〈第4章〉

画像再構成の基礎

4

〔第1節〕　画像の基本統計量

基本統計量には，以下のようなものがあり，画像の評価などにもよく使われる．

(1) 最大値と最小値（maximum and minimum）

データのなかで最も大きな値と小さな値のこと．

(2) 平均値（average）

すべてのデータの値の和をデータの個数で割った値のこと．正確には算術平均と呼ばれる．画素の総数をn，i番目の画素の値をx_iとしたとき，平均値を数式で表すと

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{4-1}$$

のようになる．

(3) 平均偏差（average deviation）

平均偏差は，平均値から各値の差分（偏差）の絶対値を平均することで求められる．数式で表すと

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|}{n} \tag{4-2}$$

のようになる．

(4) 偏差平方和（square deviation）

偏差平方和は，すべての偏差を2乗して加えることによって求められる．数式で表すと

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{4-3}$$

のようになる．

(5) 分散(deviation)

分散には，母集団全体に基づく分散と，母集団の部分集合である標本に基づいて予測した分散がある．母集団全体に基づく分散は，

$$V = \frac{S}{n} \tag{4-4}$$

のように表される．また，標本に基づき予測した分散は，

$$V = \frac{S}{n-1} \tag{4-5}$$

のように表される．

(6) 標準偏差(standard deviation)

標準偏差にも分散と同様に，母集団全体に基づく標準偏差と，標本に基づく標準偏差の予測値とがある．母集団全体に基づく標準偏差は，

$$s = \sqrt{\frac{S}{n}} \tag{4-6}$$

のように表される．また，標本に基づき予測した標準偏差は，

$$s = \sqrt{\frac{S}{n-1}} \tag{4-7}$$

のように表される．また，2つの画像の差分画像における標準偏差をRMSE（root mean square error）として使用する場合もある．

(7) %RMSU(% root mean square uncertainty)

平均値に対して，標準偏差の値がどのくらいの割合になっているかを百分率で表したもの．式で表すと，

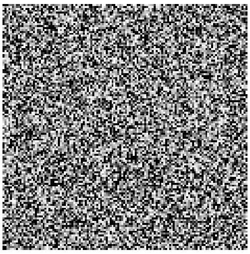
$$\%\mathrm{RMSU} = 100 \times \frac{s}{\bar{x}} \tag{4-8}$$

のように表される．また，2つの画像の差分画像における%RMSUを%RMSE（% root mean square error）として使用する場合もある．

以上の統計量を，入力した画像から計算するプログラムをプログラム4-1に示す．乱数画像に対して，このプログラム4-1を使って統計量を出した結果を**図4-1**に示す．

〔第2節〕　半値幅と1/10幅

半値幅（FWHM：full width at half maximum）は，2つの点（線）線源を識別できる最小の線源間距離を意味する．これは**図4-2**に示すように，線線源を撮影したとき実際には1方向に広がりを持ったものとなるが，半値幅は値の最大値を持つところから半分の値の幅がどのくらいになっているかを示している．また，1/10幅（FWTM：full width at tenth maximum）は，最大の値を持つところから



乱数画像

number of pixels	= 16384
total counts	= 8156.942871
maximum	= 0.999889
minimum	= 0.000009
average	= 0.497860
average deviation	= 4086.568604
square deviation	= 1360.120728
deviation	= 0.083015
standard deviation	= 0.288124
%RMSU	= 57.872371

