

# 関数解析の基礎とウェーブレット

守 田 徹

2010 年 4 月 1 日

## 序

ウェーブレット解析の数学は、通常 Lebesgue 積分、Fourier 変換、線形汎関数等の関数解析の数学的な基礎の上に構成されている。このために、ウェーブレット解析に関する著書の多くは、それを読み、十分理解できるためには、関数解析の基礎に関する知識を持つことが望まれる。

本書は二つの部分からなる。最初の 7 章は関数解析の基礎についてであり、後の 5 章はウェーブレット解析についてである。

前半の関数解析の基礎は、大学の理工系学科の一、二年の数学のみを知っている人がウェーブレット解析の数学的入門書を理解するために必要となる数学である。使われる用語の定義、定理の証明、式の導出は、あまり自明な場合を除き省略なしに与えられている。後半のウェーブレット解析についての記述は、直交ウェーブレットと簡単な双直交ウェーブレット、積分ウェーブレット変換の数学的側面のみに限られている。

本書を書くにあたり、主として次の書籍を参考にした。Lebesgue 積分の理論を含み、前半の多くの部分がリース・ナジーの著書に従って書かれた。後半の多くの部分は Walter の著書に従っている。

1. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Functional Analysis, Dover Publ. Inc., New York (1990)  
リース・ナジー著 秋月康夫監訳 絹川正吉、清原岑夫訳 関数解析学上、共立出版 (昭和 49 年)
2. 高木貞治著 増補解析概論、岩波書店 (昭和 18 年)
3. 河田龍夫著 岩波講座 現代応用数学 A.12 Fourier 変換と Laplace 変換、岩波書店 (1957 年)
4. 黒田成俊著 関数解析、共立出版 (1980 年)
5. G. G. Walter, Wavelets and Other Orthogonal Systems With Applications, CRC Press, Inc. (1994)
6. I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM (1992)
7. チャールズ K. チュウイ著 桜井明、新井勉訳 ウェーブレット入門、東京電機大学出版局 (1993 年)
8. 榊原進著 ウェーブレット ビギナーズガイド、東京電機大学出版局 (1995 年)
9. 広池和夫、守田徹、田中実著 応用解析学、共立出版 (1982 年)
10. A. M. Robert, Nonstandard Analysis, Dover Publ. Inc., Mineola, New York (2003)



# 目次

<b>1</b>	<b>解析の基礎、有界変動関数の微分</b>	<b>1</b>
1.1	集合	1
1.2	数列	3
1.3	点集合と零集合	7
1.4	連続関数とその微分、平均値の定理	9
1.5	単調関数、有界変動関数とその微分	12
1.6	無限積	16
<b>2</b>	<b>Lebesgue 積分</b>	<b>17</b>
2.1	Lebesgue 積分の定義	17
2.2	Lebesgue 積分の性質	20
2.3	可測関数と可測集合、可測集合での積分	26
2.4	Fubini の定理	29
2.5	複素数値関数の積分	31
<b>3</b>	<b>不定積分とその微分、平均値の定理</b>	<b>33</b>
3.1	不定積分とその微分	33
3.2	積分に関する平均値の定理	37
3.3	いくつかの積分の極限	40
<b>4</b>	<b>Banach 空間、Hilbert 空間</b>	<b>43</b>
4.1	線形空間 (ベクトル空間)、ノルム空間	43
4.2	Banach 空間 と Hilbert 空間の例	48
4.3	関数空間 $\mathcal{L}^2$	51
4.4	合成関数	54
<b>5</b>	<b>Fourier 級数、直交多項式</b>	<b>57</b>
5.1	基底、完全正規直交系	57

5.2	Fourier 級数 . . . . .	61
5.3	直交多項式 . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Fourier 変換</b> . . . . .	<b>69</b>
6.1	$\mathcal{L}^1$ の Fourier 変換 . . . . .	69
6.2	$\mathcal{L}^2$ の Fourier 変換 . . . . .	72
6.3	線形作用素 . . . . .	76
6.4	急速減衰関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ . . . . .	78
6.5	Poisson の和の公式 . . . . .	82
<b>7</b>	<b>線形汎関数、Riesz 基底</b> . . . . .	<b>83</b>
7.1	直交補空間 . . . . .	83
7.2	線形作用素の空間 $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . . . . .	84
7.3	線形汎関数 . . . . .	85
7.4	Riesz 基底 . . . . .	88
7.5	超関数 . . . . .	90
7.6	右側超関数 . . . . .	92
7.7	緩増加超関数 . . . . .	93
<b>8</b>	<b>ウェーブレット解析の基礎</b> . . . . .	<b>97</b>
8.1	ウェーブレット基底 . . . . .	97
8.2	スケーリング関数の基本的な性質 . . . . .	98
8.3	マザーウェーブレットの基本的な性質 . . . . .	103
<b>9</b>	<b>直交ウェーブレットの例</b> . . . . .	<b>107</b>
9.1	Haar のウェーブレット . . . . .	107
9.2	Franklin のウェーブレット . . . . .	108
9.3	Battle-Lemarie のウェーブレット . . . . .	112
9.4	Shannon のウェーブレット . . . . .	117
9.5	Meyer のウェーブレット . . . . .	118
9.6	マザーウェーブレットのモーメント . . . . .	121
<b>10</b>	<b>ウェーブレットによる展開と補間公式</b> . . . . .	<b>123</b>
10.1	ウェーブレットによる展開 . . . . .	123
10.2	補間アルゴリズム . . . . .	125
10.3	補間公式 . . . . .	128

<b>11 コンパクトな台をもつウェーブレット</b>	<b>133</b>
11.1 コンパクトな台をもつスケーリング関数	133
11.2 Daubechies のウェーブレット	134
11.3 双直交ウェーブレット 1	139
11.4 双直交ウェーブレット 2	144
<b>12 積分ウェーブレット変換</b>	<b>147</b>
12.1 積分ウェーブレット変換による表式 1	147
12.2 積分ウェーブレット変換による表式 2	151
12.3 Parseval の等式	155
12.4 不確定性原理	156
<b>13 時系列の調和ウェーブレット解析</b>	<b>159</b>
13.1 時系列の Fourier 解析	159
13.2 調和ウェーブレット解析	161
13.3 急速減衰調和ウェーブレット解析	165
あとながき	168
索引	169



# 1

## 解析の基礎、有界変動関数の微分

### 1.1 集合

ある対象を集めたものを**集合** (set) といい、そこで集められた対象のそれぞれをその集合の**要素** (element) または元という。

$a$  が集合  $A$  の要素であるときに、 $a$  は  $A$  に含まれる、あるいは  $a$  は  $A$  に属するといい、記号  $a \in A$  で表す。また、 $a$  が  $A$  に含まれないことを  $a \notin A$  で表す。

二つの集合  $A, B$  について、 $A$  の要素がすべて  $B$  に属するとき、 $A$  は  $B$  の部分集合 (subset) である、あるいは  $A$  は  $B$  で覆われるといい、記号  $A \subset B$  で表す。 $A$  の要素であり、しかも  $B$  に属するものの集合を  $A$  と  $B$  の共通部分、または積集合といい、 $A \cap B$  で表す。 $B$  に属し、 $A$  に属さない要素の集合を差集合といい、 $B \setminus A$  で表す。 $A \subset B$  であるとき、 $B \setminus A$  を  $B$  における  $A$  の補集合という。 $A$  の要素と  $B \setminus A$  の要素を合わせた集合を  $A$  と  $B$  の合併、または和集合といい、 $A \cup B$  で表す。 $N$  個の集合  $A_1, A_2, \dots, A_N$  の和集合を  $\cup_{n=1}^N A_n$  で表す。また、これらの積集合を  $\cap_{n=1}^N A_n$  で表す。

等式  $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ ,  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \cap A) \cup (B \setminus A)$  が成り立つ。

整数全部の集合を  $\mathbf{Z}$  で表し、正整数全部の集合を  $\mathbf{N}$  で表す。また、 $0, 1, 2, 3, \dots$  の集合を  $\mathbf{Z}_+$  で表す。実数の集合を  $\mathbf{R}$  で表す。また、複素数の集合を  $\mathbf{C}$  で表す。

実数  $a, b$  が不等式  $a < b$  を満たしているとする。このとき、 $a < x < b$  を満たす実数  $x$  の集合を  $(a, b)$  で表し、 $a \leq x \leq b$ ,  $a < x \leq b$ ,  $a \leq x < b$  を満たす実数  $x$  の集合を、それぞれ  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  で表す。これらの集合を**区間** (interval) という。

**可算個** (enumerable) という言葉が、有限個または無限個の正整数  $1, 2, 3, \dots$  と対応が付けられるという意味で使われる。

**例 1.1.1** 区間  $(0, 1)$  にある有理数は可算個である。

[証明]  $(0, 1)$  にある有理数を、分母が小さいものから

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \left(\frac{2}{4}\right), \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

と並べて、前に出てきた数と同じ数を除き、 $1, 2, 3, \dots$  に対応付けをすればよい。 □

可算個の要素からなる集合を**可算集合** (enumerable set) といい、有限個の要素からなる集合を**有限集合** (finite set)、無限個の要素からなる集合を**無限集合** (infinite set) という。要素が一つもない集合を**空集合** (empty set) という。 $n$  個の要素  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  からなる集合を  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  または  $\{a_k | k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq n\}$  で表す。可算無限個の要素  $a_1, a_2, a_3, \dots$  からなる集合を  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  または  $\{a_k | k \in \mathbf{N}\}$  で表す。空集合は  $\phi$  で表される。

**定理 1.1** 可算個の集合  $A_1, A_2, A_3, \dots$  のそれぞれが可算集合であるとき、これらの和集合  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  は可算集合である。

[証明]  $A_n$  の要素が  $a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots$  であつたとすると、和集合  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  の要素  $a_{n,m}$  は、 $n+m$  が小さいものから、

$$a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{1,3}, a_{2,2}, a_{3,1}, \dots$$

と並べて、この順に番号を付けることができる。 □

**例 1.1.2**  $(-\infty, \infty)$  にあるすべての有理数は可算個である。

[証明]  $n$  を整数として、区間  $[n, n+1)$  にある有理数の集合を  $A_n$  とすると、例 1.1.1 と同様にして、それは可算個の要素からなることが示される。すべての有理数の集合は可算個の集合

$$A_0, A_{-1}, A_1, A_{-2}, A_2, \dots$$

の和集合である。 □

**例 1.1.3** 実部と虚部が両方とも有理数である複素数は可算個である。

[証明のヒント] 実部を有理数の一つとするとき、この集合に属する複素数は可算個である。 □

実数の集合  $A$  について、そのすべての要素  $x \in A$  にたいして  $x \leq M$  が成り立つとき、 $M$  をその集合  $A$  の**上界** (upper bound) という。上界の中で最も小さい値を**上限** (supremum, least upper bound) という。集合  $A$  の上限を  $\sup A$  または  $\sup_{x \in A} x$  で表す。上限がその集合に属するときには、それは集合  $A$  に属す数の中の最大の数で、 $\max A$  または  $\max_{x \in A} x$  で表される。

**補助定理 1.1**  $a = \sup A$  であるとき、任意の  $\epsilon > 0$  にたいし、 $a - \epsilon < x \leq a$  を満たす  $x \in A$  が存在する。

[証明] もしなければ、 $a - \epsilon$  は  $A$  の上界であり、 $a$  が上限であることに矛盾する。 □

すべての要素  $x \in A$  にたいして  $x < M$  が成り立つとき、 $\sup A \leq M$  となる。すなわち、 $\sup A = M$  となることがある。例 1.2.1 (節 1.2) を見よ。

上界が存在するときには上限が存在する。

[証明]  $M_1$  が上界ならば、 $x > M_1$  となる数  $x$  はすべて上界であるから、ある  $a$  が存在して、上界の集合は  $[a, \infty)$  と表される。この  $a$  が上限である。 □

実数の集合  $A$  について、そのすべての要素  $x \in A$  にたいして  $x \geq M$  が成り立つとき、 $M$  をその集合  $A$  の**下界** (lower bound) という。下界の中で最も大きい値を**下限** (infimum, greatest lower bound) という。集合  $A$  の下限を  $\inf A$  または  $\inf_{x \in A} x$  で表す。下限がその集合に属するときには、それは集合  $A$  に属す数の中の最小の数で、 $\min A$  または  $\min_{x \in A} x$  で表される。

実数の集合  $A$  は、上界と下界があるときに、**有界** (bounded) であるという。

**補助定理 1.2** 有界な実数の集合  $A$  について、不等式  $\inf A \leq \sup A$  が成り立つ。さらに、 $B \subset A$  であるとき、不等式  $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$  が成り立つ。

[前半の証明] 任意の  $x \in A$  にたいし  $\inf A \leq x \leq \sup A$  が成り立つ。 □

## 1.2 数列

可算無限個の数の列  $a_1, a_2, \dots$  は無限数列とよばれ、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  または  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  で表される。有限個の数の列  $a_1, a_2, \dots, a_N$  は有限数列とよばれ、 $\{a_n\}_{n=1}^N$  で表される。省略した記号  $\{a_n\}$  も用いる。

実数の数列  $\{a_n\}$  の要素の集合の上界、上限、下界、下限、最大の数、最小の数を数列  $\{a_n\}$  の上界、上限、下界、下限、最大の数、最小の数という。数列  $\{a_n\}$  の上限は  $\sup\{a_n\}$  または  $\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$  で表され、最大の数  $\max\{a_n\}$  または  $\max_{n \in \mathbf{N}} a_n$  で表される。下限は  $\inf\{a_n\}$  または  $\inf_{n \in \mathbf{N}} a_n$  で表され、最小の数は  $\min\{a_n\}$  または  $\min_{n \in \mathbf{N}} a_n$  で表される。

無限数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  にたいし、数  $a$  が存在して、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  のとき

$$|a_n - a| < \epsilon \tag{1.1}$$

が成り立つときに、数列  $\{a_n\}$  は  $a$  に収束 (convergence) するという。これを  $a_n \rightarrow a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , または  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$  で表す。このとき、 $a$  を数列  $\{a_n\}$  の極限值という。

実数の数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は、すべての  $n \in \mathbf{N}$  にたいして  $a_{n+1} \geq a_n$  が成り立つときに、非減少列 (増加列) であるといい、すべての  $n \in \mathbf{N}$  にたいして  $a_{n+1} \leq a_n$  が成り立つときに、非増加列 (減少列) であるという。

**定理 1.2** 非減少数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が上界をもつときには、その数列は上限  $\sup\{a_n\}$  に収束する。また、非増加数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が下界をもつときには、その数列は下限  $\inf\{a_n\}$  に収束する。

[非減少数列の場合の証明]  $a = \sup\{a_n\}$  とすると、補助定理 1.1 により、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $a - \epsilon < a_N \leq a$  となる。このとき、任意の  $n > N$  にたいし  $a_N \leq a_n \leq a$  であるから、 $|a - a_n| \leq a - a_N < \epsilon$  となる。すなわち、 $a_n \rightarrow a$  である。  $\square$

**例 1.2.1** 数列  $\{1 - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  は増加数列であり、その上限 1 に収束する。

実数の数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  にたいし、整数の増加列  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  を  $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  となるように選ぶ。このとき、数列  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  を数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の部分列という。

**補助定理 1.3** 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が極限值  $a$  に収束するとき、その部分列  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  も極限值  $a$  に収束する。

[証明] 任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  のとき、(1.1) が成り立つ。 $n_k \geq k$  であるから、 $k \geq N$  のとき  $|a_{n_k} - a| < \epsilon$  となる。  $\square$

**補助定理 1.4** 二つの数列  $\{a_n\}, \{c_n\}$  が、同じ極限值  $a$  に収束し、第三の数列  $\{b_n\}$  が存在して、すべての  $n \in \mathbf{N}$  にたいし  $a_n \leq b_n \leq c_n$  ならば、数列  $\{b_n\}$  も極限值  $a$  に収束する。

[証明] 任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、ある  $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n \in \mathbf{N}$  が  $n > N$  を満たすとき  $|a_n - a| < \epsilon/3, |c_n - a| < \epsilon/3$  が成り立つので、 $|b_n - a| = |b_n - a_n + a_n - a| \leq b_n - a_n + |a_n - a| < c_n - a_n + \epsilon/3 = c_n - a + a - a_n + \epsilon/3 < \epsilon$  が成り立つ。  $\square$

**補助定理 1.5** 二つの数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が、それぞれ  $a, b$  に収束とき、数列  $\{b_n - a_n\}$  は  $b - a$  に収束する。さらに、すべての  $n \in \mathbf{N}$  にたいし  $a_n \leq b_n$  ならば、 $a \leq b$  が成り立つ。

[証明] 任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  ならば  $|a_n - a| < \epsilon/2, |b_n - b| < \epsilon/2$  が成り立つ。このとき  $|b_n - a_n - (b - a)| = |b_n - b - (a_n - a)| \leq |b_n - b| + |a_n - a| < \epsilon$  が成り立つので、 $b_n - a_n \rightarrow b - a$  となる。さらに  $b_n - a_n \geq 0$  ならば  $b - a = b - b_n - (a - a_n) + b_n - a_n \geq -|b_n - b| - |a_n - a| > -\epsilon$  が成り立つ。 $\epsilon > 0$  は任意であるから、 $b - a \geq 0$  となる。□

**補助定理 1.6** 有界な無限数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  には、収束する部分列  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  が存在する。

[証明] 実数の数列の場合の証明を与える。数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の上限、下限を  $d_1, b_1$  とする。 $n_1 = 1$  とし、 $c_1 = \frac{1}{2}(b_1 + d_1)$  とする。このとき、二つの区間  $[b_1, c_1]$  と  $[c_1, d_1]$  の少なくとも一方には  $\{a_n\}$  の無限個の数が含まれる。その区間を  $[b_2, d_2]$  とする。この区間に属する  $a_n$  の中で  $n_1$  より大きいものの一つを  $n_2$  とする。以下、同様にして、 $\{n_k\}$  を作る。

このとき、数列  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  は非減少列であり、上界  $d_1$  をもつ。したがって、極限值  $b$  をもつ。また、列  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  は非増加列であり、下界  $b_1$  をもつ。したがって、極限值  $d$  をもつ。 $d_n \geq b_n$  であるから、補助定理 1.5 により  $\{d_n - b_n\}$  の極限值は  $d - b \geq 0$  であるが、 $d_n - b_n = (d_1 - b_1)/2^{n-1}$  であるから、 $d - b = 0$  となる。すべての  $k \in \mathbf{N}$  にたいし  $b_k \leq a_{n_k} \leq d_k$  であるから、補助定理 1.4 により、 $a_{n_k} \rightarrow b$  となる。□

超準解析 (non-standard analysis) では、 $\mathbf{N}, \mathbf{R}$  に属するすべての数より大きい数を考える。これを無限大数 (illimited number) と呼ぶ。 $n$  が無限大整数 (illimited integer) であるとき、(1.1) の左辺は、0 またはすべての正の実数より小さい正の数になる。0 でないそのような数を無限小正数と呼び、絶対値が 0 または無限小正数である数を無限小実数 (infinitesimal number) と呼ぶ。記号  $a \simeq b$  が、 $a$  と  $b$  の差が無限小実数であることを示すのに使われる。超準解析では、普通の解析を標準解析といい、元々の  $\mathbf{N}, \mathbf{R}$  に属する数を標準数 (standard number) と呼ぶ。

超準解析では、標準解析の  $n \in \mathbf{N}$  にたいする  $a_n \rightarrow a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  は、無限大整数  $n$  にたいする  $a_n - a \simeq 0, a_n \simeq a$  で表される。

次の補助定理を用いて、これらが同等であることを示す。

**補助定理 1.7** すべての無限大整数  $n$  にたいし  $a_n - a \simeq 0$  が成り立つときには、任意の標準実数  $\epsilon > 0$  にたいし  $|a_n - a| \geq \epsilon$  となる  $n$  は有限個しかない。

[証明] もし無限個あると、(i)  $a_n$  が無限大実数となる無限大整数  $n$  が存在するか、(ii) 補助定理 1.6 により  $|b - a| \geq \epsilon$  満たす標準実数  $b$  に収束する部分列が存在し、 $a_n - b \simeq 0$  を満たす無限大整数  $n$  が存在することになり、仮定に反する。□

[上記同等性の証明]  $a_n \rightarrow a$  が成り立つとき、(1.1) から、無限大整数  $n$  にたいし  $a_n - a \simeq 0$  が結論される。逆に、補助定理 1.7 の条件が成り立つときには、任意の標準実数  $\epsilon > 0$  にたいし  $|a_n - a| \geq \epsilon$  となる  $n$  は有限個しかない。その結果、標準整数  $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  のとき (1.1) が成り立つ。□

ここで、数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の、収束する部分列の極限値の集合を考える。この集合に上限があるときに、それを数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の上極限といい、 $\limsup\{a_n\}$  または  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  で表す。下限があるときに、それを数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の下極限といい、 $\liminf\{a_n\}$  または  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  で表す。

以上から、 $u$  と  $l$  が数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の上極限と下極限であるためには、次の二つの条件を満たせばよい。

- (1) 極限値  $u, l$  のそれぞれに収束する  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の部分列が存在する。
- (2)  $\{a_n\}$  の任意の収束する部分列の極限値を  $a$  とするとき、 $l \leq a \leq u$  となる。

**補助定理 1.8** 実数の数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が有界であるとき、上極限  $u$  と下極限  $l$  が存在する。さらに、 $k \in \mathbf{N}$  にたいし、 $u_k = \sup_{n \geq k} a_n$ ,  $l_k = \inf_{n \geq k} a_n$  とするとき、 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  は非増加列であり、 $u$  に収束し、 $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$  は非減少列であり、 $l$  に収束する。したがって、不等式

$$l_k \leq l_{k+1} \leq l \leq u \leq u_{k+1} \leq u_k, \quad k \in \mathbf{N} \quad (1.2)$$

が成り立つ。さらに、 $a$  が  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の部分列の極限值であるときには  $l \leq a \leq u$  となり、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $a$  に収束するときには  $u = l = a$  となる。

[証明]  $k \in \mathbf{N}$  にたいし、数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の部分列  $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$  を考える。これは有界であるから、上限  $u_k = \sup_{n \geq k} a_n$  と下限  $l_k = \inf_{n \geq k} a_n$  があり、補助定理 1.2 により、不等式  $l_k \leq l_{k+1} \leq u_{k+1} \leq u_k$  が成り立つ。 $\{l_k\}$  は非減少列で、上界があるので収束する。その極限値を  $l$  とする。また、 $\{u_k\}$  は非増加列で下界があるので収束する。その極限値を  $u$  とする。 $u_k - l_k \geq 0$  であるから、補助定理 1.5 により  $u - l \geq 0$  となる。

以下で、その  $u, l$  が  $\{a_n\}$  の上極限と下極限であるための条件 (1), (2) を満たすことを示す。極限值  $u$  に収束する部分列  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  の存在を示す。ここで、 $\epsilon_k > 0$  の列  $\{\epsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$  を、 $k \rightarrow \infty$  のときに  $\epsilon_k \rightarrow 0$  となるように選ぶ。例えば  $\epsilon_k = 2^{-k}$  とする。 $n_1 = 1$  とし、 $k \geq 1$  にたいし、補助定理 1.1 により、 $n_k$  が定まったとき、 $u_{n_k+1} - \epsilon_k < a_n \leq u_{n_k+1}$ ,  $n \geq n_k + 1$  を満たす  $n$  が存在する。これを  $n_{k+1}$  とする。証明の前半と補助定理 1.3, 補助定理 1.5 により、数列  $\{u_{n_k+1} - \epsilon_k\}$ ,  $\{u_{n_k+1}\}$  は共に  $u$  に収束するので、補助定理 1.4 により、 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  も  $u$  に収束する。また、 $l$  に収束する部分列も同様に作るができる。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の任意の収束する部分列を  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  とするとき、 $\{l_n\}$ ,  $\{u_n\}$  の定義により、

$$l_{n_k} \leq a_{n_k} \leq u_{n_k}$$

が成り立つ。 $\{l_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  と  $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  は、補助定理 1.3 により、 $l$  と  $u$  に収束するので、 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  の極限値を  $a$  とすると、補助定理 1.5 により、 $l \leq a \leq u$  となる。□

実数の数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は、任意の正数  $\epsilon > 0$  にたいして正整数  $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n \in \mathbf{N}$ ,  $m \in \mathbf{N}$ ,  $n > N$  かつ  $m > N$  のとき、

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad (1.3)$$

が成り立つときに、**Cauchy 列** (Cauchy sequence) であるという。

**定理 1.3** 実数の数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が収束するためには、それが Cauchy 列であることが必要十分である。

[必要の証明]  $\{a_n\}$  が極限值  $a$  に収束するとき、任意の正数  $\epsilon > 0$  にたいして正整数  $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  のとき、 $|a_n - a| < \epsilon/2$  が成り立つ。したがって、 $n > N$  かつ  $m > N$  のとき、 $|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon$  が成り立つ。□

**補助定理 1.9**  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が実数の Cauchy 列であるとき、極限值  $a \in \mathbf{R}$  が存在して、 $N \in \mathbf{N}$  を (1.3) が成り立つように選ぶとき、 $n > N$  にたいして

$$|a_n - a| < 2\epsilon$$

が成り立つ。

この補助定理は定理 1.3 の十分を示す。

[補助定理の証明の前半] 実数の Cauchy 列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は有界であることを示す。

$\epsilon = 1$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  ならば  $|a_n - a_{N+1}| < 1$  となる。このとき、 $\max\{\max\{a_n\}_{n=1}^N, a_{N+1} + 1\}$  は  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の上界であり、 $\min\{\min\{a_n\}_{n=1}^N, a_{N+1} - 1\}$  は  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の下界である。□

[補助定理 1.6 を用いる補助定理の証明の後半]  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は有界であるから、補助定理 1.6 により収束する部分列  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  が存在する。その極限値を  $a$  とする。 $K \in \mathbf{N}$  を  $k > K$  のとき  $|a_{n_k} - a| < \epsilon$  が成り立つように選ぶ。このとき、 $n > N$ ,  $k > K$ ,  $n_k > N$  ならば、 $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\epsilon$  となる。□

[補助定理 1.8 を用いる補助定理の証明の後半]  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は有界であるから、補助定理 1.8 により  $u_k, l_k, u, l$  を定義する。(1.3) が成り立つとき、 $u_{N+1} - l_{N+1}$  が (1.3) の左辺の上限であるから  $0 \leq u_{N+1} - l_{N+1} \leq \epsilon < 2\epsilon$  が得られる。不等式 (1.2) により  $0 \leq u - l < 2\epsilon$  となり、 $u = l$  となる。 $l_n \leq a_n \leq u_n$  であるから補助定理 1.4 により  $a_n \rightarrow u = l$  となる。□

無限数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の最初の  $n$  個の数の和  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  を級数 (series)  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  の第  $n$  部分和という。部分和の数列  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  が収束するとき、級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  は収束するといひ、その極限値を級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  の和といひ、それを  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  で表す。

級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  の項  $a_k$  の絶対値  $|a_k|$  を項とする級数  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  が収束するとき、元の級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  も収束する。このとき、級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  は絶対収束 (absolute convergence) するという。すべての項が正または 0 である級数を正項級数という。

[元の級数も収束することの証明] 級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  と級数  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  の第  $n$  部分和を  $s_n$  と  $t_n$  とする。 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  は非減少列であるから、定理 1.2 により  $t = \sup\{t_n\}$  に収束する。任意の正数  $\epsilon > 0$  にたいして正整数  $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $0 \leq t - t_N < \epsilon$  となるので、 $n > m \geq N$  のとき、

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = t_n - t_m \leq t - t_m \leq t - t_N < \epsilon$$

となる。すなわち、 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  は Cauchy 列である。□

**定理 1.4** 正項級数が収束するとき、その級数の和は項の順序によらない。また、絶対収束する級数の和は項の順序によらない。

[正項級数のときの証明] 元の級数を  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  とし、その和を  $s$  で表し、第  $n$  部分和を  $s_n$  で表す。項の順序を並べ替えた級数を  $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k(l)}$  とする。したがって、 $k(1), k(2), k(3), \dots$  は  $1, 2, 3, \dots$  を並べ替えた数列である。項の順序を並べ替えた級数の第  $n$  部分和を  $s'_n$  で表す。すなわち、 $s'_n = \sum_{l=1}^n a_{k(l)}$  とする。ここで、任意の  $n \in \mathbf{N}$  にたいして  $N'' = \max_{1 \leq l \leq n} k(l)$  とすると、 $s'_n \leq s_{N''} \leq s$  が示される。これは非減少列  $\{s'_n\}$  の極限値  $s'$  が存在して、 $s' \leq s$  であることを示す。次に、任意の  $n \in \mathbf{N}$  にたいして  $N' \in \mathbf{N}$  を  $\{1, 2, \dots, n\} \subset \{k(1), k(2), \dots, k(N')\}$  となるように選ぶ。このとき、 $s_n \leq s'_{N'} \leq s'$  となる。これは  $s \leq s'$  を示す。上に、 $s' \leq s$  も示したので、 $s' = s$  が成り立つ。これは、項の順序を変えた級数  $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k(l)}$  が元の級数の和  $s$  に収束することを示す。□

[絶対収束する級数のときの証明] 元の級数を  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  とし、 $k \in \mathbf{N}$  にたいし、非負数  $a_k^+$  と  $a_k^-$  を

$$a_k^+ = \max\{a_k, 0\}, \quad a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$$

で定義する。このとき、

$$a_k = a_k^+ - a_k^-, \quad |a_k| = a_k^+ + a_k^-$$

となる。 $a_k^+ \leq |a_k|$ ,  $a_k^- \leq |a_k|$  が成り立ち、 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  が収束するので正項級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$  も収束する。このとき、補助定理 1.5 により、

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- \tag{1.4}$$

となる。上と同様に、項の順序を並べ替えた級数を  $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k(l)}$  とすると、

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{k(l)} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{k(l)}^+ - \sum_{l=1}^{\infty} a_{k(l)}^-$$

となる。この右辺の二つの級数は正項級数であり、和は項の順序によらないので、この右辺は (1.4) の右辺に等しい。したがって、両方の左辺も等しい。□

### 1.3 点集合と零集合

一次元、二次元、三次元空間の点は、その直角座標成分により、それぞれ  $x, (x, y), (x, y, z)$  と表される。一般に正整数  $n$  にたいして、点が  $n$  個の実数により  $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  と表されるものとして、 $n$  次元空間は、そのような点の集合とする。この空間は  $\mathbf{R}^n$  で表される。この空間の 2 点間には距離が導入される。それは、2 点が  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  と  $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$  のときには  $(\sum_{k=1}^n |x^{(k)} - y^{(k)}|^2)^{1/2}$  とし、 $|x - y|$  で表す。要素が空間の点である集合を点集合という。

**例 1.3.1**  $n$  次元空間  $\mathbf{R}^n$  の 2 点  $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)})$  と  $b = (b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(n)})$  の成分について不等式  $a^{(k)} < b^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  が成り立つときに、 $a^{(k)} < x^{(k)} < b^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  を満たす点  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  の集合は直方体であるという。その体積は  $\prod_{k=1}^n (b^{(k)} - a^{(k)})$  で与えられる。一次元ではこの直方体は区間であり、二次元では矩形である。このとき、体積は長さまたは面積である。

$n$  次元空間  $\mathbf{R}^n$  の点集合に関して、いくつかの言葉の定義をしておく。ここでは、空間  $\mathbf{R}^n$  を  $E$  で表し、集合  $A$  と  $B$  はその部分集合とする。空間  $E$  の点  $a \in E$  のまわりの半径  $\delta$  の開球を  $B(a, \delta)$  で表す。それは、 $|x - a| < \delta$  を満たす点  $x \in E$  の集合である。この開球を  $a$  の  $\delta$  近傍という。

集合  $A$  の点の列  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  にたいし、 $x \in E$  が存在して、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x| = 0 \tag{1.5}$$

が成り立つとき、その列は  $x$  に収束する (converge) といい、これを  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  で表す。このとき、 $x$  は  $A$  の集積点であるという。

集合  $A$  は、 $A$  の集積点のすべてが  $A$  に属するとき、閉集合 (closed set) であるという。

集合  $E$  に属し、集合  $A$  に属さない点の集合を  $A$  の補集合 (complementary set) といい、 $A^c = E \setminus A$  で表す。集合  $A$  は、 $A$  の補集合  $A^c$  が閉集合であるとき、開集合 (open set) であるという。

$A$  が開集合であるとき、その任意の要素を  $a \in A$  とすると、正数  $\delta > 0$  が存在して、 $B(a, \delta) \subset A$  となる。

[帰びゅう法 (背理法, reductio ad absurdum) による証明] そのような  $\delta$  が存在しないとすると、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして  $B(a, \epsilon) \not\subset A$  となり、 $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  を  $\epsilon_n > 0$ ,  $\epsilon_n \rightarrow 0$  とするとき、 $x_n \in A^c$ ,  $|x_n - a| < \epsilon_n$  となる  $\{x_n\}$  が存在する。このとき、 $x_n \rightarrow a$  であり、 $A^c$  は閉集合であるから  $a \in A^c$  となり、 $a \in A$  に矛盾する。□

ある  $\delta > 0$  の  $a$  の  $\delta$  近傍を含む開集合を  $a$  の近傍 (neighbourhood) という。

$A$  を含む最小の閉集合を  $A$  の閉包 (closure) といい、 $\bar{A}$  で表す。 $\bar{A}$  は、 $A$  にその集積点のすべてをつけ加えたものである。 $A$  が閉集合であるとき、 $A = \bar{A}$  となる。

**例 1.3.2** 区間  $[0, 1]$  にある有理数の集合を  $A$  とすると、 $\bar{A} = [0, 1]$  となる。

$A$  は閉集合であるとする。 $\bar{B} = A$  が成り立つときに、 $B$  は  $A$  で稠密 (dense) であるという。このとき、任意の  $x \in A$  に収束する  $B$  の要素の列  $\{x_k\}$  が存在する。

**例 1.3.3** 区間  $[0, 1]$  にある有理数の集合は  $[0, 1]$  で稠密である。

[証明]  $x \in [0, 1]$  が有理数のときには、すべての  $k \in \mathbf{N}$  にたいして  $x_k = x$  とすればよい。 $x \in [0, 1]$  が無理数のときには、 $x_k = [10^k x]/10^k$  とすればよい。ここで  $[t]$  は  $t$  が非負の実数のとき、その整数部分を表す。□

点集合  $A$  は、 $A$  に属する無限個の点の列が  $A$  に属する点に収束するような部分列を含むときにコンパクト (compact) であるという。

**例 1.3.4** 一次元空間の有限区間  $[a_0, b_0]$  はコンパクトである。

[証明] この区間にある無限個の点の列  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  を考える。補助定理 1.6 (節 1.2) により、これから収束する部分列がとれる。□

点集合  $A$  は、ある正数  $M$  が存在して、 $A$  に属する任意の要素  $x \in A$  にたいして、 $|x| < M$  が成り立つときに有界 (bounded) であるという。

点集合  $A$  がコンパクトであるとき、 $A$  は有界な閉集合である。

$n$  次元空間の点  $x$  の関数  $f(x)$  を考える。閉集合  $A$  の補集合  $A^c = \mathbf{R}^n \setminus A$  上のすべての点  $x$  で関数  $f(x)$  が 0 あるとき、集合  $A$  をその関数の台 (support) と呼ぶ。関数の台が有界集合のときに、その関数はコンパクトな台 (compact support) をもつという。 $x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  は、ある  $b \in \mathbf{R}$  にたいし  $x > b$  ( $x < b$ ) のとき  $f(x) = 0$  が成り立つとき、右側で (左側で) 有界な台をもつという。

$n$  次元空間の点集合  $e$  を考える。点  $x$  が集合  $e$  に属するときに 1 に等しく、属さないときに 0 に等しい関数  $\chi_e(x)$  を集合  $e$  の特性関数 (characteristic function) という。

**例 1.3.5** 一次元の区間  $(a, b)$  の特性関数は  $\chi_{(a,b)}(x)$  で表される。それは

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.6)$$

である。

$n$  次元空間  $\mathbf{R}^n$  の点集合  $A$  は、任意の正数  $\epsilon$  にたいして、体積の総和が  $\epsilon$  を越えない可算個の点集合  $O_1, O_2, O_3, \dots$  が存在して、 $A$  が和集合  $\cup_{k=1}^{\infty} O_k$  で覆われるとき、零集合 (null set, set of zero measure) と呼ばれる。

ある性質が零集合を除いて成り立つとき、その性質は殆どいたるところで (almost everywhere) 成り立つという。以下で、証明と式の中では、簡単のため、これを a.e. で表す。

例 1.3.6  $e$  が零集合のとき、その特性関数  $\chi_e(x)$  は

$$\chi_e(x) = 0, \quad \text{a.e.}$$

である。

例 1.3.7 可算個零集合の和集合は零集合である。

[証明] 可算個の零集合を  $A_1, A_2, \dots$  とし、 $\epsilon > 0$  を任意に小さい正数とする。 $A_k$  を体積の和が  $\epsilon/2^k$  を越えない点集合で覆うことができる。したがって、その和集合を  $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon/2^k = \epsilon$  で覆うことができる。□

例 1.3.8 区間  $[0, 1]$  にある有理数の集合は零集合である。

### Heine-Borel の定理

$n$  次元空間  $\mathbf{R}^n$  の点の閉集合が可算個の開集合で覆われていたとする。このとき、可算個の開集合の中の有限個で覆うことができる。

[証明] 証明は一次元の閉区間  $[a_0, b_0]$  の場合について行なう。これが可算個の開集合の中の有限個で覆えなかったとする。そのとき、区間  $[a_0, b_0]$  を二つの区間  $[a_0, c_0]$  と  $[c_0, b_0]$  に分ける。その中の少なくとも一方は有限個で覆えないはずである。そちらを  $[a_1, b_1]$  とする。同様に進むと次々の区間は前のものに含まれ、長さは半分であるから、一点に収束する。元々その一点を含む開集合があった筈であるから、これは矛盾である。□

## 1.4 連続関数とその微分、平均値の定理

$x \in \mathbf{R}^n$  の関数  $f(x)$  は、 $M > 0$  が存在して、すべての  $x$  にたいして、

$$|f(x)| < M \tag{1.7}$$

が成り立つときに、有界 (bounded) であるという。

$x \in \mathbf{R}^n$  の関数  $f(x)$  は、任意の  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $\epsilon > 0$  にたいして、 $\delta > 0$  が存在して、 $|x - x'| < \delta$  を満たすすべての  $x'$  にたいして、

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \tag{1.8}$$

が成り立つときに、連続 (continuous) であるという。

$x \in \mathbf{R}^n$  の関数  $f(x)$  は、 $\epsilon > 0$  にたいして、 $\delta > 0$  が存在して、 $|x - x'| < \delta$  を満たすすべての  $x, x'$  にたいして、(1.8) が成り立つときに、一様連続 (uniformly continuous) であるという。

定理 1.5  $\mathbf{R}^n$  の閉領域で定義された連続関数は有界、一様連続である。

[一様連続の証明]  $\mathbf{R}$  の閉区間  $[a, b]$  の場合の証明を行なう。

関数を  $f(x)$  とする。 $\epsilon > 0$  を与えると、 $[a, b]$  の任意の  $x$  にたいして  $\delta(\epsilon, x)$  が決まり、 $x'$  が区間  $[a, b]$  に属し、开区間  $(x - \delta(\epsilon, x), x + \delta(\epsilon, x))$  に属するときには  $|f(x') - f(x)| < \epsilon$  が成り立つ。このような开区間を  $[a, b]$  に属するすべての有理数  $x$  にたいして作ると、その数は可算個であり、その和集合で  $[a, b]$  は覆われる。このとき、Heine-Borel の定理 (節 1.3) によ

り、 $[a, b]$  は、その中の有限個で覆われる。その個数を  $K$  とし、その  $K$  個の開区間の中心を小さい方から  $x_1, x_2, \dots, x_K$  とし、対応する区間を  $I_1, I_2, \dots, I_K$  とする。 $K$  個の  $\delta(\epsilon, x_k)$  の中で最も小さいものを  $\delta = \delta(\epsilon)$  とすると、 $x$  と  $x'$  が  $[a, b]$  に属し、 $|x - x'| < \delta$  を満たすときには、それらは同じ開区間  $I_k$  に属するか、一方が  $I_k$  に属し、他方が  $I_{k+1}$  に属するかである。同じ開区間  $I_k$  に属する場合には、

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x')| < 2\epsilon$$

となる。 $x$  が  $I_k$  に属し、 $x'$  が  $I_{k+1}$  に属するときには、隣り合う区間  $I_k, I_{k+1}$  の両方に属する点を  $x''$  とすると、 $x$  と  $x''$  が同じ開区間  $I_k$  に属し、 $x'$  と  $x''$  が同じ開区間  $I_{k+1}$  に属するので、

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(x'')| + |f(x'') - f(x')| < 4\epsilon$$

となる。 □

[有界の証明]  $x \in [a, b]$  とすると、 $x$  は開区間の一つ  $I_k$  に属する。このとき、 $K$  個の  $|f(x_k)|$  の中の最大の値を  $M$  とすると、

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| < \epsilon + |f(x_k)| \leq M + \epsilon$$

となる。 □

超準解析では、 $f(x)$  が  $x \in \mathbf{R}^n$  で連続であることを、『 $\xi \simeq x$  ならば  $f(\xi) \simeq f(x)$ 』で表す。

[証明]  $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$  は、 $k \rightarrow \infty$  で  $|\xi_k - x|$  が 0 に単調に減少する点列であり、 $\Delta f(\xi_k) = \sup_{\{y \mid |y-x| \leq |\xi_k - x|\}} |f(y) - f(x)|$  であるとする。 $f(x)$  が  $x$  で連続であるとき、(1.8) により無限大整数  $k$  にたいして  $f(\xi_k) \simeq f(x)$  となり、更に  $\Delta f(\xi_k) \simeq 0$  となる。このとき、補助定理 1.7 により、 $\epsilon > 0$  を有限実数とするとき  $\Delta f(\xi_k) > \epsilon$  となる  $k$  は有限個であり、したがって  $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $k > N$  のとき  $\Delta f(\xi_k) < \epsilon$  となる。ここで  $\delta = |\xi_N - x|$  とするとき、 $|x - x'| < \delta$  を満たすすべての  $x'$  にたいして、(1.8) が成り立つ。 □

関数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  は、すべての  $x$  にたいして、 $a_n = f_n(x)$  で定義される数列  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  が収束するときに、収束するという。関数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  が収束するときに、 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  となる関数  $f(x)$  を関数列の極限関数または極限という。関数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  は、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  のとき、 $\mathbf{R}^n$  の部分集合  $I$  のすべての  $x$  で

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{1.9}$$

が成り立つならば、 $I$  で  $f(x)$  に一様収束 (uniform convergence) するという。このとき、 $n \rightarrow \infty$  で  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  となる。

**例 1.4.1**  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  にたいし  $f_n(x) = x^n$  とする。 $I_1$  が区間  $I_1 = (0, 1)$  であるとき、 $f_n(x)$  は  $f(x) = 0$  に収束する。このとき  $\sup_{x \in I_1} |f_n(x) - f(x)| = 1$  であるから、区間  $I_1$  で一様収束しない。区間  $I_2$  を  $I_2 = (0, 0.5)$  とするときには、 $\sup_{x \in I_2} |f_n(x) - f(x)| = 0.5^n$  であるから、区間  $I_2$  では一様収束する。

関数の級数  $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$  は、その部分 and  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  の列  $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty$  が収束するときに、収束するといいい、部分 and の列  $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty$  が一様収束するときに、一様収束するという。

### Weierstrass の判定法

関数の級数  $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$  は、その項  $f_n(x)$  が、収束する級数  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  の対応する項  $a_n$  で押さえられているとき、すなわち  $|f_n(x)| < a_n$  が成り立つときには一様収束する。

