

コンピュータサイエンス基礎 ラムダ計算第4回目資料

勝股 審也

2013年6月13日

1 ラムダ項による数学的対象の表現

ラムダ項で種々の数学的対象を表現することができる。

1.1 真偽値

定義 1.1 次のラムダ項を定義する。

$$\mathbf{T} = \lambda xy.x (= \mathbf{K}), \quad \mathbf{F} = \lambda xy.y,$$

また、if L then M else N を $L M N$ というラムダ項の略記とする。

\mathbf{T}, \mathbf{F} はそれぞれ真、偽を表現するラムダ項であり、if M then L else N は M が \mathbf{T} に β 簡約されたならば L を、 \mathbf{F} に簡約されたならば N を返すラムダ項である。プログラミング言語の C や Java で言えば丁度 $e_1 ? e_2 : e_3$ という式に相当する。

補題 1.2 次が成立する。

$$\text{if } \mathbf{T} \text{ then } M \text{ else } N \rightarrow_{\beta}^* M, \quad \text{if } \mathbf{F} \text{ then } M \text{ else } N \rightarrow_{\beta}^* N$$

問題 1.3 以下を満たすラムダ項を与えよ。

1. \mathbf{T} と \mathbf{F} に対して否定として振る舞うラムダ項 **Not**:

$$\mathbf{Not} \mathbf{T} \rightarrow_{\beta}^* \mathbf{F}, \quad \mathbf{Not} \mathbf{F} \rightarrow_{\beta}^* \mathbf{T}$$

2. \mathbf{T} と \mathbf{F} に対して論理積として振る舞うラムダ項 **And**:

$$\begin{aligned} \mathbf{And} \mathbf{T} \mathbf{T} &\rightarrow_{\beta}^* \mathbf{T} & \mathbf{And} \mathbf{F} \mathbf{T} &\rightarrow_{\beta}^* \mathbf{F} \\ \mathbf{And} \mathbf{T} \mathbf{F} &\rightarrow_{\beta}^* \mathbf{F} & \mathbf{And} \mathbf{F} \mathbf{F} &\rightarrow_{\beta}^* \mathbf{F} \end{aligned}$$

3. \mathbf{T} と \mathbf{F} に対して論理和として振る舞うラムダ項 **Or**:

$$\begin{aligned} \mathbf{Or} \mathbf{T} \mathbf{T} &\rightarrow_{\beta}^* \mathbf{T} & \mathbf{Or} \mathbf{F} \mathbf{T} &\rightarrow_{\beta}^* \mathbf{T} \\ \mathbf{Or} \mathbf{T} \mathbf{F} &\rightarrow_{\beta}^* \mathbf{T} & \mathbf{Or} \mathbf{F} \mathbf{F} &\rightarrow_{\beta}^* \mathbf{F} \end{aligned}$$

1.2 組

定義 1.4 2つのラムダ項 M, N に対し $\langle M, N \rangle$ を $\lambda x.x M N$ ($x \notin FV(M, N)$) というラムダ項の略記とする。また、ラムダ項 $\mathbf{Fst}, \mathbf{Snd}$ を以下で定義する。

$$\mathbf{Fst} = \lambda x.x \mathbf{T}, \quad \mathbf{Snd} = \lambda x.x \mathbf{F}$$

これらは組と射影のラムダ項による表現を与える。

補題 1.5 以下が成立する。

$$\mathbf{Fst} \langle M, N \rangle = (\lambda x.x \mathbf{T}) (\lambda x.x M N) \rightarrow_{\beta}^* M$$

$$\mathbf{Snd} \langle M, N \rangle = (\lambda x.x \mathbf{F}) (\lambda x.x M N) \rightarrow_{\beta}^* N$$

一般に n 個のラムダ項 M_1, \dots, M_n の組を $\lambda x.x M_1 \dots M_n$ ($x \notin FV(M_i)$) と定義し、 $\langle M_1, \dots, M_n \rangle$ と書くことにする。

問題 1.6 n 個の組から第 i 成分 ($1 \leq i \leq n$) を取り出すラムダ項 \mathbf{Proj}_i^n を定義せよ。つまり

$$\mathbf{Proj}_i^n \langle M_1, \dots, M_n \rangle \rightarrow_{\beta}^* M_i$$

を満たす \mathbf{Proj}_i^n を定義せよ。

1.3 自然数

定義 1.7 自然数 n に対しラムダ項 $[n]$ を再帰的に定義する。

1. $[0] = \mathbf{I}$
2. $[n+1] = \langle \mathbf{F}, [n] \rangle$

補題 1.8 以下を満たすラムダ項 $\mathbf{Succ}, \mathbf{Pred}, \mathbf{Zero}?$ が存在する。

$$\mathbf{Succ} [n] \rightarrow_{\beta}^* [n+1], \quad \mathbf{Pred} [n+1] \rightarrow_{\beta}^* [n], \quad \mathbf{Zero}? [0] \rightarrow_{\beta}^* \mathbf{T}, \quad \mathbf{Zero}? [n+1] \rightarrow_{\beta}^* \mathbf{F}$$

