式(1)(2)により求められる。まず、4次元ワールド座標系から、視線方向をw軸にとった視点座標系へ変換する。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Ey/A & Ex/A & 0 & 0 \\ -ExEz/AB & -EyEz/AB & A/B & 0 \\ -ExEw/B & -EyEw/B & -EzEw/B & B \\ Ex & Ey & Ez & Ew \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \sqrt{Ex^2 + Ey^2} \quad B = \sqrt{1 - Ew^2}$$

ワールド座標系 (X, Y, Z, W)

視点座標系 (x, y, z, w)

視方向単位ベクトル (Ex, Ey, Ez, Ew)

これより、3次元空間に投影された座標(x', y', z')は、視点から視点座標系の原点までの距離をtとすると

$$x' = \frac{t}{t+w}x, \quad y' = \frac{t}{t+w}y, \quad z' = \frac{t}{t+w}z \quad (2)$$

と表される。

3次元の物体の形状を理解するとき様々な角度から眺めることが必要のように、4次元空間でも物体の形状を理解するために4次元上での回転が行えるようにした。4次元空間内においては、平面と平面が1点で直交することから、回転はある平面を軸にしてそれと直交する平面上で行われる。つまり、回転はXY平面、XZ平面、XW平面、YZ平面、YW平面、ZW平面上の6通りがある。XY平面上の回転は、式(3)で表される。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad (3)$$

また、軸の方向をわかりやすくするために、軸方向への伸縮が可能である。さらに、投影した3次元形状も任意に回転、拡大・縮小が実時間で可能である。

### 2-2 断面による提示

3次元の物体を2次元の平面で切るように、4次元の物体を3次元の空間で切っていく。4次元物体の頂点、辺、面のデータと物体を切る空間の方程式を入力とし、物体の辺と空間との連立方程式を解くことにより、交わりの3次元形状の頂点座標が求まる。次に、辺や面のデータにより、3次元形状を構成す

## Four Dimensional Data Display

Makoto Murata, Shuji Hashimoto

e-mail: {makoto, shuji}@shalab.phys.waseda.ac.jp

Hashimoto Lab. Dept. Applied Physics,

School of Science & Engineering, Waseda Univ.

3-4-1-55N-4-10A Okubo, Shinjuku, Tokyo 169-8555, Japan

Tel: 03-5286-3233, FAX: 03-3202-7523

る。3次元空間をある方向に沿ってずらしていくことにより、交わりの3次元形状の変化をアニメーションとして観察することができる。(図2)任意の方向の空間によって切っていけるため、物体のいろいろ方向による断面形状の変化の違いをつかむことが可能になる。

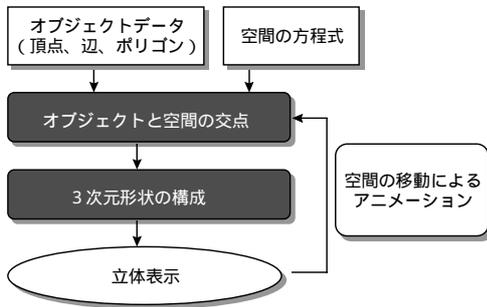


図2 断面表示システム概要

### 3. 4次元データの表示結果

投影および断面による方法を用いて、4次元データの提示を行った。4次元のデータは次の4通りに分けることができる。

- (a) 4変数が独立な場合
- (b) 3変数が1変数に依存する場合
- (c) 2変数が2変数に依存する場合
- (d) 1変数が3変数に依存する場合

(a)の例として、4次元の物体、(b)の例として、3次元空間内を時間によって移動する点の軌跡、(c)の例として、複素関数のグラフ、(d)の例として、3次元空間の温度分布のような3次元スカラー場などが考えられる。

