

ヤングの2重スリットの実験と「弱値」

細谷 暁夫

1 はじめに

「光子の裁判」において、壁際で捕捉された光子の位置から、2つの窓のうちのどちらの窓を通過したかをある程度読み取れることを、数式で示そうと思う。一つの窓のガラスが少し斜めに取り付けられて、本質的に、アハロノフたちの「弱測定」と同じ設定になっている。

2 ヤングの2重スリットの実験（復習）

初期状態は左側のスリットを通過する状態 $|L\rangle$ と右側のスリットを通過する状態 $|R\rangle$ の重ね合わせ：

$$|\Psi\rangle = \lambda|L\rangle + \rho|R\rangle, \quad \lambda, \rho \in \mathcal{R} \quad (1)$$

である。スリットの位置をそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_L &= (d/2, 0) \\ \mathbf{r}_R &= (-d/2, 0) \end{aligned} \quad (2)$$

とし、測定位置を \mathbf{r} とすると、光子の発見確率振幅は

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle &= \lambda \langle \mathbf{r} | L \rangle + \rho \langle \mathbf{r} | R \rangle, \\ &= \lambda e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_L|} + \rho e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_R|} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。2つのスリットの間隔 d がスクリーンまでの距離に比べて小さいときには、

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &:= \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle \\ &\approx \lambda e^{ikr-i\xi} + \rho e^{ikr+i\xi}. \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、

$$\xi = \frac{kxd}{2r} \quad (5)$$

ボルン則により、光子の発見確率 $P(\mathbf{r})$ は

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) &= |\Psi(\mathbf{r})|^2 \\ &\approx \lambda^2 + \rho^2 + 2\lambda\rho \cos 2\xi \\ &= 1 + 2\lambda\rho \cos \frac{kxd}{r} \end{aligned} \quad (6)$$

となり、 x 方向に強度の明暗があらわれ、干渉効果を示す。($\lambda = \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ が教科書的な場合)

3 スリットに幅 l を持たせる場合

ここで、スリットが両方とも y 方向に幅 l を持っている場合を考えよう (実はこちらが実際に近い)。スリット内の y 座標を η とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_L &= (d/2, \eta, 0) \\ \mathbf{r}_R &= (-d/2, \eta, 0) \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ホイヘンスの原理により各 η から伝搬した波動

$$\Psi(\mathbf{r}) \approx \lambda e^{ikr - ik\eta y/r - i\xi} + \rho e^{ikr - ik\eta y/r + i\xi}.$$

を $-l/2 \leq \eta \leq l/2$ に涉って重ね合わせる ($\int_{-l/2}^{l/2} \cdots \frac{d\eta}{l}$)、
積分

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{d\eta}{l} e^{-ik\eta y/r} = \frac{\sin(ykl/2r)}{ykl/2r}$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &\approx \int_{-l/2}^{l/2} \frac{d\eta}{l} [\lambda e^{ikr - ik\eta y/r - i\xi} + \rho e^{ikr - ik\eta y/r + i\xi}] \quad (8) \\ &= e^{ikr} [\lambda e^{-i\xi} \phi(y) + \rho e^{i\xi} \phi(y)]. \end{aligned}$$

となる。ここに、

$$\phi(y) = \frac{\sin(ykl/2r)}{ykl/2r} \quad (9)$$

は新たに導入した y 方向の自由度に対する波動関数と看做することができる。以下、プローブの波動関数と呼ぶ。

発見確率 $P(\mathbf{r})$ は

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) &= |\Psi(\mathbf{r})|^2 \\ &\approx [\lambda^2 + \rho^2 + 2\lambda\rho \cos 2\xi] \phi^2(y) \\ &= [1 + 2\lambda\rho \cos \frac{kxd}{r}] \phi^2(y) \end{aligned}$$