**定理 1.6** 連続関数の列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  が一様収束するときには、その極限関数  $f(x)$  は連続である。

[証明]  $f_n(x)$  は  $f(x)$  に一様収束するから、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  のとき、すべての  $x$  で (1.9) が成り立つ。 $f_n(x)$  は連続であるから、その  $\epsilon > 0$  にたいして、 $\delta > 0$  が存在して、 $|x - y| < \delta$  のとき

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$$

が成り立つ。したがって、

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\epsilon$$

となり、 $f(x)$  の連続性が示された。 □

$x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  が連続な点  $x$  において、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.10}$$

の有界な極限值が存在するときに、その極限値を  $\frac{d}{dx}f(x)$  または  $f'(x)$  と書き、それを  $f(x)$  の点  $x$  における微係数という。有界な微係数  $f'(x)$  が存在するときに、 $f(x)$  は点  $x$  で微分可能であるという。 $f'(x)$  は  $x$  の関数として、関数  $f(x)$  の導関数という。

関数  $f(x)$  の  $n$  次微分、 $n$  次導関数は  $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$  により定義される。なお、 $f'(x) = f^{(1)}(x)$ 、 $f''(x) = f^{(2)}(x)$  である。

**平均値の定理 (mean-value theorem)**

$x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続であり、 $(a, b)$  で微分可能であるとする。このとき、 $\xi \in (a, b)$  が存在して、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{1.11}$$

が成り立つ。

**平均値の定理の拡張**

$x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続であり、 $(a, b)$  で微分可能であるとする。このとき、 $\xi \in (a, b)$  が存在して、

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi) \tag{1.12}$$

が成り立つ。

[(1.12) の導出]  $h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)]$  とすると、 $h(a) = h(b) = 0$  が成り立つ。すべての  $x \in [a, b]$  で  $h(x) = 0$  ならば、すべての  $x$  で  $h'(x) = 0$  となる。 $h(x) > 0$  または  $h(x) < 0$  となる  $x \in (a, b)$  が存在するならば、 $h(x)$  が最大または最小になる  $x$  を  $\xi$  とする。この点で  $h(x)$  は微分可能であり、 $h'(\xi) = 0$  となる。 □

[(1.11) の導出] (1.12) で  $g(x) = x$  として、(1.11) を得る。 □

**Taylor の公式**

$x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  は  $n$  次までの導関数が  $a \in \mathbf{R}$  を含む区間で連続であり、 $x$  もその区間に含まれるときには、 $\xi \in (a, x)$  または  $\xi \in (x, a)$  を満たす  $\xi$  が存在して、

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n \quad (1.13)$$

が成り立つ。

[証明]  $F(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ ,  $G(x) = (x-a)^n$  とする。このとき、 $F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n-1)}(a) = 0$ ,  $G(a) = G'(a) = \dots = G^{(n-1)}(a) = 0$  となる。これを用いて、(1.12) を次のように適用する。

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \dots = \frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{G^{(n-1)}(\xi_{n-1})} \\ &= \frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - F^{(n-1)}(a)}{G^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - G^{(n-1)}(a)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} \end{aligned}$$

$a < x$  ならば、 $a < \xi_n < \xi_{n-1} < \dots < \xi_1 < x$  であり、 $a > x$  ならば、 $a > \xi_n > \xi_{n-1} > \dots > \xi_1 > x$  である。□

**1.5 単調関数、有界変動関数とその微分**

この節では、関数はすべて  $\mathbf{R}$  または、その部分区間で定義されているものとする。

関数  $f(x)$  は、 $x < \xi$  を満たすすべての  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\xi \in \mathbf{R}$  にたいして

$$f(x) \leq f(\xi) \quad (1.14)$$

が成り立つときに非減少関数 (non-decreasing function) であるという。この不等号が  $\geq$  ならば非増加関数 (non-increasing function) という。このいずれかであるときに単調関数 (monotonic function) であるという。

区間  $[a, b]$  で定義された関数  $f(x)$  について、この区間に有限個の点  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  を  $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$  となるように取り、和

$$\sum_{k=1}^n |f(a_k) - f(a_{k-1})| \quad (1.15)$$

を計算し、その上限値  $T(a, b)$  を  $f(x)$  の区間  $(a, b)$  での全変動 (total variation) という。全変動が有限である関数を有界変動関数 (function of bounded variation) という。

**定理 1.7** 関数  $f(x)$  が有界変動であるためには、それが非減少関数の差で表されることが必要十分である。

[十分の証明]  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  は  $[a, b]$  で非減少関数であるとする。 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  とする。このとき、(1.15) の項について、

$$\begin{aligned} |f(a_k) - f(a_{k-1})| &= |f_1(a_k) - f_2(a_k) - f_1(a_{k-1}) + f_2(a_{k-1})| \\ &\leq f_1(a_k) - f_1(a_{k-1}) + f_2(a_k) - f_2(a_{k-1}) \end{aligned}$$

が成り立つので、これを加えると、

$$T(a, b) \leq f_1(b) - f_1(a) + f_2(b) - f_2(a)$$

が得られる。□

[必要の証明]  $x \in [a, b]$  とし、 $T(a, x)$  を  $T(x)$  で表す。 $\xi$  を  $x < \xi \leq b$  とすると、

$$|f(\xi) - f(x)| \leq T(\xi) - T(x)$$

が成り立つ。したがって、

$$T(x) - f(x) \leq T(\xi) - f(\xi), \quad T(x) + f(x) \leq T(\xi) + f(\xi)$$

となる。これは、

$$N(x) = \frac{1}{2}[T(x) - f(x) + f(a)], \quad P(x) = \frac{1}{2}[T(x) + f(x) - f(a)]$$

で定義される関数  $N(x)$  と  $P(x)$  が非減少関数であることを示す。等式  $T(x) = P(x) + N(x)$  および

$$f(x) = f(a) + P(x) - N(x)$$

は明らかである。□

**補助定理 1.10** 閉区間  $[a, b]$  で有界変動な関数  $f(x)$  の不連続点  $x = y$  で極限值  $f(y+) = \lim_{h \rightarrow +0} f(y+h)$ ,  $f(y-) = \lim_{h \rightarrow +0} f(y-h)$  が存在する。

[証明]  $f(x)$  は非減少関数であるとして、 $f(y+)$  にたいして証明する。 $0 < h_1 < b - y$  とし、 $0$  に収束する減少列  $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$  を選ぶ。このとき、数列  $f(y+h_k)_{k=1}^{\infty}$  は非増加列であり、下界  $f(a)$  が存在するので、収束する。その極限が  $f(y+)$  であることが示される。□

**定理 1.8** 閉区間  $[a, b]$  で有界変動な関数  $f(x)$  の不連続点の集合は零集合である。

[証明]  $f(x)$  は非減少関数であるとして証明する。 $x = y$  は  $f(x)$  の不連続点であるとする。補助定理 1.10 により  $f(x)$  の極限  $f(y+)$ ,  $f(y-)$  が存在する。そこでの跳びは  $\Delta f(y) = f(y+) - f(y-)$  である。不連続点に、跳びが大きいものから順序を付けることにすると、 $k$  番目の不連続点を  $y_k$  とすると、

$$k \Delta f(y_k) \leq \sum_{j=1}^k \Delta f(y_j) \leq f(b-) - f(a+)$$

が成り立ち、跳びが  $\Delta f(y)$  である不連続点には  $[f(b-) - f(a+)]/\Delta f(y)$  以下の番号がつく。したがって、不連続点の集合は可算個の点の集合である。□

**補助定理 1.11**  $g(x)$  が区間  $[a, b]$  で定義された有界変動な関数であり、 $(a, b)$  にある不連続点  $x$  では

$$\min\{g(x+), g(x-)\} \leq g(x) \leq \max\{g(x+), g(x-)\}$$

が成り立つものとする。ここで、関数  $G(x)$  を

$$G(x) = \begin{cases} \max\{g(x+), g(x-)\}, & x \in (a, b) \\ g(a+), & x = a \\ g(b-), & x = b \end{cases} \quad (1.16)$$

で定義し、 $E$  は次の条件を満たす  $x \in (a, b)$  の集合であるとする。条件は、 $g(\xi) > G(x)$  を満たす  $\xi \in (x, b]$  が存在するというものである。このとき、 $E$  は空集合であるか開集合である。  $E$  が開集合であるときには、それは有限個または可算個の重なりがない开区間  $(a_k, b_k)$  からなり、その両端で

$$g(a_k+) \leq G(b_k) \quad (1.17)$$

が成り立つ。

[証明]  $x_1$  が  $E$  に属するとき、 $\xi > x_1$  が存在して、 $G(x_1) < g(\xi)$  が成り立つ。このとき、(1.16) により  $g(x_1+) < g(\xi)$ ,  $g(x_1-) < g(\xi)$  となるので、 $x_1$  の近傍の  $x$  についても同じ不等式が成り立ち、 $E$  に属する。したがって、 $x_1$  は  $E$  の内点である。すなわち、 $E$  は開集合である。開区間  $(a_k, b_k)$  が  $E$  を構成する区間の一つであるとする。このとき、 $x \in (a_k, b_k)$  ならば  $G(x) < G(b_k)$  が成り立つことを下で証明する。ここで  $x \rightarrow a_k+$  とすると、(1.16) を用いて、 $g(a_k+) \leq G(a_k+) \leq G(b_k)$  を得る。

なお、 $a_k \neq a$  のときには、 $a_k-$  は  $(a, b)$  に属し、 $E$  に属さないので  $g(a_k-) \geq G(b_k)$  が成り立つ。□

[ $x \in (a_k, b_k)$  ならば  $G(x) < G(b_k)$  が成り立つことの証明] ここで、 $G(x)$  は、その定義から、定義域の中の任意の閉区間での最大値をその閉区間に属する点で取ることに注意する。証明すべき事柄が成り立っていないとすると、 $\epsilon > 0$  が存在して、 $G(x)$  は  $[a_k + \epsilon, b_k]$  での最大値を  $x_1 \neq b_k$  で取り、その値は  $G(x_1) \geq G(b_k)$  となる。このとき、 $x_1 \in E$  であるから  $\xi > b_k$  で  $g(\xi) > G(x_1) \geq G(b_k)$  となる  $\xi$  が存在するので、 $b_k \in E$  となり、 $b_k \notin E$  に矛盾する。□

**補助定理 1.12** 補助定理 1.11 の条件で  $\xi > x$  を  $\xi < x$  で置き換えると (1.17) は  $G(a_k) \geq g(b_k-)$  となる。

### 微分に関する Lebesgue の定理

閉区間  $[a, b]$  で有界変動な関数  $f(x)$  は  $(a, b)$  の殆どいたるところで有界な微係数をもつ。

[証明] 証明は、 $f(x)$  が非減少関数である場合について行なう。 $x \in (a, b)$  にたいし  $[f(x+h) - f(x+)]/h$  の  $h > 0$  からの  $h \rightarrow 0$  の上極限值、下極限值を  $\Lambda_r, \lambda_r$  とし、 $[f(x+h) - f(x-)]/h$  の  $h < 0$  からの  $h \rightarrow 0$  の上極限值、下極限值を  $\Lambda_l, \lambda_l$  とする。ここで導入された  $\Lambda_r, \lambda_r, \Lambda_l, \lambda_l$  は  $x$  に依存する。以下で a.e. で不等式  $\Lambda_r < \infty$  と  $\Lambda_r \leq \lambda_l$  を証明する。 $-f(-x)$  にこの結果を用いると、 $\Lambda_l < \infty$  と  $\Lambda_l \leq \lambda_r$  が得られる。 $\lambda_l \leq \Lambda_l, \lambda_r \leq \Lambda_r$  であるから、a.e. で

$$\Lambda_r \leq \lambda_l \leq \Lambda_l \leq \lambda_r \leq \Lambda_r < \infty$$

が得られ、a.e. で  $\Lambda_r = \lambda_l = \Lambda_l = \lambda_r$  が結論される。□

[a.e. で  $\Lambda_r < \infty$  の証明]  $C > 0$  とし、 $\Lambda_r > C$  の  $x \in (a, b)$  の集合を  $E$  とする。 $x \in E$  のとき  $\xi \in (x, b)$  が存在して、

$$\frac{f(\xi) - f(x+)}{\xi - x} > C$$

が成り立つ。ここで  $g(x) = f(x) - Cx$  とおくと、 $g(\xi) > g(x+)$  となる。今の場合、 $g(x+) = G(x)$  であるから、 $E$  は、補助定理 1.11 の集合  $\cup_k (a_k, b_k)$  に含まれる。補助定理 1.11 により

$$f(a_k+) - Ca_k \leq f(b_k+) - Cb_k$$

となる。ここで、 $b_k = b$  のときには  $b_k+ = b-$  とする。したがって、

$$C(b_k - a_k) \leq f(b_k+) - f(a_k+)$$

となる。これを  $k$  について加えて、

$$C \sum_k (b_k - a_k) \leq \sum_k [f(b_k+) - f(a_k+)] \leq f(b-) - f(a+) \quad (1.18)$$

を得る。これは、 $C$  を無限大にすると  $E$  は零集合となることを示す。□

[a.e. で  $\Lambda_r \leq \lambda_l$  の証明] 二つの正数を  $c, C$  を  $c < C$  を満たすように選ぶ。 $\lambda_l < c$  を満たし、 $f(x)$  が連続である点  $x \in (a, b)$  の集合を  $E_1$  とする。 $x \in E_1$  のとき、 $\xi \in (a, x)$  を満たす  $\xi$  が存在して、

$$\frac{f(\xi) - f(x-)}{\xi - x} < c$$

を満たすので、 $g(x) = f(x) - cx$  とおくと、 $g(\xi) > g(x-) = G(x)$  が成り立つ。この  $g(x)$  にたいする区間  $S_0 = (a, b)$  での補助定理 1.12 の集合が  $S_1 = \cup_k (a_k, b_k)$  であるとする、 $E_1 \subset S_1$  となる。補助定理 1.12 により、

$$G(a_k) = f(a_k+) - ca_k \geq g(b_k-) = f(b_k-) - cb_k$$

したがって、

$$f(b_k-) - f(a_k+) \leq c(b_k - a_k) \quad (1.19)$$

が成り立つ。

次に、 $\Lambda_r > C$  となる  $x \in (a_k, b_k)$  の集合を  $E_{2,k}$  とする。 $g(x) = f(x) - Cx$  とおくと、 $\Lambda_r < \infty$  の証明のときと同様に、この場合の補助定理 1.11 の集合を  $S_{2,k} = \cup_l (a_{kl}, b_{kl})$  とすると、 $E_{2,k} \subset S_{2,k}$  となり、(1.18) に対応して、

$$C \sum_l (b_{kl} - a_{kl}) \leq f(b_k-) - f(a_k+) \quad (1.20)$$

が成り立つ。 $\Lambda_r > C$  となる  $x \in S_1$  の集合は  $E_2 = \cup_k E_{2,k}$  となり、それは  $S_2 = \cup_k S_{2,k}$  に含まれる。集合  $S_0, S_1, S_2$  のそれぞれに含まれる区間の長さの和を  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  とすると、(1.19) と (1.20) から

$$C\Sigma_2 \leq \sum_k [f(b_k-) - f(a_k+)] \leq c\Sigma_1 \leq c\Sigma_0$$

という関係が得られる。

以上で  $S_0 = (a, b)$  から  $S_2 = \cup_k \cup_l S_{2,kl}$  を作った。同様にして、 $S_{2,kl} = (a_{kl}, b_{kl})$  から  $S_{4,kl}$  を作り、 $S_4 = \cup_k \cup_l S_{4,kl}$  を作る。これを繰り返すと、 $n = 1, 2, \dots$  で

$$C\Sigma_{2n} \leq c\Sigma_{2n-1} \leq c\Sigma_{2n-2}$$

が得られる。これから、

$$\Sigma_{2n} \leq \left(\frac{c}{C}\right)^n (b-a)$$

が得られる。 $\Lambda_r > C$ 、 $\lambda_l < c$  を満たす  $f(x)$  の連続点  $x$  はすべて  $\Sigma_{2n}$  に含まれるので、それは零集合である。 $\lambda_l < \Lambda_r$  を満たす  $f(x)$  の連続点  $x$  が存在すれば、 $\lambda_l < c < C < \Lambda_r$  を満たす有理数の  $c, C$  が存在するので、すべての有理数の組  $c, C$  にたいする  $\lambda_l < c < C < \Lambda_r$  を満たす点の集合の和集合に  $\lambda_l < \Lambda_r$  の点  $x$  の集合は含まれる。前者は零集合であるから後者も零集合である。□

### 微分に関する Fubini の定理

$n \in \mathbf{N}$  にたいして  $f_n(x)$  が区間  $[a, b]$  で単調非減少関数であるとし、さらに、級数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  が収束するとする。その和を  $f(x)$  で表すと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'(x), \quad \text{a.e.} \quad (1.21)$$

が成り立つ。

[証明]  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  とする。 $x' > x$  のとき、

$$0 \leq s_n(x') - s_n(x) = \sum_{k=1}^n [f_k(x') - f_k(x)] \leq f(x') - f(x) \quad (1.22)$$

が成り立つ。したがって、 $f(x)$  は非減少関数であり、a.e. で微分可能である。(1.22) により、

$$s'_n(x) \leq f'(x) \quad (1.23)$$

が成り立つ。(1.22) により

$$f(x) - s_n(x) \leq f(x') - s_n(x') \quad (1.24)$$

となる。ここで、 $k \in \mathbf{N}$  にたいして、 $n_k$  を

$$f(b) - s_{n_k}(b) < 2^{-k}, \quad f(a) - s_{n_k}(a) > -2^{-k} \quad (1.25)$$

となるように選ぶ。

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [f(x) - s_{n_k}(x)]$$

とすると、(1.25) により、これは収束し、(1.24) が示すように各項が非減少関数であるから、非減少関数となる。したがって、 $g(x)$  は微分可能であり、 $K \in \mathbf{N}$  とするとき、 $g(x) - \sum_{k=1}^K [f(x) - s_{n_k}(x)]$  も非減少関数であるから、その微係数は正である。すなわち不等式

$$\sum_{k=1}^K [f'(x) - s'_{n_k}(x)] \leq g'(x)$$

が成り立つ。(1.23) が示すように、左辺は非負項の級数であるから  $K \rightarrow \infty$  で収束し、その項は  $k \rightarrow \infty$  で 0 になり、

$$f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s'_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad \text{a.e.}$$

が示される。 □

## 1.6 無限積

数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  は、 $n \in \mathbf{N}$  にたいし  $a_n \neq -1$  とする。 $n \in \mathbf{N}$  にたいし  $p_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$  とする。数列  $\{p_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が  $p$  に収束するとき、

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) \quad (1.26)$$

で表す。この右辺を無限積 (infinite product) という。 $u_k = \log(1 + a_k)$  とするとき  $p_n = e^{\sum_{k=1}^n u_k}$  であるから、級数  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  が収束するとき、

$$p = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+a_k)} \quad (1.27)$$

となる。級数  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  が絶対収束するとき、無限積  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$  は絶対収束するという。

**定理 1.9** 無限積  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$  が絶対収束するためには、級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  が絶対収束することが必要十分である。

[証明]  $|x| < \frac{1}{3}$  のとき  $|\frac{x}{1+x}| < \frac{1}{2}$  を使い、 $|a| < \frac{1}{3}$  のとき  $|\log(1+a) - a| = |\int_0^a (\frac{1}{1+x} - 1) dx| = |\int_0^a \frac{x}{1+x} dx| \leq \frac{1}{2}|a|$ ,  $\log(1+a) = [\log(1+a) - a] + a$  を用いて、 $\frac{|a|}{2} \leq |\log(1+a)| \leq \frac{3|a|}{2}$  が示される。 □

## 2

# Lebesgue 積分

節 2.1 では、実数値関数の Lebesgue 積分の定義を行なう。複素数値関数についてはこの章の終わりに述べる。

## 2.1 Lebesgue 積分の定義

この節において関数はすべて実数値関数とする。

$\mathbf{R}^n$  上の可算個の直方体のそれぞれで一定値をとり、それ以外では 0 である関数を階段関数 (step function) という。直方体は、一次元では区間、二次元では矩形とする。この章で考える階段関数では、0 でない値をとる直方体の数が有限であり、その体積はすべて有限であるものとする。

$\phi(x)$  は  $K$  個の直方体で 0 以外の実数値  $\{a_k\}_{k=1}^K$  をとる階段関数であるとする。値  $a_k$  をとる直方体の体積が  $A_k$  であったとき、和  $\sum_{k=1}^K a_k A_k$  を  $\phi(x)$  の積分といい、 $\int \phi(x) dx$  で表す。ここで、直方体の体積は、一次元では区間の長さ、二次元では矩形の面積とする。

### 補題 A

コンパクトな台をもつ非負値の階段関数の非増加列  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  が殆どいたるところで 0 に収束するならば、その積分の列は 0 に収束する。

[証明] 関数  $\phi_1(x)$  の最大値を  $M$  とし、その関数の台を  $B$  とし、その体積を  $A$  と書くことにする。 $\epsilon$  を任意の正数とし、すべての  $k$  の  $\phi_k(x)$  の不連続点全体と関数列  $\{\phi_k(x)\}$  が収束しない点のすべてを覆う開集合で、その全体積が  $\epsilon$  以下のものを  $E_0$  とする。それぞれの  $k$  にたいして、 $B$  にあり、 $\phi_k(x) < \epsilon$  である一定値をとっている点の開集合の和集合を  $E_k$  とする。 $k \geq 1$  のとき  $E_{k+1} \supset E_k$  となり、 $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k \supset B \setminus E_0$  であるから、 $B$  のすべての点は  $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$  に含まれる。Heine-Borel の定理 (節 1.3) により、 $\{E_k\}$  の有限個で覆われる。 $\{E_k\}_{k=0}^K$  で覆われたとする。このとき  $B \subset E_K \cup E_0$  となり、

$$0 \leq \int \phi_K(x) dx < (M + A)\epsilon$$

となる。 $\int \phi_k(x) dx$  は非増加列であるから、 $\epsilon \rightarrow 0$  として、証明が終わる。□

以下で、「コンパクトな台をもつ階段関数の非減少列  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  の極限と殆どいたるところで一致する関数」という文を度々使う必要がある。簡単のため、これを単に「階段関数の非減少列  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  の極限」という。また、非減少という修飾語がない場合にも同様の省略を行う。

関数  $f(x)$  は、階段関数の非減少列  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  の極限の関数であるとする。階段関数  $\phi_k(x)$  の積分  $\int \phi_k(x) dx$  が収束するとき、関数  $f(x)$  の積分  $\int f(x) dx$  が

$$\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \phi_k(x) dx \quad (2.1)$$

で定義される。

この定義による積分の一意性を保証するために、 $f(x)$  に収束する他の階段関数の非減少列  $\{\psi_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$  が存在するとすれば、その積分の列も同じ値に収束することを証明する必要がある。ここで、その証明を行なう。

[証明] 先ず、 $\psi_l(x)$  を固定して考える。 $k \rightarrow \infty$  で、

$$\psi_l(x) - \phi_k(x) \rightarrow \psi_l(x) - f(x) \leq 0, \quad \text{a.e.}$$

となる。したがって、この左辺の正值部分  $\sup\{\psi_l(x) - \phi_k(x), 0\}$  を  $[\psi_l(x) - \phi_k(x)]^+$  で表すと、 $k \rightarrow \infty$  で

$$[\psi_l(x) - \phi_k(x)]^+ \rightarrow 0, \quad \text{a.e.}$$

となる。ここで、階段関数の積分についての不等式

$$\int \psi_l(x) dx - \int \phi_k(x) dx \leq \int [\psi_l(x) - \phi_k(x)]^+ dx$$

の右辺に補題 A を適用し、左辺第二項に (2.1) を用いて、 $k \rightarrow \infty$  の極限で

$$\int \psi_l(x) dx - \int f(x) dx \leq 0 \quad (2.2)$$

を得る。この式は、積分の列  $\{\int \psi_l(x) dx\}$  が共通の上界をもつことを示す。この積分の列は非減少列であるから、その収束が保証される。したがって、この式で  $l \rightarrow \infty$  の極限をとると、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int \psi_l(x) dx - \int f(x) dx \leq 0$$

を得る。以上の議論を  $\phi$  と  $\psi$  の役割を交換して行なう。このとき、(2.2) により、 $\{\int \psi_k(x) dx\}$  の収束が保証されていることを用いて、

$$\int f(x) dx - \lim_{k \rightarrow \infty} \int \psi_k(x) dx \leq 0$$

を得る。この二つの式から

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int \psi_l(x) dx = \int f(x) dx$$

を得る。 □

**例 2.1.1**  $f(x)$  は

$$f(x) = 0, \quad \text{a.e.}$$

とする。このとき、(2.1) ですべての  $k \in \mathbf{N}$  にたいして  $\phi_k(x) = 0$  と取ると、 $\int f(x) dx = 0$  となる。

関数  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  は、それぞれ、コンパクトな台をもつ階段関数の非減少列  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^\infty$  と  $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$  の極限と殆どいたるところで一致する関数であるとする。関数  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  の積分が存在するとき、

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \quad (2.3)$$

が成り立つ。

[(2.3) の導出] 階段関数については

$$\int [\phi_k(x) + \psi_k(x)] dx = \int \phi_k(x) dx + \int \psi_k(x) dx$$

であるから、(2.3) は定義 (2.1) により明らかである。

関数  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  は、それぞれ、コンパクトな台をもつ階段関数の非減少列の極限と殆どいたるところで一致する関数であるとする。関数  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  の積分が存在するとき、その差の関数  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  の積分は

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx \quad (2.4)$$

で定義される。

この定義の一意性を示すために、 $f(x)$  は、他の関数の組  $g_1(x)$  と  $g_2(x)$  によっても  $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$  と表せたとする。このとき、

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

したがって、

$$f_1(x) + g_2(x) = g_1(x) + f_2(x)$$

となり、(2.3) により、

$$\int f_1(x) dx + \int g_2(x) dx = \int g_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

が得られる。したがって、

$$\int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx = \int g_1(x) dx - \int g_2(x) dx$$

となり、定義 (2.4) の一意性が確かめられた。

以上 (2.1), (2.4) で定義された積分を **Lebesgue 積分** といい、Lebesgue 積分が存在する関数は可積分 (integrable) であるという。この定義により、 $f(x)$  が可積分関数であるということは、それが二つの階段関数の非減少列の極限  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  により  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  と表される関数であるということである。可積分関数の集合は  $\mathcal{L}^1$  で表される。関数が  $x \in \mathbf{R}^n$  の関数であることを表すときには  $\mathcal{L}^1$  を  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$  と書く。

## 2.2 Lebesgue 積分の性質

この節において、関数はすべて実数値関数とする。

積分は線形である。すなわち、 $f(x)$  と  $g(x)$  が可積分ならば、実数  $\lambda, \mu$  にたいして  $\lambda f(x) + \mu g(x)$  も可積分であり、

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx \quad (2.5)$$

が成り立つ。

[証明のヒント]  $f(x)$  と  $g(x)$  のそれぞれが、二つの階段関数の非減少列の極限の差で表される  
とき、 $\lambda f(x) + \mu g(x)$  もそのように表されることを示し、証明する。[証明のヒント終わり]

**補助定理 2.1** 可積分関数  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  がそれぞれの非減少列  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  と  $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  の極限であるとし、 $\zeta_k(x) = \sup\{\phi_k(x), \psi_k(x)\}$ ,  $f_1^\dagger(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x)\}$  とする。このとき、 $f_1^\dagger(x)$  は可積分関数であり、 $\{\zeta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  は非減少列で、 $f_1^\dagger(x)$  に収束する。

[証明] 先ず、 $\{\zeta_k(x)\}$  が非減少列であることを示す。a.e. で  $\zeta_k(x) = \phi_k(x) \leq \phi_{k+1}(x) \leq \zeta_{k+1}(x)$  または  $\zeta_k(x) = \psi_k(x) \leq \psi_{k+1}(x) \leq \zeta_{k+1}(x)$  が成り立つので、 $\{\zeta_k(x)\}$  は非減少列である。

次に、 $\zeta_k(x) \rightarrow f_1^\dagger(x)$  を示す。 $f_1(x) > f_2(x)$  を満たす点  $x$  では、 $\phi_k(x) = \zeta_k(x) \leq f_1(x)$  または  $\phi_k(x) \leq \psi_k(x) = \zeta_k(x) \leq f_2(x) < f_1(x)$  であり、 $\phi_k(x) \rightarrow f_1(x) = f_1^\dagger(x)$  であるから、 $\zeta_k(x) \rightarrow f_1^\dagger(x)$  は明らか。同様に、 $f_2(x) > f_1(x)$  を満たす点  $x$  では、 $\zeta_k(x) \rightarrow f_2(x) = f_1^\dagger(x)$  となる。

最後に、非減少列  $\{\zeta_k(x)\}$  の極限関数  $f_1^\dagger(x)$  が可積分であることを示す。ここで、 $\eta_1(x) = \inf\{\phi_1(x), \psi_1(x)\}$  とするとき、 $\phi_k(x) - \eta_1(x) \geq \phi_k(x) - \phi_1(x) \geq 0$ ,  $\psi_k(x) - \eta_1(x) \geq \psi_k(x) - \psi_1(x) \geq 0$  であり、不等式  $\zeta_k(x) = \sup\{\phi_k(x) - \eta_1(x), \psi_k(x) - \eta_1(x)\} + \eta_1(x) \leq \phi_k(x) - \eta_1(x) + \psi_k(x) - \eta_1(x) + \eta_1(x) \leq f_1(x) + f_2(x) - \eta_1(x)$  が成り立つ。右辺の積分は有界であるから、 $\{\zeta_k(x)\}$  の極限関数は可積分である。□

可積分関数  $f(x)$  が  $f(x) \geq 0$  ならば、 $\int f(x) dx \geq 0$  である。

[証明]  $f(x)$  は階段関数の非減少列  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  と  $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  の極限  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  により  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  と表されたとする。 $\zeta_k(x) = \sup\{\phi_k(x), \psi_k(x)\}$  とするとき、 $f_1(x) \geq f_2(x)$  であるから、補助定理 2.1 により  $\zeta_k(x) - \psi_k(x) \geq 0$  は  $f_1(x) - f_2(x)$  に収束する。したがって、その積分の極限は  $\int f(x) dx \geq 0$  である。□

関数  $f(x)$  が可積分ならば、その正值部分  $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$ 、負値部分  $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$ 、絶対値  $|f(x)|$  も可積分であり、

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx \quad (2.6)$$

が成り立つ。

[証明]  $f(x)$  は階段関数の非減少列  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  と  $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  の極限  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  により  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  と表されたとする。 $f(x)$  の正值部分  $f^+(x)$  は

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \sup\{f(x), 0\} = \sup\{f_1(x) - f_2(x), 0\} = \sup\{f_1(x) - f_2(x), f_2(x) - f_2(x)\} \\ &= \sup\{f_1(x), f_2(x)\} - f_2(x) \end{aligned}$$

と表される。補助定理 2.1 により、 $\sup\{f_1(x), f_2(x)\}$  は階段関数の非減少列の極限であるから、 $f^+(x)$  は可積分である。また、 $f^+(x) \geq 0$  であるから、その積分は非負である。

$f(x)$  の負値部分  $f^-(x)$  は

$$f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\} = \sup\{f_2(x) - f_1(x), 0\} = \sup\{f_1(x), f_2(x)\} - f_1(x)$$

と表されるので、上で  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  の役割を換えて、 $f^-(x)$  は可積分であることが示される。また、 $f^-(x) \geq 0$  であるから、その積分は非負である。このとき、

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

も可積分であり、

$$\left| \int f(x) dx \right| = \left| \int f^+(x) dx - \int f^-(x) dx \right| \leq \int f^+(x) dx + \int f^-(x) dx = \int |f(x)| dx$$

となる。 □

関数  $f(x)$  と  $g(x)$  が可積分ならば、 $\sup\{f(x), g(x)\}$  と  $\inf\{f(x), g(x)\}$  も可積分である。

[証明] 等式

$$\sup\{f(x), g(x)\} = [f(x) - g(x)]^+ + g(x)$$

$$\inf\{f(x), g(x)\} = [f(x) - g(x)]^- + g(x)$$

が成り立つので、これに上に述べた性質を用いれば明らかである。 □

**定理 2.1** 関数  $f(x)$  と  $|f(x)|$  が共に Riemann 積分可能ならば、それらは Lebesgue 積分可能であり、両積分は一致する。

[証明] この条件のもとで、 $f(x)$  の正值部分  $f^+(x) = \frac{1}{2}[f(x) + |f(x)|]$  も負値部分  $f^-(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$  も Riemann 積分可能である。このとき、 $f^+(x)$  の Riemann 積分は、積分区間の分点を細かくしたときに各区間で最小値を採用したときの積分の極限に等しい。これは階段関数の非減少列の積分の極限である。また、 $f^-(x)$  も同様である。したがって、 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$  の Riemann 積分はその Lebesgue 積分に等しい。 □

**例 2.2.1**  $f(x)$  は  $\mathbf{R}$  の閉区間  $e$  で連続な関数であり、 $\mathbf{R} \setminus e$  で  $f(x) = 0$  とする。この関数は Lebesgue 積分可能であり、Riemann 積分可能である。証明は、定理 1.5 (節 1.5) の証明の議論を用いて階段関数の列を作ることにより行える。

## 補題 B

階段関数の非減少列  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^\infty$  に属する関数  $\phi_k(x)$  の積分が共通の上界をもてば、 $\{\phi_k(x)\}$  は殆どいたるところで有限値に収束する。

[証明] 積分の共通の上界を  $A$  とし、 $\{\phi_k(x)\}$  が発散する点の集合を  $E_0$  とする。 $\psi_k(x)$  を

$$\psi_k(x) = \phi_k(x) - \phi_1(x)$$

で定義し、 $A' = A - \int \phi_1(x) dx$  とする。任意の正数  $\epsilon$  にたいして、 $\psi_k(x) > A'/\epsilon$  となる点の集合を  $\Sigma_{\epsilon,k}$  とする。 $\psi_k(x)$  は非負であり、その積分は  $A'$  より小さいから、集合  $\Sigma_{\epsilon,k}$  の体積は  $\epsilon$  より小さい。 $\psi_k(x) \leq \psi_{k+1}(x)$  であるから  $\Sigma_{\epsilon,k} \subset \Sigma_{\epsilon,k+1}$  となり、 $\cup_{k=1}^\infty \Sigma_{\epsilon,k}$  の体積も  $\epsilon$  以下になる。集合  $E_0$  は  $\cup_{k=1}^\infty \Sigma_{\epsilon,k}$  に含まれるので、その体積は  $\epsilon$  以下である。 $\epsilon$  は任意であるから、 $E_0$  は零集合である。非減少列  $\{\phi_k(x)\}$  は発散点以外では有限値に収束する。 □

## Levi の定理

可積分関数の非減少列  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  に属する関数  $f_k(x)$  の積分が共通の上界をもてば、 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  は殆どいたるところで可積分関数  $f(x)$  に収束し、積分の列  $\{\int f_k(x) dx\}_{k=1}^{\infty}$  は極限関数の積分  $\int f(x) dx$  に収束する。すなわち、このとき積分と極限は交換できる。

積分の共通の上界を  $A$  とする。証明は前半と後半からなる。

[証明の前半] ここでは、関数  $f_k(x)$  のそれぞれが階段関数の非減少列  $\{\phi_{kl}(x)\}_{l=1}^{\infty}$  の極限である場合の証明を行う。このとき、

$$\phi_{kl}(x) \leq f_k(x) \leq f_l(x), \quad k \leq l \quad (2.7)$$

である。ここで、階段関数  $\phi_l(x)$  を

$$\phi_l(x) = \sup_{k \leq l} \phi_{kl}(x)$$

で定義する。この関数の列  $\{\phi_l(x)\}$  は、補助定理 1.2 により非減少列である。 $\phi_l(x)$  は  $\phi_{kl}(x)$  の  $k \leq l$  での最大値であるから、(2.7) により

$$\phi_{kl}(x) \leq \phi_l(x) \leq f_l(x), \quad k \leq l \quad (2.8)$$

したがって、

$$\int \phi_{kl}(x) dx \leq \int \phi_l(x) dx \leq \int f_l(x) dx \leq A, \quad k \leq l \quad (2.9)$$

が成り立つ。最も右の不等式は、積分  $\int f_l(x) dx$  が共通の上界  $A$  をもつという仮定による。補題 B により階段関数の非減少列  $\{\phi_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$  の極限が存在する。それを  $f(x)$  とすると、積分の定義 (2.1) により  $\int \phi_l(x) dx$  は  $\int f(x) dx$  に収束する。 $l \rightarrow \infty$  の極限で (2.8) の左の不等式と (2.9) の左の不等式から

$$f_k(x) \leq f(x), \text{ a.e.}, \quad \int f_k(x) dx \leq \int f(x) dx$$

を得る。したがって、 $k \rightarrow \infty$  で非減少列  $\{f_k(x)\}, \{\int f_k(x) dx\}$  の極限が存在し、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \leq f(x), \text{ a.e.}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx \leq \int f(x) dx$$

となる。ここで (2.8) の右の不等式と (2.9) の真ん中の不等式で  $l \rightarrow \infty$  とすると、これらの不等式で不等号の向きを逆にした式が得られる。したがって、 $k \rightarrow \infty$  で  $f_k(x)$  は a.e. で  $f(x)$  に収束し、 $\int f_k(x) dx$  は  $\int f(x) dx$  に収束する。□

[証明の後半] ここでは、関数  $f_k(x)$  のそれぞれが、階段関数の非減少列の極限で表される可積分関数  $g_k(x)$  と  $h_k(x)$  の差で

$$f_k(x) = g_k(x) - h_k(x)$$

と表される場合の証明を行う。ここで、 $k \in \mathbf{N}$  にたいして  $\Delta f_k(x) = f_{k+1}(x) - f_k(x)$  とすると、 $f_n(x)$  は

$$f_n(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta f_k(x) \quad (2.10)$$

と表される。 $\psi_k(x)$  を以下で定める階段関数として、 $\Delta g_k(x)$  と  $\Delta h_k(x)$  を

$$\Delta g_k(x) = g_{k+1}(x) + h_k(x) - \psi_k(x), \quad \Delta h_k(x) = h_{k+1}(x) + g_k(x) - \psi_k(x)$$

とすると、

$$\Delta f_k(x) = f_{k+1}(x) - f_k(x) = \Delta g_k(x) - \Delta h_k(x) \quad (2.11)$$

となる。 $\Delta g_k(x)$  と  $\Delta h_k(x)$  はいずれも階段関数の非減少列の極限である。 $h_{k+1}(x) + g_k(x)$  は階段関数の非減少列  $\{\psi_{kl}(x)\}_{l=1}^{\infty}$  の極限であるとする。このとき、 $\Delta h_k(x) \geq \psi_{kl}(x) - \psi_k(x)$  が成り立ち、十分大きい  $l$  にたいし

$$\int \Delta h_k(x) dx - \int \psi_{kl}(x) dx + \int \psi_k(x) dx < \frac{1}{2^k} \quad (2.12)$$

が成り立つ。このような  $l$  の一つを  $L$  とし、 $\psi_k(x)$  を  $\psi_k(x) = \psi_{kL}(x)$  とする。このとき、 $\Delta h_k(x) \geq 0$  であり、(2.12) は、 $l = L$  とすると、

$$\int \Delta h_k(x) dx < \frac{1}{2^k}$$

となり、

$$\int \sum_{k=1}^n \Delta h_k(x) dx < 1 \quad (2.13)$$

となる。仮定により  $\{f_n(x)\}$  は非減少列であるから  $\Delta f_k(x) \geq 0$  であり、(2.11) により  $\Delta g_k \geq \Delta h_k(x)$  となる。上に示したように  $\Delta h_k(x) \geq 0$  であるから  $\Delta g_k(x) \geq 0$  となる。ここで、すべての  $f_n(x)$  の積分は上界  $A$  をもつので、(2.10), (2.11) と (2.13) を用いて

$$\int \sum_{k=1}^n \Delta g_k(x) dx \leq A - \int f_1(x) dx + 1 \quad (2.14)$$

を得る。(2.13) と (2.14) に証明の前半を適用して、 $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta h_k(x)$  と  $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta g_k(x)$  の存在が示され、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int \Delta h_k(x) dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} \Delta h_k(x) dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int \Delta g_k(x) dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} \Delta g_k(x) dx$$

となる。 $f(x)$  を

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta g_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \Delta h_k(x)$$

とすると、(2.10) と (2.11) で表される  $f_n(x)$  は  $f(x)$  に収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx$$

が示される。 □

### Levi の定理の系

可積分関数の級数  $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$  は、級数  $\sum_{k=1}^{\infty} \int |h_k(x)| dx$  が収束するとき、可積分関数に殆どいたるところで収束し、極限関数の積分は項別に行える。

[証明]  $h_k(x)$  を正值部分  $h_k^+(x) = \sup\{h_k(x), 0\}$  と負値部分  $h_k^-(x) = -\inf\{h_k(x), 0\}$  に分ける。二つの部分和の非減少列  $\{\sum_{k=1}^n h_k^+(x)\}_{n=1}^{\infty}$  と  $\{\sum_{k=1}^n h_k^-(x)\}_{n=1}^{\infty}$  のそれぞれに Levi の定理を適用する。このとき、 $A = \sum_{k=1}^{\infty} \int |h_k(x)| dx$  とすればよい。 □

**Lebesgue の定理 (積分と極限の交換)**

可積分関数列  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  が殆どいたるところで  $f(x)$  に収束し、可積分関数  $g(x)$  が存在して、

$$|f_k(x)| \leq g(x), \quad \text{a.e.}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

が成り立つならば、 $f(x)$  も可積分で

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \int f(x) dx \quad (2.16)$$

$$|f(x)| \leq g(x), \quad \text{a.e.} \quad (2.17)$$

$$\int |f(x)| dx \leq \int g(x) dx \quad (2.18)$$

が成り立つ。

**補助定理 2.2** 可積分関数列  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  が殆どいたるところで  $f(x)$  に収束し、可積分関数  $u(x)$  が存在して、 $k \in \mathbf{N}$  にたいし、 $f_k(x) \leq u(x)$  が成り立ち、 $k \in \mathbf{N}$  にたいし、

$$u_k(x) = \sup\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots\} \quad (2.19)$$

とする。このとき、 $u_k(x)$  は可積分関数である。また、その列  $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  は非増加列であり、a.e. で  $f(x)$  に収束する。

[証明]  $\sup\{f_1(x), f_2(x)\} = f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)]^+$  は可積分関数の和であるから可積分である。同様に、 $m = 3, 4, \dots$  にたいする  $\sup\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$  も可積分である。 $m \in \mathbf{N}$  にたいするこのような関数の列は非減少列であり、その積分は  $u(x)$  の積分より小さいから Levi の定理により極限も可積分である。これを  $u_1(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), \dots\} = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$  と書く。さらに、 $k \in \mathbf{N}$  にたいし、(2.19) で定義された  $u_k(x)$  も可積分である。 $f_k(x)$  は a.e. で収束するから a.e. で有界である。補助定理 1.8 (節 1.2) により  $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  は非増加列であり、a.e. で  $\{f_k(x)\}$  の極限  $f(x)$  に収束する。□

**補助定理 2.3** 可積分関数列  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  が殆どいたるところで  $f(x)$  に収束し、可積分関数  $l(x)$  が存在して、 $k \in \mathbf{N}$  にたいし、 $f_k(x) \geq l(x)$  が成り立ち、 $k \in \mathbf{N}$  にたいし、

$$l_k(x) = \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots\}, \quad (2.20)$$

とする。このとき、 $l_k(x)$  は可積分関数である。また、その列  $\{l_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  は非減少列であり、a.e. で  $f(x)$  に収束する。