図4-1　乱数画像とその統計量

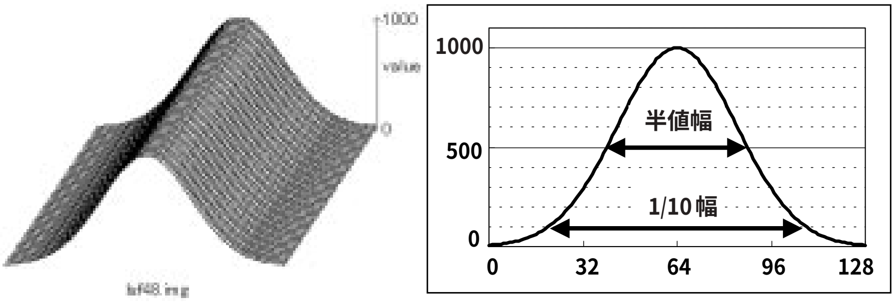


図4-2　線広がり関数の鳥瞰図とそのプロファイル

最大値の半分の値の幅が半値幅（FWHM）で10分の1の
値の幅が1/10幅（FWTM）である．

1/10になるところの幅がどのくらいになっているかを示している．

点線源の場合は，ある方向に積分をとり，1次元の分布に変換してからその半値幅や1/10幅を求める．2次元のガウス関数は半値幅をwとすると

$$f(x,y) = a\exp[-\frac{2.7725887\cdot\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}}{w^2}] \tag{4-9}$$

で表されるが，この分布をy方向に積分し，1次元の分布にすると，

$$f_y(x) = a\sqrt{\frac{\pi w^2}{2.7725887}}\exp[-\frac{2.7725887\cdot(x-x_0)^2}{w^2}] \tag{4-10}$$

となる．ガウス関数の場合は，1方向に積分しても半値幅は変わらない．

線線源の1次元の値をテキストデータで入力して，その半値幅と1/10幅を求めるプログラムをプログラム4-2に示す．また，点線源の2次元画像を入力して求める範囲を指定し，その範囲でx方向，およびy方向に積分をとり，半値幅と1/10幅を求めるプログラムをプログラム4-3に示す．

〔第3節〕　線広がり関数

線広がり関数（LSF：line spread function）は，線線源を置いて検出器で検出したときの計測データに相当する．この線広がり関数は，1次元のガウス関数で近似することができる．1次元のガウス関数は，半値幅をwとすると，

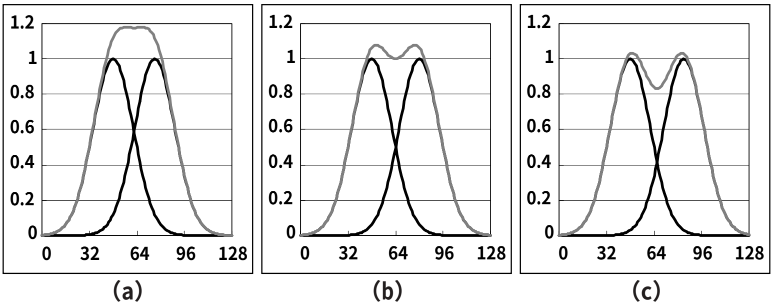


図4-3　2つの線線源と半値幅の関係

（a）線源間が半値幅より狭い．（b）線源間が半値幅に等しい．（c）線源間が半値幅より広い．2つの線広がり関数の合計（灰色の線）を見ると，半値幅より離れれば2つの線源を分解できることがわかる．

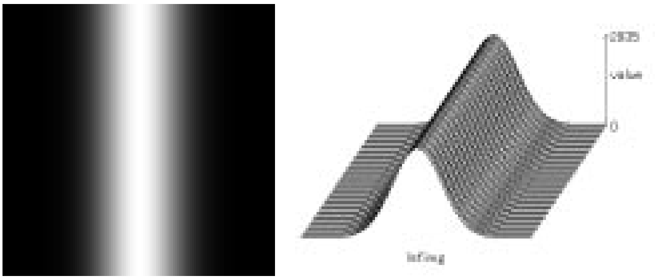


図4-4　線広がり関数の画像とその鳥瞰図

128×128マトリクスの画像で半値幅を32画素にしている．

$$f(x) = a\exp[-\frac{2.7725887\cdot(x-x_0)^2}{w^2}] \tag{4-11}$$

となる．ここで，振幅aの値は面積が1の規格化ガウス関数にするため，

$$a = \sqrt{\frac{2.7725887}{\pi w^2}} \tag{4-12}$$

とする．

2つの線線源が半値幅を境に，狭い距離や半値幅と等しい距離にあるとき，さらに半値幅より広い距離にあるときの線広がり関数のプロファイル曲線の様子を**図4-3**に示す．この図では，半値幅がわかりやすいように振幅を1にしている．2つの線線源幅が半値幅より大きい場合は，2つの線線源を識別することができる．よって，半値幅は検出器の分解能に相当する．