証明 以下の通りにすればよい。

$$\mathbf{Succ} = \lambda x.\langle \mathbf{F}, x \rangle, \quad \mathbf{Pred} = \mathbf{Snd}, \quad \mathbf{Zero}? = \mathbf{Fst}$$

組を使った自然数の表現の他、以下の直接的な自然数の表現も存在する。

定義 1.9 (チャーチ数) 自然数 n に対してラムダ項 \mathbf{c}_n を以下で定義する。

$$\mathbf{c}_n = \lambda sz.s \overbrace{(\dots (s z) \dots)}^n$$

補題 1.10 以下を満たすラムダ項 $\mathbf{Succ}', \mathbf{Zero}'?$ が存在する。

$$\mathbf{Succ}' \mathbf{c}_n \rightarrow_{\beta}^* \mathbf{c}_{n+1}, \quad \mathbf{Zero}'? \mathbf{c}_{n+1} \rightarrow_{\beta}^* \mathbf{F}, \quad \mathbf{Zero}'? \mathbf{c}_0 \rightarrow_{\beta}^* \mathbf{T},$$

証明 以下の通りにすればよい。

$$\mathbf{Succ}' = \lambda nsz.s (n s z), \quad \mathbf{Zero}'? = \lambda n.n (\lambda x.\mathbf{F}) \mathbf{T}$$

問題 1.11 ラムダ項 Add' , Mul' , Exp' を以下で定義する。

$$\text{Add}' = \lambda nm.m \text{ Succ}' n, \quad \text{Mul}' = \lambda nm.m (\text{Add}' n) c_0, \quad \text{Exp}' = \lambda nm.m (\text{Mul}' n) c_1$$

これらが以下を満たすことを示せ。

$$\text{Add}' c_n c_m \rightarrow_{\beta}^* c_{n+m}, \quad \text{Mul}' c_n c_m \rightarrow_{\beta}^* c_{n \times m}, \quad \text{Exp}' c_n c_m \rightarrow_{\beta}^* c_{n^m}$$

問題 1.12 以下を満たすラムダ項 Pred' を定義せよ。

$$\text{Pred}' c_0 \rightarrow_{\beta}^* c_0, \quad \text{Pred}' c_{n+1} \rightarrow_{\beta}^* c_n$$

(ヒント: 自然数上の関数 $f \in \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$ を $f(n, m) = (n+1, n)$ と定義して $f(\overbrace{\cdots}^k f(0, 0))$ を計算すると、結果の第二成分はどうなるか?)

以下では自然数を定義 1.7 に従って表現する。

定義 1.13 自然数上の全域関数 $f \in \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ とラムダ項 F に対して以下が成立する時、 F は f をラムダ定義すると言う。

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}. F [x_1] \cdots [x_n] \rightarrow_{\beta}^* [f(x_1, \dots, x_n)]. \quad (1)$$

また、自然数上の全域関数 $f \in \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ に対しあるラムダ項 F が存在して F が f をラムダ定義する時、 f はラムダ定義可能であると言う。

補題 1.8 から、 $f(x) = x + 1$ という関数はラムダ定義可能である。また以下の関数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

は、 $\lambda x. \text{if Zero? } x \text{ then } [0] \text{ else Pred } x$ によりラムダ定義される。

これらの単純な関数の他、どのような関数がラムダ定義可能なのであろうか? 次の節で、ラムダ計算の持つ「任意のラムダ項の不動点を計算できる」という不思議な性質を用いて、再帰的に定義された自然数上の関数をラムダ定義する方法を紹介する。この方法を用いれば、足し算、掛け算、巾、といった基本的な演算や、アッカーマン関数のような、再帰的関数として定義するのは難しい関数を自然にラムダ定義することができる。さらに、3 節では任意の全域再帰的関数がラムダ定義可能であることを示す。

2 不動点コンビネータによる関数の再帰的定義

ラムダ計算の興味深い対象の一つに不動点コンビネータがある。一般に、関数 $f \in A \rightarrow A$ の不動点とは $f(x) = x$ を満たす元 x のことであった。