となり、以前のものに全体に $\phi^2(y)$ が掛かっているだけであり、それは y 方向の回折を示す。

4 左のスリットを通った光子だけが y 方向に少し逸らされる場合

左のスリットを通った光子だけが y 方向、正の向きに α だけ逸らされるような実験のセットアップを考えよう。光子の裁判で言うと、左の窓が上下方向に少し傾いていたのである。その場合の確率振幅は

$$\Psi(\mathbf{r}) \approx e^{ikr} [\lambda e^{-i\xi} \phi(y - \alpha) + \rho e^{i\xi} \phi(y)]. \quad (10)$$

となるであろう。発見確率 $P(\mathbf{r})$ は

$$\begin{aligned} P(x, y) &= |\Psi(\mathbf{r})|^2 \approx \lambda^2 \phi^2(y - \alpha) + \rho^2 \phi^2(y) \\ &\quad + 2\lambda\rho \phi(y - \alpha) \phi(y) \cos 2\xi \end{aligned}$$

となる。

(14) 式の (x, y) 分布は、スクリーン上の輝点の分布に対応している。 x 方向には干渉縞のパターンが見え、それが x の値に依存しながら y 方向に上下する。その濃いところは光子がより多く到達する点である。

5 弱値との関係

前節で導いた (x, y) 分布は、被測定系である x とプローブ系 y を一体としてあらたな被測定系と看做して通常の量子力学を適用して得られた分布であり、多数回の実験により実証可能である。今、見方を変えて元の被測定系である x に関する情報をプローブ系 y の分布から得ることを考えよう。そのために、各 x 毎に y の平均値を計算しよう。アハロノフの弱測定オリジナルとの対応が見やすいように、 α が充分小さい場合に話を限定しよう。各 x 毎に y の平均値は、定義から

$$\begin{aligned} \langle y \rangle_L &:= \frac{\int dy y P(x, y)}{\int dy P(x, y)} \\ &= \frac{\int dy [\lambda^2 y \phi^2(y - \alpha) + \rho^2 y \phi^2(y) + 2\lambda\rho y \phi(y - \alpha)\phi(y) \cos 2\xi]}{\int dy [\lambda^2 \phi^2(y - \alpha) + \rho^2 \phi^2(y) + 2\lambda\rho \phi(y - \alpha)\phi(y) \cos 2\xi]} \\ &\approx \alpha \frac{\lambda^2 + \lambda\rho \cos 2\xi}{\lambda^2 + \rho^2 + 2\lambda\rho \cos 2\xi}. \end{aligned}$$

一方、弱測定におけるプローブ系のことをしばらくの間忘れて、被測定系である x 系にのみ着目した量子力学を考えよう。

左のスリットの状態 $|L\rangle$ への射影演算子 $P_L = |L\rangle\langle L|$ の、始状態を $|\psi\rangle$ とし、終状態を $|x\rangle$ とする弱値は、直

接計算により、

$$(P_L)^w := \frac{\langle x|L\rangle\langle L|\psi\rangle}{\langle x|\psi\rangle} = \frac{\lambda e^{-i\xi}}{\lambda e^{-i\xi} + \rho e^{i\xi}} \quad (\xi = \frac{kxd}{2r}) \quad (11)$$

$(P_L)^w$ の実部は

$$Re[(P_L)^w] = \frac{\lambda^2 + \lambda\rho \cos 2\xi}{\lambda^2 + \rho^2 + 2\lambda\rho \cos 2\xi}$$

となる。

弱測定の、 α が充分小さい場合には、

$$\langle y \rangle_L \approx \alpha \cdot Re[(P_L)^w]$$

となる。

(この y 方向のシフトの平均値の表式はアハロノフたちによって、少し違う方法で導かれた。) 言い換えると、実験的には多数回の実験あるいは強い古典光によるヤングの二重スリットの実験から得られる (x, y) 分布において、 x を固定して y の平均値 $\langle y \rangle_L$ を求めれば、弱値 $Re(P_L)^w$ を得ることができる。