線広がり関数の画像を作成するプログラムをプログラム4-4に示す．線線源はy方向に置かれていると仮定している．そのプログラム4-4を用いて作成した線広がり関数の画像を**図4-4**に示す．**図4-4**の画像は128×128マトリクスで，半値幅を32画素にしている．また，2つの線線源を半値幅だけ離して作成し，両方の和をとった画像を**図4-5**に示す．半値幅だけ離れているので2つの線線源は識別することができる．

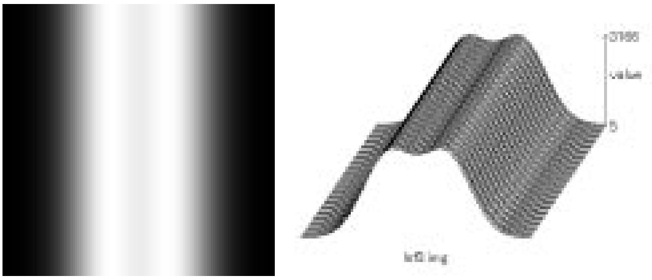


図4-5　2つの線広がり関数の画像とその鳥瞰図
線線源は半値幅である32画素だけ離れている．

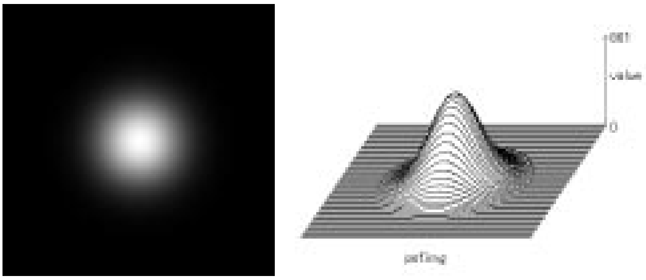


図4-6　点広がり関数の画像とその鳥瞰図
128×128マトリクスの画像で半値幅を32画素にしている．

〔第4節〕　点広がり関数

点広がり関数（PSF：point spread function）は，点線源を置いて検出器で検出したときの計測データに相当する．この点広がり関数は，2次元のガウス関数で近似することができる．半値幅をwとしたときの2次元のガウス関数は，（4-9）式で表されるが，線広がり関数と同様に積分値を1に規格化するため，ガウス関数の振幅aを

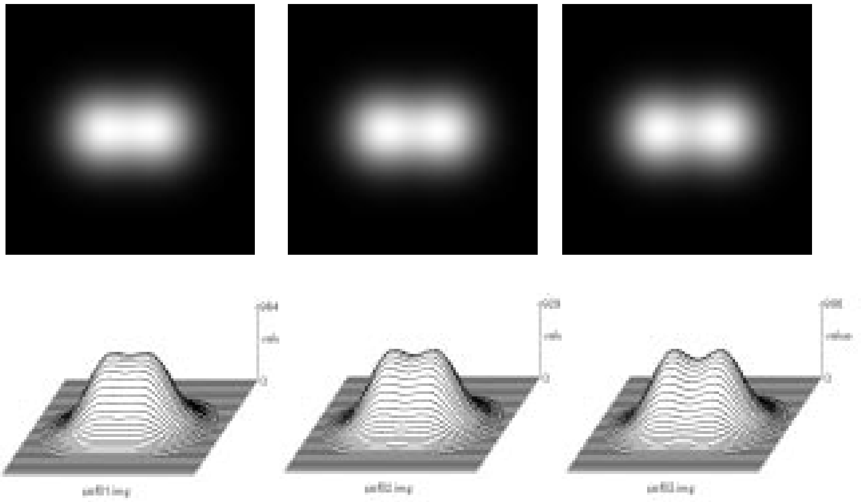
$$a = \frac{2.7725887}{\pi w^2} \tag{4-13}$$