定義 2.1 以下のラムダ項 Θ を *Turing* の不動点コンビネータと呼ぶ。

$$\Theta = (\lambda x f. f (x x f)) (\lambda x f. f (x x f))$$

命題 2.2 任意のラムダ F 項に対し $\Theta F \rightarrow_{\beta}^* F (\Theta F)$ が成立する。

ラムダ項 $X = \Theta F$ を β 簡約すると $F X$ を得ることから、 X は F の不動点を与えていると考える事ができる。しかもこの不動点は Θ が F から作り出したものなので、 Θ は不動点コンビネータと呼ばれる。不動点コンビネータはラムダ計算の中で再帰的に定義された関数を表現するのに非常に有用である。以下ではその方法の一例を紹介する。

例 2.3 この例では $\text{add}_n(x) = x + n$ をラムダ定義するラムダ項 Add_n を与える。まず add_n は以下の再帰的な等式を満たすものとして定義できることに気づく。

$$\text{add}_n = \lambda x \in \mathbf{N} . \begin{cases} n & (x = 0) \\ 1 + \text{add}_n(x - 1) & (x > 0) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、ラムダ計算にならって $\lambda x \in \mathbf{N} . \dots$ という記法を関数を表現するために用いた。次に、以下の関数 b_n を考える。

$$b_n(f) = \lambda x \in \mathbf{N} . \begin{cases} n & (x = 0) \\ 1 + f(x - 1) & (x > 0) \end{cases}$$

これは add_n の再帰的定義 (2) の右辺の add_n の部分を f でパラメータ化することで得られる関数である (値域と定義域は何か?)。この b_n を使うと、再帰的な等式 (2) は単に

$$\text{add}_n = b_n(\text{add}_n)$$

という式になる。このことから、 add_n を再帰的な等式 (2) を満たすものとして定義することと、 add_n を b_n の不動点として定義することは同値であることがわかる。

さて、ラムダ計算ではラムダ項 F で表現されたラムダ項上の関数の不動点を ΘF によって与える事ができるのであった。このことから、 b_n をラムダ項 \mathbf{B}_n で表現し、 Add_n を \mathbf{B}_n の不動点、つまり $\text{Add}_n = \Theta \mathbf{B}_n$ とすれば良いのではないかと考える。

関数 b_n に対応したラムダ項 \mathbf{B}_n を考えると、以下になる。

$$\mathbf{B}_n = \lambda f x . \text{if Zero? } x \text{ then } [n] \text{ else Succ } (f (\text{Pred } x))$$

これを用いて、 Add_n を以下で定義しよう。

$$\text{Add}_n = \Theta \mathbf{B}_n = \Theta (\lambda f x . \text{if Zero? } x \text{ then } [n] \text{ else Succ } (f (\text{Pred } x)))$$

さらに定数 $[n]$ をパラメータ化することで、2つの自然数の和を計算する関数 $\text{add}(n, y) = y + n$ をラムダ定義するラムダ項 Add を得る。

$$\text{Add} = \lambda n . \Theta (\lambda f x . \text{if Zero? } x \text{ then } n \text{ else Succ } (f (\text{Pred } x)))$$

命題 2.4 ラムダ項 Add_n, Add は add_n, add をラムダ定義している。

問題 2.5 上の議論を真似て、2つの自然数の積を計算する関数 $\text{mul}(x, y) = x \times y$ をラムダ定義するラムダ項を与えよ。

問題 2.6 アッカーマン関数とは以下の再帰的な等式を満たす関数として定義される関数 $a \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ であった。

$$a(x, y) = \text{if } x = 0 \text{ then } y - 1 \text{ else (if } y = 0 \text{ then } a(x - 1, 1) \text{ else } a(x - 1, a(x, y - 1)))$$

1. アッカーマン関数 a に対して、 $a = A(a)$ を満たす関数 A を定義せよ。

2. A に対応するラムダ項 \mathbf{A} を作成せよ。
3. $\Theta \mathbf{A}$ が a をラムダ定義している事を示せ。

例 2.7 任意のラムダ項 M に対して以下を満たすラムダ項 \mathbf{K}^∞ はあるだろうか?