同様のこと運動量のを y 成分の平均値に対して実行しよう。非測定系については座標表示、プローブ系については運動量表示をしたときの確率振幅は確率振幅は

$$\Psi(x, p) \approx [\lambda e^{-i\xi} e^{ip\alpha} + \rho e^{i\xi}] \phi(p) \quad (12)$$

となる。ただし、 $\phi(p)$ はプローブの運動量表示での波動関数である。従って、光子が x において y 方向の運

動量 p で発見される発見確率 $P(x, p)$ は

$$P(x, p) = |\Psi(x, p)|^2 \approx (\lambda^2 + \rho^2 + 2\lambda\rho \cos(p\alpha - 2\xi))|\phi(p)|^2 \quad (13)$$

となる。

α を小さいとして、場所 x における y 方向の運動量 p の期待値 $\langle p \rangle = \frac{\int dp P(x, p) p}{\int dp P(x, p)}$ を計算すると

$$\langle p \rangle = 2\alpha \frac{\lambda\rho \sin 2\xi}{1 + 2\lambda\rho \cos 2\xi} \text{Var}_p = \alpha \text{Im}[(P_L)^w] \text{Var}_p.$$

ただし、 $\text{Var}_p = \int p^2 |\phi(p)|^2$ は y 方向の運動量の広がりを表す。この表式は、アハ口ノフ達のものとは一致する。

5.1 何が予言できるか

まず、左のスリットを閉じて右のスリットだけを開こう。すると、もちろん干渉縞は見えず y 方向も 0 を中心に分布するだろう。次に、右のスリットを閉じて左のスリットだけを開くと、干渉縞はなく y 方向は α を中心に分布するだろう。最後に両方のスリットを開いた場合の輝点の分布が予言である。波動光学を解いて、 (x, y) 分布を予言できるが、 y 分布の重心の位置だけなら弱値によって簡便に予言できる。

$$\langle y \rangle \approx \alpha \cdot \text{Re}[(P_L)^w] + 0 \cdot \text{Re}[(P_L)^w] \quad (14)$$

弱値 $\text{Re}(P_L)^w$ はセットアップをあたえれば理論的に計算できるし、また弱測定によって検証もできる。

6 解釈

同様に実験から $\langle y \rangle_R$ も求まり、弱値 $Re[(P_R)^w]$ が求まる筈である。しかし、われわれの本来の目的は、捕捉された光子の位置座標から光子の通過した窓がどちらであるかを推定することであったので、新たに別の実験をすることはしない。そうせずに、弱値 $Re(P_L)^w$ と弱値 $Re(P_R)^w$ を光子が左右それぞれのスリットを通った「確率」と見なそう。「 \cdot 」をつけたのは正定値とは限らないので頻度確率に対応せず、「傾向」を表すと考える。次の性質がある。

(1) 全確率は 1

$$Re(P_L)^w + Re(P_R)^w = 1 \quad (15)$$

(2) プロープの物理量に対する平均値

$$a_L \cdot Re(P_L)^w + a_R \cdot Re(P_R)^w = \langle a \rangle . \quad (16)$$

第 1 は完全性： $|L\rangle\langle L| + |R\rangle\langle R| = 1$ からの帰結である。第 2 の右辺はプロープ系も含めた量子力学で定義された期待値で弱測定により実証可能である。前節まで議論した、輝点の y 座標の平均値がそれにあたる。具体的には $a_L = \alpha, a_R = 0$ とすると、 $\langle y \rangle \approx \alpha \cdot Re(P_L)^w$ を得る。

7 弱値の正体

弱値 $(P_L)^w$ と $(P_R)^w$ の具体的な形は

$$(P_L)^w = \frac{\lambda e^{i\xi}}{\lambda e^{i\xi} + \rho e^{-i\xi}} \quad (17)$$

$$(P_R)^w = \frac{\rho e^{-i\xi}}{\lambda e^{i\xi} + \rho e^{-i\xi}} \quad (18)$$