[証明] 補助定理 2.2 で、 $f_k(x)$  を  $-f_k(x)$  とし、 $f(x)$  を  $-f(x)$  とし、 $u(x)$  を  $-l(x)$  とし、 $u_k(x)$  を  $-l_k(x)$  とする。このとき、 $l_k(x)$  は可積分関数であり、(2.19) は (2.20) となる。また、 $\{l_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  は非減少列であり、a.e. で  $f(x)$  に収束する。□

[定理の証明] 定理の条件が成り立つとき、補助定理 2.2, 2.3 の条件は  $u(x) = g(x)$ ,  $l(x) = -g(x)$  として成り立つ。 $l_k(x)$ ,  $u_k(x)$  を (2.20), (2.19) で定義するとき、

$$l_k(x) \leq f_k(x) \leq u_k(x),$$

であるから、

$$\int l_k(x) dx \leq \int f_k(x) dx \leq \int u_k(x) dx \quad (2.21)$$

が成り立つ。これに (2.15) を用いて、

$$\int l_k(x) dx \leq \int g(x) dx, \quad - \int u_k(x) dx \leq \int g(x) dx \quad (2.22)$$

を得るので、非減少列  $\{l_k(x)\}, \{-u_k(x)\}$  に Levi の定理を適用すると、極限関数  $f(x), -f(x)$  も可積分であり、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int l_k(x) dx = \int f(x) dx, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k(x) dx = \int f(x) dx$$

となる。これを (2.21) の左辺と右辺に用いて (2.16) を得る。(2.17) は (2.15) より明らかである。 $f(x)$  が可積分のとき  $|f(x)|$  も可積分であるから、(2.18) は (2.17) より明らかである。□

### Lebesgue の定理の拡張

Lebesgue の定理は、条件 (2.15) を極限関数  $f(x)$  にたいする条件

$$|f(x)| \leq g(x), \quad \text{a.e.} \quad (2.23)$$

で置き換えても成り立つ。

[証明] Lebesgue の定理の証明で (2.22) の導出を次のように変えればよい。補助定理 2.2, 2.3 により (2.20), (2.19) で定義された  $\{l_k(x)\}, \{u_k(x)\}$  は非減少列、非増加列で a.e. で  $f(x)$  に収束するので、補助定理 1.8 (節 1.2) により不等式

$$l_k(x) \leq f(x) \leq u_k(x), \quad \text{a.e.} \quad k \in \mathbf{N},$$

が得られる。これと (2.23) から  $l_k(x) \leq f(x) \leq g(x), -u_k(x) \leq -f(x) \leq g(x)$  となり、(2.22) が導かれる。□

### Fatou の補題

非負の可積分関数列  $\{f_k(x)\}$  が殆どいたるところで  $f(x)$  に収束し、積分の列  $\{\int f_k(x) dx\}_{k=1}^{\infty}$  が有界ならば、 $f(x)$  は可積分で

$$\int f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx \quad (2.24)$$

が成り立つ。

[証明] 補助定理 2.3 の条件が  $l(x) = 0$  として成り立つ。(2.20) で  $l_k(x)$  を定義するとき、 $\{l_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  は可積分関数の非減少列で a.e. で  $f(x)$  に収束する。(2.20) により  $l \geq 0$  で不等式  $l_k(x) \leq f_{k+l}(x)$  が成り立つので

$$\int l_k(x) dx \leq \int f_{k+l}(x) dx$$

となる。補助定理 1.8 (節 1.2) により  $\{\int f_l(x) dx\}_{l=1}^{\infty}$  の下極限が存在するので、この式で  $l \rightarrow \infty$  とし、右辺をその下極限とし、次に  $k \rightarrow \infty$  として、Levi の定理により求める結果を得る。□

**定理 2.2**  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  と  $|f(x)|$  が共に Riemann 積分の意味で広義積分可能ならば、それらは Lebesgue 積分可能であり、両積分は一致する。

[証明] この条件のもとで  $f(x)$  の正值部分  $f^+(x) = \frac{1}{2}[f(x) + |f(x)|]$  も負値部分  $f^-(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$  も Riemann 積分の意味で広義積分可能である。

先ず、 $f(x)$  が非負であるとし、有限積分  $\int_a^b f(x) dx$  の広義積分が存在する場合の証明を行う。単調増加列  $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$  を、 $Y_1 > 0$  であり、 $Y_k \rightarrow \infty$  となるように選ぶ。非減少関数列  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  を  $f_k(x) = \min\{f(x), Y_k\}$  とする。 $f_k(x)$  は Riemann 積分可能である。したがって、それは可積分であり、その積分は広義積分で押さえられるので、有界であるから、Levi の定理により、極限関数  $f(x)$  は可積分であり、その積分は  $\int f_k(x) dx$  の極限、すなわち、広義積分と等しい。

次に、 $f(x)$  が非負であるとし、無限積分  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  の場合の証明を行う。単調増加列  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  を、 $X_1 > a$  であり、 $X_k \rightarrow \infty$  となるように選ぶ。非減少関数列  $\{f_k(x)\}$  を

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq X_k \\ 0, & x > X_k \end{cases} \quad (2.25)$$

とする。 $f_k(x)$  は Riemann 積分可能あるいは広義積分可能であるとする。以下の議論は上と同様である。

次に、 $f(x)$  が正值部分と負値部分により、 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$  と表される場合を考える。上に証明したことにより、 $f^+(x)$  と  $f^-(x)$  は可積分であり、その積分は広義積分と等しい。この結果として、 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$  についても、同じことが言える。  $\square$

### 2.3 可測関数と可測集合、可測集合での積分

ここで可積分関数と直接関連のある可測関数と可測集合に触れておく。

殆どいたるところで階段関数の極限となる関数を可測関数 (measurable function) という。

可積分関数は可測関数である。

可積分関数  $f(x)$  には、それが極限となる階段関数の列  $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在して、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  ならば、

$$\left| \int f(x) dx - \int \phi_n(x) dx \right| \leq \int |f(x) - \phi_n(x)| dx < \epsilon \quad (2.26)$$

が成り立つ。

[証明] 可積分関数の定義 (節 2.1) により、 $f(x)$  は、二つの階段関数の非減少列  $\{\phi_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$  と  $\{\phi_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$  の極限  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  により、 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  と表される。 $\phi_n(x)$  を  $\phi_n(x) = \phi_{1n}(x) - \phi_{2n}(x)$  で定義する。このとき、(2.26) の第二辺を  $I$  とするとき

$$\begin{aligned} I &= \int |[f_1(x) - \phi_{1n}(x)] - [f_2(x) - \phi_{2n}(x)]| dx \\ &\leq \int [f_1(x) - \phi_{1n}(x)] dx + \int [f_2(x) - \phi_{2n}(x)] dx \end{aligned}$$

が成り立つ。 $N$  を右辺が  $n > N$  のとき  $\epsilon$  より小さくなるように選べばよい。  $\square$

**例 2.3.1**  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  は可測関数であるが、可積分関数ではない。

関数  $f(x)$  と関数  $g(x)$  がすべての  $x$  で関係  $f(x) \leq g(x)$  を満たすとき、 $f(x)$  は  $g(x)$  で押さえられているという。

**定理 2.3** 可測関数  $f(x)$  の絶対値が可積分関数  $g(x)$  で押さえられているとき、すなわち、関係

$$|f(x)| \leq g(x) \quad (2.27)$$

が満たされているとする。このとき、可測関数  $f(x)$  は可積分である。

[証明] 可測関数  $f(x)$  は階段関数の列の極限であり、階段関数は可積分であるから、Lebesgue の定理の拡張 (節 2.2) により明らかである。□

**定理 2.4** 可測関数  $f(x)$  の絶対値  $|f(x)|$ 、二つの可測関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の和  $f(x) + g(x)$ 、差  $f(x) - g(x)$ 、積  $f(x)g(x)$ 、さらに、 $\sup\{f(x), g(x)\}, \inf\{f(x), g(x)\}$  も可測関数である。殆どいたるところで 0 ではない可測関数  $f(x)$  の逆数に殆どいたるところで一致する関数「 $g(x) = 1/f(x)$ , a.e.」も可測関数である。さらに、可測関数の列  $\{f_n(x)\}$  が殆どいたるところで収束するとき、その極限関数  $f(x)$  も可測関数である。

[ $|f(x)|, \dots, \inf\{f(x), g(x)\}$  の場合の証明]  $|f(x)|$  と  $\inf\{f(x), g(x)\}$  の場合の証明を記す。 $f(x)$  と  $g(x)$  は a.e. で階段関数の列  $\{\phi_n(x)\}$  と  $\{\psi_n(x)\}$  の極限であるとする。このとき、 $\{|\phi_n(x)|\}, \{\min\{\phi_n(x), \psi_n(x)\}\}$  は階段関数の列で、それぞれ a.e. で  $|f(x)|, \inf\{f(x), g(x)\}$  に収束する。□

[a.e. で  $g(x) = 1/f(x)$  の場合の証明]  $f(x)$  は a.e. で階段関数の列  $\{\phi_n(x)\}$  の極限であるとする。 $\phi_n(x) = 0$  のとき  $\psi_n(x) = 0$  とし、 $\phi_n(x) \neq 0$  のとき  $\psi_n(x) = 1/\phi_n(x)$  とする。 $f(x) = 0$  の点を含む開集合  $E_0$  を除く a.e. で階段関数の列  $\{\psi_n(x)\}$  は  $1/f(x)$  に収束する。□

[可測関数の列  $\{f_n(x)\}$  が a.e. で  $f(x)$  に収束する場合の証明] 正値の可積分関数を  $h(x)$  とする。たとえば、有限区間ならば、 $h(x) = 1$  とし、無限区間  $(-\infty, \infty)$  ならば、 $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$  とする。このとき、

$$g_n(x) = \frac{h(x)f_n(x)}{h(x) + |f_n(x)|}, \quad g(x) = \frac{h(x)f(x)}{h(x) + |f(x)|}$$

とすると、 $g_n(x)$  は可測関数である。さらに、

$$|g_n(x)| < h(x)$$

であるから、 $g_n(x)$  は可積分関数である。 $n \rightarrow \infty$  で  $g_n(x) \rightarrow g(x)$ 、 $|g(x)| < h(x)$  であるから、Lebesgue の定理により  $g(x)$  は可積分である。したがって、

$$f(x) = \frac{h(x)g(x)}{h(x) - |g(x)|}$$

は可測関数である。□

定理 2.3、定理 2.4 により、可積分関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の積は、その絶対値が可積分関数で押さえられているときには可積分である。

**例 2.3.2** 下記の関数  $f(x)$  は  $\mathbf{R}$  で可測関数であるが、 $\mathbf{R}$  で可積分ではない。しかし、 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  に属する関数  $g(x)$  との積  $f(x)g(x)$  は、 $|f(x)g(x)| \leq |g(x)|$  を満たすので、可積分である。

$$(a) f(x) = 1, \quad (b) f(x) = \sin x, \quad (c) f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

特性関数が可測関数である集合を可測集合 (measurable set) という。

可測集合  $e$  にたいして、測度 (measure)  $m(e)$  を定義する。集合  $e$  の特性関数  $\chi_e(x)$  が可積分なら

$$m(e) = \int \chi_e(x) dx \tag{2.28}$$

とし、そうでなければ  $m(e) = \infty$  とする。

**例 2.3.3**  $\mathbf{R}$  上の有限区間  $(a, b)$  は可測集合であり、その測度は  $b - a$  に等しい (節 1.3 の例 1.3.5 参照)。

**例 2.3.4** 零集合は、測度が 0 の可測集合である。

[証明] 節 1.3 の例 1.3.6 により、零集合の特性関数を  $\chi(x)$  とすると、それは「 $\chi(x) = 0, \text{ a.e.}$ 」である。これは可積分であるから、この集合は可測集合である。その測度は節 2.1 の例 2.1.1 により  $\int \chi(x) dx = 0$  である。□

**例 2.3.5**  $f(x)$  が可測関数であるとき、 $f(x) > c$  を満たす  $x$  の集合  $e_c$  は可測集合である。

[証明] 関数  $f_c(x)$  を

$$f_c(x) = \min\{f(x), c\}$$

とする。このとき、

$$\chi_{e_c}(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f_{c+h}(x) - f_c(x)}{h}$$

で定義される関数は、定理 2.4 により可測関数である。これは集合  $e_c$  の特性関数であるから、その集合  $e_c$  は可測集合である。□

集合  $e$  は  $\mathbf{R}^n$  上の可測集合であり、その特性関数が  $\chi_e(x)$  であるとする。 $\mathbf{R}^n$  上の点  $x$  の関数  $f(x)$  は、積  $f(x)\chi_e(x)$  が可積分であるときに、 $e$  で可積分であるといい、 $e$  での積分  $\int_e f(x) dx$  は

$$\int_e f(x) dx = \int f(x)\chi_e(x) dx \quad (2.29)$$

で定義される。 $e$  が一次元の区間  $(a, b)$  のときには、 $\int_e f(x) dx$  は  $\int_a^b f(x) dx$  と書かれる。

$\mathbf{R}^n$  上の任意の有限直方体 (区間、矩形) で可積分である関数は、**局所可積分** (locally integrable) であるという。

**例 2.3.6** 例 2.2.1 に示したように  $\mathbf{R}^n$  上の閉直方体  $e$  で連続な関数は  $e$  で可積分である。したがって、 $\mathbf{R}^n$  上で連続な関数は局所可積分である。例 2.3.2 の関数  $f(x)$  は  $\mathbf{R}$  上で局所可積分である。例 2.3.2 の関数  $g(x)$  は、有限区間  $(a, b)$  にたいし、 $\chi_{(a,b)}(x)$  である。

関数  $f(x)$  は、 $\mathbf{R}^n$  で可積分ならば、 $\mathbf{R}^n$  上の可測集合で可積分である。

可測集合  $e$  で可積分な関数の集合は  $\mathcal{L}^1(e)$  で表される。また、区間  $(a, b)$  で可積分な関数の集合は  $\mathcal{L}^1(a, b)$  と書かれる。

**定理 2.5**  $f(x)$  は  $f(x) \geq 0$  を満たす可積分関数であるとする。このとき、殆どいたるところで  $f(x) = 0$  であることが、 $\int f(x) dx = 0$  が成り立つために必要十分である。

[十分の証明] 「 $f(x) = 0, \text{ a.e.}$ 」ならば、節 2.1 の例 2.1.1 により  $\int f(x) dx = 0$  となる。□

[必要の証明 : 1] Levi の定理の系 (節 2.2) を用いる証明。

Levi の定理の系において  $h_k(x) = f(x)$  とする。もし、 $\int f(x) dx = 0$  が成り立つならば、 $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k(x)| = 0$  となり、この級数は収束する。したがって、 $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$  は a.e. で収束しなければならない。これは「 $f(x) = 0, \text{ a.e.}$ 」のときにのみ可能である。□

[必要の証明 : 2] この定理より先に、例 2.3.8 が証明してある場合の証明。

ここで、 $f(x) > c$  を満たす  $x$  の集合を  $e_c$  とすると、例 2.3.6 により、それは可測集合である。その特性関数を  $\chi_c(x)$  とし、測度を  $m(e_c)$  とする。「 $f(x) = 0$ , a.e.」でなければ「 $\chi_0(x) = 0$ , a.e.」でなく、その結果として、例 2.3.8 により  $m(e_0) = 0$  は成り立たず、 $m(e_0) > 0$  となる。このとき、 $\epsilon > 0$  の  $\epsilon$  が存在して、 $m(e_\epsilon) > 0$  となり、

$$\int f(x) dx = \int_{e_0} f(x) dx \geq \int_{e_\epsilon} f(x) dx \geq \int_{e_\epsilon} \epsilon dx = \epsilon m(e_\epsilon) > 0$$

となる。 □

**例 2.3.7** 測度が 0 の可測集合は、零集合である (例 2.3.5 参照)。

[証明 : 1] 定理 2.5 の「必要の証明 : 1」により定理 2.5 の証明が終わっている場合。

この集合の特性関数を  $\chi(x)$  とすると、その測度は  $\int \chi(x) dx = 0$  であるから、定理 2.5 により「 $\chi(x) = 0$ , a.e.」となるので、この集合は零集合である。 □

[証明 : 2] 定理 2.5 を用いない証明。

この集合の特性関数を  $\chi(x)$  とすると、その測度は  $\int \chi(x) dx = 0$  であるから、 $\chi(x)$  は可積分関数である。したがって、 $\chi(x)$  に収束する階段関数の列  $\{\phi_k(x)\}$  が存在する。 $\phi_k(x) > 1$  のときには  $\phi_k(x) = 1$  とし、 $\phi_k(x) < 0$  のときには  $\phi_k(x) = 0$  とする。このようにしても、階段関数の列  $\{\phi_k(x)\}$  は  $\chi(x)$  に収束する。 $N \in \mathbf{N}$  とし、内接円の中心を原点とし一辺の長さが  $2N$  である立方体  $C(0, N)$  の特性関数を  $\bar{\chi}_N(x)$  とする。このとき、 $\int \phi_k(x) \bar{\chi}_N(x) dx$  は  $C(0, N)$  の体積以下であり、 $\phi_k(x) \bar{\chi}_N(x)$  は  $\chi(x) \bar{\chi}_N(x)$  に収束するので、Lebesgue の定理 (節 2.2) により、

$$\int_{C(0, N)} \phi_k(x) dx \rightarrow \int_{C(0, N)} \chi(x) dx = 0$$

が成り立つ。ここで、関数列  $\{\phi_k(x)\}$  の部分列を取り、番号の付け替えを行ない、

$$\int_{C(0, N)} \phi_k(x) dx < 2^{-k-1}$$

となるようにする。このとき、 $\phi_k(x) \bar{\chi}_N(x) > \frac{1}{2}$  を満たす点  $x$  の集合の直方体の全体積は  $2^{-k}$  以下である。直方体のそれぞれを倍の体積の開直方体で覆うことにすると、この  $x$  の集合は全体積が  $2^{-k+1}$  の、有限個の開直方体で覆われている。ここで、

$$f_k(x) = \sup\{\phi_k(x), \phi_{k+1}(x), \dots\}$$

とすると、 $\{f_k(x)\}$  は非増加列であり、 $\chi(x)$  に収束する。 $f_k(x) \bar{\chi}_N(x) > \frac{1}{2}$  を満たす点  $x$  の集合を  $e_{kN}$  とすると、それは、 $l \geq k$  にたいする  $\phi_l(x) \bar{\chi}_N(x) > \frac{1}{2}$  を満たす点  $x$  の集合の和集合で覆われるので、全体積が  $\sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l+1} = 2^{-k+2}$  以下の、可算個の開直方体で覆われる。したがって、Heine-Borel の定理 (節 1.3) により、その中の有限個で覆われる。 $\chi(x) \leq f_k(x)$  であるから、 $f_k(x) \bar{\chi}_N(x) > \frac{1}{2}$  を満たす点  $x$  の集合  $e_N$  は、集合  $e_{kN}$  の部分集合である。任意の  $k \in \mathbf{N}$  にたいし、これが成り立つので、 $e_N$  は零集合である。ここで、 $N \rightarrow \infty$  として、「 $\chi(x) = 0$ , a.e.」を得る。 □

## 2.4 Fubini の定理

**Fubini の定理 (積分順序の交換)**

$x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$  とする。 $f(x, y)$  は  $\mathbf{R}^{n+m}$  で可積分であるとする。このとき、

$$\int f(x, y) dx, \quad \int f(x, y) dy \tag{2.30}$$

が殆どいたるところで存在して、それぞれ  $y, x$  の可積分関数であり、

$$\int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx = \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy = \int f(x, y) dx dy \quad (2.31)$$

が成り立つ。すなわち、積分  $\int f(x, y) dx dy$  は逐次積分 (successive integration) により計算できる。

[証明]  $f(x, y)$  に収束する階段関数の非減少列  $\{\phi_k(x, y)\}$  が存在する場合の証明をする。このとき、

$$\begin{aligned} \int \left[ \int \phi_k(x, y) dy \right] dx &= \int \phi_k(x, y) dx dy \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int \left[ \int \phi_k(x, y) dy \right] dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \phi_k(x, y) dx dy = \int f(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.32)$$

が成り立つので、Levi の定理 (節 2.2) により、可積分関数  $F(x)$  が存在して、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \phi_k(x, y) dy = F(x), \quad \text{a.e.} \quad (2.33)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left[ \int \phi_k(x, y) dy \right] dx = \int F(x) dx \quad (2.34)$$

となる。殆どすべての  $x$  について、 $x$  を固定して、a.e. で  $\phi_k(x, y)$  は  $f(x, y)$  に収束するので、(2.33) に Levi の定理 (節 2.2) を使うと

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \phi_k(x, y) dy = F(x) = \int f(x, y) dy, \quad \text{a.e.}$$

となる。これを (2.34) の右辺に用い、その左辺に (2.32) の右の等式を用いて、

$$\int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx = \int f(x, y) dx dy$$

を得る。 □

### Fubini の定理の補足

$x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$  とする。 $f(x, y)$  が  $\mathbf{R}^{n+m}$  で可測であり、逐次積分

$$\int \left[ \int |f(x, y)| dy \right] dx \quad (2.35)$$

が存在するとき、 $f(x, y)$  は  $\mathbf{R}^{n+m}$  で可積分である。したがって、Fubini の定理により、

$$\int f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx$$

が成り立つ。

[証明]  $f(x, y)$  は可測であるから、a.e. で  $f(x, y)$  に収束する階段関数の列  $\{\phi_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$  が存在する。条件の逐次積分が存在するとき、 $\int |f(x, y)| dy$  は殆んどすべての  $x$  で存在する。この積分が存在するような  $x$  では、 $y$  の関数の列  $\{|\phi_k(x, y)|\}_{k=1}^{\infty}$  に Lebesgue の定理の拡張 (節 2.2) を適用すると、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |\phi_k(x, y)| dy = \int |f(x, y)| dy$$

が示される。(2.35) の積分が存在するので、関数列  $\{\int |\phi_k(x, y)| dy\}_{k=1}^{\infty}$  に Lebesgue の定理の拡張を用いて

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |\phi_k(x, y)| dx dy = \int [\int |f(x, y)| dy] dx \quad (2.36)$$

を得る。ここで、階段関数について等式  $\int [\int |\phi_k(x, y)| dy] dx = \int |\phi_k(x, y)| dx dy$  を用いた。この式は、積分の列  $\{\int |\phi_k(x, y)| dx dy\}_{k=1}^{\infty}$  が有界であることを示す。ここで、Fatou の補題(節 2.2) を用いると、 $|f(x, y)|$  が可積分で  $\int |f(x, y)| dx dy$  の存在が示される。次に、関数列  $\{\phi_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$  に Lebesgue の定理の拡張を用いると、 $f(x, y)$  が可積分であることが示される。結果として、(2.31) が成り立つ。□

#### 例 2.4.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2} dx = \sqrt{2\pi} \sigma \quad (2.37)$$

[(2.37) の導出]  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $e^{-x^2}$  は可積分である。 $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  とすると、 $I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$  であるから  $x, y \in \mathbf{R}$  の関数  $e^{-x^2-y^2}$  は可積分である。これを、極座標を用いて計算すると

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}$$

となる。 $I > 0$  であるから、

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が得られる。ここで、積分範囲を  $(-\infty, \infty)$  とし、積分変数を  $x = x'/(\sqrt{2}\sigma)$  で  $x'$  にすると、(2.37) が得られる。□

## 2.5 複素数値関数の積分

複素数値関数  $f(x)$  はその実部  $\operatorname{Re} f(x)$  および虚部  $\operatorname{Im} f(x)$  が可積分のときに可積分であるといい、その積分は

$$\int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx + i \int \operatorname{Im} f(x) dx \quad (2.38)$$

で定義される。

節 2.2、節 2.3 および節 2.4 に与えられた Lebesgue 積分の性質は、適当な読み変えをすれば、複素数値関数の積分についても成り立つ。



### 3

## 不定積分とその微分、平均値の定理

### 3.1 不定積分とその微分

区間  $(a, b)$  で可積分関数  $f(x)$  の不定積分  $F(x)$  は、 $C$  を定数として、

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C \quad (3.1)$$

で定義される。

**定理 3.1** 区間  $(a, b)$  で可積分な関数  $f(x)$  の不定積分は連続な有界変動関数であり、可積分関数は、殆どいたるところでその不定積分の導関数に等しい。すなわち、 $f(x)$  が可積分関数であるとき、

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt, \quad \text{a.e.} \quad (3.2)$$

が成り立つ。区間  $(a, b)$  で可積分関数  $f(x)$  の不定積分の全変動は  $\int_a^b |f(x)| dx$  に等しい。

[連続の証明]  $f(x)$  が階段関数の非減少列  $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  の極限である場合の証明を行なう。 $F(x)$  を (3.1) で定義し、 $\phi_n(x)$  の不定積分  $\Phi_n(x)$  を  $\Phi_n(x) = \int_a^x \phi_n(t) dt + C$  とすると、 $a \leq x < x' \leq b$  のときに

$$\begin{aligned} \Phi_n(x') - \Phi_n(x) &= \int_x^{x'} \phi_n(t) dt \leq \int_x^{x'} \phi_{n+1}(t) dt = \Phi_{n+1}(x') - \Phi_{n+1}(x) \\ &\leq \int_x^{x'} f(t) dt = F(x') - F(x) \end{aligned}$$

が成り立つ。この式は、 $\Phi_{n+1}(x) - \Phi_n(x)$  および  $F(x) - \Phi_n(x)$  が  $x$  の非減少関数であることを示す。したがって、 $x \in [a, b]$  のとき

$$F(a) - \Phi_n(a) = 0 \leq F(x) - \Phi_n(x) \leq F(b) - \Phi_n(b)$$

が成り立つ。 $\Phi_n(b)$  は  $F(b)$  に収束するので、 $\Phi_n(x)$  は  $F(x)$  に一様収束する。 $\Phi_n(x)$  は連続関数であるから、定理 1.6 (節 1.4) により  $F(x)$  も連続関数である。□

[(3.2) の導出] 上に示したように  $\Phi_{n+1}(x) - \Phi_n(x)$  が  $x$  の非減少関数であることを用い、

$$F(x) - \Phi_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) - \Phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_{k+1}(x) - \Phi_k(x)]$$

の右辺の級数に、微分に関する Fubini の定理 (節 1.5) を適用する。その結果は

$$F'(x) - \phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) - \phi_1(x) = f(x) - \phi_1(x), \quad \text{a.e.}$$

となる。[導出終わり]

[全変動の計算]  $F(x)$  の  $(a, b)$  での全変動を  $T(a, b)$  とする。 $T(a, b)$  は節 1.5 の (1.15) で  $f$  を  $F$  で置き換えた式の上限であるから、 $\epsilon(x)$  は  $(a, b)$  で値 1 と  $-1$  をとる階段関数であるとして、

$$T(a, b) = \sup_{\{\epsilon(x)\}} \int_a^b \epsilon(x)f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (3.3)$$

で与えられる。この式の右の不等式は  $\epsilon(x)f(x) \leq |f(x)|$  による。

階段関数の列  $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  が  $f(x)$  に収束するものとする。関数  $\epsilon_n(x)$  は  $\phi_n(x) \geq 0$  のときに 1 をとり、 $\phi_n(x) < 0$  のときに  $-1$  をとる関数であるとする。このとき、

$$\int_a^b \epsilon_n(x)f(x) dx \leq T(a, b)$$

が成り立つ。 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\epsilon_n(x)f(x)$  は  $|f(x)|$  に収束するので Lebesgue の定理 (節 2.2) により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \epsilon_n(x)f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx \leq T(a, b) \quad (3.4)$$

が得られる。(3.3) と (3.4) により  $T(a, b) = \int_a^b |f(x)| dx$  となる。[計算終わり]

**例 3.1.1**  $F(x)$  が連続関数  $f(x)$  の不定積分であるときには、常に  $F'(x) = f(x)$  が成り立つ。

[証明]  $f(x)$  は連続であるから、 $\epsilon > 0$  にたいして、 $\delta > 0$  が存在して、 $|h| < \delta$  のとき

$$|f(x+h) - f(x)| < \epsilon$$

が成り立つ。したがって、

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^h [f(x+t) - f(x)] dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt < \epsilon$$

が得られる。これは  $F'(x) = f(x)$  を示す。□

### 定理 3.1 の系

区間  $(a, b)$  で関数  $F(x)$  が可積分関数の不定積分であるとき、 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  にたいし、

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(t) dt = F(\beta) - F(\alpha) \quad (3.5)$$

が成り立つ。

[(3.5) の導出] (3.2) を (3.1) に代入すると、

$$F(x) = \int_a^x F'(t) dt + C \quad (3.6)$$

となる。これを (3.5) の右辺に代入して、(3.5) を得る。[導出終わり]

## 定理 3.1 の系への注意

区間  $(a, b)$  で関数  $F(x)$  が有界変動であるとき、その導関数  $F'(x)$  は区間  $(a, b)$  で可積分関数であり、 $F(x)$  が非減少関数のとき、 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  にたいして不等式

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(x) dx \leq F(\beta) - F(\alpha) \quad (3.7)$$

が成り立つ。

$F(x)$  が連続な有界変動関数としても、(3.5) が成り立たない場合があることが知られている。

[(3.7) の導出]  $F(x)$  が非減少関数のときの証明を行なう。 $\delta > 0$  とし、 $0 < h < \delta$  の  $h$  にたいし

$$f_h(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

とする。このとき、

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_h(x) dx = \frac{1}{h} \int_{\beta}^{\beta+h} F(x) dx - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} F(x) dx \leq F(\beta + \delta) - F(\alpha)$$

となる。微分に関する Lebesgue の定理 (節 1.5) により、有界変動関数  $F(x)$  について  $h \rightarrow 0$  の極限で  $f_h(x)$  は a.e. で  $F'(x)$  に収束するので、Fatou の補題 (節 2.2) により (3.7) を得る。

[導出終わり]

ここで、絶対連続の概念を導入する。 $F(x)$  は、 $\beta - \alpha$  が小さくなるときに  $F(\beta) - F(\alpha)$  も小さくなるときに連続である。 $K \in \mathbf{N}$  にたいして、重なりのない  $K$  個の区間の集合  $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^K$  をとるときに、 $\sum_{k=1}^K (\beta_k - \alpha_k)$  が小さくなるときに  $\sum_{k=1}^K |F(\beta_k) - F(\alpha_k)|$  も小さくなるときに、 $F(x)$  は絶対連続であるという。絶対連続の条件は、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして  $\delta > 0$  が存在して、区間の集合  $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^K$  が

$$\sum_{k=1}^K (\beta_k - \alpha_k) < \delta \quad (3.8)$$

を満たすならば

$$\sum_{k=1}^K |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \epsilon \quad (3.9)$$

となるというものである。

絶対連続ならば一様連続である。

例 3.1.2  $F(x)$  にたいして  $C > 0$  が存在して、 $\alpha < \beta$  のとき

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq C(\beta - \alpha) \quad (3.10)$$

が成り立つとき、 $F(x)$  は Lipschitz の条件を満たすという。

$F(x)$  が Lipschitz の条件を満たすとき、 $F(x)$  は絶対連続である。

例 3.1.3  $F(x)$  は絶対連続な非減少関数であり、a.e. で  $F'(x) = 0$  であるとする。この関数は一定値のみをとる関数である。

[証明]  $F(x)$  は絶対連続であるから、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $\delta > 0$  が存在して、(3.8) が満たされるときには (3.9) が成り立つ。 $F'(x)$  が存在しない点と、 $F'(x) \neq 0$  である点全体の集合は零集合であるので、これを覆う区間の集合  $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^K$  を (3.8) を満たすように選ぶことができる。(3.9) は、この区間の集合での  $F(x)$  の増加量は  $\epsilon$  を越えないことを示す。その集合以外では、 $F'(x) = 0$  であるから、そこでの  $F(x)$  の増加量は 0 である。 $\epsilon$  は任意であるから  $F(x)$  は定数である。□

**定理 3.2**  $x \in (a, b)$  の関数  $F(x)$  が絶対連続であることが、 $F(x)$  が可積分関数の不定積分であるための必要十分条件である。

[必要の証明]  $F(x)$  は、可積分関数  $f(x)$  の不定積分として、 $C$  を定数として (3.1) と表される。 $n \in \mathbf{N}$  にたいし、 $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq n \\ nf(x)/|f(x)|, & |f(x)| > n \end{cases}$$

とする。このとき、 $n \rightarrow \infty$  で  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  は  $f(x)$  に収束するので、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、

$$\int_a^b [ |f(x)| - |f_N(x)| ] dx < \epsilon$$

が成り立つ。ここで、 $\delta = \epsilon/N$  とすると、(3.8) が成り立つときに (3.9) の左辺は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \left| \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x) dx \right| &\leq \sum_{k=1}^K \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f_N(x)| dx + \sum_{k=1}^K \int_{\alpha_k}^{\beta_k} [ |f(x)| - |f_N(x)| ] dx \\ &\leq \sum_{k=1}^K N(\beta_k - \alpha_k) + \epsilon < 2\epsilon \end{aligned}$$

となる。□

[十分の証明]  $F(x)$  は絶対連続であるとする。 $\epsilon = 1$  にたいして、 $\delta > 0$  が存在して、(3.8) ならば (3.9) が成り立っている。区間  $(a, b)$  を  $\delta/2$  の長さの部分区間に分けると、部分区間の数は  $2(b-a)/\delta + 1$  である。部分区間のそれぞれを覆う長さ  $\delta$  以下の区間での全変動は 1 以下であることが示せるので、 $(a, b)$  での全変動は  $2(b-a)/\delta + 1$  以下である。したがって、 $F(x)$  は有界変動関数であり、定理 2.6 の系の注意により、導関数  $F'(x)$  は可積分関数である。

以下では、 $F(x)$  が非減少関数の場合を考える。このとき、 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  にたいして不等式 (3.7) が成り立つ。 $F'(x)$  の不定積分を  $G(x)$  とすると、(3.7) は

$$G(\beta) - G(\alpha) \leq F(\beta) - F(\alpha)$$

となる。ここで、 $H(x) = F(x) - G(x)$  とすると、 $H(x)$  は非減少関数であり、a.e. で  $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$  となる。 $F(x)$  は仮定により絶対連続であり、不定積分  $G(x)$  が絶対連続であることは上の必要の証明により示されているので、その差  $H(x)$  も絶対連続である。 $H(x)$  は絶対連続であり、a.e. で  $H'(x) = 0$  であるから、例 3.1.2 により、 $H(x)$  は定数である。その定数を  $C'$  とすると、 $F(x) = G(x) + C'$  は  $F'(x)$  の不定積分である。□

**定理 3.3** 区間  $(a, b)$  で可積分関数  $f(x)$  の不定積分は  $b = \infty$  のときには、 $x \rightarrow \infty$  で収束する。また、 $a = -\infty$  のときには、 $x \rightarrow -\infty$  で収束する。すなわち、 $f(x)$  が可積分関数であるとき、 $b = \infty$  のときには、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^\infty f(t) dt \quad (3.11)$$

$a = -\infty$  のときには、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt = \int_{-\infty}^b f(t) dt \quad (3.12)$$

が成り立つ。

[3.11] の導出] 実数の数列  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  は、 $n \in \mathbf{N}$  にたいして  $X_n > a$  であり、 $n \rightarrow \infty$  で  $X_n \rightarrow \infty$  となる単調増加数列であるとする。このとき  $f_n(x) = \chi_{(a, X_n)}(x)f(x)$  とすると、 $f_n(x)$  は  $n \rightarrow \infty$  で  $\chi_{(a, \infty)}(x)f(x)$  に収束する。 $|f_n(x)| \leq \chi_{(a, \infty)}(x)|f(x)|$  であるから

$$F(X_n) = \int_a^{X_n} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt$$

は Lebesgue の定理 (節 2.2) により  $n \rightarrow \infty$  で  $\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(a, \infty)}(t)f(t) dt$  に収束する。[導出終わり]

**定理 3.4** 区間  $(a, b)$  で関数  $F(x)$  と  $G(x)$  が可積分関数の不定積分であるとき、 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  で部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)G(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} F(x)G'(x) dx = F(\beta)G(\beta) - F(\alpha)G(\alpha) \quad (3.13)$$

が成り立つ。

[証明] 仮定と定理 3.2, 定理 3.1 により  $F(x)$  と  $G(x)$  は絶対連続である。絶対連続関数は一様連続、有界であるので、 $|F(x)| < M$ ,  $|G(x)| < M$  となる  $M$  が存在する。このとき、

$$\begin{aligned} |F(\beta)G(\beta) - F(\alpha)G(\alpha)| &= |F(\beta)G(\beta) - F(\beta)G(\alpha) + F(\beta)G(\alpha) - F(\alpha)G(\alpha)| \\ &\leq M|G(\beta) - G(\alpha)| + M|F(\beta) - F(\alpha)| \end{aligned}$$

が成り立つので、これを (3.9) に用いて  $F(x)G(x)$  が絶対連続であることを示すことができる。したがって、定理 3.2, 定理 3.1 の系により (3.5) で、 $F(x)$  を  $F(x)G(x)$ ,  $F'(x)$  を  $F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$  で置き換えた式が成り立つ。□

**例 3.1.4**  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $F(x)$  が可積分関数の不定積分であり、 $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  で 0 になるとし、 $G(x)$ ,  $G'(x)$  とも連続、有界であるとする。このとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)G(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)G'(x) dx \quad (3.14)$$

が成り立つ。

## 3.2 積分に関する平均値の定理

積分に関する第一平均値の定理

$x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  が  $[a, b]$  で連続であるとする。このとき、 $\xi \in (a, b)$  が存在して、

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \quad (3.15)$$

が成り立つ。

[証明] (3.15) の左辺を  $A$  とする。  $f(x)$  は、  $[a, b]$  での最大値、最小値を  $\xi_1, \xi_2$  で取るとする。このとき、

$$f(\xi_2) \leq A \leq f(\xi_1)$$

を得る。  $f(x)$  は連続であるから、  $\xi_1$  と  $\xi_2$  の間に  $f(x)$  が  $A$  に等しくなる  $x$  が存在する。その  $x$  を  $\xi$  とする。  $\square$

[別の証明]  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  として、微分に関する平均値の定理 (節 1.4) を適用すると、  $\xi \in (a, b)$  が存在して、

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) = f(\xi)$$

が得られる。等式  $F'(x) = f(x)$  は例 3.1.1 による。  $\square$

### 積分に関する第二平均値の定理

$x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  は区間  $(a, b)$  で可積分であり、  $g(x)$  は区間  $[a, b]$  で単調であるとする。このとき、  $\xi \in [a, b]$  が存在して、

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx \quad (3.16)$$

が成り立つ。

[証明]  $g(x)$  が非減少関数である場合の証明を行う。

$F(x)$  を  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  とする。  $F(x)$  は  $[a, b]$  での最小値を  $\xi_1$  で取り、最大値を  $\xi_2$  で取るとする。ここで、関数  $H(x)$  を

$$H(x) = g(a) \int_a^x f(t) dt + g(b) \int_x^b f(t) dt = F(b)g(b) - F(x)[g(b) - g(a)] \quad (3.17)$$

とする。このとき、(3.16) の右辺は  $H(\xi)$  となる。(3.16) の左辺の積分を  $I$  で表す。  $g(x)$  が連続であり、  $g'(x)$  が可積分であるときには、部分積分を用いて、

$$I = \int_a^b f(x)g(x) dx = F(x)g(x) \Big|_{x=a}^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx$$

を得る。  $g'(x)$  は非負であるから、右辺第二項で  $F(x)$  をその最小値  $F(\xi_1)$  で置き換えると、

$$I \leq F(b)g(b) - F(\xi_1)[g(b) - g(a)] = H(\xi_1) \quad (3.18)$$

が得られる。一般の場合の (3.18) の導出は下に与える。最小値の代わりに最大値  $F(\xi_2)$  を用いると、

$$I \geq H(\xi_2)$$

を得る。  $H(x)$  は連続であるから、  $\xi_1$  と  $\xi_2$  の間に  $H(x)$  が  $I$  に等しくなる  $x$  が存在する。その  $x$  を  $\xi$  とする。  $\square$

[一般の場合の (3.18) の導出]  $f(x)$  が階段関数  $\phi_n(x)$  の極限であり、  $g(x)$  が  $x$  の関数として非減少な階段関数  $\psi_n(x)$  の極限であるとする。  $\phi_n(x)$  と  $\psi_n(x)$  の  $(a, b)$  にある不連続点を小さいもの

から  $x_1, x_2, \dots, x_{K-1}$  とし、 $x_0 = a, x_K = b$  とする。さらに、 $\Phi(x_k) = \sum_{l=1}^k \phi(x_l)(x_l - x_{l-1})$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_n(x) \psi_n(x) dx &= \sum_{k=1}^K \phi_n(x_{k-}) \psi_n(x_{k-})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^K [\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})] \psi_n(x_{k-}) \\ &= \sum_{k=1}^K \Phi_n(x_k) \psi_n(x_{k-}) - \sum_{k=0}^{K-1} \Phi_n(x_k) \psi_n(x_{k+1-}) \\ &= \Phi_n(x_K) \psi_n(x_{K-}) - \sum_{k=1}^{K-1} \Phi_n(x_k) [\psi_n(x_{k+1-}) - \psi_n(x_{k-})] \end{aligned}$$

が得られる。 $\psi_n(x)$  は非減少であるから、右辺の和の中の  $\Phi_n(x_k)$  をその中の最小のもので置き換えると、不等式

$$\int_a^b \phi_n(x) \psi_n(x) dx \leq \Phi_n(b) \psi_n(b-) - \min_{0 < k < K} \Phi_n(x_k) [\psi_n(x_{K-}) - \psi_n(x_{1-})]$$

が得られる。ここで、 $n \rightarrow \infty$  の極限を取ると (3.18) が得られる。□

**例 3.2.1**  $(a, \infty)$  で定義された関数  $f(x)$  が、任意の  $X > a$  にたいし有限区間  $(a, X)$  で可積分であり、 $x \rightarrow \infty$  で単調に 0 になる関数であるとする。このとき、実数  $\lambda$  にたいして極限

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_a^X f(x) \sin \lambda x dx \quad (3.19)$$

が存在する。

[証明]  $\lambda \neq 0$  であり、 $f(x)$  が正値の非増加関数である場合を考える。 $X' > X > a$  とする。第二平均値の定理により、 $X \leq \xi \leq X'$  の  $\xi$  が存在して、

$$\begin{aligned} \left| \int_X^{X'} f(x) \sin \lambda x dx \right| &= \left| f(X) \int_X^\xi \sin \lambda x dx + f(X') \int_\xi^{X'} \sin \lambda x dx \right| \\ &= \left| f(X) \left[ \frac{\cos \lambda X - \cos \lambda \xi}{\lambda} \right] + f(X') \left[ \frac{\cos \lambda \xi - \cos \lambda X'}{\lambda} \right] \right| \\ &\leq \{f(X) + [f(X) - f(X')] + f(X')\} \frac{1}{|\lambda|} = \frac{2}{|\lambda|} f(X) \end{aligned} \quad (3.20)$$

が成り立つ。 $X \rightarrow \infty$  で  $f(X) \rightarrow 0$  であるから、極限 (3.19) が存在する。□

**例 3.2.2** 実数  $\lambda$  にたいして、積分の極限

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X \frac{\sin \lambda x}{x} dx \quad (3.21)$$

が存在する。

[証明] 積分範囲を  $(0, 1)$  と  $(1, X)$  に分ける。 $(0, 1)$  では可積分であり、 $(1, X)$  では例 3.2.1 を適用する。□

**例 3.2.3**  $0 < a < b$  とする。 $\lambda > 0$  にたいして、不等式

$$\left| \int_a^b \frac{\sin \lambda x}{x} dx \right| < \frac{2}{\lambda a} \quad (3.22)$$

が成り立つ。

[証明] (3.20) で  $f(x) = 1/x$  とする。 □

例 3.2.4  $0 \leq a < b$  とする。  $\lambda > 0$  にたいして、不等式

$$\left| \int_a^b \frac{\sin \lambda x}{x} dx \right| < 3 \quad (3.23)$$

が成り立つ。

[証明] 評価する積分を

$$\int_a^b \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{\sin t}{t} dt$$

