# カタラン数

山本和彦
(株)インターネットイニシアティブ
kazu@iij.ad.jp

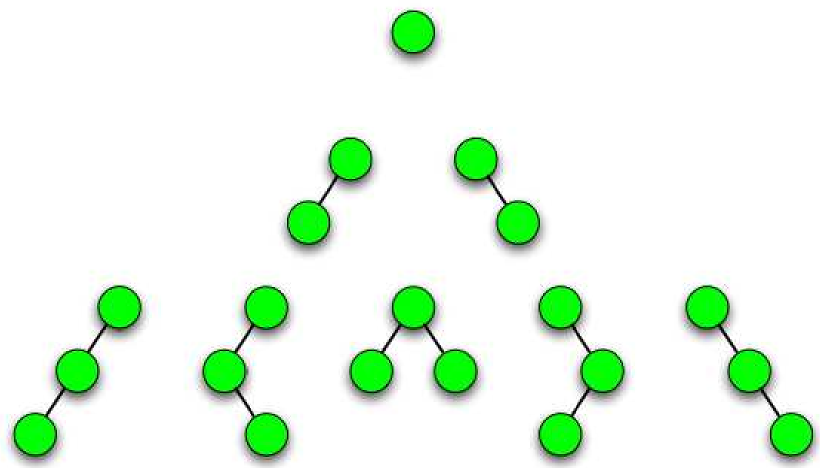
# クイズ：二分木の数

- ノード数を $n$ とするとき、
  二分木の形はいくつあるか？
  ($N_n$ で表すとする)

$N_1 = 1$

$N_2 = 2$

$N_3 = 5$



# 漸化式

- ルート・ノードから左右の部分木を見る
  - $N_1 = 1$
  - $N_2 = N_1 + N_1 = 1 + 1 = 2$
  - $N_3 = N_2 + N_1N_1 + N_2 = 2 + 1 \times 1 + 2 = 5$
- $N_0 = 1$ とおくと
  - $N_0 = 1$
  - $N_1 = N_0N_0 = 1$
  - $N_2 = N_0N_1 + N_1N_0 = 2$
  - $N_3 = N_0N_2 + N_1N_1 + N_2N_0 = 5$
- 一般化すると

$$N_n = \sum_{k=0}^{n-1} N_k N_{n-k-1}$$

- これはカタラン数と呼ばれている
  - 1, 2, 5, 14, 42, ...

# カタラン

- ベルギー、1814 ～ 1894

- ある数を「((2つの数)の積)の和」で表す方法を研究

# 漸化式を一般式へ

- 母関数を使うと解けるらしい

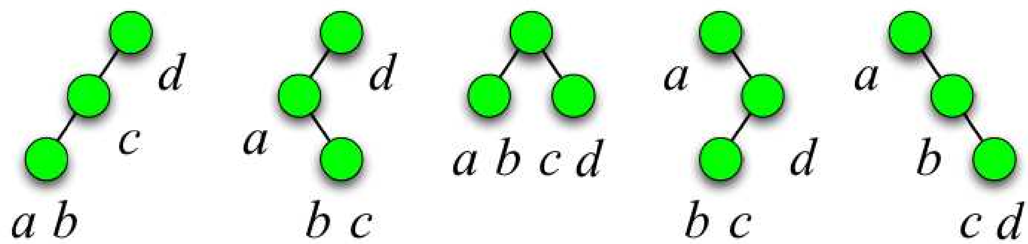
  $y = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + N_3 x^3 + \ldots$

- カタラン数の一般式

$$N_n = \frac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n = \frac{1}{n}\,{}_{2n}C_{n-1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

# クイズ：括弧付けの数

- *abcd* の掛け算の順位を括弧で表す
  ((ab)c)d --- ab*c*d*
  (a(bc))d --- abc**d*
  (ab)(cd) --- ab*cd**
  a((bc)d) --- abc*d**
  a(b(cd)) --- abcd***
- ノードは演算子、リーフは記号



# 表記

- カタラン数は $C_n$ で表すことが多い
  - 二項定数と間違いやすいので使わないことにする
- ノードに注目したカタラン数を $N_n$ で表すとする
- リーフに注目したカタラン数を $L_n$ で表すとする

$$L_n = N_{n-1}$$

# カタラン数とオイラーの三角分割

- カタラン数とオイラーの三角分割の数は等価
- 三角分割の数を $E_n$ で表すとする

$$E_n = L_{n-1} = N_{n-2}$$

$$E_3 = L_2 = N_1 = 1$$
$$E_4 = L_3 = N_2 = 2$$
$$E_5 = L_4 = N_3 = 5$$
$$E_6 = L_5 = N_4 = 14$$

# オイラー

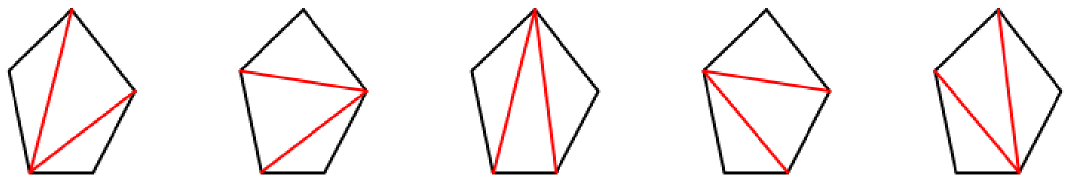
- スイス、1707 〜 1783

- 博士の愛した数式
  - $e^{i\pi} + 1 = 0$

    果ての果てまで循環する数と、決して正体を見せない虚ろな数が、
    簡潔な軌道を描き、一点に着地する。どこにも円は登場しないのに、
    予期せぬ宇宙から$\pi$が$e$の元に舞い下り、恥ずかしがり屋の$i$と握手を
    する。彼らは身を寄せ合い、じっと息をひそめているのだが、
    一人の人間が1つだけ足し算をした途端、何の前触れもなく世界が
    転換する。すべてが0に抱き留められる。