となり、振幅の割合になっている。これらの実部に確率の意味を持たせるには説明が必要であろう。

8 光子の裁判と弱値

話しを光子の裁判に戻そう。光子は「両方の窓を通りました」と証言した。この意味は曖昧ではないだろうか？左の窓を $4/7$ 、右の窓を $3/7$ の割合で通ったなどと定量的に答えるべきではないだろうか？¹

光子が捉えられた x 座標を与えればその割合を、 $|L\rangle\langle L|$ と $|R\rangle\langle R|$ の弱値を計算して、理論的に予言されたものと比較できる。光子を何回も行き来させ、同じ x 座標に到達したデータを集めて y 分布をプロットし、 y 座標の平均値を求めることにより実証することもできる。

古典粒子の場合にも同じ手続きが可能であることを指摘しよう。例えば、粒子が左の窓と右の窓に $16/25, 9/25$ の割合で通過する仕組みを作っておくと、左の窓を $16/25$ 、右の窓を $9/25$ の割合で通ったと光子は答えるべきだろう。それを検証するために、左の窓を少し上向きにしておくと、明らかに y 分布は上下 $16/25 : 9/25$

¹ これは、以下に述べる弱値による評価だと、 $\lambda = 4/5, \rho = 3/5$ として、 x が $\cos 2\xi = 1$ の場合に起こる。

の2峰分布になり実証できる。量子の場合にも、 x が $\cos 2\xi = 0$ の時には、 $\lambda = 4/5, \rho = 3/5$ に対して、上記と同じ現象が起きる。

奇妙なことは、 $\lambda = 4/5, \rho = 3/5$ として、 x が $\cos 2\xi = -1$ の場合に起こる。その場合には、左の窓を4、右の窓を-3の割合で通ったことになる。私は、そもそも、これらの数値は傾向を表す指標であり頻度確率ではないので問題は起こらないと考える。荒っぽく言えば、ほとんど左の窓を通ったのである。

注意を要するのは、左右対称の場合 $\lambda = \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。この特殊な場合には、対称性から明らかであるが、 $|L\rangle\langle L|$ と $|R\rangle\langle R|$ の弱値は x に依らず、ともに $1/2$ であり、光子は「両方の窓を等しい割合で通りました」と答えてよい。

9 「確率」についての捕捉

「光子が左を通過して x に来る確率/光子が x に来る確率」という表式が記事の中に出てくる。数式で書いておこう。初期状態を $|\Psi\rangle$ 、事後選択状態を $|x\rangle$ と書くと、光子が左を通過して x に来る「結合確率」は

$$\langle\Psi|x\rangle\langle x|P_L|\Psi\rangle \quad (19)$$

のことである。これを光子が x に来る確率 $|\langle x|\Psi\rangle|^2$ で割れば、簡単な計算で

$$\frac{\langle\Psi|x\rangle\langle x|P_L|\Psi\rangle}{|\langle x|\Psi\rangle|^2} = \frac{\langle x|P_L|\Psi\rangle}{\langle x|\Psi\rangle} \quad (20)$$

を得る。これは、初期状態 $|\Psi\rangle$ 、事後選択状態 $|x\rangle$ に対する射影演算子 P_L の弱値に他ならない。上記の「結

合確率」を確率の仲間と認めるならば、弱値は条件付き確率と解釈できる。これは一般に複素数で通常確率のようにゼロまたは正とは限らない。しかしながら、 $\langle \Psi|x\rangle\langle x|P_L|\Psi\rangle$ は確率の性質、「光子が左を通過して x に来る確率」をすべての x について足し上げると単に「光子が左を通る確率」になるという性質を充たす。すなわち、

$$\sum_x \langle \Psi|x\rangle\langle x|P_L|\Psi\rangle = |\langle L|\Psi\rangle|^2 \quad (21)$$

を充たす。通常と少し違うのは、中間状態 $\langle L|, \langle R|$ についての和ではなく、終状態についての和になっている。通常とは時間の順番が逆向きになっている。右辺が確率の意味を持っているので、左辺の項別に「確率」の意味を与えたところに飛躍がある。