$$\mathbf{K}^\infty M \rightarrow_\beta^* \mathbf{K}^\infty$$

このラムダ項 \mathbf{K}^∞ は一つラムダ項を受けとった後、その結果を捨てて直ちに自分自身を返すものと考えられるので、 \mathbf{K}^∞ が以下を満たせば、上の β 簡約を得ることができる。

$$\mathbf{K}^\infty \rightarrow_\beta^* \lambda x. \mathbf{K}^\infty$$

さらに、 \mathbf{K}^∞ をくくり出し、以下が成立すれば十分であることが分かる。

$$\mathbf{K}^\infty \rightarrow_\beta^* (\lambda k x. k) \mathbf{K}^\infty$$

これから、 $\mathbf{K}^\infty = \Theta \mathbf{K}$ とすれば良い。

3 再帰的関数のラムダ定義可能性

前節では再帰的に定義された自然数上の関数を不動点コンビネータ Θ を用いてラムダ定義する方法を見た。この方法を用いればアッカーマン関数も簡単にラムダ定義できてしまう。それではどのぐらいの関数をラムダ定義できるのだろうか? この問に対する答えの一つとして、この節では再帰的関数は全てラムダ定義できることを示す。

再帰的関数の定義を簡単におさらいしよう。まず以下の4つの規則を考える:

1. ゼロ関数、射影関数、後続者関数は再帰的関数である。
2. 再帰的関数 $f \in \mathbf{N}^m \rightarrow \mathbf{N}, g_1, \dots, g_m \in \mathbf{N}^n \rightarrow \mathbf{N}$ の合成関数

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

は再帰的関数である。

3. 再帰的関数 $\phi \in \mathbf{N}^n \rightarrow \mathbf{N}, \psi \in \mathbf{N}^{n+2} \rightarrow \mathbf{N}$ から原始再帰法により得られる関数 $f \in \mathbf{N}^{n+1} \rightarrow \mathbf{N}$ は再帰的関数である。

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, 0) &= \phi(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, k+1) &= \psi(\vec{x}, k, f(\vec{x}, k)) \end{aligned}$$

4. $\phi \in \mathbf{N}^{n+1} \rightarrow \mathbf{N}$ が再帰的関数であり、さらに

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbf{N}^n. \exists y \in \mathbf{N}. \phi(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

が成立するとき、最小解関数 $\mu(\phi) \in \mathbf{N}^n \rightarrow \mathbf{N}$ は再帰的関数である。

これらのみを有限回用いて「再帰的関数である」と結論された関数こそが再帰的関数であった。

定理 3.1 任意の n 引数再帰的関数はラムダ定義可能である。

証明 ベクトル記法 \vec{x} は適切な長さの変数の列 x_1, \dots, x_n の略記とする (コンマは文脈に応じて無視せよ)。

f は規則 1-4 のみを有限回用いて構成されたと仮定してよい。従って f の構成手順に関する帰納法で証明する。

1. f がゼロ関数、射影関数、後続者関数の場合。練習問題とする。
2. f が再帰的関数同士の合成の場合。練習問題とする。
3. f が $\phi \in \mathbf{N}^n \rightarrow \mathbf{N}, \psi \in \mathbf{N}^{n+2} \rightarrow \mathbf{N}$ という再帰的関数に以下の原始再帰法を施して得られた関数の場合。

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, 0) &= \phi(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, k+1) &= \psi(\vec{x}, k, f(\vec{x}, k)) \end{aligned}$$

帰納法の仮定は ϕ, ψ はラムダ定義可能という主張である。よってそれらをラムダ定義するラムダ項 Φ, Ψ を取り、ラムダ項 F を以下で定義する。

$$F = \lambda \vec{x}. \Theta (\lambda hy. \text{if } \mathbf{Zero?} \ y \text{ then } \Phi \ \vec{x} \text{ else } \Psi \ \vec{x} \ (\mathbf{Pred} \ y)) \ (h \ (\mathbf{Pred} \ y)))$$

ここで $\Phi \ \vec{x}$ は $(\dots (\Phi \ x_1) \dots x_n)$ の略記とする ($\Psi \ \vec{x}$ についても同様)。

以下では F が f をラムダ定義していることを $n = 1$ の場合で見てみる。証明すべき事柄は $\forall x, y \in \mathbf{N}. F \ [x] \ [y] \rightarrow_{\beta}^* [f(x, y)]$ であるので、これを y に関する帰納法で証明する。

- (a) $y = 0$ の場合。 $x \in \mathbf{N}$ を一つ取る。最初に以下の 1 ステップ β 簡約を行い、得られたラムダ項で下線の引いてある部分を W_x と略記することにする。

$$F \ [x] \ [0] \rightarrow_{\beta} \Theta (\lambda hy. \text{if } \mathbf{Zero?} \ y \text{ then } \Phi \ [x] \text{ else } \Psi \ [x] \ (\mathbf{Pred} \ y)) \ (h \ (\mathbf{Pred} \ y))) \ [0]$$