とする．よって，2次元の規格化ガウス関数は，

$$f(x,y) = \frac{2.7725887}{\pi w^2} \cdot \exp[-\frac{2.7725887 \cdot \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\}}{w^2}] \tag{4-14}$$

となる．

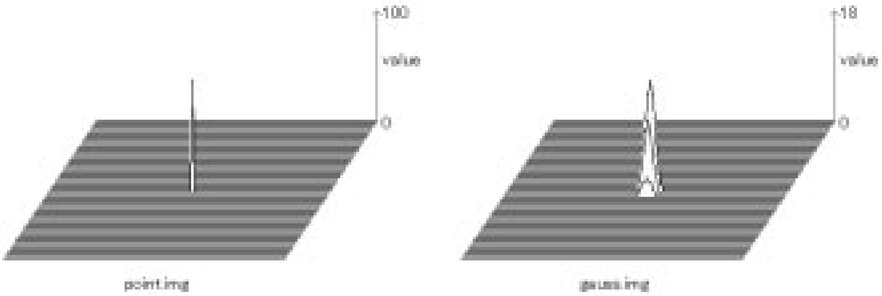
この点広がり関数を用いると，2つの点の識別と点線源間距離の関係をシミュレーションで確かめることができる．点広がり関数の画像である2次元の規格化ガウス関数画像を作成するプログラムを，プログラム4-5に示す．このプログラム4-5を用いて作成した128×128マトリクスの画像で，半値幅32の点広がり関数の画像を**図4-6**に示す．また，半値幅が32画素の2つの点広がり関数を，30画素，32画素（半値幅と同値），34画素x方向に離した場合の画像を**図4-7**に示す．半値幅だけ離れると2つの点線源が識別できる．



(a)　　　(b)　　　(c)

図4-7　2つの点広がり関数とその鳥瞰図

2つの点広がり関数の半値幅は32画素である．(a) 線源間が30画素で半値幅より狭い．(b) 線源間が32画素で半値幅に等しい．(c) 線源間が34画素で半値幅より広い．半値幅より離れれば，2つの線源を分解できる．



小さな点　　　ピンぼけの点

図4-8　小さな点とそのピンぼけの鳥瞰図

〔第5節〕　畳み込み演算

畳み込み演算は重畳積分（コンボリューション）とも呼ばれ，2次元画像では写真のピンぼけに対応する演算になる．小さな点をピンぼけで撮った場合，その点は周りに広がる．鳥瞰図で表すと**図4-8**のようになる．小さな点がピンぼけなどで広がったものを点広がり関数という．通常の写真の場合，写真がたくさんの点の集合と考えると，ピンぼけではそれぞれの点が同じように広がる．この様子を**図4-9**に示す．これを式で表すと，

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x',y')h(x-x',y-y')dx'dy' \tag{4-15}$$

となる．ここで，$f(x, y)$ はもとの画像に対応し，$h(x, y)$ は点広がり関数，$g(x, y)$ はピンぼけの画像に対応する．この重畳積分の式を1次元で説明する．1次元の重畳積分の式は，