と書き、右辺の積分範囲  $(\lambda a, \lambda b)$  を  $(0, 1)$  と  $(1, \infty)$  の範囲に分ける。 $(0, 1)$  の範囲では積分は 1 以下であり、 $(1, \infty)$  の範囲での積分の絶対値は (3.22) により 2 以下である。 □

### 3.3 いくつかの積分の極限

#### Riemann-Lebesgue の定理

$x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  が可積分ならば、 $\lambda$  を実数として

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int f(x) \sin \lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int f(x) \cos \lambda x dx = 0 \quad (3.24)$$

が成り立つ。

[証明]  $f(x)$  が実数値関数のときの第 1 式の証明をする。

$f(x)$  は、 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  に属するので、節 2.3 の始めに述べたように階段関数の列  $\{\phi_n(x)\}$  の極限で表され、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  ならば、(2.26) が成り立つ。ここで、評価すべき積分を

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) \sin \lambda x dx \right| &= \left| \int \phi_n(x) \sin \lambda x dx + \int [f(x) - \phi_n(x)] \sin \lambda x dx \right| \\ &\leq \left| \int \phi_n(x) \sin \lambda x dx \right| + \int |f(x) - \phi_n(x)| dx \end{aligned} \quad (3.25)$$

と表す。 $\phi_n(x)$  が  $K$  個の区間で 0 でない値をとるものとする。 $k$  番目の区間を  $(c_k, d_k)$  とし、そこでの  $\phi_n(x)$  の値を  $a_k$  とし、さらに  $|a_k|$  の中の最大の値を  $M$  とすると、右辺の第一項は、

$$\begin{aligned} \left| \int \phi_n(x) \sin \lambda x dx \right| &\leq \sum_{k=1}^K |a_k| \int_{c_k}^{d_k} \sin \lambda x dx = \sum_{k=1}^K |a_k| \times \left| \frac{\cos \lambda c_k - \cos \lambda d_k}{\lambda} \right| \\ &\leq \frac{2KM}{|\lambda|} \end{aligned} \quad (3.26)$$

となるので、 $\Lambda > 2KM/\epsilon$  とすると、 $\lambda > \Lambda$  のとき  $\epsilon$  より小さくなる。(2.26) と (3.26) を (3.25) の右辺に用いると、 $\lambda > \Lambda$  のとき

$$\left| \int f(x) \sin \lambda x dx \right| \leq 2\epsilon$$

が示される。 □

例 3.3.1 等式

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^X \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (3.27)$$

が、それぞれ  $\lambda > 0$ ,  $X > 0$  のときに成り立つ。

[(3.27) の第一式の導出] 左辺の極限の存在は例 3.2.2 で証明されている。

$N \in \mathbf{Z}_+$  にたいして等式

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nx = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N e^{nix} = \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})x]}{2 \sin \frac{1}{2}x} \quad (3.28)$$

が成り立つ。これを積分して

$$\int_0^\pi \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})x]}{2 \sin \frac{1}{2}x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (3.29)$$

を得る。 $\lambda' = N + \frac{1}{2}$  として、この左辺を

$$\int_0^\pi \frac{\sin \lambda' x}{x} dx + \int_0^\pi \left( \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x} - \frac{1}{x} \right) \sin \lambda' x dx = \int_0^{\lambda' \pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^\pi \frac{x - 2 \sin \frac{1}{2}x}{2x \sin \frac{1}{2}x} \sin \lambda' x dx$$

と書き換える。右辺第 2 項の第 1 の因数は  $x = 0$  で 0 となり、 $[0, \pi]$  で連続である。したがって、Riemann-Lebesgue の定理により第 2 項は  $\lambda' \rightarrow \infty$  で 0 になり、 $\lambda' = N + \frac{1}{2} \rightarrow \infty$  で第 1 項が  $\pi/2$  になる。したがって、(3.27) の極限值は

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda X} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

でなければならない。 □

[(3.27) の第二式の導出] 第一式の導出の中の最後の式により、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^X \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda X} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

を得る。 □

**定理 3.5**  $a > 0$  とする。 $f(x)$  が  $(-a, a)$  で可積分であり、 $x = 0$  の近傍で単調、連続ならば、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^a f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx = f(0), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx = f(0) \quad (3.30)$$

が成り立つ。

[ $0 < a < \infty$  のときの第 1 式の証明]  $\Delta f(x) = f(x) - f(0)$  として、(3.30) の第 1 式は

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^a f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx - f(0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^a \Delta f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx = 0$$

と書かれる。最初の等式は例 3.3.1 による。以下では、第 2 の等式を証明する。任意の  $\epsilon > 0$  にたいして  $0 < \delta < \pi$  の  $\delta$  が存在して、 $0 < x < \delta$  の  $x$  にたいして  $\Delta f(x)$  は単調で、 $|\Delta f(x)|$  は 0 から増加し、絶対値の最大値が  $\epsilon$  以下になる。積分に関する第二平均値の定理 (節 3.2) を用いて、右辺の積分の  $(0, \delta)$  の区間からの寄与を評価する。 $\xi$  は  $\xi \in [0, \delta]$  のある数として、

$$\left| \int_0^\delta \Delta f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx \right| = \epsilon \left| \int_\xi^\delta \frac{\sin \lambda x}{x} dx \right| \leq 3\epsilon$$

を得る。最後の積分の評価は例 3.2.4 の不等式 (3.23) による。積分の残りの区間  $(\delta, a)$  では、 $\Delta f(x)/x$  は可積分であり、そこからの寄与は Riemann-Lebesgue の定理により  $\lambda$  大で  $\epsilon$  以下になる。 □

[ $a = \infty$  のときの第 1 式の証明] 任意の  $\epsilon > 0$  にたいし、 $X \in \mathbf{R}$  を  $X > 1$ ,  $\int_X^\infty |f(t)| dt < \epsilon$  とする。 (3.30) の第 1 式で、左辺の積分の積分範囲を  $(0, X)$  と  $(X, \infty)$  に分けると、後の部分の寄与は  $\epsilon$  以下になる。この後で  $a = X$  として上の証明を適用する。 □

例 3.3.2  $a > 0$  とする。  $f(x)$  が  $(-a, a)$  で可積分であり、  $x = 0$  で微分可能ならば、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) \frac{1 - \cos \lambda x}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{-a}^{-\delta} + \int_{\delta}^a \right) \frac{1}{x} f(x) dx \quad (3.31)$$

が成り立つ。

[ $0 < a < \infty$  のときの証明] (3.31) は

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^a [f(x) - f(-x)] \frac{1 - \cos \lambda x}{x} dx = \int_0^a [f(x) - f(-x)] \frac{1}{x} dx$$

と書ける。ここで、Riemann-Lebesgue の定理が用いられた。  $\square$

[ $a = \infty$  のときの証明] 任意の  $\epsilon > 0$  にたいし、  $X \in \mathbf{R}$  を  $X > 2$ ,  $\int_X^\infty [|f(t)| + |f(-t)|] dt < \epsilon$  となるように選ぶ。(3.31) の左辺の積分の積分範囲を  $(-X, X)$  と  $(-\infty, -X)$  と  $(X, \infty)$  に分けると、後の二つの部分の寄与は  $\epsilon$  以下になる。この後で  $a = X$  として上の証明を適用する。

$\square$

定理 3.6  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  が有界であり、  $x = 0$  の近傍で連続であるとき、

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = f(0) \quad (3.32)$$

が成り立つ。

[証明]  $M = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$  とする。  $f(x)$  は  $x = 0$  の近傍で連続であるから、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、  $\delta > 0$  が存在して、  $|x| < \delta$  のとき

$$|f(x) - f(0)| < \epsilon \quad (3.33)$$

となる。また、  $\sigma_1 > 0$  が存在して、  $0 < \sigma < \sigma_1$  のときに

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\delta^\infty e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta/\sigma}^\infty e^{-t^2/2} dt < \epsilon \quad (3.34)$$

となる。このとき、例 2.4.1 の (2.37) と (3.34)、(3.33) を用いて、

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx - f(0) \right| &= \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(0)] e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(0)| e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx + 4M\epsilon \leq \epsilon + 4M\epsilon \end{aligned}$$

を得る。  $\sigma \rightarrow 0$  のとき、これは、(3.32) を与える。  $\square$

## 4

# Banach 空間、Hilbert 空間

### 4.1 線形空間 (ベクトル空間)、ノルム空間

二次元、三次元空間のベクトルは直交座標成分を使うと2個あるいは3個の実数の組で  $(x, y)$ 、 $(x, y, z)$  と表される。ベクトルの和、ベクトルと実数の積、ベクトルの内積は直交座標成分を使って表現される。 $n$  を正整数として、 $n$  個の数 (実数または複素数) の組で表されるベクトル  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が定義され、その空間として  $n$  次元ベクトル空間が定義される。この空間は、数が実数か複素数かにしたがって  $\mathbf{R}^n$  または  $\mathbf{C}^n$  で表される。 $n$  個の数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  をベクトルの成分という。

2個のベクトル  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  と  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  および数 (実数または複素数)  $\lambda$  を考える。2個のベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の和は

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (4.1)$$

であり、ベクトル  $\mathbf{x}$  と数  $\lambda$  との積は

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad (4.2)$$

である。2個のベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の内積は

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n} \quad (4.3)$$

である。 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$  のとき  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  は直交するという。

成分がすべて0のベクトルを0で表す。 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  は非負で、 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$  となるのは、 $\mathbf{x} = 0$  のときのみである。 $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$  をベクトル  $\mathbf{x}$  の長さという。長さが1のベクトルは規格化されているといい、また単位ベクトルであるという。

集合  $E$  は、その要素の和、その要素と数 (実数または複素数) の積が定義され、次の規則が成り立つときに、線形空間 (linear space) またはベクトル空間 (vector space) であるという。ここで、 $x, y, z$  を  $E$  の要素とし、 $a, b$  を数とする。

I.  $x$  と  $y$  が  $E$  に属するときには  $x + y$  も  $E$  に属し、

- 1)  $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 2)  $0 \in E$  が存在して、 $0 + x = x$
- 3) 任意の  $x \in E$  にたいして、 $-x \in E$  が存在して、 $x + (-x) = 0$
- 4)  $x + y = y + x$

II.  $ax = xa \in E$

- 1)  $a(x + y) = ax + ay$
- 2)  $(a + b)x = ax + bx$
- 3)  $a(bx) = (ab)x$
- 4)  $1x = x$

I. 2) の  $0$  を **零要素** (zero element) という。  $0x = 0$ ,  $(-1)x = -x$  であり、また、記法

$$x + (-1)y = x + (-y) = x - y$$

が用いられる。

**例 4.1.1**  $n$  次元ベクトル空間は線形空間である。この空間での  $0$  は **零ベクトル** (zero vector)  $(0, 0, \dots, 0)$  である。

線形空間  $\mathcal{E}$  に属する任意の二つの要素  $x, y$  にたいして、数  $(x, y)$  が定義され、それが下記の条件を満たすとき、 $(x, y)$  を  $x$  と  $y$  のスカラー積または内積 (scalar product, inner product) という。ここで、 $x, y, z$  を  $E$  の要素とし、 $a, b$  を数とする。

- 1)  $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$  (線形性)
  - 2)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$  (エルミート性)
  - 3)  $(x, x) \geq 0$  (非負性)、 $x = 0$  のときにのみ  $(x, x) = 0$
- 内積にたいして、不等式

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \tag{4.4}$$

が成り立つ。この不等式を **Schwarz の不等式** (Schwarz inequality) という。

[証明]  $\lambda$  を実数とし、 $(x, y)$  の偏角を  $\theta$  とするとき、不等式

$$0 \leq (x + \lambda e^{i\theta}y, x + \lambda e^{i\theta}y) = (x, x) + 2\lambda|(x, y)| + \lambda^2(y, y)$$

が得られる。右辺の式は  $\lambda$  の二次式であるが、この不等式により異なる二根をもたない。したがって、その式の判別式  $|(x, y)|^2 - (x, x)(y, y)$  は  $0$  または負である。すなわち、(4.4) が成り立つ。  $\square$

線形空間  $\mathcal{E}$  に属する任意の要素  $x$  にたいして、実数  $\|x\|$  が定義され、それが下記の条件を満たすとき、 $\|x\|$  を  $x$  のノルム (norm) といい、 $E$  をノルム線形空間またはノルム空間 (normed space) という。ここで、 $x, y$  を  $E$  の要素とし、 $a$  を数とする。

- 1)  $\|x\| \geq 0$  (非負性)、 $x = 0$  のときにのみ  $\|x\| = 0$

$$2) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{三角不等式})$$

$$3) \|ax\| = |a| \times \|x\| \quad (\text{斉次性})$$

内積が定義されているときには、ノルム  $\|x\|$  を

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{4.5}$$

で導入することができる。ノルムを (4.5) で導入するとき Schwarz の不等式 (4.4) は

$$|(x, y)| \leq \|x\| \times \|y\| \tag{4.6}$$

と書かれる。

**補助定理 4.1** ノルムが (4.5) で導入されているとき、三角不等式が成り立つ。

[証明]

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

最後の不等式は Schwarz の不等式 (4.6) による。  $\square$

**補助定理 4.2** 三角不等式が成り立つとき、 $x$  と  $y$  がこの空間に属するならば、 $x + y$  もこの空間に属する。これは、ノルム空間の線形性を保証する。

$n$  次元空間のベクトル空間  $\mathbf{R}^n$ 、 $\mathbf{C}^n$  は、ベクトル  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  のノルムとして、

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}, \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \tag{4.7}$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \tag{4.8}$$

を考える。ここで、 $p$  は  $p > 1$  の実数であり、 $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$  である。このノルムのいずれを採用しても、この空間はノルム空間である。

$M = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$  とおくと、不等式

$$M \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq Mn^{1/p}$$

が成り立つ。したがって、

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_p = M$$

となるので、(4.7) の記号が用いられる。

$n$  を無限大にすると、ベクトル  $\mathbf{x}$  は数列  $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty$  となる。このときに、(4.7), (4.8) のノルムは

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}, \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{1 \leq k < \infty} |x_k|, \tag{4.9}$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

となる。それぞれのノルムが有限である数列  $\mathbf{x}$  の集合を、数列空間  $l^2, l^1, l^\infty, l^p$  という。集合の要素  $\mathbf{x} = \{x_k\}$ ,  $\mathbf{y} = \{y_k\}$  の和を  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_k + y_k\}$  とし、集合の要素  $\mathbf{x} = \{x_k\}$  と数  $\lambda$  の積を  $\lambda\mathbf{x} = \{\lambda x_k\}$  として、これらはいずれもノルム空間である。

以下で、 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  がそれぞれの数列空間に属するとき、和  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  もその空間に属し、三角不等式が成り立つことを証明する。

[ $l_\infty$  のときの証明]  $|x_k| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty, |y_k| \leq \|\mathbf{y}\|_\infty$  であるから、

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$$

が成り立つ。したがって、左辺の最大値は右辺以下である。すなわち、

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$$

□

[ $l_1$  のときの証明]

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|) = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$$

□

[ $\mathbf{x} \in l^2, \mathbf{y} \in l^2$  のとき  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in l^2$  の証明] 不等式  $2|x_k y_k| \leq |x_k|^2 + |y_k|^2$  を用いる。 □

[ $l_2$  での三角不等式の証明]  $\mathbf{x} \in l^2, \mathbf{y} \in l^2$  の内積を  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$  とし、補助定理 4.1 を適用する。 □

[ $\mathbf{x} \in l^p, \mathbf{y} \in l^p$  のとき  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in l^p$  の証明] 不等式  $(|x_k + y_k|)^p \leq (|x_k| + |y_k|)^p \leq (2 \max\{|x_k|, |y_k|\})^p \leq 2^p(|x_k|^p + |y_k|^p)$  を用いる。 □

[ $l_p$  での三角不等式の証明] 対数関数が上に凸であることを用いて、 $a > 0, b > 0$  のとき

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b^p\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\log b^p = \log(ab^{p-1})$$

を得る。対数関数が単調関数であることを用いて、これから

$$\frac{1}{p}a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b^p \geq ab^{p-1}$$

を得る。ここで、 $a = |x_k|/\|\mathbf{x}\|_p, b = (|x_k + y_k|)/\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p$  と置き、和  $\sum_{k=1}^{\infty}$  を取ると、 $1 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} / (\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1})$ 、したがって、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}$$

を得る。この式で  $x$  と  $y$  を交換した式も得られる。その両者を用いて、

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|) |x_k + y_k|^{p-1} \leq (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}$$

したがって、

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$$

が得られる。 □

可測集合  $e$  で有界な連続関数の空間  $\mathcal{C}(e)$  は、その要素  $f(x)$  のノルムを

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in e} |f(x)| \tag{4.10}$$

としてノルム空間である。この空間での零要素  $0$  はすべての  $x \in e$  で  $f(x) = 0$  の関数である。

[三角不等式の導出]  $f(x)$  と  $g(x)$  が  $\mathcal{C}$  に属するとき、任意の  $x$  にたいして、

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

が成り立つ。したがって、左辺の最大値  $\|f + g\|$  は右辺より大きくはない。  $\square$

正整数  $n$  にたいして、関数空間  $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ ,  $\mathcal{C}^n[a, b]$  を考える。これらは、 $\mathbf{R}$ , 区間  $[a, b]$  での連続関数で  $n$  回までの微分が可能であり、 $n$  階までの導関数がすべて有界、連続である関数の集合を表す。 $n = 0$  のときは、 $\mathcal{C}^0$  は  $\mathcal{C}$  を表すものとする。

関数空間  $\mathcal{C}^n$  は、その要素  $f(x)$  のノルムを

$$\|f\| = \sup_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_{\infty} \quad (4.11)$$

としてノルム空間である。この空間での零要素  $0$  は  $f(x) = 0$  の関数である。

[三角不等式の導出]  $f(x)$  と  $g(x)$  が  $\mathcal{C}^n$  に属するとき、 $0 \leq k \leq n$  のとき  $f^{(k)}(x) \in \mathcal{C}$  であるから、

$$\|f^{(k)} + g^{(k)}\|_{\infty} \leq \|f^{(k)}\|_{\infty} + \|g^{(k)}\|_{\infty} \leq \|f\| + \|g\|$$

が成り立つ。したがって、左辺の最大値は右辺より大きくはない。  $\square$

関数空間  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R})$ ,  $\mathcal{C}^{\infty}[a, b]$  は、

$$\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(\mathbf{R}), \quad \mathcal{C}^{\infty}[a, b] = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n[a, b] \quad (4.12)$$

で定義される。

**例 4.1.2**  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $e^{-x^2}$  は  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R})$  に属する。

**例 4.1.3**  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(b-a)^2/[(x-a)(b-x)]}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.13)$$

で定義し、この  $f(x)$  を用いて、関数  $F(x)$  を

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (4.14)$$

で定義する。さらに、 $0 < a < b$  として、関数  $G(x)$  を

$$G(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 1 - \frac{\int_a^{|x|} f(t) dt}{\int_a^b f(t) dt}, & a < |x| \leq b \\ 0, & |x| > b \end{cases} \quad (4.15)$$

で定義する。このとき、 $f(x)$  と  $G(x)$  は  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R})$  に属するコンパクトな台をもつ関数であり、 $F(x)$  は  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R})$  に属する単調非減少関数である。

関数空間  $\mathcal{L}^1$  に属する関数  $f(x)$  のノルムを

$$\|f\| = \|f\|_1 = \int |f(x)| dx \quad (4.16)$$

で定義するとき、 $\mathcal{L}^1$  はノルム空間である。この空間での零要素  $0$  は殆どいたるところで  $0$  である関数である (定理 2.5 (節 2.3) 参照)。

[三角不等式の導出]  $f(x)$  と  $g(x)$  が  $\mathcal{L}^1$  に属するとき、

$$\|f + g\| = \int |f(x) + g(x)| dx \leq \int |f(x)| dx + \int |g(x)| dx = \|f\| + \|g\|$$

が成り立つ。

□

節 1.2 において、空間  $\mathbf{R}^n$  の点集合  $A$  についていくつかの言葉の定義をした。ここでノルム空間に関して、その言葉はそのまま使えることに注意する。ノルム空間  $E$  の要素  $a \in E$  のまわりの半径  $\delta$  の開球  $B(a, \delta)$  は  $\|x - a\| < \delta$  を満たす  $x \in E$  の集合であり、空間  $E$  の部分集合  $A$  の要素の列  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  にたいし、 $x$  が存在して、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0 \quad (4.17)$$

が成り立つとき、その列は  $x$  に収束し、 $x$  は  $A$  の集積点である。

**補助定理 4.3**  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  が  $x$  に収束するとき、 $\|x\| < \infty$ 、 $\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|$  が成り立つ。

[証明]  $\|x\| < \infty$  は、 $\|x_k - x\| < \epsilon$  のとき、 $\|x\| \leq \|x_k\| + \|x - x_k\| < \|x_k\| + \epsilon$  による。  
 $\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|$  は、そのとき、 $|\|x\| - \|x_k\|| \leq \|x - x_k\| < \epsilon$  による。 □

Cauchy 列も同様に定義される。すなわち、 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  は、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして  $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n \in \mathbf{N}$ 、 $m \in \mathbf{N}$ 、 $n > N$ 、 $m > N$  のとき、 $\|x_n - x_m\| < \epsilon$  が成り立つときに、Cauchy 列である。収束列は Cauchy 列であることは、数列の場合と同様に証明されるが、Cauchy 列がその空間の要素に収束することは保証されない。

ノルム空間  $E$  は、その Cauchy 列がすべて  $E$  の要素に収束するとき、**完備** (complete) であるといい、その空間は **Banach 空間**といわれる。

ノルムが内積で定義されているとき、Banach 空間は **Hilbert 空間**といわれる。

数列空間  $l^1$ 、 $l^\infty$ 、 $l^p$ 、関数空間  $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{L}^1$  は Banach 空間であり、数列空間  $l^2$  は Hilbert 空間であることを次節で示す。

## 4.2 Banach 空間 と Hilbert 空間の例

ここで、いくつかのノルム空間が Banach 空間あるいは Hilbert 空間であることを示す。ノルム空間が  $E$  であるとする、その任意の Cauchy 列が収束することを示し、次にその極限が  $E$  に属することを示す。

**定理 4.1**  $p$  は  $p > 1$  の実数であるとする。数列空間  $l^1, l^\infty, l^p$  は Banach 空間であり、数列空間  $l^2$  は Hilbert 空間である。また、 $n$  次元ベクトル空間はノルムを (4.7) の  $\|\mathbf{x}\|_1$  または  $\|\mathbf{x}\|_\infty$  とし、または (4.8) の  $\|\mathbf{x}\|_p$  とし Banach 空間であり、ノルムを (4.7) の  $\|\mathbf{x}\|$  とし Hilbert 空間である。

[ $l^p$  の完備性の証明] 証明は 2 つのステップから成る。 $\epsilon$  は任意の正数とする。

[ステップ 1] この空間の Cauchy 列  $\{\mathbf{u}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  を考える。 $\mathbf{u}^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots)$  とすると、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N, l > N$  のとき、任意の  $k \in \mathbf{N}$  にたいして

$$|u_k^{(n)} - u_k^{(l)}| \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{(n)} - u_k^{(l)}|^p \right)^{1/p} = \|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(l)}\| < \epsilon \quad (4.18)$$

であるから、数の列  $\{u_k^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  は Cauchy 列である。したがって、それは収束する。その極限値を  $u_k$  とすると、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots)$  が定まる。

[ステップ 2] ここで、 $\mathbf{u}^{(n)} \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{u} \in l^p$  を示す。 $N$  はステップ 1 のものとする。任意の  $K \in \mathbf{N}$  にたいし、 $n > N$  のとき、

$$\left( \sum_{k=1}^K |u_k^{(n)} - u_k|^p \right)^{1/p} < 2\epsilon \quad (4.19)$$

となることが下に示される。これにより、

$$\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}\| < 2\epsilon \quad (4.20)$$

が成り立つ。これは、 $\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u} \in l^p, \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(n)} \in l^p$  であり、 $\mathbf{u}^{(n)} \rightarrow \mathbf{u}$  を示す。□

[(4.19) の導出]  $L \in \mathbf{N}$  を、 $l > L$  のとき  $1 \leq k \leq K$  にたいし  $|u_k^{(l)} - u_k| < \epsilon/K^{1/p}$  となるように選ぶ。 $n > N, l > N, l > L$  のとき、

$$\left( \sum_{k=1}^K |u_k^{(n)} - u_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^K |u_k^{(n)} - u_k^{(l)}|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^K |u_k^{(l)} - u_k|^p \right)^{1/p} < 2\epsilon \quad (4.21)$$

が成り立つ。ここで、真ん中の第 1 項は  $\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(l)}\| < \epsilon$  より小さいことを用いた。□

[ $l^2, l^1$  の完備性の証明] 上の証明で  $p = 2, p = 1$  と置けばよい。□

[ $l^\infty$  の完備性の証明] この場合には、(4.18) の真ん中の項を  $\sup_{1 \leq k < \infty} |u_k^{(n)} - u_k^{(l)}|$  で、(4.19) で、左の項を  $\sup_{1 \leq k \leq K} |u_k^{(n)} - u_k|$  で置き換え、(4.19) の導出でも同様な置き換えを行い、 $\epsilon/K^{1/p}$  を  $\epsilon$  にすればよい。(4.19) に対応する式が任意の  $K \in \mathbf{N}$  で成り立つので、その式から  $\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}\|_\infty < 2\epsilon$  が結論される。□

**定理 4.2** 関数空間  $\mathcal{C}(e)$  は、それに属する関数  $f(x)$  のノルムを  $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in e} |f(x)|$  とし Banach 空間であり、関数空間  $\mathcal{C}^n(e)$  は、その要素  $f(x)$  のノルムを  $\|f\| = \sup_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_\infty$  とし Banach 空間である。

[ $\mathcal{C}(e)$  が Banach 空間であることの証明]

$\{f_l(x)\}_{l=1}^\infty$  が Cauchy 列であるとする。任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $l > N, m > N$  のとき、すべての  $x$  で

$$|f_l(x) - f_m(x)| \leq \|f_l - f_m\| < \epsilon \quad (4.22)$$

であるから、すべての  $x$  で数列  $\{f_l(x)\}_{l=1}^\infty$  は Cauchy 列であり、収束する。極限値を  $f(x)$  とする。

このとき、補助定理 1.9 によりすべての  $x$  で

$$|f_i(x) - f(x)| < 2\epsilon \quad (4.23)$$

が成り立つので、連続関数  $f_i(x)$  は  $f(x)$  に一様収束する。したがって、定理 1.5 (節 1.4) により、 $f(x)$  は連続である。このとき、 $\|f_i(x) - f(x)\| < 2\epsilon$  となるので、 $f_i(x) - f(x) \in \mathcal{C}(e)$  となり、 $f(x) = f_i(x) + f(x) - f_i(x) \in \mathcal{C}(e)$  となる。補助定理 4.3 により  $\|f\| < \infty$  が示される。□

[ $\mathcal{C}^n(e)$  が Banach 空間であることの証明へのヒント] 上の空間  $\mathcal{C}(e)$  にたいする証明で、ノルム  $\|f_i - f_m\|$ ,  $\|f_i\|$ ,  $\|f\|$  はそのままとし、関数  $f_i(x)$ ,  $f_m(x)$ ,  $f(x)$  をすべて  $f_i^{(k)}(x)$ ,  $f_m^{(k)}(x)$ ,  $f^{(k)}(x)$  で置き換える。[ヒント終わり]

**定理 4.3** 関数空間  $\mathcal{L}^1$  に属する関数  $f(x)$  のノルムを  $\|f\| = \|f\|_1 = \int |f(x)| dx$  で定義するとき、 $\mathcal{L}^1$  は Banach 空間である。

[完備性の証明]  $\{f_n(x)\}$  が Cauchy 列であるとする。正整数  $m_1, m_2, \dots$  を  $m_1 < m_2 < \dots$  であり、 $n > m_k$  のとき

$$\|f_n - f_{m_k}\| < 2^{-k} \quad (4.24)$$

となるように選ぶ。このとき、

$$\int |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)| dx = \|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\| < 2^{-k} \quad (4.25)$$

となる。したがって、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)| dx \leq 1 \quad (4.26)$$

となり、Levi の定理の系 (節 2.2) により、級数

$$f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x))$$

は可積分関数に a.e. で収束する。これは、関数列  $\{f_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  が a.e. で収束する可積分関数の存在を保証する。その関数を  $f(x)$  と書くと、それは  $\mathcal{L}^1$  に属する。ここで、可積分関数の列  $\{f_{m_k}(x) - f(x)\}_{k=1}^{\infty}$  に Lebesgue の定理の拡張を適用して  $\|f_{m_k} - f\| \rightarrow 0$  が示される。次に、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $r$  を  $2^{-r} < \epsilon/2$  であり、 $\|f_{m_r} - f\| < \epsilon/2$  となるように選ぶ。このとき、 $n > m_r$  で

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{m_r}\| + \|f_{m_r} - f\| < \epsilon$$

となる。これは  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  を示す。□

上で  $\|f\|_{\infty}$ ,  $\|f\|_1$  という記号を用いた。これは  $\|f\|_p = [\int |f(x)|^p dx]^{1/p}$  とする記号である。ここで、 $f(x)$  は  $p > p_1$  のとき  $|f(x)|^p$  が有界な可測集合  $e$  で可積分であるような連続関数であるとする。このとき、 $p \rightarrow \infty$  で  $\|f\|_p$  は  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in e} |f(x)|$  になることを確かめる。 $M = \sup_{x \in e} |f(x)|$  とする。任意の  $\epsilon > 0$  にたいして  $|f(x)| > M - \epsilon$  である点の測度が  $\delta$  であるとすると、

$$\|f\|_p \leq Mm(e)^{1/p}, \quad \|f\|_p > (M - \epsilon) \delta^{1/p}$$

となる。ここで、 $p \rightarrow \infty$  とすると  $M - \epsilon \leq \|f\|_{\infty} \leq M$  となるので、 $\epsilon \rightarrow 0$  として  $\|f\|_{\infty} = M$  を得る。

### 4.3 関数空間 $\mathcal{L}^2$

関数  $f(x)$  は、その二乗  $|f(x)|^2$  が可積分であり、 $f(x)$  自身が可測な関数であるとする。このような関数の集合を  $\mathcal{L}^2$  で表す。したがって、 $f(x) \in \mathcal{L}^2$  ならば、

$$\int |f(x)|^2 dx < \infty \quad (4.27)$$

が成り立つ。

**補助定理 4.4**  $f(x) \in \mathcal{L}^2, g(x) \in \mathcal{L}^2$  であるとき、積  $f(x)g(x)$  は可積分であり、 $f(x) + g(x) \in \mathcal{L}^2$  である。

[証明] 不等式  $|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$  の左辺の  $f(x)g(x)$  は可測関数であり、右辺は可積分である。したがって、定理 2.4、定理 2.3 (節 2.3) により  $f(x)g(x)$  は可積分である。これを用いて、 $f(x) + g(x) \in \mathcal{L}^2$  が示される。□

$f(x)$  も  $g(x)$  も  $\mathcal{L}^2$  に属するとき、内積  $(f, g)$  を

$$(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)} dx \quad (4.28)$$

で定義し、ノルム  $\|f\|$  を

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} \quad (4.29)$$

定義する。Schwarz の不等式 (4.6) は

$$|(f, g)| \leq \|f\| \times \|g\| \quad (4.30)$$

となる。

$f(x) \in \mathcal{L}^2, g(x) \in \mathcal{L}^2$  であり、 $\lambda$  が数 (実数または複素数) であるとき、(4.29) で定義されるノルムは、

- 1)  $\|f\| \geq 0$  (非負性)、 a.e. で  $f(x) = 0$  のときにのみ  $\|f\| = 0$
- 2)  $\|\lambda f\| = |\lambda| \times \|f\|$  (斉次性)
- 3)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  (三角不等式)

を満たす。

このノルムにより、関数空間  $\mathcal{L}^2$  はノルム空間である。この空間での零要素  $0$  は殆どいたるところで  $0$  である関数である (定理 2.5 (節 2.3) 参照)。

**定理 4.4**  $f(x)$  が有界な可測集合  $e$  で二乗可積分であり、そこで可測であるとする、 $f(x)$  自身もそこで可積分である。

[証明] 集合  $e$  の特性関数を  $\chi_e(x)$  とする。補助定理 4.4 を、 $f(t)$  と  $g(t)$  を  $f(x)\chi_e(x)$  と  $\chi_e(x)$  として適用する。[証明終わり]

$\mathcal{L}^2$  の関数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  は

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad (4.31)$$

となる  $f(x)$  が存在するとき、 $f(x)$  に平均収束する (mean-square convergence) という。

### Riesz-Fischer の定理

$\mathcal{L}^2$  の関数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  が平均収束するための必要十分条件は、 $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  で

$$\|f_m - f_n\| \rightarrow 0 \quad (4.32)$$

が成り立つことである。

[必要の証明] 数列の場合の定理 1.3 (節 1.2) と同じである。 $\{f_n(x)\}$  が平均収束するとき、極限関数を  $f(x)$  とすると、

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

となり、したがって、三角不等式により、

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| \rightarrow 0$$

となる。 □

[十分の証明]  $\mathcal{L}^1$  の場合の定理 4.3 の証明 (節 4.2) に、以下の修正を施せばよい。

$x \in \mathbf{R}^n$  とし、 $e \in \mathbf{R}^n$  を有界な可測集合とする。Schwarz の不等式 (節 4.1) を使って、(4.25) の代わりにの式として、

$$\int_e |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)| dx \leq m(e)^{1/2} \|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\| \leq m(e)^{1/2} 2^{-k} \quad (4.33)$$

を導く。したがって、(4.26) に代わる式は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_e |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)| dx \leq m(e)^{1/2}$$

となる。 $f_{m_k}(x)$  が任意の  $e$  の a.e. で収束する可積分関数  $f(x)$  の存在が示される。

さらに、(4.33) の右の不等式により

$$\|f_{m_k}(x)\| \leq \|f_{m_1}\| + \sum_{l=2}^k \|f_{m_l} - f_{m_{l-1}}\| \leq \|f_{m_1}\| + 1 \quad (4.34)$$

が成り立つので、 $|f_{m_k}(x)|^2$  の積分は有界である。したがって、Fatou の補題 (節 2.2) により、 $f(x)$  は  $\mathcal{L}^2$  に属する。 □

**例 4.3.1**  $\{f_n(x)\}$  が  $f(x)$  にたいし、 $n \rightarrow \infty$  で  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ 、あるいは  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  となり、 $\{f_n(x)\}$  が  $f(x)$  に収束しない  $x$  の集合が零集合ではない場合が存在することがある。ここで、N. Wiener の本 *The Fourier Integral & Certain of its Applications* (Cambridge U.P., 2003) にある例を、記述の誤りを直して紹介する。 $n \in \mathbf{N}$  にたいして  $k = [\log_2 n]$  は  $\log_2 n$  より大きくない最大の整数とする。このとき  $2^k \leq n < 2^{k+1} = 2^k + 2^k$  である。

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{n-2^k}{2^k} \\ 1, & \frac{n-2^k}{2^k} \leq x < \frac{n-2^k+1}{2^k} \\ 0, & x \geq \frac{n-2^k+1}{2^k} \end{cases}$$

とする。このとき、 $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{2^k} < \frac{2}{n}$  であるから、 $f(x) = 0$  として  $\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  となる。 $x$  を  $0 \leq x < 1$  とするとき、任意の  $k \in \mathbf{Z}_+$  にたいし、 $2^k \leq n < 2^{k+1}$ 、 $f_n(x) = 1$  が成り立つような  $n$  が存在し、そこでは  $f_n(x) \rightarrow 0$  とはならない。

**定理 4.5**  $\mathcal{C}^n$  の関数の集合は  $\mathcal{L}^2$  で稠密である。

[証明]  $f(x) \in \mathcal{L}^2$  とする。このとき  $f(x)$  は可測であるから、それに収束する階段関数列  $\{\phi_k(x)\}$  が存在する。任意の正数  $\epsilon > 0$  にたいして、

$$\|\phi_k - f\| < \epsilon$$

とする。まず、 $\phi_k(x)$  に  $\mathcal{L}^2$  の意味で近い関数  $g_k(x)$  を

$$\|g_k - \phi_k\| < \epsilon \tag{4.35}$$

を満たすように、 $\mathcal{C}^n$  の関数系から選ぶことができることを示す。 $\phi_k(x)$  が、その不連続点  $c$  を含む  $c$  の近傍  $(c', c' + \delta)$  で

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \phi_k(c'), & c' < x < c \\ \phi_k(c' + \delta), & c < x < c' + \delta \end{cases}$$

あったとすると、そこで、 $g_k(x)$  は、 $n = 0$  のときには

$$g_k(x) = \phi_k(c') + \frac{\phi_k(c' + \delta) - \phi_k(c')}{\delta}(x - c'), \quad c' < x < c' + \delta \tag{4.36}$$

とする。 $0 \leq n < \infty$  のときには

$$g_k(x) = \phi_k(c') + \frac{\phi_k(c' + \delta) - \phi_k(c')}{\Phi(c' + \delta)}\Phi(x), \quad c' < x < c' + \delta \tag{4.37}$$

とする。ここで、

$$\Phi(x) = \int_{c'}^x \exp\left\{-\frac{\delta^2}{(t - c')(c' + \delta - t)}\right\} dt$$

である (節 4.1 の例 4.1.3 の  $F(x)$  参照)。  $g_k(x)$  は不連続点の近傍以外では  $\phi_k(x)$  に等しいものとする。 $\phi_k(x)$  の不連続点は有限個であるから、 $\delta$  の選びかたにより、 $\|g_k - \phi_k\|$  を任意に小さくできるので (4.35) を満たすことが可能である。

このように選んだ  $g_k(x)$  は

$$\|g_k - f\| \leq \|g_k - \phi_k\| + \|\phi_k - f\| < 2\epsilon$$

となる。したがって、このように選んだ  $\{g_k(x) \in \mathcal{C}^n\}$  は  $f(x)$  に平均収束する。  $\square$

**定理 4.6** 周期  $2\pi$  の  $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$  の関数系は  $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  で稠密である。

[証明] 定理 4.5 は  $(a, b)$  が有限のときに  $\mathcal{C}^n[a, b]$  が  $\mathcal{L}^2(a, b)$  で稠密であることを示す。その証明は  $a = -\pi, b = \pi$  とすれば、わずかな修正で、周期  $2\pi$  の  $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$  の関数系が  $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  で稠密であることを示す。修正は  $\phi_k(-\pi + 0) \neq \phi_k(\pi - 0)$  のときに必要になる。そのときには、 $-3\pi < x < -\pi$  で  $\phi_k(x) = \phi_k(x + 2\pi)$  とし、不連続点  $c = -\pi$  の近傍  $(c', c' + \delta)$  で連続になるように  $g_k(x)$  を作り、さらに  $c' + 2\pi < x < \pi$  で  $g_k(x) = g_k(x - 2\pi)$  とすればよい。  $\square$

**定理 4.5 の系**

$f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  のとき、任意の  $\epsilon > 0$  にたいし、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < r < \delta$  を満たす任意の  $r$  にたいし

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+r) - f(x)|^2 dx < \epsilon \tag{4.38}$$

が成り立つ。

[証明の準備]  $f(x)$  が  $x > R$  および  $x < -R$  で 0 に等しく、 $\mathcal{C}(\mathbf{R})$  に属するときの証明を行う。このとき、 $f(x)$  は一様連続であるから、任意の  $\epsilon > 0$  にたいし  $\delta > 0$  が存在して  $0 < r < \delta$  を満たす任意の  $r$  にたいし、 $|f(x+r) - f(x)| < \sqrt{\epsilon/(2R)}$  となる。したがって、(4.38) が成り立つ。□

[証明] 与えられた  $\epsilon > 0$  にたいし、 $R > 0$  を  $\int_R^\infty |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{-R} |f(x)|^2 dx < \epsilon/18$  となるように選ぶ。さらに、 $\mathcal{C}(\mathbf{R})$  の関数  $g(x)$  を、 $x > R$  および  $x < -R$  で 0 に等しく、 $\|f-g\|^2 < \epsilon/9$  となるように選ぶ。 $x \in \mathbf{R}$  の関数  $f_r(x), g_r(x)$  を  $f_r(x) = f(r+x), g_r(x) = g(r+x)$  とする。証明の準備により、 $\delta$  を  $0 < r < \delta$  のとき  $\|g_r - g\|^2 < \epsilon/9$  となるように選ぶことができるので、このとき、

$$\|f_r - f\| \leq \|f_r - g_r\| + \|g_r - g\| + \|g - f\| < 2\epsilon^{1/2}/3 + \epsilon^{1/2}/3 = \epsilon^{1/2} \quad (4.39)$$

となる。すなわち、 $\|f_r - f\|^2 < \epsilon$  となる。□

## 4.4 合成関数

ここで、次の定理を準備する。

**定理 4.7**  $\mathcal{C}^n$  の関数の集合は  $\mathcal{L}^1$  で稠密である。

[証明] 定理 4.5 の証明で  $\mathcal{L}^2$  を  $\mathcal{L}^1$  とし、ノルム  $\|\cdots\|$  を  $\|\cdots\|_1$  とすればよい。□

$f(x), g(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  とする。このとき、

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \quad (4.40)$$

を  $f(x)$  と  $g(x)$  の合成関数または合成積 (convolution) といい、

$$h(x) = (f * g)(x) \quad (4.41)$$

で表す。

**定理 4.8**  $h(x)$  が  $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  と  $g(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  の合成関数であるとする。このとき、 $h(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  である。

[証明の準備] ここで、 $f(x)$  が階段関数  $\{\phi_n(x)\}$  の非減少列の極限であり、 $g(t)$  が正値 (非負値) の連続関数である場合の証明をする。このとき、定理 2.3, 定理 2.4 (節 2.3) により  $\phi_n(y)g(x-y)$  は  $y$  の関数として可積分である。

$$h_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(y)g(x-y)dy \quad (4.42)$$

とすると、定理 3.1 (節 3.1) により  $g(x)$  の不定積分が連続であることを用いて、 $h_n(x)$  は  $x$  の連続関数となることが示される。 $h_n(x)$  の有限区間  $(a, b)$  での積分では、 $\phi_n(y)$  が一定値を取る  $y$  の各区間で  $\phi_n(y)g(x-y)$  が連続であり、例 2.3.6 により Fubini の定理が適用され、

$$\int_a^b h_n(x)dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (4.43)$$

が任意の  $(a, b)$  にたいして得られる。

(4.43) から  $\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1$  が得られる。 $\{h_n(x)\}$  に Levi の定理 (節 2.2) を適用すると、 $h_n(x)$  は  $n \rightarrow \infty$  で可積分関数に収束する。これを  $h(x)$  とすると、 $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(y)g(x-y)dy$ 、 $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1$  となる。ここで、 $y$  の関数の列  $\{\phi_n(y)g(x-y)\}$  に Lebesgue の定理の拡張 (節 2.2) を適用すると、(4.40) が示される。□

[証明]  $f(x)$  が階段関数  $\{\phi_n(x)\}$  の非減少列の極限であり、 $g(t)$  が正値 (非負値) の  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  の関数である場合の証明をする。ここで、 $g(x)$  を、正値 (非負値) の連続関数  $\psi(x)$  で  $\|g - \psi\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x) - \psi(x)| dx$  が小さくなるように近似する。このとき、

$$h_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(y)g(x-y)dy, \quad h_n^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(y)\psi(x-y)dy \quad (4.44)$$

とすると、いずれも  $x$  の連続関数となる。証明の準備の  $g(x)$  を  $\psi(x)$  とすると、(4.43) により、有限区間  $(a, b)$  にたいし

$$\int_a^b h_n^*(x)dx \leq \|\phi_n\|_1 \|\psi\|_1 \leq \|f\|_1 (\|g\|_1 + \|g - \psi\|_1) \quad (4.45)$$