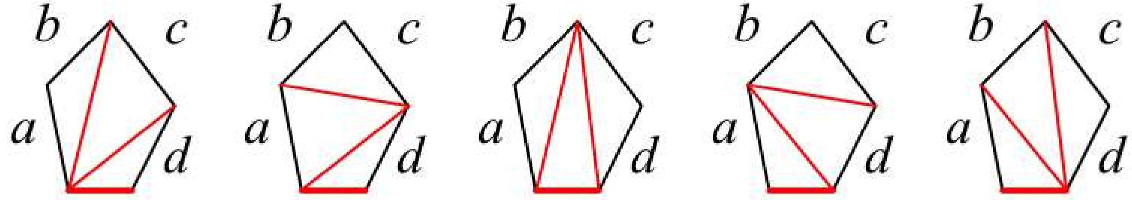
# オイラーの三角分割

- 凸 $n$ 角形を互いに交点を持たない対角で $n - 2$ 個の三角形に分割する方法は何通りあるか？



- $E_n = 2 \times 6 \times \cdots \times (4n - 10) / (n - 1)!$
  - オイラー曰く：「私が試みた帰納法はかなり骨の折れるものだった」

# 三角分割と括弧付け




((ab)c)d　(a(bc))d　(ab)(cd)　a((bc)d)　a(b(cd))

- $n$ 角形を三角分割する総数は
  $n - 1$ 個の文字に対する括弧付けの総数と同じ

$$E_n = L_{n-1} = N_{n-2}$$

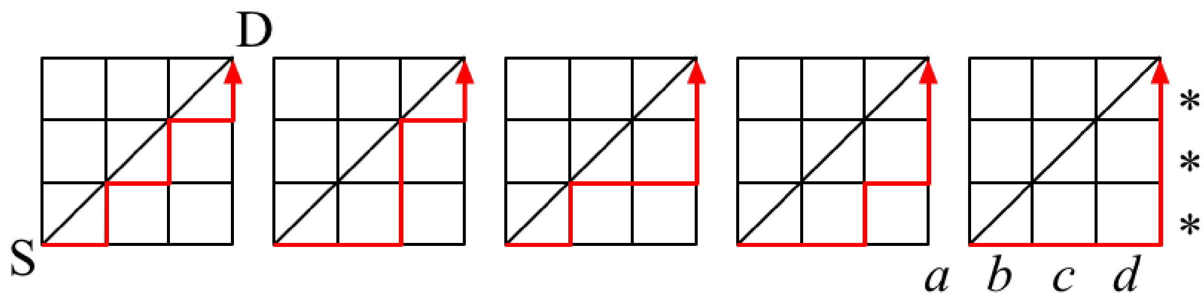
$$\begin{aligned} N_n &= E_{n+2} \\ &= 2 \times 6 \times \cdots \times (4n - 5) / (n + 1)! \end{aligned}$$

# オイラーの式の展開

$$
\begin{aligned}
N_n &= E_{n+2} \\
&= 2 \times 6 \times \cdots \times (4n - 2) / (n + 1)! \\
&= 2^n\{1 \times 3 \times \cdots \times (2n - 1)\} / (n + 1)! \\
&= 2^n\{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n - 1) \times 2n\} / \\
&\quad \{(2 \times 4 \times \cdots \times 2n \times (n+1)! \} \\
&= 2^n (2n)! / \{2^n (1 \times 2 \times \cdots \times n)(n+1)! \} \\
&= (2n)! / \{(n+1)!n!\}
\end{aligned}
$$

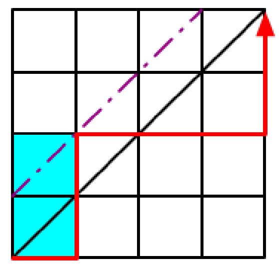
# クイズ：経路の数

- S から D への経路で、
 対角線を横切らないものはいくつあるか？

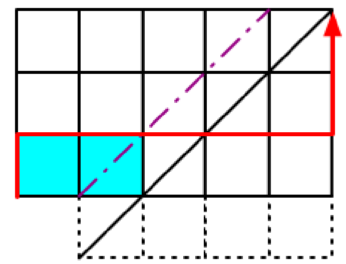



$ab{*}c{*}d{*}$　$abc{*}{*}d{*}$　$ab{*}cd{*}{*}$　$abc{*}d{*}{*}$　$abcd{*}{*}{*}$

# 経路の数を表す式



$_8C_4$



$_8C_3$

- 横切らない経路 = 全部 - 横切る経路

$$N_n = {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1}$$
$$= (2n)! / \{(n+1)!n!\}$$

# パスカルの三角形との関係

- カタラン数はパスカルの三角形に隠れている
  - ${}_{2n}C_{n} - {}_{2n}C_{n-1}$ のどちらの項もパスカルの三角形に現れる！

1
1 1
1 2 1 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1 2
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1 5
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1 14

# 3つの式を並べてみる

$$N_n = \frac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n = \frac{1}{n}\,{}_{2n}C_{n-1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

$$N_n = {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1}$$

$$N_n = \frac{2\times 6\times 10\times\cdots\times(4n-10)}{(n-1)!}$$

# カタラン数に関するクイズ

- 一泊 5,000 円のホテルがある。
  ここに 5,000 円をもった客 $n$ 人と
  　　　10,000 円をもった客 $n$ 人を泊まらせたい。
  ホテルには受付開始時におつりが用意されてない。
  おつりが不足しないような客の来方は、
  何通りあるか？