以下、 β 簡約を進める。

$$\begin{aligned} \Theta \ W_x \ [0] &\rightarrow_{\beta}^* W_x \ (\Theta \ W_x) \ [0] \\ &\rightarrow_{\beta}^* \text{if } \mathbf{Zero?} \ [0] \text{ then } \Phi \ [x] \text{ else } \Psi \ [x] \ (\mathbf{Pred} \ [0]) \ (\Theta \ W_x \ (\mathbf{Pred} \ [0])) \\ &\rightarrow_{\beta}^* \Phi \ [x] \\ &\rightarrow_{\beta}^* [\phi(x)] = [f(x, 0)]. \end{aligned}$$

- (b) $y = k + 1$ の場合。 $x \in \mathbf{N}$ を一つ取る。帰納法の仮定として $F \ [x] \ [k] \rightarrow_{\beta}^* [f(x, k)]$ を仮定する。このことと Church-Rosser の定理から $\Theta \ W_x \ [k] \rightarrow_{\beta}^* [f(x, k)]$ が導かれる。よって

$$\begin{aligned} F \ [x] \ [k+1] &\rightarrow_{\beta}^* W_x \ (\Theta \ W_x) \ [k+1] \\ &\rightarrow_{\beta}^* \text{if } \mathbf{Zero?} \ [k+1] \text{ then } \Phi \ [x] \\ &\quad \text{else } \Psi \ [x] \ (\mathbf{Pred} \ [k+1]) \ (\Theta \ W_x \ (\mathbf{Pred} \ [k+1])) \\ &\rightarrow_{\beta}^* \Psi \ [x] \ (\mathbf{Pred} \ [k+1]) \ (\Theta \ W_x \ (\mathbf{Pred} \ [k+1])) \\ &\rightarrow_{\beta}^* \Psi \ [x] \ [k] \ (\Theta \ W_x \ [k]) \\ &\rightarrow_{\beta}^* \Psi \ [x] \ [k] \ [f(x, k)] \\ &\rightarrow_{\beta}^* [\psi(x, k, f(x, k))] = [f(x, k+1)] \end{aligned}$$

よって帰納法より F は f をラムダ定義している。

4. f が $\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^{n+1} . \exists y \in \mathbb{N} . \phi(\vec{x}, y) = 0$ を満たす再帰的関数 ϕ の最小解関数 $\mu(\phi)$ として定義された場合。帰納法の仮定は ϕ がラムダ定義可能という主張である。よって ϕ をラムダ定義するラムダ項 Φ を取り、ラムダ項 F を以下で定義する。

$$F = \lambda \vec{x} . \Theta (\lambda hy. \text{if } \mathbf{Zero?} (\Phi \vec{x} y) \text{ then } y \text{ else } h (\mathbf{Succ } y)) [0]$$

以下では F が f をラムダ定義していることを $n = 1$ の場合で見してみる。 $y_0 = f(x)$ とおくと、 $\phi(x, y_0) = 0$ であり、かつ任意の $0 \leq k < y_0$ に対して $\phi(x, k) > 0$ が成立する。まず以下の 1 ステップ β 簡約を行い、得られたラムダ項の下線の引いてある部分を Z_x と略記することにする。

$$F [x] \rightarrow_{\beta} \Theta (\lambda hy. \text{if } \mathbf{Zero?} (\Phi [x] y) \text{ then } y \text{ else } h (\mathbf{Succ } y)) [0] \quad (3)$$

すると

$$\Theta Z_x [y_0] \rightarrow_{\beta}^* [y_0] \quad (4)$$

が成立し、また任意の $0 \leq k < y_0$ において

$$\Theta Z_x [k] \rightarrow_{\beta}^* \Theta Z_x [k + 1] \quad (5)$$

が成立する (証明せよ)。従って (3,4,5) から

$$F [x] \rightarrow_{\beta} \Theta Z_x [0] \rightarrow_{\beta}^* \Theta Z_x [1] \rightarrow_{\beta}^* \cdots \rightarrow_{\beta}^* \Theta Z_x [y_0] \rightarrow_{\beta}^* [y_0] = [f(x)]$$

よって F は f をラムダ定義している。

1-4. から帰納法より再帰的関数はラムダ定義可能であることが示された。

部分関数のラムダ定義可能性を適切に定義することで、再帰的関数に限らず、部分再帰的関数に関しても同様の結果が成立する。

定理 3.2 (Kleene) 部分再帰的関数はラムダ定義可能である。

証明のあらすじは定理 3.1 と同じであるが、証明中で与えたラムダ項を「未定義」の概念を正確に扱えるようにやや変更しなければならない。詳細は Barendregt の本の 8.4 節を参照のこと。