が得られる。 $C_n = \sup_{y \in (-\infty, \infty)} |\phi_n(y)|$  と置くと、(4.44) により  $|h_n(x) - h_n^*(x)| \leq C_n \|g - \psi\|_1$  が成り立ち、

$$\left| \int_a^b h_n(x)dx - \int_a^b h_n^*(x)dx \right| \leq (b-a)C_n \|g - \psi\|_1 \quad (4.46)$$

となる。 $\|g - \psi\|_1$  は任意に小さく取れるので、(4.45) と (4.46) から (4.44) で定義される  $h_n(x)$  にたいし (4.43) が、任意の  $(a, b)$  にたいして得られる。

ここで、証明の準備の (4.43) 以下の議論を適用して証明を終える。  $\square$

**定理 4.9**  $f(x)$  と  $g(x)$  は  $\mathbf{R}$  で局所可積分であり、次の3つの条件のいずれかを満たすとす。

- (1)  $f(x)$  または  $g(x)$  がコンパクトな台をもつ。
- (2)  $f(x)$  と  $g(x)$  がともに左側で有界な台をもつ。
- (3)  $f(x)$  と  $g(x)$  がともに右側で有界な台をもつ。

このとき、(4.40) で与えられる合成関数  $h(x)$  は  $\mathbf{R}$  で局所可積分である。すなわち、その関数  $h(x)$  は任意の有限区間  $(a, b)$  で可積分である。さらに、 $h(x)$  は、条件 (1), (2), (3) に応じ、コンパクトな台、左側で有界な台、右側で有界な台をもつ。

[条件 (1) の場合の証明] 有限区間  $(a, b)$  での  $h(x)$  にたいし、定理 4.8 の証明に従う。 $f(x)$  の台が有限区間  $[c, d]$  であるとするときには、(4.44) の被積分関数の  $g(x-y)$  が 0 でない範囲は  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, a-d \leq x-y \leq b-c$  のみである。したがって、(4.43) で  $\|g\|_1$  を  $\int_{a-d}^{b-c} |g(x)| dx$  とした式が得られる。また、 $g(x)$  の台が有限区間  $[c, d]$  であるとするときには、 $\|f\|_1$  を  $\int_{a-d}^{b-c} |f(x)| dx$  とした式が得られる。

これからは、証明の準備の (4.43) 以下で、 $h_n(x), h(x), \phi_n(x)g(x-y)$  を、それぞれに区間  $(a, b)$  の特性関数  $\chi_{(a,b)}(x)$  を掛けたもので置き換えることにより、 $h(x)$  を (4.40) として  $h(x)\chi_{(a,b)}(x)$  が可積分であることが示される。  $\square$

[条件 (2) の場合の証明]  $f(x), g(x)$  の台がそれぞれ  $[c_f, \infty), [c_g, \infty)$  であるとする。このとき  $f(y)g(x-y)$  が 0 でない範囲は  $a \leq x \leq b, c_f \leq y, c_g \leq x-y \leq b-c_f, y \leq b-c_g$  のみである。したがって、(4.43) で  $\|f\|_1$  を  $\int_{c_f}^{b-c_g} |f(x)| dx$  とし、 $\|g\|_1$  を  $\int_{c_g}^{b-c_f} |g(x)| dx$  とした式が得られる。以下は、前の証明と同様である。  $\square$

次の例でガンマ関数  $\Gamma(z)$  と Heaviside の階段関数  $u(x)$  を用いる。 $\Gamma(z)$  は  $\operatorname{Re} z > 0$  の複素数  $z$  にたいし Euler の積分表示

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4.47)$$

で与えられる。 $u(x)$  は  $x \in \mathbf{R}$  の関数で

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

である。なお、任意の関数  $f(x)$  にたいし、 $x \leq 0$  のとき  $f(x)u(x) = 0$  とする。

例 4.4.2  $f(x)u(x-a)$  が  $\mathbf{R}$  で局所可積分であるとき、正の実数  $q$  にたいして、 $q$  次の Riemann-Liouville 非整数回積分 (fractional integral)  ${}_aD_R^{-q}f(x)$  が、 $x > a$  にたいして

$${}_aD_R^{-q}f(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^x (x-y)^{q-1} f(y) dy \quad (4.49)$$

で定義される。右辺は  $\frac{1}{\Gamma(q)}x^{q-1}u(x)$  と  $f(x)u(x-a)$  の合成関数である。定理 4.9 (条件 (2)) により、この積分は局所可積分である。また、正の実数  $p$  にたいして、 $p$  次の Riemann-Liouville 非整数回微分 (fractional derivative)  ${}_aD_R^p f(x)$  が、 $x > a$  にたいして  ${}_aD_R^p f(x) = \frac{d^m}{dx^m} {}_aD_R^{p-m} f(x)$  で定義される。ここで、 $m$  は  $p$  より小さくない最小の整数である。

例 4.4.3 例 4.4.2 で  $\alpha > -1$ ,  $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}$  と置くと  $p \in \mathbf{R}$  にたいし

$${}_aD_R^p f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-p)}(x-a)^{\alpha-p-1} \quad (4.50)$$

[証明] 積分にさいして、すなわち  $p = -q < 0$  のとき、(4.49) の右辺に上記  $f(x)$  を代入し、積分変数  $y$  を  $t = \frac{y-a}{x-a}$  として、ベータ関数  $B(p, q)$  についての次の公式を用いる。 $p, q$  が  $\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0$  の複素数のとき

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (4.51)$$

整数回微分にさいし、ガンマ関数の漸化式  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  を用いる。  $\square$

## 5

# Fourier 級数、直交多項式

## 5.1 基底、完全正規直交系

線形空間  $\mathcal{E}$  の可算個の要素の集合  $\{f_n\}$  は、その任意の有限個の一次結合が 0 となるのは係数のすべてが 0 のときに限られるときに、一次独立 (linearly independent) であるという。そうでないときに、一次従属 (linearly dependent) であるという。

**例 5.1.1**  $\mathcal{E}$  は  $l^1, l^2, l^\infty$  のいずれかであるとする。  $n \in \mathbf{N}$  にたいし、  $\mathbf{e}^{(n)} \in \mathcal{E}$  が、その  $n$  番目の成分が 1 であり、それ以外の成分はすべて 0 であるものとして与えられているとする。すなわち、  $\mathbf{e}^{(1)} = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ,  $\mathbf{e}^{(2)} = (0, 1, 0, 0, \dots)$ ,  $\mathbf{e}^{(3)} = (0, 0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$  とする。このとき、  $\mathcal{E}$  の要素の列  $\{\mathbf{e}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  は一次独立である。

[証明] 最初の  $K$  個の一次結合は

$$x_1 \mathbf{e}^{(1)} + x_2 \mathbf{e}^{(2)} + \dots + x_K \mathbf{e}^{(K)} = (x_1, x_2, \dots, x_K, 0, 0, \dots)$$

と表される。これが 0 ならば、右辺から  $x_1 = x_2 = \dots = x_K = 0$  となり、係数のすべてが 0 となる。  $\square$

集合  $A$  の部分集合  $A_0$  が可算個の要素からなり、それが  $A$  で稠密であるとする。このような部分集合  $A_0$  が存在するような集合  $A$  を可分 (separable) であるという。

**例 5.1.2**  $n$  次元ベクトル空間  $\mathbf{R}^n$  と  $\mathbf{C}^n$  は、その要素  $\mathbf{x}$  のノルム  $\|\mathbf{x}\|$  を (4.7) のいずれとしても、可分なノルム空間である。

[証明へのヒント]  $\mathcal{E}$  が  $\mathbf{R}^n$  であるとする。このとき、  $\mathcal{E}$  の要素  $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^n$  で  $x_k$  がすべて有理数であるものの集合が可算集合であり、  $\mathcal{E}$  で稠密であることを確かめればよい。 [ヒント終わり]

**例 5.1.3** 数列空間  $l^1, l^2$  は、いずれも可分なノルム空間である。

[証明]  $\mathcal{E}$  は  $l^1, l^2$  のいずれかであるとする。  $K \in \mathbf{N}$  とし、  $\mathcal{E}$  の要素  $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty$  で  $k \leq K$  の  $x_k$  がすべて有理数であり、  $k > K$  の  $x_k$  がすべて 0 であるものの集合を  $A_K$  とする。節 1.1 の例 1.1.2 と定理 1.1 により集合  $A_K$  は可算集合であり、定理 1.1 (節 1.1) により、その可算個の和集合  $\cup_{K=1}^\infty A_K$  も可算集合である。以下で、この和集合が  $\mathcal{E}$  で稠密であることを確かめる。

$\mathcal{E}$  の任意の要素を  $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty$  とする。任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、  $K \in \mathbf{N}$  と  $\mathcal{E}$  の要素  $\mathbf{y} = \{y_k\}_{k=1}^\infty$  を、  $k \leq K$  で  $y_k = x_k$  となり、  $k > K$  で  $y_k = 0$  となり、しかも、  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \epsilon/2$  なるように選ぶ。次に、  $A_K$  の要素  $\mathbf{z} = \{z_k\}_{k=1}^\infty$  を、  $k \leq K$  で  $|z_k - x_k| < \epsilon/(2K)$  となるように選ぶと、  $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \epsilon$  となる。  $\square$

ノルム空間  $\mathcal{E}$  の可算個の一次独立な要素の集合  $\{f_n\}$  は、 $\mathcal{E}$  の任意の要素がその一次結合により表されるときに、**基底** (basis, 複数は bases) であるという。

**例 5.1.4**  $\mathcal{E}$  は  $l^1, l^2$  のいずれかであるとする。例 5.1.1 で与えられた要素の列  $\{\mathbf{e}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  は  $\mathcal{E}$  の基底である。

[証明]  $\mathcal{E}$  の任意の要素  $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  は

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{e}^{(k)}$$

と表される。 □

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  がノルム空間  $\mathcal{E}$  の基底であるとする。級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$  が  $\mathcal{E}$  の要素  $f$  に収束するとき、この級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$  を  $f$  の  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  による展開といい、 $a_n$  を展開係数という。

この節の以下の部分では、Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  に属する一次独立な要素の可算無限個の列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が存在する場合を考える。

Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の要素の列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が、条件

$$(f_n, f_m) = 0, \quad n \neq m \tag{5.1}$$

を満たすときに**直交系** (orthogonal system) であるという。この条件を**直交条件** (orthogonal condition) という。それは、条件

$$(f_n, f_m) = \delta_{nm} \tag{5.2}$$

を満たすときに**正規直交系** (orthonormal system) であるという。この条件を**正規直交条件** (orthonormal condition) という。ここで  $m \in \mathbf{Z}$  のとき、 $\delta_{nm}$  は  $n = m$  のときに 1 となり、それ以外では 0 である  $n \in \mathbf{Z}$  の関数で、Kronecker のデルタ (Kronecker's delta) と呼ばれる。等式  $\delta_{nm} = \delta_{mn}$  が成り立つ。

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が直交系であるが、正規直交系でないときには、

$$e_n = \frac{f_n}{\|f_n\|} \tag{5.3}$$

とすると、 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  は正規直交系になる。ここで、 $1/\|f_n\|$  を正規化定数という。

**例 5.1.5**  $n \in \mathbf{N}$  にたいし  $f_n(x) = \sin nx$  とする。この関数の集合  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  の直交系である。区間  $(-\pi, \pi)$  で  $\|f_n\| = \sqrt{\pi}$  であるから、 $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  は正規直交系である。

**例 5.1.6**  $n \in \mathbf{N}$  にたいし  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \chi_{[n, n+1)}(x) = \begin{cases} 1, & n \leq x < n+1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.4}$$

とすると、この関数の集合  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  は  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の正規直交系である。

**定理 5.1**  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の正規直交系であるとする。級数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$  が  $\mathcal{H}$  の要素  $f$  に収束するときには、係数  $c_n$  は

$$c_n = (f, f_n) \quad (5.5)$$

で与えられる。その級数が  $f$  に収束するか否かにかかわらず、不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, f_n)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (5.6)$$

が成り立つ。

不等式 (5.6) を **Bessel の不等式** (Bessel's inequality) という。この不等式により (5.5) で与えられる係数  $c_n$  の列  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  は数列空間  $l^2$  に属し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  が成り立つ。

[(5.5) の導出] 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$  の  $n = N$  の項までの部分 and  $\sum_{n=1}^N c_n f_n$  を  $g_N$  で表すと、それは  $f$  に収束するので、 $N \rightarrow \infty$  で  $\|g_N - f\| \rightarrow 0$  となる。Schwarz の不等式 (節 4.1) により

$$|(g_N - f, f_n)| \leq \|g_N - f\| \times \|f_n\|$$

が成り立つ。 $N \rightarrow \infty$  で右辺は 0、したがって左辺も 0 となる。したがって、 $c_n = \lim_{N \rightarrow \infty} (g_N, f_n) = (f, f_n)$  が得られる。□

[(5.6) の導出]  $c_n = (f, f_n)$  とすると、

$$0 \leq \|f - \sum_{n=1}^N c_n f_n\|^2 = (f - \sum_{n=1}^N c_n f_n, f - \sum_{n=1}^N c_n f_n) = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2$$

となり、したがって、

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq \|f\|^2$$

となる。このとき、左辺の級数は収束し、(5.6) が成り立つ。□

**定理 5.2** 任意の正整数  $N$  にたいし、正規直交系  $\{f_n\}_{n=1}^N$  の一次結合  $\sum_{n=1}^N a_n f_n$  の中で  $\|f - \sum_{n=1}^N a_n f_n\|$  を最小にする  $\{a_n\}$  は  $a_n = c_n = (f, f_n)$  で与えられる。

[証明]  $c_n = (f, f_n)$  とすると、

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{n=1}^N a_n f_n\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N [a_n (f_n, f) + \bar{a}_n (f, f_n)] + \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n - a_n|^2 \end{aligned}$$

となる。これは、 $a_n = c_n$  のときに最小になる。□

$f_1, f_2, \dots, f_N$  の一次結合で表される要素の集合を  $f_1, f_2, \dots, f_N$  が張る空間という。これを  $V_N$  とするとき、 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が正規直交系ならば、 $\sum_{n=1}^N c_n f_n$  は  $f$  の  $V_N$  への正射影である。すなわち、

$$\left( \sum_{n=1}^N c_n f_n, f - \sum_{n=1}^N c_n f_n \right) = 0 \quad (5.7)$$

が成り立つ。

ノルム空間  $\mathcal{E}$  の要素の列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は、 $\mathcal{E}$  の任意の要素  $f$  に収束する級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$  が存在するときに、完全 (complete) であるという。

**定理 5.3**  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の完全正規直交系であるとき、 $\mathcal{H}$  の任意の要素  $f$  にたいし  $c_n = (f, f_n)$  を係数とする級数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$  は  $f$  に収束し、等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, f_n)|^2 = \|f\|^2 \quad (5.8)$$

が成り立つ。さらに、 $f \in \mathcal{H}, g \in \mathcal{H}$  ならば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n)(f_n, g) = (f, g) \quad (5.9)$$

が成り立つ。

等式 (5.8) を **Parseval の等式** という。

[証明] (5.9) を証明する。 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は完全であるから、 $f, g$  に収束する級数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n, \sum_{n=1}^{\infty} d_n f_n$  が存在する。定理 5.1 により、このとき、 $c_n = (f, f_n), d_n = (g, f_n)$  となり、Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned} |(f - \sum_{n=1}^N c_n f_n, g - \sum_{n=1}^N d_n f_n)| &= |(f, g) - \sum_{n=1}^N c_n \overline{d_n}| \\ &\leq \|f - \sum_{n=1}^N c_n f_n\| \|g - \sum_{n=1}^N d_n f_n\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる。これから (5.9) が従う。(5.8) は (5.9) で  $g$  を  $f$  として得られる。□

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の完全正規直交系であるとき、 $\mathcal{H}$  の要素  $f$  にたいし  $c_n = (f, f_n)$  を係数とする級数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$  が  $f$  の  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  による展開であり、 $c_n$  が展開係数である。このときの展開は、また Fourier 級数といい、展開係数は、また Fourier 係数という。

$\mathcal{L}^2$  では、完全正規直交系  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  による関数  $f(x) \in \mathcal{L}^2$  の展開 (Fourier 級数) は  $\sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n) f_n(x)$  となる。この級数は  $f(x)$  に平均収束する。

### 定理 5.3 の系 1

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の完全正規直交系であるとき、すべての  $f_n$  に直交する  $\mathcal{H}$  の要素は零要素 0 のみである。

[証明] (5.8) より明らか。 $\|f\| \neq 0$  ならば  $(f, f_n) \neq 0$  となる  $n \in \mathbf{N}$  が存在する。□

### 定理 5.3 の系 2

Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  は、完全正規直交系が存在するときには可分である。

[証明へのヒント] 定理 5.3 により、完全正規直交系が存在するときには、任意の要素  $f$  は、その完全正規直交系による展開の極限に等しく、(5.8) により展開係数は  $l^2$  に属する。例 5.1.3 により  $l^2$  は可分である。[証明へのヒント終わり]

**Schmidt の直交化** (Schmidt's orthogonalization)

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の一次独立な要素の系であるとき、次の手続きで、直交系  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 、正規直交系  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  を定義することができる。

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1, & e_1 &= \frac{g_1}{\|g_1\|}, \\ g_2 &= f_2 - (f_2, e_1)e_1, & e_2 &= \frac{g_2}{\|g_2\|}, \\ \dots & & & \\ g_n &= f_n - \sum_{k=1}^{n-1} (f_n, e_k)e_k, & e_n &= \frac{g_n}{\|g_n\|}, \\ \dots & & & \end{aligned} \tag{5.10}$$

**補助定理 5.1** 上記 Schmidt の直交化によって  $\{f_n\}$  から作られた  $g_n, e_n$  は  $k \leq n$  の  $f_k$  の一次結合であり、 $f_n$  は  $k \leq n$  の  $e_k$  の一次結合で  $f_n = \sum_{k=1}^n (f_n, e_k)e_k$  と表される。この最後の表式は  $f_n$  が  $m > n$  の  $e_m$  と直交することを示す。

**定理 5.4** 可分な Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  には、完全正規直交系が存在する。

[証明]  $\mathcal{H}$  の可算個の要素  $\{h_k\}_{k=1}^\infty$  が  $\mathcal{H}$  で稠密であるとする。この要素の列に、 $f_n = h_n$  として、上の Schmidt の直交化の手続きを行う。 $g_n \neq 0$  となるときには、それを採用し  $e_n$  を決定し、 $g_n = 0$  となるときには列  $\{h_k\}_{k=1}^\infty$  から  $h_n$  を除き、番号  $n$  を付けかえ、 $g_n$  を再び求める。このようにして  $\{e_n\}$  を定めるとき、元の列にある  $h_k$  は、 $n \leq k$  の  $e_n$  の一次結合で表されるので、 $\{e_n\}$  は完全正規直交系である。□

**5.2 Fourier 級数**

**定理 5.5**  $x \in \mathbf{R}$  の三角関数系  $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$  を

$$f_0(x) = 1/2, f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \cos x, f_3(x) = \sin 2x, f_4(x) = \cos 2x, \dots \tag{5.11}$$

で定義する。この関数系は  $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  の完全直交系をなす。すなわち、 $f(x) \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  に対し、

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5.12}$$

は区間  $(-\pi, \pi)$  で  $f(x)$  に平均収束する。ここで、係数は

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \tag{5.13}$$

である。

[証明] (5.11) が完全系であることを仮定して証明する。その仮定の証明は定理 5.7 の証明の下に与えられる。

(5.11) は直交系であるが、

$$\|f_0\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \|f_1\| = \|f_2\| = \dots = \sqrt{\pi}$$

であるから、正規直交系ではない。(5.3) で正規直交系を作ると、 $f(x)$  の  $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$  による展開は (5.12), (5.13) で与えられる  $S(x)$  となる。定理 5.3 により、 $S(x)$  は  $f(x)$  に平均収束する。□

(5.12) の級数を  $f(x)$  の **Fourier 級数** といひ、(5.13) で与えられる数  $a_n, b_n$  を  $f(x)$  の **Fourier 係数** という。

**定理 5.6**  $f(x) \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$  の関数の Fourier 級数  $S(x)$  は、 $f(x)$  が点  $x$  の付近で有界変動ならば  $\frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\}$  に収束する。

[証明]  $f(x)$  を周期  $2\pi$  の関数として  $x \in \mathbf{R}$  に延長する。 $f(x)$  が  $x$  の付近で有界変動であるから、定理 1.7 (節 1.5) により、そこで非減少関数の差で表され、極限  $f(x+), f(x-)$  が存在する。Fourier 級数  $S(x)$  の部分和は

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.14)$$

で与えられる。(5.13) を使い、更に節 3.3 の (3.28) を用いると、これは

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(t-x) \right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})(t-x)]}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})t]}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})t]}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \end{aligned}$$

と書ける。したがって、 $\lambda = N + \frac{1}{2}$ ,

$$\Delta f(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+) - f(x-)$$

とすると、等式 (3.29) を用いて

$$\begin{aligned} S_N(x) - \frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta f(t) \frac{\sin \lambda t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta f(t) \frac{t}{2 \sin \frac{1}{2}t} \frac{\sin \lambda t}{t} dt \end{aligned} \quad (5.15)$$

を得る。 $t=0$  の近傍で  $\Delta f(t)$  は単調で、 $|\Delta f(t)|$  は 0 から増加し、これに  $t/\sin(\frac{1}{2}t)$  を掛けたものも単調である。したがって、定理 3.5 (節 3.3) により、 $\lambda \rightarrow \infty$  で上式の右辺の積分は 0 となる。すなわち、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [S_N(x) - \frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\}] = 0$$

が得られる。 □

(5.14) の右辺のように、 $1, \{\cos nx\}_{n \in \mathbf{N}}, \{\sin nx\}_{n \in \mathbf{N}}$  の有限個の一次結合で表される式を三角多項式 (trigonometric polynomial) という。(5.14) の右辺は、 $a_N, b_N$  の一方または両方が 0 でないとき、 $N$  次の三角多項式であるという。

**例 5.2.1**  $f_1(x), f_2(x)$  は  $x \in (0, 2\pi)$  で

$$f_1(x) = x - \pi, \quad f_2(x) = \frac{x^2}{2} - \pi x + \frac{\pi^2}{3}$$

であり、周期  $2\pi$  をもつ関数であるとする。これらの Fourier 級数は

$$x - \pi = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx, \quad 0 < x < 2\pi$$

$$\frac{x^2}{2} - \pi x + \frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \cos nx, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

で与えられる。 $f_2(x)$  は連続関数であり、 $x = 0, x = \pi$  とおくと、和の公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad (5.16)$$

が得られる。

**定理 5.7**  $f(x)$  が周期  $2\pi$  の  $C^1(\mathbf{R})$  の関数ならば Fourier 級数  $S(x)$  は関数  $f(x)$  に一様収束し、したがって  $f(x)$  に平均収束する。

[一様収束の証明] このとき、 $f'(x)$  の Fourier 級数は、(5.12) を項別微分して得られる級数

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$$

で与えられる。この式に対応する Bessel の不等式 (節 4.1) は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|b_n|^2 + |a_n|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx \quad (5.17)$$

となる。したがって、左辺の級数は収束する。ここで、Schwarz の不等式 (節 4.1) を用いて、不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (n|a_n|) \frac{1}{n} \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (n|a_n|)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2}$$

を得る。右辺の級数は (5.17) と (5.16) によりいずれも収束するので、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  は収束する。 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  の収束も同様に示される。不等式  $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$  が成り立つので、Weierstrass の判定法 (節 1.3) により Fourier 級数  $S(x)$  は一様収束する。□

[平均収束の証明] 任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $N_0 \in \mathbf{N}$  が存在して、 $N > N_0$  のとき、 $-\pi < x < \pi$  で  $|f(x) - S_N(x)| < \epsilon$  が成り立つ。したがって、 $\|f - S_N\| \leq \sqrt{2\pi}\epsilon$  となる。□

[(5.11) が完全系であることの証明] 定理 4.6 (節 4.3) により、周期  $2\pi$  の  $C^1(\mathbf{R})$  の関数系は  $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  で稠密である。すなわち、 $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  の任意の関数に、平均収束する周期  $2\pi$  の  $C^1(\mathbf{R})$  の関数の列が存在する。これを用いて、三角関数系 (5.11) は  $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  の完全直交系であることが示される。

$f(x)$  は  $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  の関数であるとする。このとき、任意の  $\epsilon > 0$  にたいし、 $\|f - g\| < \epsilon$  を満たすような周期  $2\pi$  の  $C^1(\mathbf{R})$  の関数  $g(x)$  が存在する。 $f(x)$  と  $g(x)$  の Fourier 級数の部分 and を  $S_N(x)$  と  $T_N(x)$  とするとき、定理 5.7 により  $N_0 \in \mathbf{N}$  が存在して  $N > N_0$  のとき、 $\|g - T_N\| < \epsilon$  が成り立つ。ここで、定理 5.2 (節 5.1) を用いて

$$\|f - S_N\| \leq \|f - T_N\| \leq \|f - g\| + \|g - T_N\| < 2\epsilon$$

を得る。□

**定理 5.8** 指数関数系

$$f_n(x) = e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.18)$$

は  $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  での完全系をなす。この場合の  $f(x) \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$  の Fourier 級数は

$$S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x), \quad S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \quad (5.19)$$

で与えられ、Fourier 係数は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (5.20)$$

である。

[証明] (5.13) と (5.20) を用いて、

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0,$$

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad n \in \mathbf{N}$$

が示される。したがって、(5.14) の  $S_N(x)$  と (5.19) の  $S_N(x)$  は等しい。したがって、上で (5.14) の収束についての定理 5.5, 5.6, 5.7 は、(5.19) の収束についても成り立つ。□

### 5.3 直交多項式

ここで、区間  $(a, b)$  で

$$f_n(x) = x^{n-1} \tag{5.21}$$

とし、二つの関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の内積を、殆んどいたるところで  $w(x) > 0$  の重み関数  $w(x) \in \mathcal{L}^1(a, b)$  により、

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx \tag{5.22}$$

で定義する。 $(a, b)$  が無限区間のときには、 $w(x)$  は、任意の  $n \in \mathbf{N}$  にたいして、

$$\sup_{x \in (a, b)} |x|^n w(x) < \infty \tag{5.23}$$

を満たす  $|x|$  大で急速に減衰する関数であるとする。このとき、 $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$  は  $\mathcal{L}^2(a, b)$  の一次独立な要素の系である。この系から Schmidt の直交化 (節 5.1) により得られる  $g_n(x)$ ,  $e_n(x)$  は  $n-1$  次の多項式である。ここで、 $p_n(x) = e_{n+1}(x)$  とすると、 $n$  次の多項式  $p_n(x)$  の正規直交多項式の系  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  が得られる。

直交多項式の系  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  は漸化式 (recurrence formula)

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + \overline{a_{n-1}} p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \tag{5.24}$$

を満たす。係数  $a_n$ ,  $b_n$  は  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  が正規直交系のときには、

$$a_n = (xp_n, p_{n+1}), \quad b_n = (xp_n, p_n) \tag{5.25}$$

である。

[証明の準備] (5.10) で  $f_n, e_n$  を  $x^{n-1}, p_{n-1}(x)$  と置くと、補助定理 5.1 (節 5.1) により、 $p_n(x)$  が  $n$  次の多項式であり、 $x^n$  は  $x^n = \sum_{k=0}^n (x^n, p_k) p_k(x)$  と表され、 $m > n$  の  $p_m(x)$  と直交する。したがって、 $p_n(x)$  は  $n-1$  次以下の多項式と直交する。□

[証明]  $xp_n(x)$  は  $n+1$  次の多項式であるから、

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (xp_n, p_k) p_k(x)$$

と展開できる。係数  $(xp_n, p_k) = (p_n, xp_k)$  は  $n > k+1$  のときは 0 であるから、(5.24) が得られる。□

**例 1. Legendre の多項式  $P_n(x)$** 

区間  $(-1, 1)$ 、重み関数  $w(x) = 1$  として、直交多項式は

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots \quad (5.26)$$

である。 $P_n(1) = 1$ ,  $\|P_n\|^2 = 1/(n + \frac{1}{2})$  となるように選ばれている。 $P_n(x)$  の最も簡単な表式は

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (5.27)$$

である。この公式は Rodrigues の公式とよばれる。この場合の漸化式は

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.28)$$

である。

(5.27) を用いて、 $P_n(x)$  の直交関係、規格化定数  $\|P_n\|^2$ 、漸化式 (5.28) を導くのは容易である。 $P_n(1) = 1$  も  $P_0(1) = P_1(1) = 1$  と漸化式から明らかである。

**例 2. Chebyshev の多項式 (第一種)  $T_n(x)$** 

区間  $(-1, 1)$ 、重み関数  $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  として、直交多項式は

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \dots \quad (5.29)$$

である。これは、 $\theta \in (0, \pi)$  において  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$  で定義される。 $\|T_0\|^2 = \pi$ ,  $n \geq 1$  のとき、 $\|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2}$  となる。この場合の漸化式は

$$xT_n(x) = \frac{1}{2}T_{n+1}(x) + \frac{1}{2}T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

である。

定義  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$  を用いて、 $T_n(x)$  の直交関係、規格化定数  $\|T_n\|^2$ 、漸化式を導くのは容易である。

$N \in \mathbf{N}$  とする。 $\theta$  の関数  $f(\theta)$  が偶関数であり、 $N$  次の三角多項式であるとき、 $f(\theta)$  は  $\cos \theta$  の  $N$  次の多項式で表される。これは  $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$  を用いて確かめられる。

**例 3. Chebyshev の多項式 (第二種)  $U_n(x)$** 

区間  $(-1, 1)$ 、重み関数  $w(x) = \sqrt{1-x^2}$  として、直交多項式は

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1, \dots \quad (5.31)$$

である。これは、 $\theta \in (0, \pi)$  において  $U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$  で定義される。 $n \geq 0$  のとき、 $\|U_n\|^2 = \frac{\pi}{8}$  となる。この場合の漸化式は

$$xU_n(x) = \frac{1}{2}U_{n+1}(x) + \frac{1}{2}U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.32)$$

である。

定義  $U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$  を用いて、 $U_n(x)$  の直交関係、規格化定数  $\|U_n\|^2$ 、漸化式を導くのは容易である。

$N \in \mathbf{N}$  とする。 $\theta$  の関数  $f(\theta)$  が奇関数であり、 $N$  次の三角多項式であるとき、 $f(\theta)$  は  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の  $N-1$  次の多項式の積で表される。これは  $\sin(n+1) = \sin \theta U_n(\cos \theta)$  を用いて確かめられる。

#### 例 4. Hermite の多項式 $H_n(x)$

区間  $(-\infty, \infty)$ 、重み関数  $w(x) = e^{-x^2}$  として、直交多項式は

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \dots \quad (5.33)$$

である。 $H_n(x)$  の  $x^n$  の係数は  $2^n$  であり、 $\|H_n\|^2 = \pi^{1/2} 2^n n!$  となるように選ばれている。 $H_n(x)$  の最も簡単な表式は

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (5.34)$$

である。この場合の漸化式は

$$xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) + H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.35)$$

である。

(5.34) を用いて、 $H_n(x)$  の直交関係、規格化定数  $\|H_n\|^2$ 、漸化式を導くのは容易である。

この多項式と関連した Hermite 関数について節 6.4 の例 1 で述べる。

#### Weierstrass の近似定理

有限区間  $[a, b]$  で定義された連続関数  $f(x)$  は多項式で一様に近似できる。すなわち、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、多項式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (5.36)$$

が存在して、

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| < \epsilon \quad (5.37)$$

が成り立つ。

[証明の準備] 関数  $g_n(x)$  を

$$g_n(x) = \frac{1}{2J_n}(1-x^2)^n \quad (5.38)$$

で定義する。ここで、

$$J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (5.39)$$

とする。また、 $\delta \in (0, 1)$  にたいし、 $J_n(\delta)$  を

$$J_n(\delta) = \int_{\delta}^1 (1-x^2)^n dx \quad (5.40)$$

とする。 $J_n(\delta) < \int_{\delta}^1 (1-\delta^2)^n dx < (1-\delta^2)^{n+1}$ ,  $J_n > \int_0^1 (1-x)^n dx = 1/(n+1)$  を用いて、 $n \rightarrow \infty$  で  $J_n(\delta)/J_n \rightarrow 0$  となることが示される。したがって、 $\epsilon > 0$  にたいして、 $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n > N$  のとき、

$$\int_{\delta}^1 g_n(x) dx = J_n(\delta)/(2J_n) < \epsilon \quad (5.41)$$

が成り立つ。□

[証明]  $0 < a < b < 1$  の場合の証明を行なう。以下で、関数  $f(x)$  は区間  $[0, 1]$  まで連続になるように延長して、定義されているものとする。区間  $[a, b]$  で  $P_n(x)$  を

$$P_n(x) = \frac{1}{2J_n} \int_0^1 f(t)[1-(x-t)^2]^n dt \quad (5.42)$$

で定義する。右辺を  $x$  で展開すると、 $P_n(x)$  が  $x$  の  $2n$  次の多項式であることがわかる。変数  $t$  を  $x+t$  にすると、

$$P_n(x) = \frac{1}{2J_n} \int_{-x}^{1-x} f(x+t)(1-t^2)^n dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)g_n(t) dt \quad (5.43)$$

となる。 $x \in [a, b]$  で  $-1 < -b \leq -x < -a < 0 < 1-b < 1-x \leq 1-a < 1$  である。 $f(x)$  は閉区間で連続であるから、一様連続であり、有界である (定理 1.5 (節 1.4))。したがって、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $\delta$  を、 $|t| < \delta$  のときに、すべての  $x$  にたいして

$$|f(x+t) - f(x)| < \epsilon \quad (5.44)$$

となるよう選ぶことができる。ここで  $\delta$  は  $\delta < a, \delta < 1-b$  となるように選ぶ。 $f(x)$  は有界であるから、 $x \in [a, b]$  で  $|f(x)| < M$  となる  $M > 0$  が存在する。 $n > N$  のとき、

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-x}^{1-x} f(x+t)g_n(t) dt - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{-x}^{1-x} f(x+t)g_n(t) dt - \int_{-1}^1 f(x)g_n(t) dt \right| \\ &\leq 4M\epsilon + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|g_n(t) dt \leq 4M\epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。この評価では、 $|t| < \delta$  で (5.44) を使い、区間  $[-\delta, \delta]$  の外では  $|f(x)|$  を  $M$  で置き換え、不等式 (5.41) を用いた。□

**定理 5.9**  $(a, b)$  が有限区間のとき、 $\mathcal{L}^2(a, b)$  での直交多項式の系は完全系をなす。

[証明の準備] 有限区間  $[a, b]$  で連続な関数  $f(x)$  の  $\mathcal{L}^2(a, b)$  での直交多項式の系  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  による展開  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$  は  $f(x)$  に平均収束することを示す。

Weierstrass の近似定理により、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、多項式  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$  が存在して、

$$|f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k| < \epsilon, \quad x \in (a, b)$$

が成り立つ。(5.10) により、 $x^n$  は  $\{p_k(x)\}_{k=0}^n$  の一次結合で表されるので、 $\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$  と表すことができるので、

$$\|f - \sum_{k=0}^n b_k p_k\| < \epsilon \left( \int_a^b w(x) dx \right)^{1/2}$$

を得る。定理 5.2 (節 5.1) により、 $c_k = (f, p_k) / \|p_k\|^2$  とすると、

$$\|f - \sum_{k=0}^n c_k p_k\| < \epsilon \left( \int_a^b w(x) dx \right)^{1/2}$$

が示される。 □

[証明] 定理 4.5 (節 4.3) により  $C[a, b]$  は  $\mathcal{L}^2(a, b)$  で稠密であるから、証明の準備により明らかである。証明の詳細は、定理 5.7 (節 5.2) の証明の下の完全性の証明と同様に進められる。□

## 6

# Fourier 変換

### 6.1 $\mathcal{L}^1$ の Fourier 変換

$f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  とする。このとき、 $t \in \mathbf{R}$  にたいして、

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt} dx \quad (6.1)$$

を  $f(x)$  の **Fourier 変換** (Fourier transform) という。

**定理 6.1** Fourier 変換  $F(t)$  は有界、一様連続である。また、 $t \rightarrow \pm\infty$  で  $F(t) \rightarrow 0$  である。

[有界の証明]

$$|F(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

より明らかである。 □

[一様連続の証明] 任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、ある  $A > 0$  が存在して、

$$\int_A^{\infty} |f(x)| dx < \epsilon, \quad \int_{-\infty}^{-A} |f(x)| dx < \epsilon$$

となる。これを使い、さらに、実数  $X$  にたいし不等式  $|e^{iX} - 1| = 2|\sin(X/2)| \leq |X|$  が成り立つことを用いて、

$$\begin{aligned} |F(t_1) - F(t_2)| &< 4\epsilon + \int_{-A}^A |e^{-i(t_1-t_2)x} - 1| \times |f(x)| dx \\ &\leq 4\epsilon + |t_1 - t_2| A \int_{-A}^A |f(x)| dx \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\delta$  を  $\delta A \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \epsilon$  となるように選ぶと、 $|t_1 - t_2| < \delta$  を満たすすべての  $t_1, t_2$  にたいして

$$|F(t_1) - F(t_2)| < 5\epsilon$$

となる。したがって、 $F(t)$  は一様連続である。 □

[ $F(t) \rightarrow 0$  の証明] Riemann-Lebesgue の定理 (節 3.3) を (6.1) に適用すれば明らかである。 □

**定理 6.2**  $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  のとき、その Fourier 変換を  $F(t)$  とするとき、 $f(x)$  が  $x$  の近傍で有界変動であるとき、Fourier 逆変換の公式 (Fourier inversion formula)

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x), \quad f_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(t)e^{ixt} dt \quad (6.2)$$

が成り立つ。

[証明] (6.1) で  $x$  を  $x'$  とし、それを (6.2) の中の  $f_\lambda(x)$  の定義式に代入し、 $t$  で積分して、

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{e^{i(x-x')\lambda} - e^{-i(x-x')\lambda}}{i(x-x')} dx' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{\sin(x-x')\lambda}{(x-x')} dx' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt \end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$\Delta f(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+) - f(x-)$$

とおくと、節 3.3 の等式 (3.27) を用いて

$$f_\lambda(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{\pi} \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X \Delta f(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt$$

を得る。任意の  $\epsilon > 0$  が与えられたときに、右辺の積分を二つの区間  $(0, X)$ ,  $(X, \infty)$  に分け、 $\lambda$  大で、そのそれぞれが  $\epsilon$  以下になることを示す。 $0 < X < X'$  のときの  $(X, X')$  からの寄与では、例 3.2.3 の不等式 (3.22) を用いて

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_X^{X'} \Delta f(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt \right| \leq \frac{1}{\pi X} \int_X^{X'} [|f(x+t)| + |f(x-t)|] dt + \frac{1}{\pi} |f(x+) + f(x-)| \frac{2}{|\lambda|X}$$

と評価される。 $X$  を大きくすれば、これは  $\epsilon$  以下になる。残りの  $(0, X)$  の部分の評価は、節 5.2 の定理 5.6 の証明の中の (5.15) の右辺の評価と同様に、定理 3.5 (節 3.3) により行われる。□

**定理 6.3**  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  が  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  の関数の不定積分であり、 $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  で 0 に収束するとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixt} dx = it \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt} dx \quad (6.3)$$

が成り立つ。

[証明] 例 3.1.4 (節 3.1) で  $F(x) = f(x)$ ,  $G(x) = e^{-ixt}$  とする。□

**定理 6.4**  $f(x)$ ,  $xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  であるとき、 $f(x)$  の Fourier 変換を  $F(t)$  にたいして

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-ixt} dx \quad (6.4)$$

が成り立つ。

[証明]

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt} \frac{e^{-ixh} - 1}{h} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-ixt} e^{-ixh/2} \frac{\sin(xh/2)}{xh/2} dx$$

となる。 $|\frac{\sin(xh/2)}{xh/2}| < 1$  であるから、Lebesgue の定理 (節 2.2) により  $h \rightarrow 0$  の極限で (6.4) を得る。□

**定理 6.5**  $f(x), g(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  とし、その Fourier 変換を  $F(t), G(t)$  とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x) dx \quad (6.5)$$

が成り立つ。これを **Parseval の等式** という。

[証明] (6.5) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-iux} du \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux} dx \right] du$$

と書かれる。この等式が成り立つことは Fubini の定理 (節 2.4) により明らかである。  $\square$

**定理 6.6**  $f(x), g(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  とし、その Fourier 変換を  $F(t), G(t)$  とする。さらに、 $f(x)\overline{g(x)}, F(t)\overline{G(t)} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  ならば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\overline{G(t)} dt \quad (6.6)$$

が成り立つ。これも Parseval の等式 という。

[証明] (6.6) の右辺を  $I$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(t)\overline{G(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dx \right] \overline{G(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[ \int_{-\lambda}^{\lambda} \overline{G(t)e^{itx}} dt \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx \end{aligned} \quad (6.7)$$

である。 $G(t)$  は  $[-\lambda, \lambda]$  で連続であり、第三の等号は Fubini の定理 (節 2.4) による。第四の等号は Lebesgue の定理の拡張 (節 2.2) による。  $\square$

**例 6.1.1**  $\alpha, \beta, a, b \in \mathbf{R}$  は正数とし、 $\alpha + \beta > 1$  とする。このとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+it)^\alpha(b-it)^\beta} dt = \frac{2\pi}{(a+b)^{\alpha+\beta-1}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \quad (6.8)$$

が成り立つ。ここで  $\Gamma(z)$  はガンマ関数で、(4.47) に与えられている。

[証明] 定理 6.6 で  $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-ax}u(x)$ ,  $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}x^{\beta-1}e^{-bx}u(x)$  とする。ここで  $u(x)$  は (4.48) で定義された Heaviside の階段関数である。このとき  $F(t) = 1/(a+it)^\alpha$ ,  $G(t) = 1/(b+it)^\beta$  であり、(6.6) の左辺は  $\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty x^{\alpha+\beta-2}e^{-(a+b)x} dx$  である。これは (6.8) の右辺を  $2\pi$  で割ったものに等しい。  $\square$

節 4.4 に、 $f(x), g(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  の合成関数が (4.40)、すなわち、 $h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy$  で定義され、定理 4.8 に  $h(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  が示されている。

**定理 6.7**  $h(x)$  が  $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  と  $g(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  の合成関数であるとする。 $h(x), f(x), g(x)$  の Fourier 変換を  $H(t), F(t), G(t)$  とすると、

$$H(t) = F(t)G(t) \quad (6.9)$$

が成り立つ。

[証明] (6.9) の証明は、定義 (4.40) を用いれば、定理 4.8 と Fubini の定理 (節 2.4) により明らかである。□

**例 6.1.2**  $e^{-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2}$  の Fourier 変換は  $\sqrt{2\pi} \sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$  である。

[証明] 例 2.4.1 の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2} dx = \sqrt{2\pi} \sigma \quad (6.10)$$

を用いて、 $e^{-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2}$  の Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2} e^{-itx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\sigma^2 t)^2/\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} dx = \sqrt{2\pi} \sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

となる。□

## 6.2 $\mathcal{L}^2$ の Fourier 変換

ここで、 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の関数の Fourier 変換を定義する。そのために、関数  $f_a(x)$  を

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (6.11)$$

で定義し、 $a \rightarrow \infty$  で  $f_a(x)$  が  $f(x)$  に収束することを用いる。この節ではノルム  $\|\dots\|$  は  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  のノルムであるとする。

$\|f_a\| \leq \|f\|$  であるから、 $f_a(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  であり、 $f_a(x)$  は有限の台をもつので、 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  に属する (定理 4.4 (節 4.3))。

**補題 1**  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  が共に  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  に属するとき、合成関数

