高専生のための微分方程式の解法

このノートは高専で習う常微分方程式の解法をまとめたものである．以下の順にその解法を扱っていく．

1. 微分方程式とベクトル場.
2. 簡単な線形微分方程式.
3. 特殊解の求め方１.
4. 特殊解の求め方２（演算子法）.
5. 線形微分方程式の初期値問題（ラプラス変換による解法）
6. 連立線形微分方程式
7. その他の微分方程式の解法

1　微分方程式（変数分離形）とベクトル場.

$\mathbf{X}$ が 2 次元の**ベクトル場**であるとは, 平面の各点 $P:(x,y)$ にただ一つのベクトルが対応しているものをいう．各点 $P:(x,y)$ に対応したベクトルを (X,Y) とすると，X, Y はそれぞれ x, y の関数と考えられるので, $X(x,y)$, $Y(x,y)$ と書く．この記号を使ってベクトル場 $\mathbf{X}$ を, $\mathbf{X}=X(x,y)\mathbf{i}+Y(x,y)\mathbf{j}$ と書く．ここで $\mathbf{i}$ は x 方向の単位ベクトル, $\mathbf{j}$ は y 方向の単位ベクトル, つまり, 横ベクトルで書いたとき，$\mathbf{i}=(1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1)$ とする．また, $\mathbf{X}_P$ を点 P における $\mathbf{X}$ から得られるベクトルとする．

さて, $x-y$ 平面上のなめらかな曲線 C を考えよう．また C は 1 つのパラメータ t で書けているとする．つまり $C:\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ である．C 上の各点 P でその接ベクトル $(\frac{dx}{dt}(P),\frac{dy}{dt}(P))$ が与えられたベクトル場 $\mathbf{X}$ の P 点におけるベクトル値と一致するとき, 曲線 C をベクトル場 $\mathbf{X}$ の**流線**という．つまり $\mathbf{X}=X(x,y)\mathbf{i}+Y(x,y)\mathbf{j}$ の**流線**を求めるには, 微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=X(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Y(x,y)$$

を解けばよい．微分方程式とは, dx とか dy のような微分の記号が入ったものであり, dx とか dy のような記号を消去することが, **微分方程式を解く**ことで

ある．正しくは, 関数 $y = y(x)$ とその導関数 $y'(x),\ y''(x),\ y'''(x),\ \cdots$ などと独立変数 x を含む方程式を**微分方程式** という．

例えば川をイメージしてみよう．川の各地点には, 必ず流れというベクトルがある．そしてその地点での速度は時間とともに変化している．水面上に草船を置いてみよう．そうすると, その船は流れの方向に進んでいく．別の点にもう一つの船を浮かべてみよう．そうすると, 先ほどとは違ったルートで船は流れる．その船の通る奇跡をベクトル場 X の流線というのだ．また最初の地点を指定すると, 1 つの流線が自動的に決まるのだ．この流線を求めることこそ微分方程式を解くことに他ならない．

例を挙げて説明しよう．

ベクトル場 $\mathbf{X}$ を, $\mathbf{X} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ とする．流線を求めるのであるから,

$$\frac{dx}{dt} = 2x, \quad \frac{dy}{dt} = 3y$$

を解けばよい．これより, x, y に関する微分方程式

$$\frac{dy}{3y} = \frac{dx}{2x}$$

を得るのである．

特に上の例のような, 左辺は y 関するものだけ, 右辺は x に関するものだけと, 変数を分離できる微分方程式を**変数分離形**という．変数分離形

$$\frac{dy}{3y} = \frac{dx}{2x}$$

の解法は簡単である．そのためには, 両辺を積分すればよい．すなわち,

$$\int \frac{1}{3y}dy = \int \frac{1}{2x}dx$$

とする．これを解くと

$$\frac{1}{3}\log|y| + c_1 = \frac{1}{2}\log|x| + c_2$$

となる．ここで c_1, c_2 は積分定数である．c_1, c_2 は普通まとめて $\log A$ とする．また場合分けにより絶対値はとっても良い．すなわち,

$$\frac{1}{3}\log y = \frac{1}{2}\log x + \log A$$

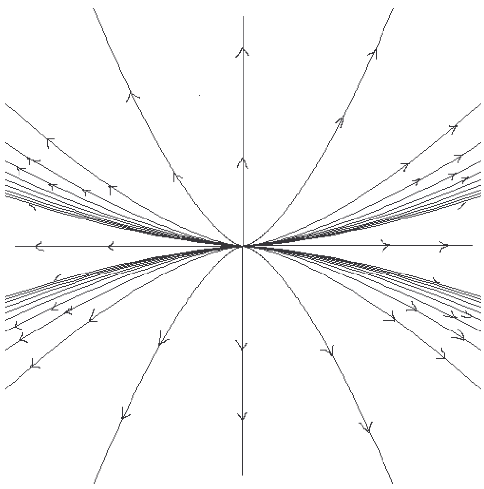
となる．このあとは, 対数関数の計算である．

$$y^{1/3} = Ax^{1/2}$$

を得る．両辺を 6 乗して A^6 を C とすると

$$y^2 = cx^3$$

を得る．これで微分方程式が解けた．すなわち $\mathbf{X}$ の流線が求まった．たとえば, 初期条件（流線の出発点）を $x = 1, y = 2$ とすると, $c = 4$ と定まる．つまりこのときの流線は $y^2 = 4x^3$ という曲線を描く．C は初期条件によって変わるのだが, それらをまとめて図示すると以下のようになる．



注意　ベクトル場が $\mathbf{X} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ なので, たとえば, $(x, y) = (1, 1)$ のところでは，流れの向きが，$2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ 方向である．全体としては，第 1 象限では流れの向きが右上に向かい，第 2 象限では左上に向かい，第 3 象限では左下に向かい，第 4 象限では右下に向かう．

問 1 ベクトル場 $\mathbf{X}$ を $\mathbf{X} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ とする．

(1) $a = -1, b = -2$ のとき, $\mathbf{X}$ の流線を求めそれを図示せよ．

(2) $a = 1, b = -2$ のとき, $\mathbf{X}$ の流線を求めそれを図示せよ．