投影による方法により、(a)の例として4次元立方体の回転を行った結果が図3である。4次元立方体は、頂点16、辺32、面24、3次元の立方体8個を構成要素にもち、各頂点にて4本の辺が直交した図形である。3次元の物体を回転させると、2次元上に出来る影の形が変化するように、4次元空間内で回転させると投影された3次元物体の形状が変化する。

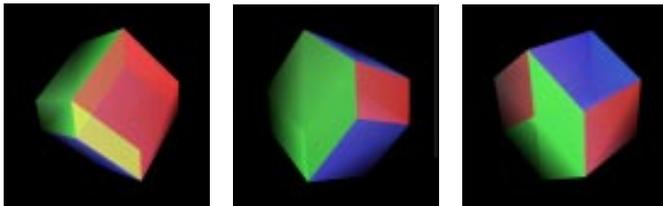


図3 4次元立方体の回転

また、4次元立方体をX軸方向に向かって伸ばすことにより、4次元空間の軸の方向が確認できる。(図4)



図4 4次元立方体のx軸方向への伸び

投影による(c)の例として、複素関数  $f(z) = z^2$ 、 $f(z) = z^3$ 、 $f(z) = 1/z$  および  $f(z) = e^z$  のグラフの表示を行った結果が図5である。 $Z = X + iY$ が複素関数  $f$  によって  $f(z) = U + iV$  に写像されるとして、 $(X, Y, U(x, y), V(x, y))$  を4変数にとり、3次元空間に投影した。この図は静止画であるが、インタラクティブに図形を回転させることによって、写像の構造が良く把握できる。例えば、 $f(z) = 1/z$  のグラフにおいては、原点に特異点を確認でき、 $f(z) = e^z$  のグラフにおいては、平面から円の中への写像であることが確認できた。

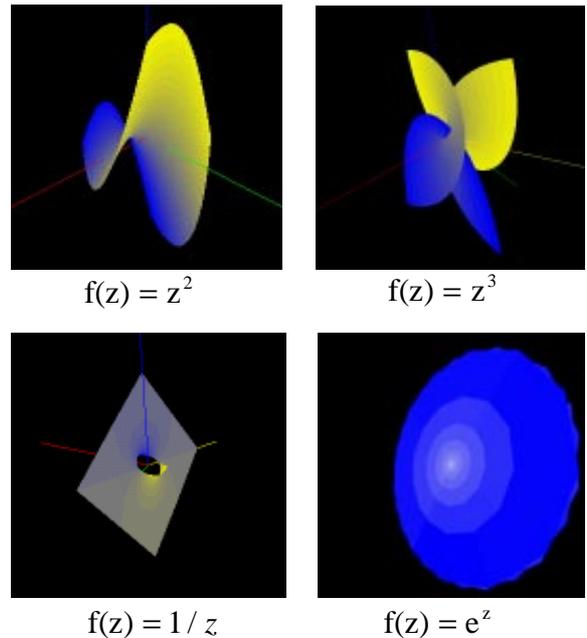


図5 複素関数のグラフ

### 4. まとめ

3次元から2次元への表示法を拡張し、対話的な4次元データの提示を行った。4次元構造の違いによって3次元形状に変化が生じるので、その情報を通して4次元を推測することができる。いかにその情報をわかりやすく提示するかが重要であるが、今回は投影と断面という方法を選択した。現在、いろいろな4次元データに対して、どの提示方法が適しているのかを評価実験を通じて検討中である。

### 参考文献

[1] 登 不二雄、橋本 周司 "4次元パターンの3次元表示に関する基礎研究" 電子情報通信学会 総合大会 D-601 pp.7-337 1994  
 [2] A.J.Hanson and P.A.Heng "Illuminating the Fourth Dimension" IEEE Computer Graphics & Applications pp.54-62 July 1992  
 [3] 池辺 亮志、斎藤 豊文、鳥脇 純一郎 "4次元空間の図形・情報の可視化手法についての一考察" 電子情報通信学会 総合大会 D-12-114 pp.313 1998