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)g(x+y) dy$$

は有界、連続、可積分である。

可積分は定理 4.8 (節 4.4) による。

[有界の証明] Schwarz の不等式 (節 4.1) により、

$$|h(x)| \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(-y)|^2 dy \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |g(x+y)|^2 dy \right)^{1/2} = \|f\| \|g\|$$

となる。□

[連続の証明] 同様にして、

$$|h(x+r) - h(x)| \leq \|f\| \left( \int_{-\infty}^{\infty} |g(x+r+y) - g(x+y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

が成り立つ。右辺の第二の因数は、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして  $\delta > 0$  が存在して、 $0 < r < \delta$  のときに  $\epsilon$  より小さくなることから、定理 4.5 の系 (節 4.3) により保証されている。□

補題 2  $f_a(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  が  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  に属するとき、 $f_a(x)$  の Fourier 変換  $F_a(t)$  を

$$F_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) e^{-ixt} dx \quad (6.12)$$

で定義する。このとき、 $F_a(x)$  は  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  に属し、等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx \quad (6.13)$$

が成り立つ。

[証明]  $\sigma > 0$  として、

$$I(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t)|^2 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} dt \quad (6.14)$$

の  $\sigma \rightarrow 0$  の極限を計算する。 $I(\sigma)$  は

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) e^{-ixt} dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_a(y)} e^{iyt} dy \right] e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_a(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy \overline{f_a(y)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} e^{i(y-x)t} dt \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_a(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_a(y)} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2/\sigma^2} dy \end{aligned} \quad (6.15)$$

となる。

(6.15) の右辺はこれは、2 変数  $x, y$  の二つの関数  $f_a(x) e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2/\sigma^2}$  と  $\overline{f_a(y)} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2/\sigma^2}$  の内積と考えられる。Schwarz の不等式 (節 4.1) を書くと、

$$I(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2/\sigma^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx$$

となる。この左辺は (6.14) であるから、Levi の定理 (節 2.2) により、

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} I(\sigma) = I(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx \quad (6.16)$$

が得られる。

ここで、 $g(u)$  を

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f_a(x) \overline{f_a(x+u)} \quad (6.17)$$

とすると、(6.15) は

$$I(\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-\frac{1}{2}u^2/\sigma^2} du$$

となる。補題 1 により、 $g(u) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$  となり、定理 3.6 (節 3.3) により  $\sigma \rightarrow 0$  で  $I(\sigma)$  は  $g(0)$  に収束する。したがって、(6.16) の左の等式により (6.13) が得られる。□

定理 6.8  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  とする。このとき、 $t \in \mathbf{R}$  にたいして、 $\int_{-a}^a f(x) e^{-ixt} dx$  は  $a \rightarrow \infty$  で平均収束する。その極限関数

$$F(t) = \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) e^{-ixt} dx \quad (6.18)$$

を  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の Fourier 変換 という。

[(6.18) の平均収束の証明] ここで  $f_a(x)$  は (6.11) で与えられるとする。  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  であるから、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、  $A > 0$  が存在して、  $a > A$  のとき、

$$\|f - f_a\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_a(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{-a} |f(x)|^2 dx + \int_a^{\infty} |f(x)|^2 dx < \epsilon$$

が成り立つ。したがって、  $f_a(x)$  は  $f(x)$  に  $a \rightarrow \infty$  で平均収束する。このとき、  $\{f_{a+n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  は Cauchy 列である。  $n, m \in \mathbf{N}$  とし、 (6.13) で  $f_a(x)$  を  $f_{a+m}(x) - f_{a+n}(x)$  で置き換えると、

$$\frac{1}{2\pi} \|F_{a+m} - F_{a+n}\|^2 = \|f_{a+m} - f_{a+n}\|^2$$

となる。これは、  $\{F_{a+n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$  も Cauchy 列であることを示す。したがって、 Riesz-Fischer の定理 (節 4.3) により、 (6.12) と (6.11) で定義される  $F_{a+n}(t)$  は  $n \rightarrow \infty$  で平均収束する。□

**定理 6.9**  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の Fourier 変換を  $F(t)$  とするとき、等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (6.19)$$

が成り立つ。また、  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の Fourier 変換を  $F(t)$ ,  $G(t)$  とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \overline{G(t)} dt \quad (6.20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) g(t) dt \quad (6.21)$$

が成り立つ。

これらを Parseval の等式 という。

[(6.19) の導出]  $f_a(x)$  は (6.11) で定義されたものとする。このとき、 (6.13) は  $\frac{1}{2\pi} \|F_a\|^2 = \|f_a\|^2$  と表される。定理 6.8 の証明により、  $F_a(t)$ ,  $f_a(x)$  は、  $a \rightarrow \infty$  で  $F(t)$ ,  $f(x)$  に平均収束するので、  $a \rightarrow \infty$  で (6.13) は  $\frac{1}{2\pi} \|F\|^2 = \|f\|^2$  となる。□

[(6.20) の導出] (6.19) の  $f(x)$  に  $f(x) + g(x)$  および  $f(x) + ig(x)$  を代入した式から

$$\operatorname{Re} \int f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int F(t) \overline{G(t)} dt,$$

$$\operatorname{Im} \int f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int F(t) \overline{G(t)} dt,$$

が得られる。第二式に  $i$  をかけて第一式に加えると (6.20) が得られる。□

[コメント] (6.21) の導出は定理 6.10 の後に与えられる。□

### Wiener-Khinchine の定理

$f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の Fourier 変換を  $F(t)$ ,  $G(t)$  とし、  $u \in \mathbf{R}$  とするとき、等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 e^{iut} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{f(x-u)} dx \quad (6.22)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \overline{G(t)} e^{iut} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x-u)} dx \quad (6.23)$$

が成り立つ。

[証明]  $g(x-u)$  の Fourier 変換は  $G(t)e^{-iut}$  となる。 $g(x)$  を  $g(x-u)$  と置くと、(6.20) は (6.23) となる。(6.22) はその特別な場合である。□

### Wiener-Khinchine の定理の系

関数  $f(x)$  にたいし  $f_a(x)$  を (6.11) で定義するとき、 $f_a(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  であり、

$$\phi(u) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) \overline{f_a(x-u)} dx \quad (6.24)$$

が存在するものとする。このとき、 $f_a(x)$  の Fourier 変換を  $F_a(t)$  として、等式

$$\phi(u) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t)|^2 e^{iut} dt \quad (6.25)$$

が成り立つ。

[証明] (6.22) の  $f(x)$  を  $f_a(x)$  とし、両辺を  $2a$  で割り、 $a \rightarrow \infty$  とする。□

上記の Wiener-Khinchine の定理の系が、Brown 運動の理論で、Wiener-Khinchine の定理として用いられる。

**定理 6.10**  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の Fourier 変換  $F(t)$  が (6.18) で与えられるとき、逆変換の公式は

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b F(t) e^{ixt} dt, \quad \text{a.e.} \quad (6.26)$$

で与えられる。

[証明] (6.19) が示すように  $F(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  であるから、その Fourier 変換が存在する。それを  $2\pi\phi(-x)$  で表そう。すなわち、

$$\phi(x) = \text{l.i.m.}_{b \rightarrow \infty} \phi_b(x), \quad \phi_b(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b F(t) e^{itx} dt \quad (6.27)$$

とする。他方、 $a \in \mathbf{R}$ ,  $\xi \in \mathbf{R}$ ,  $\xi > a$  にたいして

$$g(x) = \chi_{(a,\xi)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, \xi), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし、その Fourier 変換を  $G(t)$  とする。ここで、Schwarz の不等式を用いて  $|\int_a^\xi [\phi(x) - \phi_b(x)] dx| = |\int_{-\infty}^{\infty} g(x) [\phi(x) - \phi_b(x)] dx| \leq \sqrt{|\xi - a|} \|\phi - \phi_b\|$  が得られる。したがって、 $\int_a^\xi \phi(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^\xi \phi_b(x) dx$  である。ここで (6.27) と  $g(x)$  を用いて、

$$\begin{aligned} \int_a^\xi \phi(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^\xi \phi_b(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left[ \int_{-b}^b F(t) e^{itx} dt \right] dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b F(t) \overline{G(t)} dt \end{aligned} \quad (6.28)$$

が示される。 $g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  であるから、 $G(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  が成立ち、補助定理 4.4 により  $F(t) \overline{G(t)}$  は可積分である。(6.28) の右辺で  $b \rightarrow \infty$  の極限をとり、Parseval の等式 (6.20) を用いると、右辺は  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_a^\xi f(x) dx$  に等しいことが示される。したがって、

$$\int_a^\xi \phi(x) dx = \int_a^\xi f(x) dx$$

となる。この両辺を  $\xi$  で微分して、定理 3.1 (節 3.1) により、 $x > a$  にたいして

$$\phi(x) = f(x), \quad \text{a.e.}$$

を得る。これと (6.27) から、任意の  $a$  にたいし、 $x > a$  で (6.26) を得る。□

[(6.21) の導出] (6.26) で  $f(x), F(t)$  を  $g(x), G(t)$  とし、複素共役をとると、 $\overline{g(t)}$  は  $\frac{1}{2\pi}\overline{G(x)}$  の Fourier 変換であることが示される。(6.20) で  $g(x)$  を  $\frac{1}{2\pi}\overline{G(x)}$  とし、 $G(t)$  を  $\overline{g(t)}$  として (6.21) が得られる。□

### 6.3 線形作用素

$T$  は、線形空間  $\mathcal{X}$  の部分集合  $D(T)$  に属する要素  $x$  に作用して線形空間  $\mathcal{Y}$  の部分集合  $R(T)$  に属する要素  $y = Tx$  を与えるものとする。このときに、 $T$  は線形空間  $\mathcal{X}$  から線形空間  $\mathcal{Y}$  への作用素 (operator) といい、 $D(T)$  を  $T$  の定義域 (domain)、 $R(T)$  を  $T$  の値域 (range) という。

$T$  は線形空間  $\mathcal{X}$  から線形空間  $\mathcal{Y}$  への作用素で、その定義域が  $D(T) \subset \mathcal{X}$  であるとする。 $T$  が線形性の条件

$$T(au + bv) = aTu + bTv, \quad u, v \in D(T), \quad a, b \in \mathbf{C} \quad (6.29)$$

を満たすとき、作用素  $T$  は線形作用素 (linear operator) であるという。

$T$  はノルム空間  $\mathcal{X}$  からノルム空間  $\mathcal{Y}$  への線形作用素  $T$  で、その定義域が  $D(T) \subset \mathcal{X}$  に属する任意の  $u \in D(T)$  にたいして、 $\|Tu\| = \|u\|$  が成り立つときに、 $T$  は等長 (isometric) であるという。

ノルム空間  $\mathcal{X}$  からノルム空間  $\mathcal{Y}$  への等長な線形作用素  $T$  で、その定義域が  $D(T) = \mathcal{X}$  であり、その値域が  $R(T) = \mathcal{Y}$  であるものが存在するとき、 $\mathcal{X}$  と  $\mathcal{Y}$  はノルム空間として同型 (isomorphic) であるという。

Hilbert 空間  $\mathcal{X}$  から Hilbert 空間  $\mathcal{Y}$  への等長な線形作用素  $T$  で、その定義域が  $D(T) = \mathcal{X}$  であり、その値域が  $R(T) = \mathcal{Y}$  であるものはユニタリ作用素 (unitary operator) という。

$T$  はノルム空間  $\mathcal{X}$  からノルム空間  $\mathcal{Y}$  への線形作用素とする。正数  $M$  が存在して、任意の  $u \in D(T)$  にたいして、 $\|Tu\| < M\|u\|$  が成り立つときに、 $T$  は有界であるという。また、 $D(T)$  の要素の列  $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$  が  $u$  に収束するときに、 $\{Tu_l\}_{l=1}^{\infty}$  が  $Tu$  に収束するときに、作用素  $T$  は連続であるという。

有界な作用素は連続である。したがって、等長な線形作用素、ユニタリ作用素は連続である。

[証明]  $u \in D(T)$  のときに  $\|Tu\| < M\|u\|$  とする。 $\epsilon > 0$  にたいして  $\|u - u_l\| < \epsilon$  とすると  $\|Tu - Tu_l\| = \|T(u - u_l)\| < M\epsilon$  となる。これは、 $u_l \rightarrow u$  ならば  $Tu_l \rightarrow Tu$  を示す。□

作用素が連続であるためには、それが有界であることが必要十分である。

[必要の証明] 作用素  $T$  が有界でなかったとすると、 $\|u_l\| = 1, \|Tu_l\| \rightarrow \infty$  の列  $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$  が存在する。このとき、 $v_l = u_l/\|Tu_l\|$  とすると、 $v_l \rightarrow 0, \|Tv_l\| = 1$  となり、 $Tv_l \rightarrow T0 = 0$  とはならない。すなわち、 $T$  は連続ではない。□

$T$  は線形空間  $\mathcal{X}$  から線形空間  $\mathcal{Y}$  への作用素であり、 $S$  は線形空間  $\mathcal{Y}$  から線形空間  $\mathcal{Z}$  への作用素であるとする。このとき、線形空間  $\mathcal{X}$  から線形空間  $\mathcal{Z}$  への作用素  $ST$  が、 $x \in \mathcal{X}$  にたいして  $(ST)x = S(Tx)$  で定義される。

$T$  は線形空間  $\mathcal{X}$  から線形空間  $\mathcal{Y}$  への作用素であり、 $S$  は線形空間  $\mathcal{Y}$  から線形空間  $\mathcal{X}$  への作用素であるとする。 $ST = I$  であり、しかも  $TS = I$  であるとき、 $S$  と  $T$  は互いの逆作用素 (inverse operator) であるといい、 $S = T^{-1}$ ,  $T = S^{-1}$  で表される。ここで、 $I$  は恒等写像で、線形空間  $\mathcal{X}$  での  $I$  は、任意の  $x \in \mathcal{X}$  にたいして  $Ix = x$  である。

$n$  を有限の正整数とし、 $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbf{R}^n$  とし、 $S, T, I$  は  $n \times n$  行列とする。このとき  $ST = I$  ならば  $TS = I$  が成り立つ。

[証明]  $ST = I$  が成り立つとき  $\det T \neq 0$  であり、 $TT^{-1} = I$  となる  $T^{-1}$  が一意的に存在する。このとき、 $S = STT^{-1} = T^{-1}$  となり、 $TS = I$  が成り立つ。□

無限次元では、 $ST = I$  でも、一般には  $TS = I$  が成り立たない。

**例 6.3.1**  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = l^2$ ,

$$T(u_1, u_2, \dots) = (0, u_1, u_2, \dots), \quad S(v_1, v_2, v_3, \dots) = (v_2, v_3, \dots)$$

とする。このとき  $ST = I$  であるが、 $TS(v_1, v_2, v_3, \dots) = (0, v_2, v_3, \dots)$  となり、 $TS \neq I$  である。

$T$  はノルム空間  $\mathcal{X}$  からノルム空間  $\mathcal{Y}$  への線形作用素であり、 $u, v \in D(T)$  とする。 $Tu = Tv$  ならば  $u = v$  が成り立つとき、 $T$  は一対一であるという。このとき、 $Tu = 0$  ならば  $u = 0$  となる。

$T$  が一対一の線形作用素ならば、逆作用素  $T^{-1}$  が存在する。ここで、 $T^{-1}$  の定義域  $D(T^{-1})$  は  $R(T)$  であるとする。

[証明]  $Tu \in R(T)$  に  $u \in D(T)$  を対応づける作用素を  $T^{-1}$  とすると、 $u = T^{-1}(Tu)$  であり、これに  $T$  を作用すると  $Tu = TT^{-1}(Tu)$  となる。すなわち、この  $T^{-1}$  は  $T$  の逆作用素である。□

例 6.3.1 では、 $D(T) = \mathcal{X} = l^2$  とし、 $S$  を  $D(S) = R(T)$  として、 $T^{-1} = S$  となる。

### 例 1. 微分演算 $D$

$f(x)$  は  $n \in \mathbf{N}$  の関数空間  $C^n(\mathbf{R})$  に属する関数であるとする。微分演算の作用素  $D$  を

$$Df(x) = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) \tag{6.30}$$

で定義する。

作用素  $D$  は  $n \in \mathbf{N}$  のノルム空間  $C^n(\mathbf{R})$  から  $C^{n-1}(\mathbf{R})$  への線形作用素である。

### 例 2. $\mathcal{L}^1$ での Fourier 変換 $F$

ここで、 $\mathcal{L}^1$  での Fourier 変換の作用素  $F$  を導入する。すなわち、節 6.1 の (6.1) で与えられる  $f(x)$  の Fourier 変換  $F(t)$  を  $(Ff)(t)$  で表す。Fourier 変換の作用素も単に Fourier 変換という。

定理 5.1 により Fourier 変換  $F$  は  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  から  $C(\mathbf{R})$  への線形作用素である。

Fourier 変換  $F$  は有界な線形作用素である。

[証明] ノルムは  $\|Ff\| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |(Ff)(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|$  を満たす。  $\square$

### 例 3. $\mathcal{L}^2$ での Fourier 変換 $F$

ここで、 $\mathcal{L}^2$  での Fourier 変換の作用素  $F$  を導入する。すなわち、節 6.2 の (6.18) で与えられる  $f(x)$  の Fourier 変換  $F(t)$  を  $(Ff)(t)$  で表す。

Fourier 変換  $F$  をこのように定義するとき、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F$  は  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  から  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  へのユニタリ作用素である (節 6.2 の (6.19) 参照)。

節 6.2 の (6.26) で与えられる Fourier 変換の逆変換の作用素は Fourier 変換  $F$  の逆作用素  $F^{-1}$  である。

## 6.4 急速減衰関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$

$t \in \mathbf{R}$  の関数  $\theta(t)$  は関数空間  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(\mathbf{R})$  に属する関数であるとする。したがって、 $\theta(t)$  およびそのすべての導関数  $\theta^{(k)}(t)$  は有界連続である。前節の例 1 の微分演算  $D$  により

$$D\theta(t) = \theta'(t) = \frac{d}{dt}\theta(t), \quad D^k\theta(t) = \theta^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\theta(t) \quad (6.31)$$

となる。ここで、 $D^0\theta(t) = \theta^{(0)}(t)$  は  $\theta(t)$  自身を表すものとする。

コンパクトな台をもつ  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$  の関数の空間を  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$  で表す。

$\mathcal{D}(\mathbf{R})$  での関数列  $\{\theta_l(t)\}$  の  $\theta(t)$  への収束は、すべて共通な有限な台  $I$  をもつときにのみ考え、そのとき

$$\sup_{t \in I} |\theta_l^{(k)}(t) - \theta^{(k)}(t)| \rightarrow 0 \quad (6.32)$$

が成り立つ。

$r \in \mathbf{Z}_+$  として、急速減衰 (rapidly decreasing, rapidly descent) の  $\mathcal{C}^r(\mathbf{R})$  の関数の空間を  $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  で表す。これは、 $\mathcal{C}^r(\mathbf{R})$  に属する関数  $\theta(t)$  で

$$|\theta^{(k)}(t)| \leq C_{pk}(1 + |t|)^{-p}, \quad (p \in \mathbf{Z}_+, k \leq r, k \in \mathbf{Z}_+, t \in \mathbf{R}) \quad (6.33)$$

を満たすような有限値  $C_{pk}$  が存在するもの全体の集合である。

$\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  にたいして、(6.33) の  $C_{pk}$  の下限

$$\gamma_{pk} = \sup_{t \in \mathbf{R}} (1 + |t|)^p |\theta^{(k)}(t)|, \quad (p \in \mathbf{Z}_+, k \leq r, k \in \mathbf{Z}_+) \quad (6.34)$$

をセミノルム (seminorm) という。

$r \in \mathbf{Z}_+$  にたいし、 $\mathcal{S}^{r+1}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  である。 $r = \infty$  のとき、 $\mathcal{S}^\infty(\mathbf{R})$  を  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  で表す。

**例 6.4.1** コンパクトな台をもつ  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$  の関数は  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  に属する。すなわち、 $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$  である。したがって、節 4.1 の例 4.1.3 の関数  $f(x)$ ,  $G(x)$  は  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  に属する。

例 6.4.2  $r \in \mathbf{Z}_+$ ,  $0 < a < b$  とする。  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^{r+1}(b-x)^{r+1}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.35)$$

とすると、  $f(x)$  は  $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  に属する。  $x \in \mathbf{R}$  の関数  $F(x)$  を

$$F(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 1 - \int_a^{|x|} f(t) dt, & a \leq |x| \leq b \\ 0, & |x| > b \end{cases} \quad (6.36)$$

とすると、  $F(x)$  は  $\mathcal{S}^{r+1}(\mathbf{R})$  に属する。

定理 6.11  $r \in \mathbf{Z}_+$  にたいし、  $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  は線形空間であり、  $\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  ならば  $t\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  が成り立つ。したがって、  $f(t)$  が任意の有限区間  $(a, b)$  で  $\mathcal{C}^r(a, b)$  に属し、  $t$  大で高々多項式で増大する関数ならば、  $f(t)\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  が従う。

[ $t\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  の証明]  $k \leq r$  のとき、 (6.34) により、  $|t\theta^{(k)}(t)| \leq |t|\gamma_{p+1,k}(1+|t|)^{-p-1} \leq \gamma_{p+1,k}(1+|t|)^{-p}$  を得る。これを用いて、

$$|D^k[t\theta(t)]| = |k\theta^{(k-1)}(t) + t\theta^{(k)}(t)| \leq kC_{p,k-1}(1+|t|)^{-p} + C_{p+1,k}(1+|t|)^{-p} \quad (6.37)$$

を得る。これを用いる。  $\square$

$\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  で  $\theta_l(t)$  が  $\theta(t)$  に収束するということは、  $k \leq r$  のとき  $l \rightarrow \infty$  で

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} (1+|t|)^p |\theta_l^{(k)}(t) - \theta^{(k)}(t)| \rightarrow 0 \quad (6.38)$$

ということである。すなわち、関数  $\theta_l(t) - \theta(t)$  にたいするセミノルム  $\gamma_{pk}$  は  $l \rightarrow \infty$  で 0 となる。

定理 6.12  $r \in \mathbf{N}$  のとき、微分演算  $D$  は  $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  から  $\mathcal{S}^{r-1}(\mathbf{R})$  への連続な線形作用素である、すなわち、  $\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  ならば、  $D\theta(t) \in \mathcal{S}^{r-1}(\mathbf{R})$  が成り立ち、  $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  で  $\theta_l(t) \rightarrow \theta(t)$  ならば、  $\mathcal{S}^{r-1}(\mathbf{R})$  で  $D\theta_l(t) \rightarrow D\theta(t)$  が成り立つ。

$\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  のとき、拡大演算  $D_\alpha, \alpha > 0$  を  $D_\alpha\theta(t) = \theta(\alpha t)$  とし、並進演算  $T_\beta$  を  $T_\beta\theta(t) = \theta(t - \beta)$  とすると、  $D_\alpha\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R}), T_\beta\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  となる。

$r \in \mathbf{Z}_+$  のとき、  $\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  は関数空間  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  に属する。ここで、前節の例 2 で定義した Fourier 変換  $F$  を使い、  $\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  の Fourier 変換を  $(F\theta)(w) = \hat{\theta}(w)$  で表す。すなわち、

$$(F\theta)(w) = \hat{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\theta(t) dt \quad (6.39)$$

とする。

補助定理 6.1  $r \in \mathbf{Z}_+$  にたいし、  $\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  の Fourier 変換  $\hat{\theta}(w)$  は  $\hat{\theta}(w) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$  となる。

[証明] このとき、  $n \in \mathbf{N}$  にたいし  $t^n\theta(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  であり、定理 6.4 (節 6.1) により、

$$D^n\hat{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^n e^{-iwt}\theta(t) dt = (F((-it)^n\theta(t)))(w) \quad (6.40)$$

が成り立つ。したがって、  $D^n\hat{\theta}(w) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$  となる。  $\square$

$w \in \mathbf{R}$  の関数  $\hat{\theta}(w)$  が  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$  に属し、 $r \in \mathbf{Z}_+$  にたいし

$$\left| \frac{d^n}{dw^n} \hat{\theta}(w) \right| \leq \hat{C}_{mn} (1 + |w|)^{-m}, \quad (n \in \mathbf{Z}_+; m \leq r; p \in \mathbf{Z}_+; w \in \mathbf{R}) \quad (6.41)$$

を満たす有限値  $\hat{C}_{mn}$  が存在するとき、その関数  $\hat{\theta}(w)$  は関数の集合  $\hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  に属するという。

$r \in \mathbf{Z}_+$  にたいし、 $\hat{\mathcal{S}}^{r+1}(\mathbf{R}) \subset \hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  である。 $r = \infty$  のとき、 $\hat{\mathcal{S}}^\infty(\mathbf{R})$  は  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  に等しい。

**定理 6.13** Fourier 変換  $F$  は  $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  から  $\hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  への連続な線形作用素である、すなわち、 $\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  ならば、 $(F\theta)(w) = \hat{\theta}(w) \in \hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  が成り立ち、 $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  で  $\theta_l(t) \rightarrow \theta(t)$  ならば、 $\hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  で  $(F\theta_l)(w) \rightarrow (F\theta)(w)$  となる。

[( $F\theta$ )( $w$ )  $\in \hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  の証明]  $m \in \mathbf{Z}_+$ ,  $m \leq r$  のとき、定理 6.3 (節 6.1) により、

$$(F(D^m\theta(t)))(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} D^m\theta(t) dt = (iw)^m \hat{\theta}(w) \quad (6.42)$$

が成り立つ。 $n \in \mathbf{N}$  とし、(6.42) で  $\theta(t)$  を  $(-it)^n \theta(t)$  とし、(6.40) を用いると

$$(F(D^m[(-it)^n \theta(t)]))(w) = (iw)^m (F((-it)^n \theta(t)))(w) = (iw)^m D^n \hat{\theta}(w) \quad (6.43)$$

となり、

$$|w^m D^n \hat{\theta}(w)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |D^m [t^n \theta(t)]| dt \quad (6.44)$$

が成り立つ。また、定理 6.11 により  $t^n \theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  であるから  $m \leq r$  ならば (6.34) により  $\gamma_{2,m}$  が存在して

$$|D^m [t^n \theta(t)]| \leq \gamma_{2,m} (1 + |t|)^{-2} \quad (6.45)$$

となる。これを (6.44) の右辺に入れて

$$|w^m D^n \hat{\theta}(w)| \leq 2\gamma_{2,m} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} (1 + |w|)^m |D^n \hat{\theta}(w)| &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k |w|^k |D^n \hat{\theta}(w)| \leq 2 \sum_{k=0}^m {}_m C_k \gamma_{2,k} \\ &\leq 2^{m+1} \max_{0 \leq k \leq m} \gamma_{2,k} \end{aligned} \quad (6.47)$$

が得られる。□

[ $F$  が連続作用素であることの証明] 上の証明で  $\theta(t)$  を  $\theta_l(t) - \theta(t)$  で置き換える。(6.45) の代わりに

$$|D^m [t^n (\theta_l(t) - \theta(t))]| \leq \gamma_{2,m} (1 + |t|)^{-2} \quad (6.48)$$

とすると、(6.47) は

$$(1 + |w|)^m |D^n [\hat{\theta}_l(w) - \hat{\theta}(w)]| \leq 2 \sum_{k=0}^m {}_m C_k \gamma_{2,k} \leq 2^{m+1} \max_{0 \leq k \leq m} \gamma_{2,k} \quad (6.49)$$

となる。(6.38) により、 $\theta_l(t) - \theta(t)$  にたいするセミノルム  $\gamma_{2,k}$  は  $l \rightarrow \infty$  で 0 であるから、 $\hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  で  $(F\theta_l)(w) \rightarrow (F\theta)(w)$  が示された。□

定理 6.12 の系

$r \geq 2, r \in \mathbf{N}$  にたいして  $\theta(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  のとき、その Fourier 変換  $\hat{\theta}(w) = (F\theta)(w)$  の Fourier 変換は

$$\frac{1}{2\pi}(F\hat{\theta})(t) = \theta(-t) \quad (6.50)$$

となる。

[証明]  $\theta(t)$  は連続であり、 $\hat{\theta}(w) \in \hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  は  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  に属するので、Fourier 逆変換の公式 (6.2) は上式を与える。□

### 例 1. Hermite 関数

Hermite 関数  $\{h_n(x)\}$  は、節 5.3 の例 3 に与えた Hermite 多項式  $\{H_n(x)\}$  により

$$h_n(x) = \pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.51)$$

で定義される。これは  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  において正規直交系をなす。

$\{H_n(x)\}$  にたいする漸化式 (5.35) は

$$xh_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{2}} h_{n+1}(x) + \sqrt{\frac{n}{2}} h_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.52)$$

となる。

$n = 0, 1, 2$  のとき

$$h_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2}, \quad h_1(x) = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/4}} x e^{-x^2/2}, \quad h_2(x) = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/4}} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2/2} \quad (6.53)$$

であり、 $n > 1$  の  $h_n(x)$  は、漸化式 (6.52) により、または

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} (x - D) h_n(x) \quad (6.54)$$

で求められる。 $h_0(x), h_1(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  であるから、 $h_n(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  が成り立つ。

漸化式 (6.54) は (6.51) と (5.34) を用いて、容易に導かれる。

$h_n(x)$  の Fourier 変換  $\hat{h}_n(w)$  は

$$\hat{h}_n(w) = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n(w) \quad (6.55)$$

で与えられる。

[証明]  $n = 0$  のとき、例 6.1.1 (節 6.1) により、

$$\hat{h}_0(w) = \sqrt{2\pi} h_0(w) \quad (6.56)$$

が成り立つ。(6.54) の Fourier 変換は、(6.42) と (6.40) により、

$$\hat{h}_{n+1}(w) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} (-i)(-D + w) \hat{h}_n(w)$$

となる。(6.55) と (6.56) はこれを満たす。□

## 6.5 Poisson の和の公式

定理 6.14  $f(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  であるとき、 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n + t) \in \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$  であり、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n + t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N F(k) e^{ikt} \quad (6.57)$$

が成り立つ。ここで、 $F(k)$  は  $f(t)$  の Fourier 変換である。(6.57) で  $t = 0$  とした式を **Poisson** の和の公式 (Poisson's summation formula) という。

[証明] 任意の  $N \in \mathbf{N}$  にたいし

$$\sum_{n=-N}^N \int_0^{2\pi} |f(2\pi n + t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

であるから、Levi の定理の系 (節 2.2) により (6.57) の左辺の関数は  $\mathcal{L}^1(0, 2\pi)$  に属す。その関数の Fourier 係数を  $c_k$  とすると、Fourier 展開の公式は定理 5.6, 定理 5.8 (節 5.2) により  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n + t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}$ ,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n + x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(2\pi n + x) e^{-ik(x+2\pi n)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} F(k) \end{aligned}$$

となる。ここで、二番目の等式は Levi の定理の系による。 □

# 7

## 線形汎関数、Riesz 基底

### 7.1 直交補空間

線形空間  $\mathcal{E}$  の空でない部分集合  $\mathcal{A}$  が線形空間であるときに、 $\mathcal{A}$  は  $\mathcal{E}$  の線形部分空間 (linear subspace, subspace) という。線形部分空間が閉集合であるときに、それは閉部分空間という。

$\{e_k\}$  が、線形空間  $\mathcal{E}$  の可算個の要素の列であるとする。 $\{e_k\}$  の要素の一次結合で表される  $\mathcal{E}$  の要素の集合を、 $\{e_k\}$  が張る部分空間という。空間  $\mathcal{E}$  がノルム空間のときには、 $\{e_k\}$  が張る部分空間の閉包は  $\{e_k\}$  を含む最小の閉部分空間である。これを、 $\{e_k\}$  が張る閉部分空間という。

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  がノルム空間  $\mathcal{E}$  の完全系であるとする。このとき、任意の  $f \in \mathcal{E}$  に収束する級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$  が存在する。すなわち、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=1}^N a_k e_k\| = 0$  が成り立つ。以下では、これを等式

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \tag{7.1}$$

で表す。

Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の空でない部分集合  $\mathcal{A}$  に対して、集合  $\mathcal{A}^{\perp}$  で、すべての  $u \in \mathcal{A}$  と直交関係  $(x, u) = 0$  を満たす  $x \in \mathcal{H}$  の集合を表す。

集合  $\mathcal{A}^{\perp}$  は閉部分空間である。

[証明]  $x_1, x_2, \dots$  が  $\mathcal{A}^{\perp}$  に属する収束列であるとする。 $x_1, x_2, \dots$  は Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  に属する収束列であるから  $k \rightarrow \infty$  で  $\|x_k - x\| \rightarrow 0$  となる  $x \in \mathcal{H}$  が存在する。任意の  $u \in \mathcal{A}$  に対して

$$|(x, u)| = |(x, u) - (x_k, u)| \leq \|x - x_k\| \|u\|$$

となる。右辺は  $k \rightarrow \infty$  で 0 となるので  $(x, u) = 0$  となる。 $x \in \mathcal{H}$  であるから  $x \in \mathcal{A}^{\perp}$  である。□

Banach 空間  $\mathcal{E}$  の閉部分空間  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  が  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \phi$  を満たすものとする。このとき、 $\mathcal{A}$  の要素  $u_1$  と  $\mathcal{B}$  の要素  $u_2$  の一次結合で

$$x = u_1 + u_2 \tag{7.2}$$

と表される  $\mathcal{E}$  の要素  $x$  の集合を  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$  で表し、これを  $\mathcal{A}$  と  $\mathcal{B}$  の直和 (direct sum) という。Banach 空間が閉部分空間  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  により  $\mathcal{E} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$  と表されるとき  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  はそれぞれ  $\mathcal{B}, \mathcal{A}$  の補空間 (complementary space) であるという。

Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の部分集合  $\mathcal{A}$  が閉部分空間であるときには、集合  $\mathcal{A}^\perp$  を  $\mathcal{A}$  の直交補空間 (orthogonal complement) という。

**定理 7.1** Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の閉部分空間を  $\mathcal{A}$  とする。このとき、 $\mathcal{A}, \mathcal{A}^\perp$  はそれぞれ  $\mathcal{A}^\perp, \mathcal{A}$  の補空間であり、 $\mathcal{H} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp$  が成り立つ。

[証明]  $\mathcal{H}$  の要素  $x$  と部分空間  $\mathcal{A}$  の距離  $d$  を

$$d = \inf_{v \in \mathcal{A}} \|x - v\|$$

で定義する。ここで、 $\mathcal{A}$  の要素の列  $v_1, v_2, \dots$ , を  $\|x - v_n\| \rightarrow d$  となるように選ぶ。任意の  $\epsilon > 0$  にたいし、 $\|x - v_n\| < d + \epsilon$ ,  $\|x - v_m\| < d + \epsilon$  のとき、等式  $\|(x - v_n) - (x - v_m)\|^2 + \|(x - v_n) + (x - v_m)\|^2 = 2\|x - v_n\|^2 + 2\|x - v_m\|^2$  を用いて、

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= 2\|x - v_n\|^2 + 2\|x - v_m\|^2 - \|2(x - \frac{v_n + v_m}{2})\|^2 \\ &\leq 4(d + \epsilon)^2 - 4d^2 = 8d\epsilon + 4\epsilon^2 \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $v_n + v_m \in \mathcal{A}$  であるから、 $\|x - (v_n + v_m)/2\| \geq d$  であることを、二番目の式の第三項で用いた。これは、列  $v_1, v_2, \dots$  が Cauchy 列であることを示す。  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u_1$  とすると、 $\mathcal{A}$  は閉部分空間であるから  $u_1 \in \mathcal{A}$  となる。

$v \in \mathcal{A}$  とし、 $\lambda$  を任意の数であるとすると、 $u_1 + \lambda v \in \mathcal{A}$  であるから

$$d^2 \leq \|x - u_1 - \lambda v\|^2 = d^2 - 2\operatorname{Re} [\bar{\lambda}(x - u_1, v)] + |\lambda|^2 \|v\|^2$$

となる。これは  $(x - u_1, v) = 0$  でないと矛盾する。すなわち、 $u_2 = x - u_1$  は  $v \in \mathcal{A}$  のすべてと直交する。したがって、 $u_2 \in \mathcal{A}^\perp$  となる。

一意性の証明は、二通りの仕方で

$$x = u_1 + u_2, \quad x = u'_1 + u'_2$$

とすると、 $u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2$  となる。これを  $\delta$  とすると、 $\mathcal{A}$  の要素は  $\mathcal{A}^\perp$  の要素と直交するので、 $(\delta, \delta) = 0$  となり、 $\delta = 0$  となり、 $u_1 = u'_1, u'_2 = u_2$  となる。二通りの仕方は同じである。  $\square$

定理 7.1 は射影定理 (projection theorem) と呼ばれる。

## 7.2 線形作用素の空間 $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

線形作用素に関する用語の定義は、節 6.3 に与えた。正数  $M$  が存在して、定義域に属する任意の要素  $u$  にたいして、 $\|Tu\| < M\|u\|$  が成り立つときに、線形作用素  $T$  は有界である。

ノルム空間  $\mathcal{X}$  からノルム空間  $\mathcal{Y}$  への有界な線形作用素  $T$  で、その定義域が  $D(T) = \mathcal{X}$  であり、その値域が  $R(T) = \mathcal{Y}$  であるものの集合を  $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  で表す。 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$  のときには  $B(\mathcal{X}, \mathcal{X})$  を単に  $B(\mathcal{X})$  で表す。

$B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  に属する線形作用素  $T$  のノルム  $\|T\|$  は

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad (7.3)$$

で定義される。

このノルムが、ノルムの満たすべき条件の中の三角不等式を満たすことを示す。他の条件は明らかである。 $S$  と  $T$  が線形作用素であるとする。このとき、 $x \neq 0$  ならば

$$\frac{\|(S+T)x\|}{\|x\|} = \frac{\|Sx+Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Sx\| + \|Tx\|}{\|x\|} \leq \|S\| + \|T\|$$

が成り立つ。したがって、左辺の最大値  $\|S+T\|$  は右辺を越えることはない。

**定理 7.2** 有界線形作用素の空間  $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  は、 $\mathcal{Y}$  が Banach 空間のときには、(7.3) をノルムとして Banach 空間である。

$B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  の零要素は、任意の  $x \in \mathcal{X}$  に  $\mathcal{Y}$  の 0 を対応付けるものとする。これを零作用素という。

[完備性の証明] 任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $\|T_n - T_m\| < \epsilon$  のとき、 $\|T_n x - T_m x\| < \epsilon \|x\|$  となり、 $T_n x$  は  $\mathcal{Y}$  で収束するので、その極限を  $Tx$  とする。 $n$  を十分大きくすれば、

$$\|T_n x - Tx\| < \epsilon \|x\|$$

となる。したがって、 $\|T_n - T\| < \epsilon$  となり、 $T_n \rightarrow T$  が示される。これは、 $T_n - T \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  を示すので、これから  $T = T_n + T - T_n \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  が従う。□

ここで、 $I$  は恒等写像で、線形空間  $\mathcal{X}$  での  $I$  は  $B(\mathcal{X})$  の要素で、任意の  $x \in \mathcal{X}$  にたいして  $Ix = x$  である。

## 7.3 線形汎関数

線形空間  $\mathcal{X}$  から数の空間  $\mathbf{C}$  または  $\mathbf{R}$  への線形作用素を線形汎関数 (linear functional) という。線形汎関数  $f$  が  $x \in \mathcal{X}$  に作用して与える数を  $\langle f, x \rangle$  で表す。

ノルム空間  $\mathcal{X}$  の任意の要素  $x$  に有限の数  $\langle f, x \rangle \in \mathbf{C}$  を与える線形汎関数  $f$  の集合は  $B(\mathcal{X}, \mathbf{C})$  と表される。この空間を  $\mathcal{X}'$  で表す。 $\mathcal{X}'$  を  $\mathcal{X}$  の双対空間 (dual space) または共役空間 (conjugate space) という。

数の空間  $\mathbf{C}$  は Banach 空間であるから、定理 7.2 により、共役空間  $\mathcal{X}'$  は Banach 空間である。

**例 7.3.1**  $t \in \mathbf{R}$  の関数  $g(t)$  が  $g(t) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$  であるとする。関数  $g(t)$  に  $t=0$  での値  $g(0)$  を対応付ける汎関数を  $\delta$  と書くと、 $\langle \delta, g \rangle = g(0)$  となる。 $g(t) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$  のノルムを  $\|g\|_\infty$  とすると、 $\|\delta\| = 1$  となり、 $\delta \in \mathcal{C}'(\mathbf{R})$  となる。

**例 7.3.2**  $g(t) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$  とし、 $u_f(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  とする。関数  $g(t)$  に、 $(g, \overline{u_f}) = \int g(t)u_f(t) dt$  を対応付ける汎関数を  $f$  と書くと、 $\langle f, g \rangle = (g, \overline{u_f})$  となる。 $g(t) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$  のノルムを  $\|g\|_\infty$  とすると、 $|(g, \overline{u_f})| \leq \|g\|_\infty \int |u_f(t)| dt$  であるから  $\|f\| \leq \|u_f\|$  となり、 $f \in \mathcal{C}'(\mathbf{R})$  となる。

**例 7.3.3** Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  を考える。 $u_f$  を  $\mathcal{H}$  の要素であるとする。 $x \in \mathcal{H}$  に作用して数  $(x, \overline{u_f}) \in \mathbf{C}$  を与える作用素は線形汎関数である。この汎関数を  $f$  で表すと、 $\langle f, x \rangle = (x, \overline{u_f})$  となり、その汎関数としてのノルム  $\|f\|$  は  $u_f \in \mathcal{H}$  のノルム  $\|u_f\|$  に等しく、 $f \in \mathcal{H}'$  となる。

実際、 $f, g \in \mathcal{H}'$ ,  $a, b \in \mathbf{C}$  のとき、

$$\langle af + bg, x \rangle = (x, \overline{au_f + bu_g}) = a(x, \overline{u_f}) + b(x, \overline{u_g}) = a\langle f, x \rangle + b\langle g, x \rangle, \quad x \in \mathcal{H}$$

となり、これは  $\mathcal{H}'$  が線形空間であることを示す。

**定理 7.3** Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の線形汎関数  $f$  に対応する  $\mathcal{H}$  の要素  $v_f \in \mathcal{H}$ ,  $u_f \in \mathcal{H}$  が存在して、任意の  $x \in \mathcal{H}$  にたいして、

$$\langle f, x \rangle = (x, v_f) = (x, \overline{u_f}) \quad (7.4)$$

が成り立ち、 $\|v_f\| = \|u_f\| = \|f\|$  となる。

**補助定理 7.1** Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の線形汎関数を  $f \in \mathcal{H}'$  とする。このとき、 $\langle f, x \rangle = 0$  を満たす  $x \in \mathcal{H}$  の集合を  $N_f$  とすると、この集合  $N_f$  は  $\mathcal{H}$  の閉部分空間である。

[証明]  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  は  $N_f$  の収束する要素の列であり、その極限が  $x$  であるとする。このとき、

$$|\langle f, x \rangle| = |\langle f, x_k \rangle - \langle f, x \rangle| \leq \|x_k - x\| \times \|f\|$$

が成り立つので、 $x_k \rightarrow x$  で  $\langle f, x \rangle = 0$  となり、 $x \in N_f$  が示される。したがって、 $N_f$  は  $\mathcal{H}$  の閉部分空間である。□

**補助定理 7.2**  $N_f$  の直交補空間  $N_f^{\perp}$  に属し、ノルムが1である要素を  $x_0$  とする。このとき、 $\mathcal{H}$  の任意の要素  $x$  にたいし

$$\langle f, x \rangle = (x, x_0)\langle f, x_0 \rangle \quad (7.5)$$

が成り立つ。

この等式は  $(x, x_0) = 0$  ならば  $\langle f, x \rangle = 0$  であり、 $N_f^{\perp}$  には  $x_0$  に一次独立な要素は存在しないことを示している。