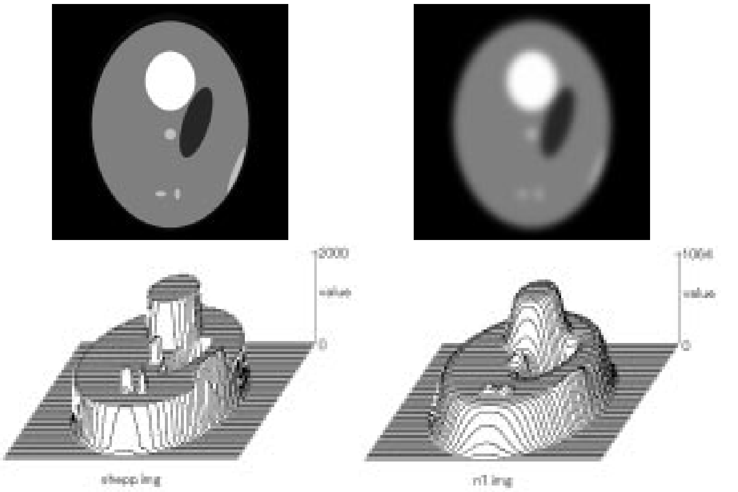


図4-9　ピンぼけの画像と鳥瞰図

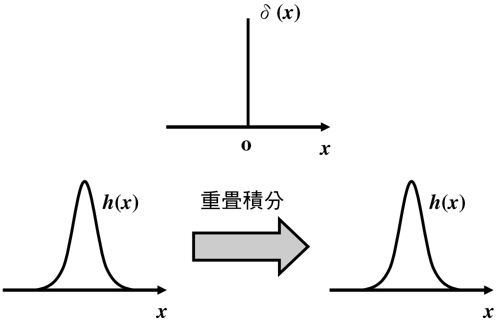


図4-10　1次元のデルタ関数とその応答

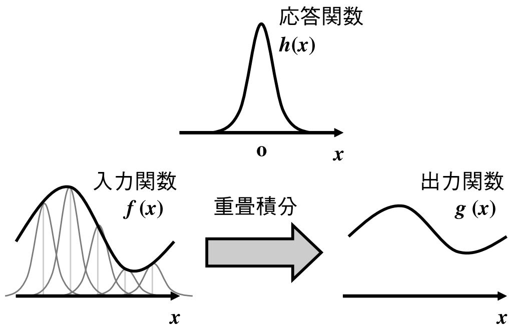


図4-11　入力関数と応答関数の重畳積分

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,h(x - x')\,dx' \qquad (4\text{-}16)$$

となる．もとの関数$f(x)$が，**図4-10**に示すようにデルタ関数$\delta(x)$の場合，重畳積分の結果の応答は，$h(x)$と等しくなる．式で表すと，

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')\,h(x - x')\,dx' \qquad (4\text{-}17)$$

となる．デルタ関数はインパルスとも呼ばれるので，その応答である$h(x)$はインパルス応答（impulse response）と呼ばれる．通常の関数を重畳積分する場合，**図4-11**に示すように関数をインパルスの集まりとして，それぞれのインパルスがインパルス応答となり，それを足し合わせることで$g(x)$が計算される．

1次元のデータとインパルス応答に対応する数値データを入力して，重畳積分するプログラムをプログラム4-6に示す．このプログラム4-6を用いて，計算した結果をグラフにして**図4-12**に示す．**図4-12**で示した入力の$f(x)$と$h(x)$，出力の$g(x)$のデータはテキストファイルで行い，Excelに複写してグ