[証明]  $\mathcal{H}$  の任意の要素  $x$  にたいし

$$y = \langle f, x_0 \rangle x - \langle f, x \rangle x_0$$

とすると、 $\langle f, y \rangle = 0$  となるので、 $y$  は  $N_f$  に属する。したがって、 $y$  と  $x_0 \in N_f^{\perp}$  の内積  $(y, x_0)$  は0である。すなわち、(7.5) が成り立つ。□

[定理 7.3 の証明]  $\mathcal{H}$  の任意の要素  $x$  にたいし (7.5) が成り立つので、 $v_f = \overline{\langle f, x_0 \rangle} x_0$  とすれば、 $\langle f, x \rangle = (x, v_f)$  となる。 $u_f = \overline{v_f}$  とすれば、 $\langle f, x \rangle = (x, \overline{u_f})$  となる。このとき、Schwarz の不等式により

$$\frac{|\langle f, x \rangle|}{\|x\|} = \frac{|(x, v_f)|}{\|x\|} \leq \|v_f\|$$

であり、 $x = v_f$  のときに、左辺 =  $\|v_f\|$  となるので、左辺の最大値すなわち線形作用素  $f$  のノルム  $\|f\|$  は  $\|v_f\|$  に等しい。□

Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の任意の線形汎関数  $f$  を定理 7.3 の  $u_f \in \mathcal{H}$  で表すことにすると、任意の  $x \in \mathcal{X}$  にたいし  $\langle f, x \rangle = (x, \bar{u}_f)$  が成り立ち、汎関数  $u_f$  の空間  $\mathcal{H}'$  は例 7.3.3 により線形空間をなす。

線形汎関数  $f$  を定理 7.3 の  $v_f \in \mathcal{H}$  で表すことにすると、任意の  $x \in \mathcal{H}$  にたいし、 $\langle v_f, x \rangle = (x, v_f)$  が成り立つ。このときの汎関数  $v_f$  の空間を  $\mathcal{H}^*$  で表す。 $v_f, v_g \in \mathcal{H}^*, a, b \in \mathbf{C}$  のとき、

$$(x, av_f + bv_g) = \bar{a}(x, v_f) + \bar{b}(x, v_g), \quad x \in \mathcal{H}$$

となり、厳密には線形性が成り立たないが、この場合も線形と呼ぶことにする。しかも、Hilbert 空間では、線形汎関数の空間として、 $\mathcal{H}'$  ではなく、 $\mathcal{H}^*$  を使うのが普通である。

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  が Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の完全系であるとする。このとき、 $\mathcal{H}$  の任意の要素  $f$  は、この完全系により

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \tag{7.6}$$

と一意的に表される。ここで、係数  $c_k$  は  $f$  により定まる。 $f \in \mathcal{H}$  に  $c_k$  を対応付ける作用素は線形であるから、それぞれの  $k$  にたいして線形汎関数  $g_k \in \mathcal{H}^*$  が存在して、 $c_k = (f, g_k)$  と表される。

$f = f_n$  のときには、 $c_k = \delta_{kn}$  となるべきであるから、

$$(f_n, g_k) = \delta_{nk} \tag{7.7}$$

が成り立つ。

**例 7.3.4**  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  が正規直交完全系であるとき、定理 5.3 (節 5.1) により、 $\mathcal{H}$  の任意の要素  $f$  は

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k \tag{7.8}$$

と一意的に表される。

**定理 7.4**  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  はノルム空間とし、 $T$  は  $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  に属する有界線形作用素とする。このとき、 $\mathcal{Y}'$  の要素に  $\mathcal{X}'$  の要素を対応付ける有界線形作用素  $T'$  が存在して、

$$\langle T'f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle, \quad x \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{Y}' \tag{7.9}$$

が成り立つ。 $T'$  のノルムは  $\|T'\| = \|T\|$  となる。

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  が Hilbert 空間のときには、 $T$  が  $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  に属する有界線形作用素であるとき、 $\mathcal{Y}^*$  の要素に  $\mathcal{X}^*$  の要素を対応付ける有界線形作用素  $T^*$  が存在して、

$$(x, T^*f) = (Tx, f), \quad x \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{Y}^* \tag{7.10}$$

が成り立つ。 $T^*$  のノルムは  $\|T^*\| = \|T\|$  となる。

$T'$  を  $T$  に共役な作用素 (dual operator, conjugate operator) という。  $T^*$  を  $T$  に共役な作用素 (adjoint operator) という。

[証明] Hilbert 空間のときの証明を与える。

線形汎関数  $f \in \mathcal{Y}^*$  にたいして、汎関数  $h \in \mathcal{X}^*$  を

$$(x, h) = (Tx, f), \quad x \in \mathcal{X} \quad (7.11)$$

で定義する。このとき、汎関数  $h$  は線形汎関数であり、

$$|(x, h)| = |(Tx, f)| \leq \|Tx\| \times \|f\| \leq \|x\| \times \|T\| \times \|f\|$$

が成り立つので、

$$\|h\| \leq \|T\| \times \|f\| \quad (7.12)$$

となり、 $h$  は有界である。したがって、 $h \in \mathcal{X}^*$  である。 $f \in \mathcal{Y}^*$  に  $h \in \mathcal{X}^*$  を対応付ける作用素を  $T^*$  と書くと、 $h = T^*f$  となり、 $T^* \in B(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$  である。これを (7.11) に代入して (7.10) が得られる。 $h = T^*f$  を (7.12) に代入して  $\|T^*\| \leq \|T\|$  が得られる。(7.10) から  $|(Tx, f)| \leq \|x\| \times \|T^*f\| \leq \|x\| \times \|T^*\| \times \|f\|$  であるから、 $\|T\| \leq \|T^*\|$  が得られる。したがって、 $\|T^*\| = \|T\|$  が得られる。□

$S, T, T^{-1}$  が Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の  $B(\mathcal{H})$  の作用素であるとき、次の関係が成り立つ。

$$(T^*)^* = T, \quad (ST)^* = T^*S^*, \quad I^* = I, \quad 0^* = 0, \quad (T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \quad (7.13)$$

[(7.13) の導出] 任意の  $f, g \in \mathcal{H}$  にたいして、

$$(Tf, g) = (f, T^*g) = \overline{(T^*g, f)} = \overline{(g, (T^*)^*f)} = ((T^*)^*f, g),$$

$$(STf, g) = (f, (ST)^*g), \quad (STf, g) = (Tf, S^*g) = (f, T^*S^*g),$$

$$(f, g) = (If, g) = (f, I^*g), \quad 0 = (0f, g) = (f, 0^*g),$$

$$I = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*, \quad I = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*.$$

が成り立つ。これから、(7.13) を得る。□

## 7.4 Riesz 基底

この節では、完全系を表す言葉として基底が用いられる。可分な Hilbert 空間で最も重要な基底は正規直交基底である。次に重要な基底は Riesz 基底である。

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  が Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の正規直交基底であるとき、 $\mathcal{H}$  の任意の要素  $f$  は、この基底により (7.8)  $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$  と一意的に表される。 $c_k = (f, e_k)$  であり、 $\{c_k\} \in l^2$  となる。このとき Parseval の式  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$  が成り立つ。ここで、線形作用素  $T, T^*$  を

$$T : \{c_k\} \in l^2 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in \mathcal{H}, \quad T^* : f \in \mathcal{H} \rightarrow \{(f, e_k)\} \in l^2$$

とすると、 $T, T^*$  は等長である。

ここで、 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  が  $\mathcal{H}$  の直交でない完全系であるとする。このとき、 $\mathcal{H}$  の任意の要素  $f$  は、 $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$  と一意的に表される。係数は  $c_k = (f, g_k)$  である。ここで、線形作用素  $T, T^*$  を

$$T : \{c_k\} \in l^2 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \in \mathcal{H}, \quad T^* : f \in \mathcal{H} \rightarrow \{(f, g_k)\} \in l^2$$

とする。このとき、 $T, T^*$  が有界であるときに、 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  は  $\mathcal{H}$  の **Riesz 基底** であるという。

**定理 7.5** 可分な Hilbert 空間の完全系  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  が Riesz 基底であるためには、正数  $A, B$  が存在して、任意の  $n \in \mathbf{N}$  にたいする任意の  $n$  個の数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  にたいして、

$$A \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \quad (7.14)$$

が成り立つことが必要十分である。

[証明]  $B = \|T\|, A^{-1} = \|T^*\|$  □

**例 7.4.1** 正規直交基底  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  は Riesz 基底である。このとき、Parseval の式が成り立ち、定理 7.5 の  $A, B$  は  $A = B = 1$  である。

**例 7.4.2**  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  は  $\mathcal{H}$  の正規直交基底  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  の組にたいして、有界な線形作用素  $T$  とその逆  $T^{-1}$  が

$$f_k = T e_k, \quad e_k = T^{-1} f_k \quad (7.15)$$

で定義されるとき、完全系  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  は Riesz 基底である。このとき、定理 7.5 の  $A, B$  は  $B = \|T\|, A^{-1} = \|T^{-1}\|$  である。

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  と  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  のそれぞれが Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の直交でない基底であり、双直交関係

$$(g_k, f_l) = \delta_{kl} \quad (7.16)$$

を満たすとき、それらを双直交の基底 (biorthogonal basis) という。このとき、 $\mathcal{H}$  に属する任意の要素  $f$  は

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k) f_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, f_k) g_k \quad (7.17)$$

と展開され、定理 5.3 (節 5.2) の Parseval の等式は、

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k) (f_k, f), \quad (f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k) (f_k, g) \quad (7.18)$$

となる。

[(7.18) の導出] 第二式を証明する。 $c_n = (f, g_n), d_n = (g, f_n)$  と置くと、(7.17) と Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned} \left| \left( f - \sum_{n=1}^N c_n f_n, g - \sum_{n=1}^N d_n g_n \right) \right| &= \left| (f, g) - \sum_{n=1}^N c_n \bar{d}_n \right| \\ &\leq \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n f_n \right\| \left\| g - \sum_{n=1}^N d_n g_n \right\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる。これから (7.18) の第二式が従う。第一式は第二式で  $g$  を  $f$  として得られる。 □

## 7.5 超関数

節 6.4 で、関数空間  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$  を導入した。それは、 $\mathbf{R}$  で任意回微分可能で、コンパクトな台をもつ関数の集合である。

すべての  $\theta(t) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  にたいして、複素数  $\langle f, \theta \rangle$  が存在する連続な線形汎関数  $f$  を超関数 (distribution) と呼ぶ。この超関数の集合は、 $\mathcal{D}(\mathbf{R})$  に共役な空間  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$  をなす。ここで、 $\theta(t) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  はテスト関数 (testing function) と呼ばれる。

以下では、 $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ,  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$  を単に  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  と書く。

$f(t)$  が  $\mathbf{R}$  の局所可積分関数であるとき、それに対応する汎関数  $f$  を

$$\langle f, \theta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\theta(t)dt \quad (7.19)$$

で定義する。この定義により、 $f \in \mathcal{D}'$  である。

(7.19) で定義される汎関数を通常超関数 (regular distribution) という。 $\mathcal{D}'$  では、局所可積分関数が通常超関数である。

通常超関数でない  $f \in \mathcal{D}'$  にたいしても、しばしば記号  $f(t)$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\theta(t) dt$  を用いる。このとき、この積分は  $\langle f, \theta \rangle$  を表す。また、実数  $\alpha, \beta$  にたいし、 $\alpha \neq 0$  のとき記号  $f(\alpha t - \beta)$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t - \beta)\theta(t) dt$  は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t - \beta)\theta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\theta\left(\frac{1}{\alpha}t + \frac{1}{\alpha}\beta\right)\frac{1}{|\alpha|} dt \quad (7.20)$$

を表す。

**例 7.5.1** 例 7.3.1 により、 $\delta \in \mathcal{C}'(\mathbf{R})$  が  $\theta(t) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$  にたいし  $\langle \delta, \theta \rangle = \theta(0)$  で定義されているとき、記号  $\delta(t)$  を導入し、 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\theta(t)dt = \langle \delta, \theta \rangle = \theta(0)$  とする。このとき、 $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数 と呼ばれる。

**例 7.5.2**  $\alpha \in \mathbf{R}$  にたいし、 $\delta_\alpha \in \mathcal{C}'(\mathbf{R})$  は  $\langle \delta_\alpha, \theta \rangle = \theta(\alpha)$  で定義されているとする。このとき、 $\delta_{-\alpha}(-t) = \delta_\alpha(t)$ ,  $\delta_\alpha(t) = \delta(t - \alpha)$  となる。また  $\alpha \neq 0$  のとき  $\delta(\alpha t - \beta) = \frac{1}{|\alpha|}\delta\left(t - \frac{\beta}{\alpha}\right)$  が成り立つ。

$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  が  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  の関数列でその絶対値の積分が共通の上界をもち、 $\{\langle f_n, \theta \rangle\}_{n=1}^{\infty}$  はどの  $\theta \in \mathcal{D}$  にたいしても Cauchy 列をなすとする。このとき、汎関数  $f$  を

$$\langle f, \theta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \theta \rangle \quad (7.21)$$

で定義するとき、 $f$  は  $\mathcal{D}'$  に属する。

[この汎関数  $f$  の連続性の証明]  $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|dt < C$  とする。また  $\theta_m(t) \rightarrow \theta(t)$  とする。したがって、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $M \in \mathbf{N}$  が存在して、 $m \geq M$  ならば

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |\theta_m(t) - \theta(t)| < \epsilon$$

が成り立つ。このとき、

$$|\langle f_n, \theta_m - \theta \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)(\theta_m(t) - \theta(t))dt \right| < C\epsilon$$

したがって、

$$\begin{aligned} |\langle f, \theta_m \rangle - \langle f, \theta \rangle| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \theta_m \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \theta \rangle \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle f_n, \theta_m \rangle - \langle f_n, \theta \rangle| < C\epsilon \end{aligned}$$

となる。 □

**例 7.5.3**  $\alpha \in \mathbf{R}$  とし、

$$f_n(t) = \begin{cases} n, & \alpha - \frac{1}{2n} < t < \alpha + \frac{1}{2n} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.22)$$

とする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \theta \rangle = \theta(\alpha) = \langle \delta_\alpha, \theta \rangle \quad (7.23)$$

となる。

**例 7.5.4**  $\sigma \in \mathbf{R}$  とし、

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(2\sigma^2)} \quad (7.24)$$

とする。このとき、定理 3.6 (節 3.3) により

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow 0 \\ \sigma > 0}} \langle f_\sigma, \theta \rangle = \theta(0) = \langle \delta, \theta \rangle \quad (7.25)$$

となる。

**例 7.5.5**  $n \in \mathbf{N}$ ,  $C_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt$  とし、

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{C_n} \cos^{2n+1} t, & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.26)$$

とする。このとき、 $C_n = 2^{2n+1}(n!)^2/(2n+1)!$  である。Stirling の公式により、無限大数  $n$  にたいして  $n! \simeq \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ ,  $C_n \simeq \sqrt{\pi/n}$  である。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \theta \rangle = \theta(0) = \langle \delta, \theta \rangle \quad (7.27)$$

となる。

$f(t)$  が微分可能な関数であるときには、 $Df(t) = f'(t)$  は

$$\langle Df, \theta \rangle = -\langle f, \theta' \rangle, \quad \theta(t) \in \mathcal{D} \quad (7.28)$$

を満たす。ここで、 $\theta'(t)$  は  $\theta(t)$  の導関数である。これは、 $D$  に共役な作用素  $D'$  を  $D_W$  で表すとき、 $D_W\theta(t) = -\frac{d}{dt}\theta(t)$  であることを示している。

一般に  $f \in \mathcal{D}'$  の導関数  $Df$  を (7.28) により定義する。この定義により、 $f(t)$  が  $\mathcal{D}'$  の通常超関数であるとき、任意の整数  $p \in \mathbf{Z}_+$  にたいし  $D^p f(t) \in \mathcal{D}'$  となる。逆に、任意の  $f \in \mathcal{D}'$  に対応する  $f(t)$  は、通常超関数  $F(t)$  と整数  $p \in \mathbf{Z}_+$  により

$$f(t) = D^p F(t) \quad (7.29)$$

と表される。

例 7.5.6  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{Z}_+$  のとき、

$$(D^k \delta_\alpha)(-t) = (-1)^k (D^k \delta_{-\alpha})(t) \quad (7.30)$$

[証明]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (D^k \delta_\alpha)(-t) \theta(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} (D^k \delta_\alpha)(t) \theta(-t) dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\alpha(t) \left[ \frac{d^k}{dt^k} \theta(-t) \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\alpha(-t) \left[ \frac{d^k}{dt^k} \theta(t) \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{-\alpha}(t) \left[ \frac{d^k}{dt^k} \theta(t) \right] dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} (D^k \delta_{-\alpha})(t) \theta(t) dt \end{aligned}$$

□

例 7.5.7  $\alpha \in \mathbf{R}$  にたいし  $\delta_\alpha \in \mathcal{D}'$  が  $\langle \delta_\alpha, \theta \rangle = \theta(\alpha)$  で定義されているとする。  $u_\alpha(t)$  を

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \alpha \leq t < \infty, \\ 0, & 0 < t < \alpha \end{cases} \quad (7.31)$$

とすると、

$$\langle Du_\alpha, \theta \rangle = -\langle F_\alpha, \theta' \rangle = -\int_\alpha^\infty \theta'(t) dt = -[\theta(\infty) - \theta(\alpha)] = \theta(\alpha) = \langle \delta_\alpha, \theta \rangle$$

であるから  $\delta_\alpha(t) = Du_\alpha(t)$  となる。

$u_0(t)$  は (4.48) で定義された Heaviside の階段関数  $u(t)$  であり、等式  $u_\alpha(t) = u(t - \alpha)$  が成り立つ。

## 7.6 右側超関数

超関数は必ず微分可能である。しかし積分は必ずしもできない。積分を考えるときには、右側超関数または左側超関数を考える。ここでは右側超関数について述べる。

ここで、テスト関数の空間  $\mathcal{D}_R(\mathbf{R})$  を導入する。それは、 $\mathbf{R}$  で任意回微分可能で、右側で有界な台をもつ関数の集合である。したがって  $\theta(t) \in \mathcal{D}_R(\mathbf{R})$  ならば、ある  $b \in \mathbf{R}$  にたいし  $t > b$  のとき  $\theta(t) = 0$  となる。

すべての  $\theta(t) \in \mathcal{D}_R(\mathbf{R})$  にたいして、複素数  $\langle f, \theta \rangle$  が存在する連続な線形汎関数  $f$  を右側超関数 (right-sided distribution) と呼ぶ。この超関数の集合は、 $\mathcal{D}_R(\mathbf{R})$  に共役な空間  $\mathcal{D}'_R(\mathbf{R})$  をなす。

以下では、 $\mathcal{D}_R(\mathbf{R})$ ,  $\mathcal{D}'_R(\mathbf{R})$  を単に  $\mathcal{D}_R$ ,  $\mathcal{D}'_R$  と書く。

$\mathcal{D}'_R$  では、左側で有界な台をもつ、局所可積分関数が、通常超関数である。そのような関数  $f(t)$  にたいして、それに対応する超関数  $f$  は  $\theta(t) \in \mathcal{D}_R$  として (7.19) で定義される。

$f(t)$  が  $\mathcal{D}'_R$  の通常超関数であるときに、正の実数  $q$  にたいして、 $q$  次の非整数回積分  $D^{-q}f(t)$  を

$$D^{-q}f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{-\infty}^t (t-t')^{q-1} f(t') dt' \quad (7.32)$$

とし、 $\theta(t) \in \mathcal{D}_R$  にたいし、

$$(D_W^{-q}\theta)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_t^\infty (t'-t)^{q-1} \theta(t') dt' \quad (7.33)$$

とする。正の実数  $p$  にたいして、 $\theta(t) \in \mathcal{D}_R$  の  $p$  次の非整数回微分  $D_W^p \theta(t)$  を

$$D_W^p \theta(t) = D_W^{p-m} [(-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \theta(t)] \quad (7.34)$$

で定義する。ここで、 $m$  は  $p$  より小さくない最小の整数である。このとき、 $p \in \mathbf{R}$  にたいし  $(D_W^p \theta)(t) \in \mathcal{D}_R$  であり、 $f \in \mathcal{D}'_R$  にたいし、 $D^p f \in \mathcal{D}'_R$  が

$$\langle D^p f, \theta \rangle = \langle f, D_W^p \theta \rangle \quad (7.35)$$

で定義される。これは、 $p > 0$  のとき  $f \in \mathcal{D}'_R$  の非整数回微分  $D^p f$  を与える。

[ $p = -q < 0$  にときの  $(D_W^{-q} \theta)(t) \in \mathcal{D}_R$  の証明] (7.33) により、 $(D_W^{-1} \theta)(t) = \int_t^\infty \theta(t') dt'$  である。 $\mathcal{D}_R$  では、 $D_W \theta(t) = -\theta'(t)$  であるから、 $D_W D_W^{-1} \theta(t) = D_W^{-1} D_W \theta(t) = \theta(t)$  が成り立つので、 $D_W D_W^{-q} \theta(t) = D_W D_W^{-q} D_W^{-1} D_W \theta(t) = D_W D_W^{-1} D_W^{-q} D_W \theta(t) = D_W^{-q} D_W \theta(t)$  を得る。この計算で  $p > 0, q > 0$  ならば、 $D_W^{-p} D_W^{-q} \theta(t) = D_W^{-p-q} \theta(t)$  を用いた。これはベータ関数に関する公式 (4.51) (節 4.4) を用いて例 4.4.3 と同様に証明される。□

[(7.32) が成り立つときの  $p = -q$  にたいする (7.35) の導出] Fubini の定理により  $\int_{-\infty}^\infty [\int_{-\infty}^t (t-t')^{q-1} f(t') dt'] \theta(t) dt = \int_{-\infty}^\infty f(t') [\int_{t'}^\infty (t-t')^{q-1} \theta(t) dt] dt'$  が成り立つ。□

上に示したように、 $\mathcal{D}_R$  では、 $D_W D_W^{-1} \theta(t) = D_W^{-1} D_W \theta(t) = \theta(t)$  が成り立つので、 $\langle DD^{-1} f, \theta \rangle = \langle f, D_W^{-1} D_W \theta \rangle = \langle f, \theta \rangle$ 、 $\langle D^{-1} D f, \theta \rangle = \langle f, D_W D_W^{-1} \theta \rangle = \langle f, \theta \rangle$  となる。すなわち、 $\mathcal{D}'_R$  の空間で  $DD^{-1} = D^{-1}D = 1$  が成り立つ。例えば  $Du(t) = \delta(t)$ 、 $D^{-1}\delta(t) = u(t)$  である。

Riemann-Liouville の積分が存在するとき、

$$[{}_a D_R^{-q} f(t)] u(t-a) = D^{-q}[f(t)u(t-a)] \quad (7.36)$$

が成り立つ。ここで  $f(t) = t^{3/2}$  と置くと、

$${}_0 D_R^{3/2} t^{3/2} = 1, \quad {}_0 D_R^{5/2} t^{3/2} = 0, \quad {}_0 D_R^{-1} {}_0 D_R^{5/2} t^{3/2} = 0, \\ D^{3/2}[t^{3/2}u(t)] = u(t), \quad D^{5/2}[t^{3/2}u(t)] = \delta(t), \quad D^{-1}D^{5/2}[t^{3/2}u(t)] = u(t) \text{ となる。}$$

## 7.7 緩増加超関数

節 6.4 で、関数空間  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$  の他に、急速減衰関数の空間  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  を導入した。

すべての  $\theta(t) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  にたいして、複素数  $\langle f, \theta \rangle$  が存在する連続な線形汎関数  $f$  を緩増加超関数 (tempered distribution, distribution with slow growth) と呼ぶ。緩増加超関数の集合は、 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  に共役な空間  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$  をなす。

以下では、 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ ,  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$  を単に  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$  と書く。

$f(t)$  が  $|t|$  大で多項式で増大するとき、多項式増加 (polynomial growth) であるという。

$f(t)$  が多項式増加の局所可積分関数であるとき、 $r \in \mathbf{Z}_+$  が存在して、

$$f(t)/(t^2 + 1)^r \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}) \quad (7.37)$$

が成り立つ。

$\mathcal{S}'$  では、多項式増加の局所可積分関数  $f(t)$  が通常超関数である。それに対応する超関数  $f$  は  $\theta(t) \in \mathcal{S}$  として (7.19) で定義される。

[この汎関数  $f$  の連続性の証明] (7.37) が成り立つように  $r$  を選ぶと、

$$\langle f, \theta_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t^2+1)^r} (t^2+1)^r \theta_n(t) dt$$

となる。 $\mathcal{S}$  で  $\theta_n(t) \rightarrow 0$  とすると、(6.38) により  $(t^2+1)^r \theta_n(t)$  は一様に 0 になるので、 $\langle f, \theta_n \rangle \rightarrow 0$  となる。□

$f(t)$  が  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  に属するときには、その Fourier 変換を  $\hat{f}(w) = (Ff)(w)$  で表すと、

$$\langle \hat{f}, \theta \rangle = \langle f, \hat{\theta} \rangle \quad (7.38)$$

が成り立つ。ここで  $\hat{\theta}(w)$  は  $\theta(t)$  の Fourier 変換である。

[(7.38) の導出] Fubini の定理 (節 2.4) により

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \theta \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) \theta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(w) dw \right] \theta(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} \theta(t) dt \right] dw = \langle f, \hat{\theta} \rangle \end{aligned}$$

が得られる。□

一般に  $f \in \mathcal{S}'$  にたいして、その Fourier 変換  $\hat{f} = Ff$  を (7.38) で定義する。このとき、 $\hat{f} = Ff \in \mathcal{S}'$  が示される。

[ $\hat{f}$  の連続性の証明]  $\mathcal{S}$  で  $\theta_k(t) \rightarrow \theta(t)$  とすると  $\mathcal{S}$  で  $\hat{\theta}_k(w) \rightarrow \hat{\theta}(w)$  となることは定理 6.12 (節 6.4) に示した。 $f$  は  $\mathcal{S}'$  に属するので連続であるから、このとき、

$$\langle f, \hat{\theta}_k \rangle \rightarrow \langle f, \hat{\theta} \rangle \quad \text{すなわち、} \quad \langle \hat{f}, \theta_k \rangle \rightarrow \langle \hat{f}, \theta \rangle$$

が得られる。□

[ $\hat{f} \in \mathcal{S}'$  の証明] 定理 6.12 (節 6.4) により、 $\theta(t) \in \mathcal{S}$  のとき、 $\hat{\theta}(w) \in \mathcal{S}$  であるから、(7.38) は  $\hat{f} \in \mathcal{S}'$  を示す。□

**定理 7.6**  $f \in \mathcal{S}'$  のとき、Fourier 逆変換の公式は

$$\frac{1}{2\pi} (F\hat{f})(t) = f(-t) \quad (7.39)$$

となる。

この逆変換の公式は  $\mathcal{S}$  に属する関数の場合の定理 6.12 の系 (節 6.4) と同じ形である。

[証明]

$$\left\langle \frac{1}{2\pi} F\hat{f}, \theta \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, F\hat{\theta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \theta(-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) \theta(t) dt$$

第 3 の等式は定理 6.12 の系 (節 6.4) の (6.50) による。□

**定理 7.7**  $f(t) \in \mathcal{S}'$  ,  $\hat{f}(w) = (Ff)(w)$  ,  $m \in \mathbf{Z}_+$  のとき、

$$(F((-it)^m f(t)))(w) = D^m \hat{f}(w), \quad (F(D^m f(t)))(w) = (iw)^m \hat{f}(w) \quad (7.40)$$

が成り立つ。

[証明] 定理 6.12 (節 6.4) の証明で示されたように、 $\theta(t) \in \mathcal{S}$ ,  $\hat{\theta}(w) = (F\theta)(w)$  にたいし、(6.40), (6.42) 式、すなわち  $D^m \hat{\theta}(w) = F((-it)^m \theta(t))$ ,  $(F(D^m \theta(t)))(w) = (iw)^m \hat{\theta}(w)$  が成り立つ。これを用いて、

$$\langle F((-it)^m f(t)), \theta \rangle = \langle f, (-it)^m \hat{\theta}(t) \rangle = (-1)^m \langle f, F(D^m \theta) \rangle = \langle D^m \hat{f}, \theta \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle F(D^m f(t)), \theta \rangle &= \langle D^m f, \hat{\theta} \rangle = (-1)^m \langle f, D^m \hat{\theta} \rangle = (-1)^m \langle f, F((-it)^m \theta(t)) \rangle \\ &= \langle (it)^m \hat{f}(t), \theta \rangle \end{aligned}$$

□

**定理 7.8**  $g(t) = f(t - \alpha) \in \mathcal{S}'$  ならば  $(Fg)(w) = (Ff)(w)e^{-i\alpha w}$  である。

[証明]  $\langle Fg, \theta \rangle = \langle g, F\theta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(w - \alpha) [\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} \theta(t) dt] dw = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) [\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} e^{-i\alpha t} \theta(t) dt] dw = \langle f, F[e^{-i\alpha t} \theta(t)] \rangle = \langle Ff, e^{-i\alpha t} \theta(t) \rangle = \langle (Ff)(t) e^{-i\alpha t}, \theta \rangle$   
□

**例 7.7.1**  $\delta_\alpha(t) = \delta(t - \alpha)$  とする。このとき

$$(F\delta_\alpha)(w) = e^{-i\alpha w}, \quad \frac{1}{2\pi} (F e^{i\alpha w})(t) = \delta_\alpha(t) \quad (7.41)$$

[第 1 式の導出]  $\langle F\delta_\alpha, \theta \rangle = \langle \delta_\alpha, \hat{\theta} \rangle = \hat{\theta}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \theta(t) dt$  □

[第 2 式の導出]  $f(t) = \delta_{-\alpha}(t)$  と置くと、第 1 式を用いて  $\hat{f}(w) = (F\delta_{-\alpha})(w) = e^{i\alpha w}$  となる。このとき、(7.39) により、 $\frac{1}{2\pi} (F\hat{f})(t) = \delta_{-\alpha}(-t) = \delta(-t + \alpha) = \delta(t - \alpha) = \delta_\alpha(t)$  となる。□

**例 7.7.2**  $k \in \mathbf{Z}_+$  のとき、

$$(F[D^k \delta_\alpha])(w) = (iw)^k e^{-i\alpha w}, \quad \frac{1}{2\pi} (F[w^k e^{i\alpha w}]) (t) = i^k (D^k \delta_\alpha)(t) \quad (7.42)$$

[第 1 式の導出] 定理 7.7 の第 2 式と例 7.7.1 の第 1 式により明らか。 □

[第 2 式の導出] 定理 7.7 の第 1 式と例 7.7.1 の第 2 式により明らか。 □

**例 7.7.3**  $u(t)$  が Heaviside の階段関数であるとき、 $\alpha > -1$  にたいする  $t^\alpha u(t)$  は  $\mathcal{S}'$  の通常超関数であり、そのフーリエ変換は

$$(F[t^\alpha u(t)])(w) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(iw)^{\alpha+1}}, \quad -1 < \alpha < 0 \quad (7.43)$$

$$(F[u(t)])(w) = \pi\delta(w) + \text{Pv}\left(\frac{1}{iw}\right) \quad (7.44)$$

$$(F[t^{m+\alpha} u(t)])(w) = i^m D^m [(F[t^\alpha u(t)])(w)], \quad (-1 < \alpha \leq 0, m \in \mathbf{N}) \quad (7.45)$$

で与えられる。(7.44) で  $\text{Pv}(\frac{1}{iw}) \in \mathcal{S}'$  は主値積分

$$\langle \text{Pv}\left(\frac{1}{iw}\right), \theta(w) \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) \frac{1}{iw} \theta(w) dw \quad (7.46)$$

を表す。

[(7.43) の導出]  $-1 < \alpha < 0$  のとき、 $\Gamma$  関数の Euler 積分表示  $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt$ 、と Jordan の補助定理により、 $a > 0, a \in \mathbf{R}$  として、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a t^\alpha u(t) e^{-iwt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a t^\alpha e^{-iwt} dt = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(iw)^{\alpha+1}} \quad (7.47)$$

が得られる。ここで、 $f(t) = t^\alpha u(t)$  とし、 $|t| \leq a$  で  $f_a(t) = f(t)$ 、 $|t| > a$  で  $f_a(t) = 0$  とする。 $f(t) \notin \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  であるが、 $f_a(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  である。 $f_a(t)$  のフーリエ変換を  $\hat{f}_a(w)$  とし、 $\hat{f}_\infty(w) = \Gamma(\alpha + 1)/(iw)^{\alpha+1}$  とすると、(7.47) は  $\lim_{a \rightarrow \infty} \hat{f}_a(w) = \hat{f}_\infty(w)$  を示す。

$\hat{f}(w)$  は定義 (7.38) により、任意の  $\theta(w) \in \mathcal{S}$  にたいし、

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \theta \rangle &= \langle f, \hat{\theta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{\theta}(t) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) \hat{\theta}(t) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \langle f_a, \hat{\theta} \rangle \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \langle \hat{f}_a, \theta \rangle = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_a(w) \theta(w) dw = \langle \hat{f}_\infty, \theta \rangle \end{aligned} \quad (7.48)$$

となる。最後の等式は、極限  $\hat{f}_\infty(w) = \lim_{a \rightarrow \infty} \hat{f}_a(w)$  と  $\theta(w)$  の積の絶対値は可積分であるから、Lebesgue の定理の拡張 (節 2.3) による。(7.48) は、 $\hat{f}(w) = \hat{f}_\infty(w)$  を示す。□

[(7.44) の導出]

$$\begin{aligned} \langle Fu, \theta \rangle &= \langle u, F\theta \rangle = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) e^{-iwt} dt \right] dw = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) \left[ \int_0^a e^{-iwt} dw \right] dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) \frac{1 - e^{-iat}}{it} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) \frac{1 - \cos at + i \sin at}{it} dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) \frac{1}{it} \theta(t) dt + \pi \theta(0) = \langle \pi \delta(t) + \text{Pv} \left( \frac{1}{it} \right), \theta(t) \rangle \end{aligned}$$

第 3 の等式で Fubini の定理 (節 2.4) が用いられ、第 6 の等式で、Riemann-Lebesgue の定理に関する例 3.3.2 (節 3.3) と定理 3.5 (節 3.3) が用いられた、□

[(7.45) の導出] 定理 7.7 の第 1 式による。□

## 8

# ウェーブレット解析の基礎

## 8.1 ウェーブレット基底

関数  $\psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  から関数  $\psi_{m,n}(t)$  を

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n), \quad (m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}) \quad (8.1)$$

で定義する。この関数列  $\{\psi_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}}$  が  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  において基底をなすとき、 $\psi_{m,n}(t)$  をウェーブレット (wavelets)、 $\psi(t)$  をそのマザーウェーブレット (mother wavelet)、そしてその基底をウェーブレット基底 (wavelet basis) という。 $\{\psi_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}}$  が正規直交系をなすとき、すなわち、正規直交条件

$$(\psi_{m,n}, \psi_{k,l}) = \delta_{mk} \delta_{nl} \quad (8.2)$$

が満たされるときに、 $\psi_{m,n}(t)$  を直交ウェーブレットといい、関数列  $\{\psi_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}}$  を正規直交ウェーブレット基底 (orthonormal wavelet basis) という。

**例 8.1.1** 直交ウェーブレットの最も簡単なものは、**Haar** のウェーブレットである。そのときのマザーウェーブレットは、

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1/2 \\ -1, & 1/2 < t < 1 \\ 0, & t < 0 \text{ または } t > 1 \end{cases} \quad (8.3)$$

である。図 8.1 に  $\psi_{0,0}(t) = \psi(t)$ ,  $\psi_{0,1}(t)$ ,  $\psi_{0,2}(t)$ ,  $\psi_{1,0}(t)$ ,  $\psi_{1,1}(t)$ ,  $\psi_{1,2}(t)$  を載せた。これが直交系であることは明らかである。

関数  $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  を、この  $\{\psi_{m,n}(t)\}$  で展開するとき、展開係数  $(\psi_{m,n}, f)$  は、幅  $2^{-m}$  のウェーブレットが  $t = n/2^m$  に、その振幅で存在することを示している。

$\{\psi_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}}$  が正規直交系をなさないときには、もう一つのマザーウェーブレット  $\tilde{\psi}(t)$  を考え、それからウェーブレット  $\tilde{\psi}_{m,n}(t)$  を、(8.1) で  $\psi$  を  $\tilde{\psi}$  で置き換えた式  $\tilde{\psi}_{m,n}(t) = 2^{m/2} \tilde{\psi}(2^m t - n)$  で定義する。これらについて双直交条件

$$(\psi_{m,n}, \tilde{\psi}_{k,l}) = \delta_{mk} \delta_{nl} \quad (8.4)$$

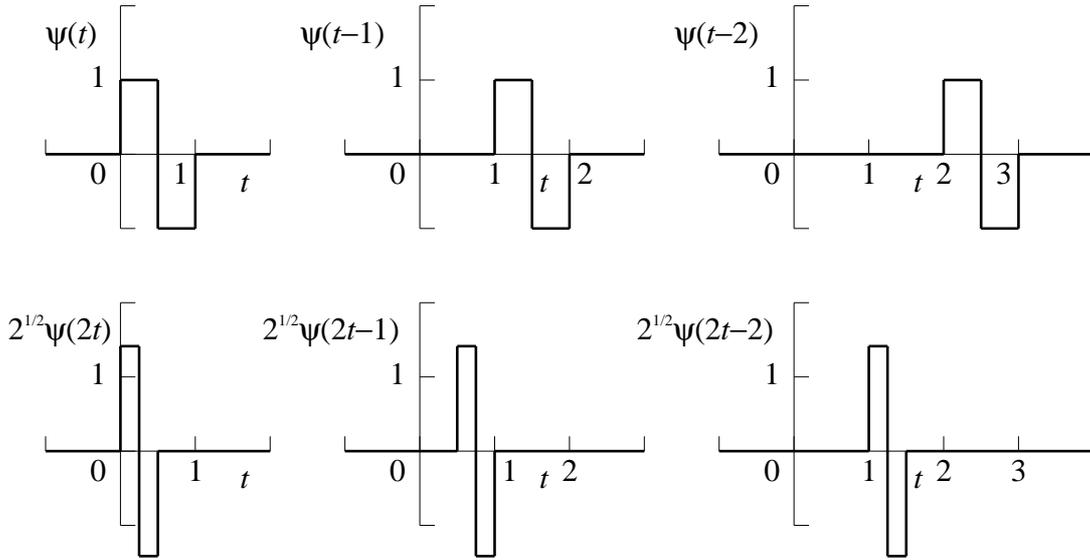


図 8.1: Haar のウェーブレットの場合の関数  $\psi_{0,0}(t) = \psi(t)$ ,  $\psi_{0,1}(t)$ ,  $\psi_{0,2}(t)$ ,  $\psi_{1,0}(t)$ ,  $\psi_{1,1}(t)$ ,  $\psi_{1,2}(t)$

が成り立つときに、 $\{\psi_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}}$ ,  $\{\tilde{\psi}_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}}$  を双直交ウェーブレット基底という。以下で、この二つの基底は Riesz 基底であるとする。

ウェーブレット基底を構成するためにマザーウェーブレット  $\psi(t)$  を選ぶ問題を考える。そのときには、それと密接に関連するスケーリング関数 (scaling function)  $\phi(t)$  を考える。双直交ウェーブレットの場合には、二つのスケーリング関数  $\phi(t)$  と  $\tilde{\phi}(t)$  を考えることになる。

本章の以下の部分では、一般的な記述は双直交ウェーブレットに適用される。そこでの記述は波印 (チルダ) を除くと正規直交ウェーブレットにたいする記述になる。直交ウェーブレットの例は第 9 章と節 11.2 に与えられ、双直交ウェーブレットの例は節 11.3, 11.4 に与えられる。

以下の章において、 $t \in \mathbf{R}$  の関数  $f(t)$  の Fourier 変換は  $\hat{f}(w)$  で表される。

## 8.2 スケーリング関数の基本的な性質

スケーリング関数  $\phi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  が満たすべき基本的な性質は多重解像度解析 (multiresolution analysis) という性質で、次のものである。

- (i)  $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  が張る  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の部分空間を  $V_0$  で表す。
- (ii) 関数空間の列  $\{V_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$  を考える。それは

$$\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) \quad (8.5)$$

を満たす。

(iii)  $f(t) \in V_m$  ならば  $f(2t) \in V_{m+1}$ 、そして、この逆も成り立つ。

$$(iv) \bigcap_{m=-\infty}^{\infty} V_m = \phi, \quad \overline{\bigcup_{m=-\infty}^{\infty} V_m} = \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$$

(iv) で  $\overline{\bigcup V_m}$  は  $\bigcup V_m$  の閉包を表す。

双直交ウェーブレットの場合には、上の記述で  $\phi, V$  をそれぞれ  $\tilde{\phi}, \tilde{V}$  として、 $\tilde{\phi}(t)$  を導入する。スケーリング関数  $\phi(t), \tilde{\phi}(t)$  には直交関係

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\tilde{\phi}(t-n)} dt = \delta_{n0}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (8.6)$$

を満たすという条件を課する。この式は、 $\tilde{\phi}$  を  $\phi$  にすれば直交ウェーブレットにたいする式になる。

**例 8.2.1** Haar のウェーブレット のときのスケーリング関数は、 $\phi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$  である。これは  $\phi(t) = \tilde{\phi}(t)$  として直交関係 (8.6) を満たす。このとき、 $f(t) \in V_0$  は、整数の  $t$  にのみ不連続点をもつ階段関数である。(iii) により、 $g(t) \in V_0$  のとき、 $g(2t) \in V_1$  である。 $f(t) = g(2t)$  とすると、 $f(t) \in V_1$  は  $2t$  が整数のときのみ不連続であるから、 $t$  が整数か整数  $+1/2$  のときにのみ不連続な階段関数である。

同様に、 $f(t) \in V_m$  は、 $2^m t$  が整数のときのみ不連続であり、 $m \geq 1$  では、 $t$  が整数掛ける  $1/2^m$  でのみ不連続な階段関数である。

**定理 8.1** 整数  $m$  にたいし、 $\{2^{m/2}\phi(2^m t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  は  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の部分空間  $V_m$  を張る。すなわち、 $f(t) \in V_m$  ならば係数の列  $\{a_n^{(m)}\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^2$  が存在して、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(m)} 2^{m/2} \phi(2^m t - n) \quad (8.7)$$

が成り立つ。 $f(t)$  と  $\phi(t)$  の Fourier 変換を  $\hat{f}(w)$  と  $\hat{\phi}(w)$  で表すと、(8.7) の Fourier 変換は

$$\hat{f}(w) = A\left(\frac{w}{2^m}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2^m}\right), \quad \text{a.e.} \quad (8.8)$$

と書ける。ここで、 $A(w)$  は

$$A(w) = \frac{1}{2^{m/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(m)} e^{-inw} \quad (8.9)$$

で与えられる周期  $2\pi$  の関数であり、 $A(w)\chi_{(-\pi,\pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  となる。

[証明の準備] (i) により、 $g(t) \in V_0$  ならば、

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(t-n) \quad (8.10)$$

と表され、このとき、 $f(t) = g(2^m t)$  と置くと

$$f(t) = g(2^m t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(2^m t - n) \quad (8.11)$$

となる。(iii) により  $f(t) = g(2^m t)$  は  $V_m$  に含まれる。□

[証明]  $f(t) \in V_m$  ならば、 $f(t) = g(2^m t)$  とおくと、(iii) により  $g(t)$  は  $V_0$  に含まれ、(8.10) と表され、 $f(t)$  は (8.11) と表される。

$\{a_n^{(m)}\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^2$ ,  $A(w)\chi_{(-\pi, \pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  は、直交ウェーブレットの場合には Bessel の不等式 (節 5.1) による。双直交ウェーブレットの場合には Riesz 基底にたいする定理 7.5 (節 7.4) による。□