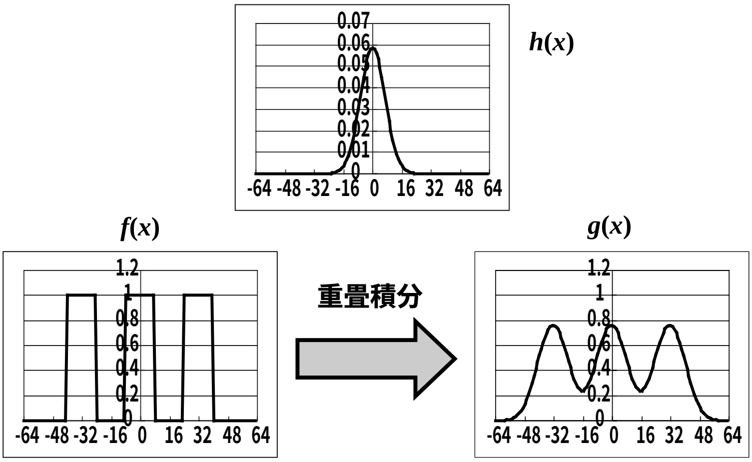


図4-12　1次元の数値データを用いた重畳積分の結果

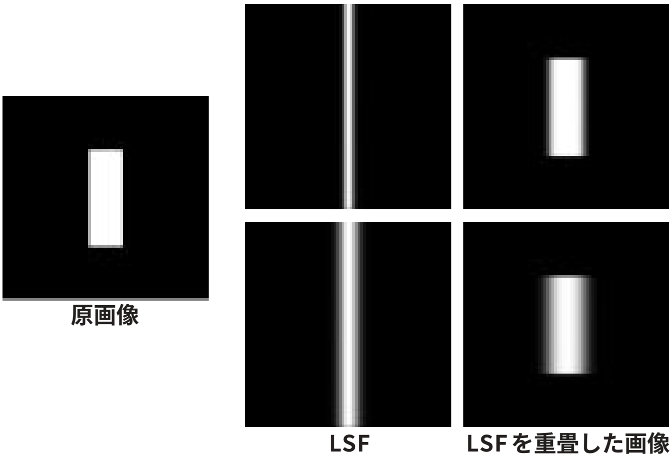


図4-13　矩形画像とLSFの1次元重畳積分

上段が半値幅5画素のLSFで，下段が半値幅10画素のLSFである．

ラフにしている．

2次元画像で1次元の線広がり関数をもとに，1方向（x方向）に重畳積分するプログラムをプログラム4-7に示す．このプログラム4-7を用いて，矩形，Sheppファントム，MRIの画像に対して半値幅5画素と10画素のLSF画像を重畳積分した結果をそれぞれ**図4-13～図4-15**に示す．LSFによって重畳積分した画像は横方向にぼけている．

また，2次元の画像データと点広がり関数に対応する画像データを入力して，2次元の重畳積分をするプログラムをプログラム4-8に示す．このプログラム4-8を用いて矩形画像に対して半値幅5画素と10画素のPSF画像を2次元重畳積分した結果を**図4-16**に示す．2次元ガウス関数で作成した点広がり関数を重畳積分すると全方向にぼける．また，さまざまな画像に対して半値幅5画素のPSFを重畳積分した画像を，**図4-17**に示す．

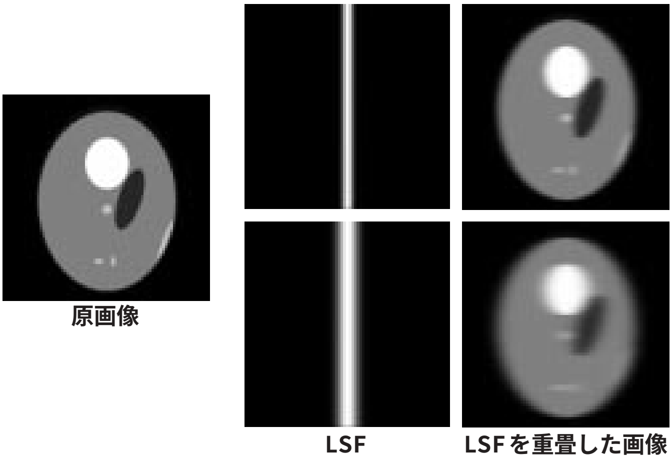


図4-14　Sheppファントム画像とLSFの1次元重畳積分

上段が半値幅5画素のLSFで，下段が半値幅10画素のLSFである．

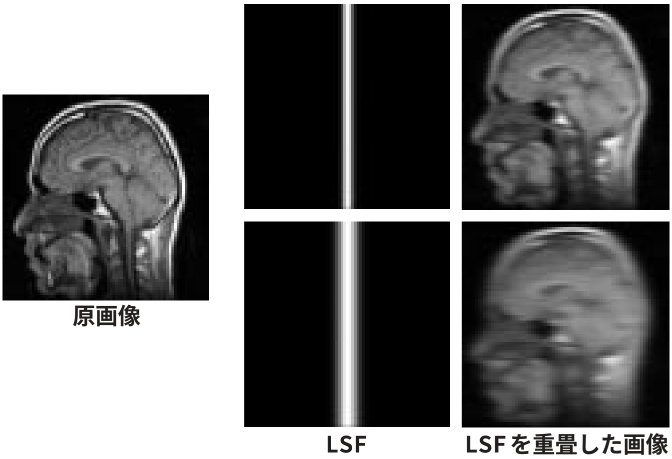


図4-15　MRI画像とLSFの1次元重畳積分

上段が半値幅5画素のLSFで，下段が半値幅10画素のLSFである．

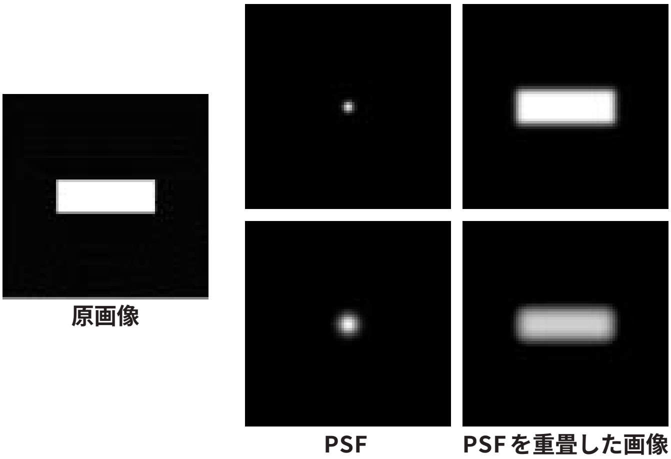


図4-16　矩形画像とPSFの2次元重畳積分

上段が半値幅5画素のPSFで，下段が半値幅10画素のPSFである．

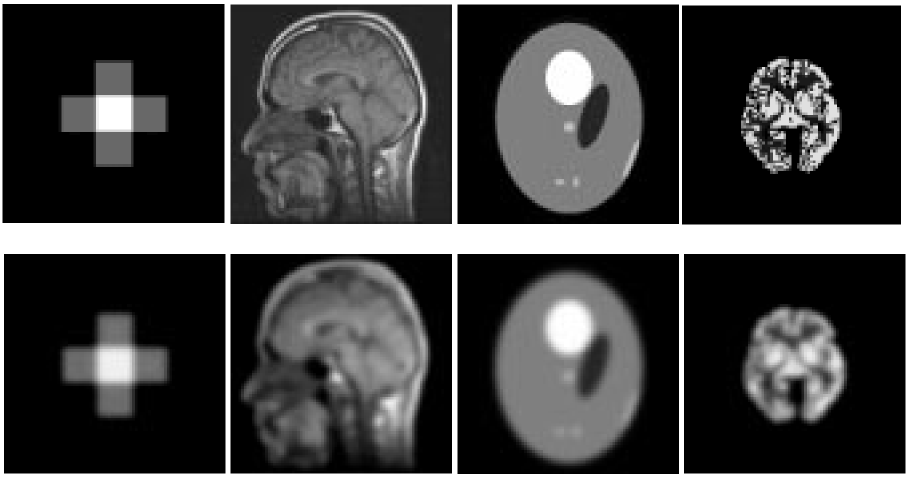
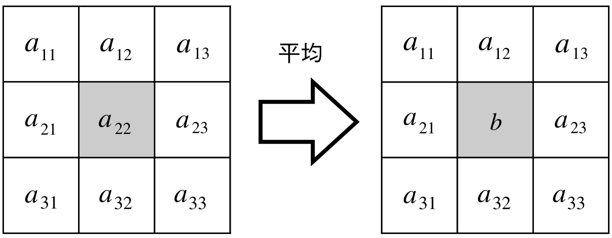


図4-17　半値幅5画素のPSFを2次元重畳積分した画像
上段が原画像で，下段がそれぞれの画像に半値幅5画素のPSFを
重畳積分した画像である．



$$b=\frac{1}{9}(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{31}+a_{32}+a_{33})$$

図4-18　注目点を含めて9点の平均をとる式

〔第6節〕　空間フィルタ処理

実空間でフィルタ処理する場合について考える．単純にノイズを軽減させることを考えると，データの平均をとればよいことに気づく．画像でそれを行う最も簡単な方法は，各点の近接8点を用いて平均をとる方法である．**図4-18**に示すように，注目点を含めて9点の平均になり，式で表すと

$$b=\frac{1}{9}(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{31}+a_{32}+a_{33}) \tag{4-18}$$

となる．これは平滑化フィルタと呼ばれる空間フィルタの1つである．

9点平均の平滑化フィルタの計算するプログラムをプログラム4-9に示す．また，実際に実行した例を**図4-19**に示す．左側の画像が全カウント数で10^6の統計ノイズを含めた画像で，それに9点平均の平滑化フィルタで処理したものが右側の画像になる．画像がぼけて，ノイズが軽減している．この計算は，数学的には画像とフィルタ関数の重畳積分の形で表すことができる．その式は

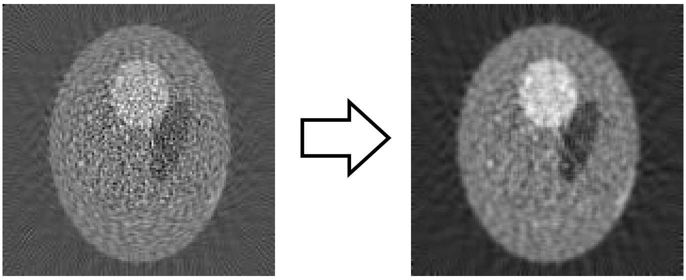
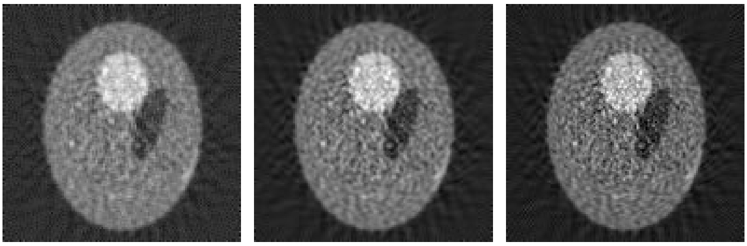


図4-19　9点平均の平滑化フィルタの実行



$$h(j,i)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad h(j,i)=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&4&1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad h(j,i)=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&8&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

図4-20　重畳積分するフィルタ関数の係数によって
平滑化の度合いを変えた画像

フィルタ関数の中心の値を大きくすると，平滑化の度合いが緩くなるため
下段の画像のほうが上段に比べてぼけが少なく，ノイズも残っている．

$$g(m,k)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}f(m-j,k-i)h(j,i) \tag{4-19}$$

となる．9点平均の場合，フィルタ関数$h(j,\ i)$は，

$$h(j,i)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \tag{4-20}$$

となる．重畳積分するフィルタ関数の係数によって，平滑化の度合いを変えることができる．フィルタ関数の中心の値を大きくすると，平滑化の度合いは緩くなる．フィルタ関数を入力して，フィルタ処理を行うプログラムをプログラム4-10に示す．それを実行したものを**図4-20**に示す．画像の下に示した係数を用いて計算した画像結果を示している．原画像は，**図4-19**と同じ画像を使っている．右側の画像のほうが平滑化の度合いが小さいため左側に比べてぼけが少なく，ノイズも残っている．

逆に画像を鮮明にするフィルタを尖鋭化フィルタと呼んでいる．このフィルタ関数は，周りの値がマイナスをとる．例えば，