定理 8.1 の系

$\phi_0(t)$  がスケーリング関数であるとき、 $k$  を整数とし、 $c$  を 0 でない定数として、 $c\phi_0(t-k)$  を  $\phi_0(t)$  の代わりにスケーリング関数として採用しても  $m \in \mathbf{Z}$  の  $V_m$  は変わらない。

条件 (i) と (ii) により  $\phi(t) \in V_1$  であるから、定理 8.1 により、

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sqrt{2} \phi(2t-k) \quad (8.12)$$

と表され、 $\phi(t)$  の Fourier 変換を  $\hat{\phi}(w)$  で表すと、(8.12) の Fourier 変換は

$$\hat{\phi}(w) = m_0\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (8.13)$$

と書ける。ここで、 $m_0(w)$  は Fourier 級数

$$m_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikw} \quad (8.14)$$

を表す。関係 (8.12) はスケール関係 (two-scale relation) と呼ばれる。

双直交ウェーブレットの場合には、上の記述で  $\phi, V, c_k, \hat{\phi}, m_0$  をそれぞれ  $\tilde{\phi}, \tilde{V}, \tilde{c}_k, \tilde{\hat{\phi}}, \tilde{m}_0$  としたもののが成り立つ。また、上で述べたように、双直交ウェーブレットにたいする式は、波印 (チルダ) を除けば直交ウェーブレットにたいする式になる。

例 8.2.2 Haar のウェーブレットの場合には、 $\phi(t), \phi(2t), \phi(2t-1)$  は図 8.2 で与えられる。したがって、(8.12) は

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1) \quad (8.15)$$

となり、 $c_0/\sqrt{2} = c_1/\sqrt{2} = 1/2$  であり、 $k \neq 0, 1$  のとき  $c_k = 0$  である。

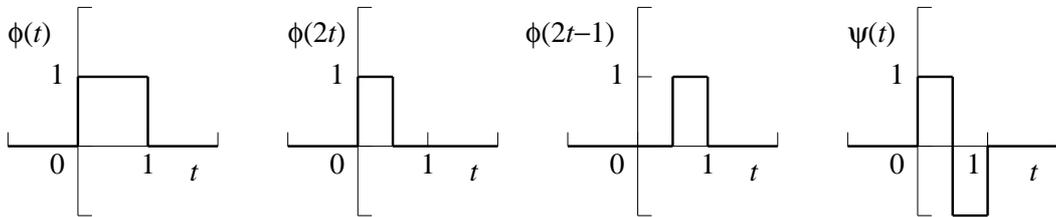


図 8.2: Haar のウェーブレットの場合の関数  $\phi(t), \phi(2t), \phi(2t-1), \psi(t)$

$\phi(t)$  の Fourier 変換を  $\hat{\phi}(w)$  とするとき、直交条件 (8.6) は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(w+2\pi k) \overline{\hat{\phi}(w+2\pi k)} = 1 \quad (8.16)$$

と表される。

[(8.16) の導出]  $f(t) = \hat{\phi}(t)\overline{\hat{\phi}(t)}$  と置き、その Fourier 変換を  $F(w)$  とする。Wiener-Khinchine の定理 (節 6.2) の (6.23) は、 $F(w) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\hat{\phi}(x+w)} dx$  を示す。定理 6.14 (節 6.5) の Poisson の和の公式 (6.57) に、この  $f(t)$  と  $F(w)$  を用いると、直交条件 (8.6) は  $\frac{1}{2\pi}F(k) = \delta_{k,0}$  となるので、(8.16) が導かれる。すなわち、(8.6) ならば (8.16) であり、その逆も成り立つ。□

(8.12) を (8.6) に代入すると、係数の関係

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{\tilde{c}_{k-2n}} = \delta_{n,0}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (8.17)$$

を得る。また、級数  $m_0(w)$ ,  $\tilde{m}_0(w)$  は

$$m_0(w)\overline{\tilde{m}_0(w)} + m_0(w+\pi)\overline{\tilde{m}_0(w+\pi)} = 1 \quad (8.18)$$

を満たす。

[(8.18) の導出, 1] (8.13) を (8.16) に代入すると、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} m_0\left(\frac{w}{2} + \pi k\right)\overline{\tilde{m}_0\left(\frac{w}{2} + \pi k\right)}\hat{\phi}\left(\frac{w}{2} + \pi k\right)\overline{\hat{\phi}\left(\frac{w}{2} + \pi k\right)} = 1$$

となる。ここで、(8.14) により  $m_0(\frac{w}{2} + 2\pi) = m_0(\frac{w}{2})$ ,  $\tilde{m}_0(\frac{w}{2} + 2\pi) = \tilde{m}_0(\frac{w}{2})$  であることを用い、さらに (8.16) を用いる。□

[(8.18) の導出, 2] (8.14) を (8.18) の左辺に代入して、(8.17) を用いる。□

**定理 8.2** 双直交ウェーブレットのスケーリング関数  $\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  が  $\phi(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ ,  $\tilde{\phi}(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  を満し、さらに  $\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  の Fourier 変換  $\hat{\phi}(w)$ ,  $\hat{\tilde{\phi}}(w)$  が  $\hat{\phi}(w)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(w)} \geq 0$  を満たすか、(8.13) で定義される  $m_0(w)$ ,  $\tilde{m}_0(w)$  が  $m_0(w)\overline{\tilde{m}_0(w)} \geq 0$  を満たすとき、

$$\hat{\phi}(2\pi k)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(2\pi k)} = \delta_{k,0}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (8.19)$$

$$m_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = 1, \quad \tilde{m}_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k = 1, \quad m_0(\pi)\overline{\tilde{m}_0(\pi)} = 0 \quad (8.20)$$

$$\hat{\phi}(w)/\hat{\phi}(0) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0\left(\frac{w}{2^k}\right), \quad \hat{\tilde{\phi}}(w)/\hat{\tilde{\phi}}(0) = \prod_{k=1}^{\infty} \tilde{m}_0\left(\frac{w}{2^k}\right) \quad (8.21)$$

が成り立つ。

この証明には、(8.13), (8.14), (8.16), (8.18) が用いられる。

[(8.19) と (8.20) の導出] 先ず、 $\hat{\phi}(w)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(w)} \geq 0$  の条件の下でも  $m_0(w)\overline{\tilde{m}_0(w)} \geq 0$  を (8.13) を用いて確かめる。更に (8.18) により  $0 \leq m_0(\frac{w}{2})\overline{\tilde{m}_0(\frac{w}{2})} \leq 1$  である。次に  $\hat{\phi}(0) \neq 0$ ,  $\hat{\tilde{\phi}}(0) \neq 0$  を帰謬法で示す。(8.16) により、ある  $w_0$  が存在して  $\hat{\phi}(w_0)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(w_0)} \neq 0$  が成り立つ。(8.13) を用いて、上の不等式により

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}(w_0)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(w_0)}| &\leq |\hat{\phi}(w_0/2)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(w_0/2)}| \leq |\hat{\phi}(w_0/2^2)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(w_0/2^2)}| \leq \cdots \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{\phi}(w_0/2^k)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(w_0/2^k)}| \end{aligned}$$

を得る。 $\phi(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ ,  $\tilde{\phi}(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  のとき、 $\hat{\phi}(w)$  は連続であるから、 $\hat{\phi}(0) = 0$  または  $\hat{\phi}(0) \neq 0$  とすると、 $\hat{\phi}(w_0)\hat{\phi}(w_0) = 0$  となり、矛盾する。

$\hat{\phi}(0) \neq 0$ ,  $\hat{\tilde{\phi}}(0) \neq 0$  であるから、(8.13) で  $w = 0$  と置くと、 $m_0(0) = 1$ ,  $\tilde{m}_0(0) = 1$  が従う。これを (8.18) に代入すると、 $m_0(\pi)\tilde{m}_0(\pi) = 0$  となる。(8.14) で定義された  $m_0(w)$  は周期  $2\pi$  をもつので、 $k \in \mathbf{Z}$  のとき  $m_0(2\pi k) = 1$ ,  $\tilde{m}_0(2\pi k) = 1$  と  $m_0(2\pi k + \pi)\tilde{m}_0(2\pi k + \pi) = 0$  が得られる。これを (8.13) に使って、 $k \in \mathbf{Z}$  のとき  $k \neq 0$  ならば  $\hat{\phi}(2\pi k)\hat{\tilde{\phi}}(2\pi k) = 0$  を得る。(8.16) で  $w = 0$  とおき、これを用いると  $\hat{\phi}(0)\hat{\tilde{\phi}}(0) = 1$  を得る。□

[(8.21) の第一式の導出] (8.13) を繰り返し用いて  $\hat{\phi}(w)/\prod_{k=1}^n m_0(\frac{w}{2^k}) = \hat{\phi}(\frac{w}{2^n})$  を得る。 $\hat{\phi}(w)$  は連続であり、 $w \rightarrow 0$  で  $\hat{\phi}(0) \neq 0$  になるので、 $n \rightarrow \infty$  として (8.21) を得る。□

### 定理 8.2 の系

直交ウェーブレットのスケーリング関数  $\phi(t)$  が、 $\phi(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ ,  $\hat{\phi}(0) \geq 0$  を満たすとき、

$$\hat{\phi}(2\pi k) = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (8.22)$$

$$m_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = 1, \quad m_0(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k c_k = 0 \quad (8.23)$$

$$\hat{\phi}(w) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0\left(\frac{w}{2^k}\right) \quad (8.24)$$

が成り立つ。

[(8.22) と (8.23) の導出] 直交ウェーブレットでは  $\hat{\tilde{\phi}}(w) = \hat{\phi}(w)$ ,  $\tilde{m}_0(w) = m_0(w)$  である。これを定理 8.2 の (8.19) と (8.20) に用いる。□

[(8.24) の導出] (8.21) の導出で  $\hat{\phi}(0) = 1$  と置く。□

$\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  が双直交ウェーブレットのスケーリング関数であるための必要十分条件は、それが直交条件 (8.6) を満たし、それから (8.12) を満たす  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ ,  $\{\tilde{c}_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  が定められ、さらに条件 (iv) が確かめられることである。

$\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  が先に求まれば、それから  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ ,  $\{\tilde{c}_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  は (8.13) により定まる。

直交ウェーブレットの場合には、 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  が先に求まれば、それから  $m_0(w)$  が (8.14) で定まり、 $\phi(t)$  が (8.24) で定まることになる。双直交ウェーブレットの場合に定理 8.2 の条件と (8.18) を満たす  $m_0(w)$ ,  $\tilde{m}_0(w)$  が与えられるとき、 $\hat{\phi}(0)$  の値を適当に取り、 $\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  が (8.21) で定まることになる。

直交ウェーブレットの場合に  $\phi(t)$  を先に求め、それから  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  を定める例を節 8.4 で扱う。 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  を先に求める例は節 10.1 で扱われる。双直交ウェーブレットの場合に  $\phi(t)$  を与えて、 $\tilde{\phi}(t)$  を求める問題を節 10.2 で扱う。 $m_0(w)$ ,  $\tilde{m}_0(w)$  を先に与える場合を節 10.3 で扱う。

### 8.3 マザーウェーブレットの基本的な性質

$V_{m+1}$  における  $V_m$  の補空間を  $W_m$  で表す。すなわち、

$$V_{m+1} = V_m \oplus W_m \quad (8.25)$$

とする。

マザーウェーブレット  $\psi(t)$  は次の条件を満たすものである。

- (i) 関数列  $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  が  $W_0$  を張る。
- (ii) 関数列  $\{2^{m/2}\psi(2^m t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  が  $W_m$  を張る。

関係 (8.25) を繰り返し使うと、

$$V_{m+1} = V_{m-1} \oplus W_{m-1} \oplus W_m = \cdots \oplus W_{m-2} \oplus W_{m-1} \oplus W_m$$

となる。ここで  $m \rightarrow \infty$  の極限をとると、スケーリング関数の性質 (iv) を用いて、

$$\overline{\cdots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots} = \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) \quad (8.26)$$

を得る。すなわち、 $\{2^{m/2}\psi(2^m t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z}}$  が  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の基底となる。

この節では、まず関数列  $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  が  $W_0$  の部分集合となるように  $\psi(t)$  を決定し、求めた  $\psi(t)$  が上の条件 (i), (ii) を満たすことを示す。

(8.25) が示すように、 $W_0$  の関数  $\psi(t)$  は  $V_1$  に属するので、定理 8.1 (節 8.2) により、(8.12)-(8.14) と同様に、

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \sqrt{2} \phi(2t - k) \quad (8.27)$$

と表され、 $\psi(t)$  の Fourier 変換  $\hat{\psi}(w)$  は

$$\hat{\psi}(w) = m_1\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (8.28)$$

と書ける。ここで、 $m_1(w)$  は Fourier 級数

$$m_1(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-ikw} \quad (8.29)$$

を表す。

直交ウェーブレットの場合には、この節の以上の記述で  $\phi, \psi, V, W, d_k, \hat{\phi}, \hat{\psi}, m_1$  をそれぞれ  $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{V}, \tilde{W}, \tilde{d}_k, \hat{\tilde{\phi}}, \hat{\tilde{\psi}}, \tilde{m}_1$  としたものが成り立つ。

マザーウェーブレット  $\psi(t), \tilde{\psi}(t)$  には、直交条件 (8.6) で  $\phi$  を  $\psi$  で置き換えた式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \overline{\tilde{\psi}(t-n)} dt = \delta_{n0}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (8.30)$$

を満たすという条件を課する。この条件は、 $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  の Fourier 変換を  $\hat{\psi}(w)$ ,  $\hat{\tilde{\psi}}(w)$  で表すと、(8.16) と同様に、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(w+2\pi k) \overline{\hat{\tilde{\psi}}(w+2\pi k)} = 1 \quad (8.31)$$

と書ける。また、直交ウェーブレットの場合の  $V_0$  の関数  $\phi(t)$  と  $W_0$  の関数  $\psi(t-n)$  が直交するという条件 (8.25) は、双直交ウェーブレットの場合の場合には、 $V_0$  の関数  $\phi(t)$  と  $\tilde{W}_0$  の関数  $\tilde{\psi}(t-n)$  が直交し、 $\tilde{V}_0$  の関数  $\tilde{\phi}(t)$  と  $W_0$  の関数  $\psi(t-n)$  が直交するという条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \overline{\tilde{\phi}(t-n)} dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(t) \overline{\psi(t-n)} dt = 0, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (8.32)$$

となり、その Fourier 変換は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(w+2\pi k) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(w+2\pi k)} = 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{\phi}}(w+2\pi k) \overline{\hat{\psi}(w+2\pi k)} = 0 \quad (8.33)$$

となる。

(8.31) と (8.33) の条件は、(8.18) と同様に、

$$m_1(w) \overline{\tilde{m}_1(w)} + m_1(w+\pi) \overline{\tilde{m}_1(w+\pi)} = 1 \quad (8.34)$$

$$m_1(w) \overline{\tilde{m}_0(w)} + m_1(w+\pi) \overline{\tilde{m}_0(w+\pi)} = 0, \quad m_0(w) \overline{\tilde{m}_1(w)} + m_0(w+\pi) \overline{\tilde{m}_1(w+\pi)} = 0 \quad (8.35)$$

を与える。(8.18) と、これら二個の式から

$$m_1(w) = -e^{-iw} \overline{\tilde{m}_0(w+\pi)}, \quad \tilde{m}_1(w) = -e^{-iw} \overline{m_0(w+\pi)} \quad (8.36)$$

が解であることが確かめられる。これに (8.14) と (8.29) を用いて、(8.27) の係数  $d_k$  は

$$d_k = (-1)^k \bar{c}_{1-k}, \quad \tilde{d}_k = (-1)^k \bar{c}_{1-k} \quad (8.37)$$

で与えられることになる。

[(8.37) の第一式の導出] (8.36) に (8.14) と (8.29) を代入して、

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-ikw} &= -e^{-iw} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_k e^{ik(w+\pi)} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \bar{c}_{-k} e^{-i(k+1)w} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \bar{c}_{1-k} e^{-ikw} \end{aligned}$$

を得る。したがって、 $d_k = (-1)^k \bar{c}_{1-k}$  を得る。□

(8.36) の右辺の係数の  $-$  は  $+$  でもよく、 $e^{-iw}$  は  $l$  が奇数ならば  $e^{ilw}$  でもよい。そのとき、(8.37) は  $d_k = (-1)^k \bar{c}_{-k-l}$  となる。ここで定まる  $\psi(t)$  を  $\psi_0(t)$  とするとき、マザーウェーブレット  $\psi(t)$  として、 $-\psi_0(t)$  を採用してもよく、 $k$  を整数として  $\psi_0(t-k)$  あるいは  $-\psi_0(t-k)$  を採用してもよいことに対応している。

**例 8.3.1** Haar のウェーブレットの場合には、(8.12)、(8.15) により、 $c_0/\sqrt{2} = c_1/\sqrt{2} = 1/2$  であり、 $k \neq 0, 1$  のとき  $c_k = 0$  である。したがって、(8.37) により、 $d_0/\sqrt{2} = -d_1/\sqrt{2} = 1/2$  であり、 $k \neq 0, 1$  のとき  $d_k = 0$  となるので、(8.27) は

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1) \quad (8.38)$$

となる。図 8.2 を参照せよ。

直交ウェーブレットの場合には、(8.23) を (8.36) に代入し、(8.29) を用いて、

$$m_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k = 0, \quad m_1(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k d_k = 1 \quad (8.39)$$

を得る。したがって、(8.28) により

$$\hat{\psi}(4\pi k) = 0, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (8.40)$$

となる。双直交ウェーブレットの場合に定理 8.2 の条件が満たされる時、対応する式は

$$m_1(0)\overline{\tilde{m}_1(0)} = 0, \quad m_1(\pi) = 1, \quad \tilde{m}_1(\pi) = 1 \quad (8.41)$$

$$\hat{\psi}(4\pi k)\overline{\tilde{\psi}(4\pi k)} = 0, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (8.42)$$

となる。

### 補題 1

関数  $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  が  $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  と  $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の一次結合で表されるためには、 $A(w)\chi_{(-\pi, \pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $B(w)\chi_{(-\pi, \pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  を満たす周期  $2\pi$  の関数  $A(w)$ ,  $B(w)$  が存在して、 $f(t)$  の Fourier 変換  $\hat{f}(w)$  が

$$\hat{f}(w) = A(w)\hat{\phi}(w) + B(w)\hat{\psi}(w)$$

と表されることが必要十分である。

[証明] 右辺第一項は定理 8.1 (節 8.2) による。 □

### 補題 2

整数  $n \in \mathbf{Z}$  にたいする  $\phi_{2,n}(t) = \sqrt{2}\phi(2t-n)$  は、 $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  と  $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の一次結合で表される。

[証明] 一般に双直交ウェーブレットの場合の証明をする。ここで、二つの等式

$$\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) = \overline{\tilde{m}_0\left(\frac{w}{2}\right)}\hat{\phi}(w) - e^{iw/2}m_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)\hat{\psi}(w) \quad (8.43)$$

$$0 = \overline{\tilde{m}_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)}\hat{\phi}(w) + e^{iw/2}m_0\left(\frac{w}{2}\right)\hat{\psi}(w) \quad (8.44)$$

を、この右辺に (8.13), (8.28), (8.36) を代入し、(8.18) を用いて確かめる。この二つの式の和は

$$\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) = B_0(w)\hat{\phi}(w) + C_0(w)\hat{\psi}(w) \quad (8.45)$$

となり、差に  $e^{-iw/2}$  を掛けたものは

$$\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right)e^{-iw/2} = B_1(w)\hat{\phi}(w) + C_1(w)\hat{\psi}(w) \quad (8.46)$$

となる。ここで、 $\hat{\phi}(w)$ ,  $\hat{\psi}(w)$  の係数  $B_0(w)$ ,  $C_0(w)$ ,  $B_1(w)$ ,  $C_1(w)$  は

$$B_0(w) = \overline{\tilde{m}_0\left(\frac{w}{2}\right)} + \overline{\tilde{m}_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)}, \quad C_0(w) = \{m_0\left(\frac{w}{2}\right) - m_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)\}e^{iw/2}$$

$$B_1(w) = \{\overline{\tilde{m}_0\left(\frac{w}{2}\right)} - \overline{\tilde{m}_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)}\}e^{-iw/2}, \quad C_1(w) = -m_0\left(\frac{w}{2}\right) - m_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)$$

で定義される周期  $2\pi$  の関数である。(8.18) によりこれらの係数と  $\chi_{(-\pi, \pi)}(w)$  の積は有界であり、 $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  に属す。

$\phi_{2,n}(t) = \sqrt{2}\phi(2t - n)$  の Fourier 変換を  $\hat{\phi}_{2,n}(w)$  すると、

$$\hat{\phi}_{2,n}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right)e^{-inw/2}$$

となる。 $n$  が偶数のときには (8.45) を、奇数のときには (8.46) をこの右辺に代入すると、補題 1 により証明される。□

**定理 8.3**  $\{\psi(t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の張る空間は、 $V_1$  における  $V_0$  の補空間  $W_0$  である。

[証明]  $\{\psi(t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の張る空間を  $W_0$  とする。このとき、スケール関係 (8.12) と (8.27) により、 $V_0 \oplus W_0 \subset V_1$  となる。他方、補題 2 により、 $V_1 \subset V_0 \oplus W_0$  である。したがって、 $V_1 = V_0 \oplus W_0$  となる。□

**定理 8.3 の系**

$\{2^{m/2}\psi(2^m t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の張る空間は、 $V_{m+1}$  における  $V_m$  の補空間  $W_m$  である。

[証明]  $f(t) \in V_{m+1}$  とする。 $f(t) = g(2^m t)$  とすると、スケール関数の性質 (iii) により、 $g(t) \in V_1$  である。したがって、定理 8.3 により

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(t - n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \psi(t - n)$$

と表される。したがって、

$$f(t) = g(2^m t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(2^m t - n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \psi(2^m t - n)$$

となる。□

(8.37) を採用すれば、スケール関数  $\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  が求まると係数の列  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ ,  $\{\tilde{c}_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  が (8.12) または (8.13) で定まり、マザーウェーブレット  $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  は (8.27) と (8.37) で自動的に定まることになる。

## 9

# 直交ウェーブレットの例

本章の最初の部分で、簡単な直交ウェーブレットを取り上げる。Daubechies による直交ウェーブレットについては第 11 章で扱う。ここでは、双直交ウェーブレットにたいする式は波印 (チルダ) を除いて用いられる。以下で、これを明示するために、例えば、(8.16) から波印を除いた式を (8.16-o) で表す。本章の最後にウェーブレットのモーメントに関する節を加える。

### 9.1 Haar のウェーブレット

Haar のウェーブレットについては、例 8.1.1, 例 8.2.1, 例 8.2.2, 例 8.3.1 で述べた。 $\phi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$  である。このとき、スケール関係 (8.12) は (8.15) となり、マザーウェーブレット  $\psi(t)$  は (8.38) となる。 $\phi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$  の Fourier 変換  $\hat{\phi}(w)$  は

$$\hat{\phi}(w) = \int_0^1 e^{-iwt} dt = \frac{1 - e^{-iw}}{iw} = e^{-iw/2} \frac{\sin \frac{w}{2}}{\frac{w}{2}} \quad (9.1)$$

となり、正規直交条件 (8.16-o) は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{w}{2}}{(w + 2\pi k)^2/4} = 1 \quad (9.2)$$

となる。

[節 8.2 の条件 (iv) が成り立つことの証明] 今のばあい、 $V_m$  は、不連続点が  $\{2^{-m}k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  にある階段関数の集合である。 $f(t)$  が  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  に属する連続関数であるとき、任意の  $\epsilon > 0$  にたいして  $X > 0$  が存在して、

$$\int_{-\infty}^{-X} |f(t)|^2 dt < \epsilon, \quad \int_X^{\infty} |f(t)|^2 dt < \epsilon$$

となる。また、定理 1.5 (節 1.4) により、 $t \in [-X, X]$  では  $f(t)$  は一様連続であるから、 $\delta > 0$  を  $t$  と  $t'$  が  $0 < t' - t < \delta$  のときに、 $|f(t') - f(t)| < \sqrt{\epsilon/(2X)}$  となるように選ぶことができる。今  $m \in \mathbf{Z}$  を  $2^{-m} < \delta$  とし、 $\phi_m(t)$  を

$$\phi_m(t) = \begin{cases} f(2^{-m}k), & 2^{-m}k \leq t < 2^{-m}(k+1), k \in \mathbf{Z}, |t| \leq X \\ 0, & |t| > X \end{cases} \quad (9.3)$$

とするとき、

$$\|f - \phi_m\|^2 < 3\epsilon$$

となる。 $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  に属する連続関数は、定理 4.5 (節 4.3) により、 $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  で稠密である。□

## 9.2 Franklin のウェーブレット

ここでは、

$$\theta_2(t) = (1 - |t - 1|) \chi_{[0,2]}(t) \quad (9.4)$$

とし、 $\phi(t)$  は  $\{\theta_2(t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の一次結合で表されるものであるとする。すなわち、

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \theta_2(t - n) \quad (9.5)$$

とする。関数  $\theta_2(t)$  を図 9.1(a) に示した。

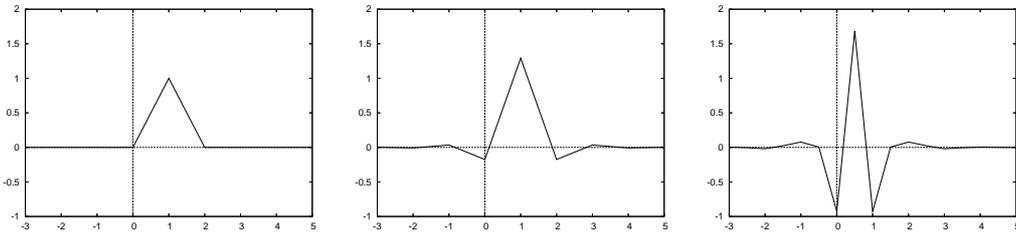


図 9.1: (a) 関数  $\theta_2(t)$ 、Franklin のウェーブレットの (b) スケーリング関数  $\phi(t)$ 、(c) マザーウェーブレット関数  $\psi(t)$

$\theta_2(t)$  は、 $t$  が整数 0, 1, 2 のときに微係数が不連続な、折れ線であるから、 $\phi(t)$  も、 $t$  が整数のときに微係数が不連続な、折れ線である。したがって、 $f(t) \in V_0$  も、そのような連続な折れ線である。

(9.5) の Fourier 変換は

$$\hat{\phi}(w) = \alpha(w) \hat{\theta}_2(w) \quad (9.6)$$

$$\alpha(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-inw} \quad (9.7)$$

となる。ここで、

$$\hat{\theta}_2(w) = e^{-iw} \left( \frac{\sin \frac{w}{2}}{\frac{w}{2}} \right)^2 \quad (9.8)$$

である。これと (9.1) を比べると、 $\theta_2(t)$  が二つの Haar のスケーリング関数  $\theta_1(t) = \chi_{[0,1]}(t)$  の合成関数であることがわかる。

下に示すように、

$$\alpha(w) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos w \right)^{-1/2} \quad (9.9)$$

となる。したがって、 $\hat{\phi}(w)$  は、(9.6) に (9.8), (9.9) を代入して求められる。

$a_n$  の数値を、(9.9), (9.7) に数式処理システム Maxima を用いて計算するプログラムが、節末のプログラム 9.2.2 にある。そのプログラムで求めた  $a_n$  の値は、次節の節末のプログラム 9.3.4 の prog 934(a) の最初の 3 行にある。

$t$  が整数  $m$  のときの  $\phi(t)$  は、(9.5) により  $\phi(m) = a_{m-1}$  で与えられる。 $a_n$  の値を用いて、図 9.1(b) の  $\phi(t)$  のグラフが得られる。

プログラム 9.2.2 の prog 922(b) は、(9.5) で定まる  $\phi(t)$  が正規直交条件 (8.6-o) を満たすことを確かめるものである。

展開係数  $a_n$  は、(9.9) を  $\cos w$  で展開して、 $n \geq 0$  にたいして

$$a_n = a_{-n} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n+2l} \binom{n+2l}{l} \frac{1}{4^{n+2l}} \quad (9.10)$$

となる。

(9.9) は複素数値  $w$  の関数として実軸を含むある幅の領域で正則である。このことから、Fourier 係数  $a_n$  は  $|n|$  が大きいときには指数関数的に減衰する。

[ $a_n$  が指数関数的に減衰することの証明]  $\alpha(w)$  の Fourier 係数  $a_n$  は

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(w) e^{inw} dw$$

で与えられる。 $\alpha(w)$  が  $|\operatorname{Im} w| < \beta$  で正則であるとする、 $-\beta < y < \beta$  とし、積分路を  $-\pi$  から  $-\pi + iy$  へ、 $-\pi + iy$  から  $\pi + iy$  へ、 $\pi + iy$  から  $\pi$  への三つの部分に分ける。 $\alpha(w)$  は周期  $2\pi$  をもつので、積分路の第一の部分と第三の部分の寄与は打ち消しあう。第二の部分では  $w = x + iy$  として、変数を  $w$  から  $x$  に変えると、

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(x + iy) e^{inx - ny} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-ny} \int_{-\pi}^{\pi} |\alpha(x + iy)| dx \quad (9.11)$$

となる。 $n > 0$  では  $0 < y < \beta$  とし、 $n < 0$  では  $-\beta < y < 0$  として証明が終る。□

[(9.9) の導出] 別の導出が、以下で、(9.30) 式の下に与えられる。

(9.6) を (8.16-o) に代入すると、(8.16-o) は

$$|\alpha(w)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}_2(w + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (9.12)$$

と書ける。左辺の第二の因子は、以下に示すように

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}_2(w + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \frac{w}{2}}{(w + 2\pi k)^4 / 16} = 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{w}{2} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \cos w\right) \quad (9.13)$$

と評価できる。これを (9.12) に用い、 $\alpha(w)$  を実数として、(9.9) を採用する。□

[(9.13) の第二の等式の導出] (9.2) は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(w + 2\pi k)^2 / 4} = \frac{1}{\sin^2 \frac{w}{2}} \quad (9.14)$$

と書ける。 $w$  を複素数とするとき、この関数は極を除いて正則な関数である。これを二回微分して、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{6}{(w + 2\pi k)^4 / 4} = \frac{3}{2} \frac{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{w}{2}}{\sin^4 \frac{w}{2}} \quad (9.15)$$

を得る。これを用いて (9.13) の右辺を得る。□

(8.13) は  $m_0(w/2) = \hat{\phi}(w)/\hat{\phi}(w/2)$  と書くことができる。ここで、(9.6) に (9.8), (9.9) を用い、

$$m_0\left(\frac{w}{2}\right) = e^{-iw/2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{w}{2}\right) \left[\frac{1 + \frac{1}{2} \cos \frac{w}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cos w}\right]^{1/2} \quad (9.16)$$

を得る。ここで求めた  $m_0(w)$  は  $2\pi$  を周期とする関数であるから、これから (8.14) を用い、 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  が求まり、下に示すように条件 (iv) が成り立つので、ここで定まる  $\phi(t)$  はスケーリング関数として採用できる。(9.16), (8.14), (8.37-o) を用い、 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ ,  $\{d_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  を求め、 $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  を計算する問題は次節で扱う。

$m_{1\alpha}(w/2) = m_1(w/2)\alpha(w/2)$  と置くと (8.28) は

$$\hat{\psi}(w) = m_{1\alpha}\left(\frac{w}{2}\right)\hat{\theta}_2\left(\frac{w}{2}\right), \quad (9.17)$$

となる。(8.36-o) により  $m_1(w) = -e^{-iw}\overline{m_0(w+\pi)}$  である。これを用いて、

$$\begin{aligned} m_{1\alpha}\left(\frac{w}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{w}{2}\right) \left[\frac{1 - \frac{1}{2} \cos \frac{w}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cos w}\right]^{1/2} \left[\frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cos \frac{w}{2}}\right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \cos \frac{w}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \cos \frac{w}{2}\right) \left[\frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cos w}\right]^{1/2} \left[\frac{\frac{6}{7}}{1 - \frac{1}{7} \cos w}\right]^{1/2} \end{aligned} \quad (9.18)$$

を得る。(9.17) を定理 8.1 の (8.8) と比較すると、 $m_{1\alpha}(w)$  を

$$m_{1\alpha}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-inw} \quad (9.19)$$

と展開するとき、

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sqrt{2} \theta_2(2t - n) \quad (9.20)$$

となることがわかる。したがって、 $k$  が整数のとき  $\psi(\frac{k}{2}) = 2(b_{k-1}/\sqrt{2})$  となる。

(9.18) から  $m_{1\alpha}(w)$  の展開係数  $b_n/\sqrt{2}$  を求める Maxima のプログラムを節末のプログラム 9.2.3 にのせた。得られた  $b_n/\sqrt{2} = \text{bb}[n]$  の値を下記に示す。これを用いて、図 9.1(c) の  $\psi(t)$  のグラフが得られる。

```
bb[0]=0.84097, bb[1]=-0.46358, bb[2]=0.00248, bb[3]=-0.03872, bb[4]=0.01189,
bb[5]=-0.00982, bb[6]=0.00232, bb[7]=-0.00206, bb[8]=0.00060, bb[9]=-0.00049,
bb[10]=0.00015, bb[11]=-0.00012, bb[12]=0.00004, bb[13]=-0.00003,
bb[14]=0.00001, bb[15]=-0.00001,
```

[節 8.2 の条件 (iv) が成り立つことの証明] ここでは、 $\theta_2(t)$  を  $\theta(t)$  と書く。まず、 $\{\theta(t-n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  は直交関数系  $\{\phi(t-n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  が張る空間  $V_0$  の Riesz 基底であることを証明する。

$\phi_n(t) = \phi(t-n)$ ,  $\theta_n(t) = \theta(t-n)$  と書く。このとき、(9.5) から  $\phi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \theta_n(t-k)$  が得られる。これを線形作用素  $T$  により  $\phi_n(t) = (T\theta_n)(t)$  と表すことにする。三角不等式を用いて、 $\|T\| < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|$  を得る。(9.11) により、 $|k| \rightarrow \infty$  で  $|a_k|$  は指数関数的に減衰するので、 $\|T\| < \infty$  が得られる。 $\theta_n = T^{-1}\phi_n$  とすると、 $\alpha(w)^{-1}$  の Fourier 係数を同様に評価して、 $\|T^{-1}\| < \infty$  が得られる。したがって、 $\{\theta_n(t)\}$  は  $V_0$  の Riesz 基底である。

$V_m$  は、 $\{\theta(2^m t - n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  が張る空間であるから、 $k \in \mathbf{Z}$  の  $t = 2^{-m}k$  で線分を連結した連続線を表すコンパクトな台をもつ関数の集合である。節 9.1 の対応する証明で、(9.3) の  $\phi_m(t)$  を

$$f_m(t) = \begin{cases} f(2^{-m}k) + \{[f(2^{-m}(k+1)) - f(2^{-m}k)]/2^{-m}\}(t - 2^{-m}k), & 2^{-m}k \leq t < 2^{-m}(k+1), k \in \mathbf{Z}, |t| \leq X_m \\ \{f(-X_m)/2^{-m}\}(t + X_m + 2^{-m}), & -X_m - 2^{-m} \leq t \leq -X_m \\ f(X_m) - \{f(X_m)/2^{-m}\}(t - X_m), & X_m \leq t \leq X_m + 2^{-m} \\ 0, & |t| > X_m + 2^{-m} \end{cases}$$

で定義される  $f_m(t)$  で置き換えればよい。ここで、 $X_m = [X/2^{-m}]$  とする。 $[x]$  は  $x$  を越えない最大の整数である。□

### 本節の計算に関する数式処理システム Maxima のプログラム

プログラム 9.2.1 この節の以下のプログラムの前に読み込ませる。

```
prog921$
ix:30; iax:20; load(functs); for i:0 thru ix do comb[i]:combination(-1/2,i);
coeffa():=block(for i:0 thru iax do
  (a[i]:coeff(pser(z),z,i),if i>0 then a[-i]:a[i]));
asump():=block([sma:0],for i:-iax thru iax do
  (print(i,a[i]),sma:sma+a[i]),print(sma));
```

プログラム 9.2.2  $a_n$  の数値を、(9.9), (9.7) により計算する。

```
Prog922(a); (prerequisite:[prog921])$
csz2(z):=(z+1/z)/4; fac32:sqrt(3/2);
plirt(z):=fac32*sum(comb[i]*csz2(z)^i,i,0,ix);
plirta(z):=float(expand(plirt(z)));
pser(z):=plirta(z); coeffa(); asump(); iax:15;
```

次の prog 922(b) は (9.5) で定まる  $\phi(t)$  が正規直交条件 (8.6-o) を満たすことを確かめるものである。

```
prog922(b); (prerequisite:[prog922(a)])$
pser(z):=float(expand(plirta(z)*plirta(z))); ix:11; im:-ix; coeffa();
for i:im+1 thru ix-1 do (s[i]:a[i]*2/3+a[i-1]/6+a[i+1]/6, print(i,s[i]));
```

プログラム 9.2.3 (9.18) から  $m_{1\alpha}(w)$  の展開係数  $b_n/\sqrt{2}$  を求める。

```
Prog923; (prerequisite:[prog921])$
cszz(z):=(z*z+1/(z*z))/2; fac32:sqrt(3/2); fac67:sqrt(6/7);
plirtbb(z):=fac32*sum(comb[i]*(cszz(z)/2)^i,i,0,ix);
plirtb(z):=float(expand(plirtbb(z)));
plirtcc(z):=fac67*sum(comb[i]*(-cszz(z)/7)^i,i,0,ix);
plirtc(z):=float(expand(plirtcc(z)));
fc1(z):=(1/sqrt(3))*(1-(z+1/z)/2)*(1-(z+1/z)/4);
ps1(z):=fc1(z)*plirtb(z)*plirtc(z);
pser(z):=float(expand(ps1(z))); coeffa(); asump();
```

### 9.3 Battle-Lemarie のウェーブレット

ここでは、 $\nu$  を 1 以上の整数とし、 $\theta_{\nu+1}(t)$  は、その Fourier 変換  $\hat{\theta}_{\nu+1}(w)$  が

$$\hat{\theta}_{\nu+1}(w) = \left( \frac{1 - e^{-iw}}{iw} \right)^{\nu+1} = e^{-i(\nu+1)w/2} \left( \frac{\sin \frac{w}{2}}{\frac{w}{2}} \right)^{\nu+1} \quad (9.21)$$

で与えられるものとする。これは  $\theta_{\nu+1}(t)$  が  $(\nu+1)$  個の Haar のスケーリング関数  $\theta_1(t) = \chi_{[0,1]}(t)$  の合成関数であることを示している。 $\theta_{\nu+1}(t)$  は

$$\theta_{\nu+1}(t) = \frac{1}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu+1} \left[ (-1)^k {}_{\nu+1}C_k (t-k)^\nu u_k(t) \right] \quad (9.22)$$

で表されることが知られている。ここで、 $u_k(t) = u(t-k)$  は  $t \geq k$  で 1 であり、 $t < k$  で 0 である階段関数である。(9.22) は、この関数が  $k \in \mathbf{Z}$  の区間  $(k, k+1)$  で  $\nu$  次の多項式であり、つなぎめの点では  $(\nu-1)$  次微係数まで連続であることを示している。そのような関数は  $\nu$  次のスプラインと呼ばれる。 $\nu$  次のスプラインは、一般に次々のつなぎめの点の間では  $\nu$  次曲線になり、つなぎめの点では  $(\nu-1)$  次微係数まで連続になるような補間曲線である。 $\theta_{\nu+1}(t)$  は

$$\theta_{\nu+1}(t) = \theta_{\nu+1}(\nu+1-t) \quad (9.23)$$

という対称性をもち、その台は区間  $[0, \nu+1]$  であることが示される。

[(9.23) の導出] (9.21) に与えた  $\hat{\theta}_{\nu+1}(w)$  に Fourier 逆変換の公式を用いて

$$\begin{aligned} \theta_{\nu+1}(\nu+1-t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-iw}}{iw} \right)^{\nu+1} e^{iw(\nu+1-t)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 - e^{iw}}{-iw} \right)^{\nu+1} e^{-iw(\nu+1-t)} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{-iw} - 1}{-iw} \right)^{\nu+1} e^{iwt} dw = \theta_{\nu+1}(t) \end{aligned}$$

を得る。第二の等式で  $w$  が  $-w$  で置き換えられている。□

[(9.22) の  $\theta_{\nu+1}(t)$  の台が  $(0, \nu+1)$  であることの証明]  $t \leq 0$  で 0 であることは、そのとき、(9.22) の右辺のすべての  $u_k(t)$  が 0 に等しいので、明らか。(9.23) で  $t \leq 0$  とすると、 $\theta_{\nu+1}(t)$  が  $t \geq \nu+1$  のとき 0 であることが確かめられる。□

[(9.22) の  $\theta_{\nu+1}(t)$  の Fourier 変換が (9.21) であることの証明] 定理 6.3 (節 6.1) により、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\nu+1}(t) e^{-iwt} dt &= \frac{1}{(iw)^\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{d^\nu}{dt^\nu} \theta_{\nu+1}(t) \right] e^{-iwt} dt \\ &= \frac{1}{(iw)^\nu} \int_0^{\nu+1} \left[ \frac{d^\nu}{dt^\nu} \theta_{\nu+1}(t) \right] e^{-iwt} dt = \frac{1}{(iw)^\nu} \sum_{k=0}^{\nu+1} \left[ (-1)^k {}_{\nu+1}C_k \int_k^{\nu+1} e^{-iwt} dt \right] \\ &= \frac{1}{(iw)^\nu} \sum_{k=0}^{\nu+1} \left[ (-1)^k {}_{\nu+1}C_k \frac{e^{-i w(\nu+1)} - e^{-i w k}}{-iw} \right] = \frac{(1 - e^{-iw})^{\nu+1}}{(iw)^{\nu+1}} \end{aligned}$$

が導かれる。最後の等式で  $\sum_{k=0}^{\nu+1} (-1)^k {}_{\nu+1}C_k = (1-1)^{\nu+1} = 0$  が用いられている。□

[別証明]  $\theta_{\nu+1}(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  であるから  $\theta_{\nu+1}(t) \in \mathcal{S}'$  である。 $\mathcal{S}'$  の関数として (9.22) の右辺の Fourier 変換を項別に計算すると、定理 7.8 と例 7.5.3 により  $\sum_{k=0}^{\nu+1} (-1)^k {}_{\nu+1}C_k \frac{e^{-i w k}}{(iw)^{\nu+1}} = \frac{(1 - e^{-iw})^{\nu+1}}{(iw)^{\nu+1}}$  となる。□

節末プログラム 9.3.2 に、 $\theta_{\nu+1}(t)$  を (9.22) を用いて計算する Maxima のプログラムを与える。これで求めた  $\theta_4(t)$  のグラフを図 9.2(a) に示す。

スケーリング関数  $\phi(t)$  は  $\{\theta_{\nu+1}(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の一次結合で表されるとする。すなわち、

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \theta_{\nu+1}(t-n) \quad (9.24)$$

このとき、 $\phi(t)$ 、 $f(t) \in V_0$  は  $\nu$  次のスプラインである。 $\nu = 1$  の場合は、前節に述べた。 $\alpha(w)$  を (9.7) で定義すると、(9.24) の Fourier 変換は

$$\hat{\phi}(w) = \alpha(w) \hat{\theta}_{\nu+1}(w) \quad (9.25)$$

である。 $\alpha(w)$  は、(9.12) に対応する式により、 $P_\nu(w)$  を

$$P_\nu(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}_{\nu+1}(w + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2 \sin \frac{w}{2}}{w + 2\pi k} \right)^{2\nu+2} \quad (9.26)$$

として、

$$\alpha(w) = [P_\nu(w)]^{-1/2} \quad (9.27)$$

で与えられる。 $P_1(w)$  は (9.13) に求められている。 $P_2(w)$ 、 $P_3(w)$  は (9.15) を更に微分して同様にして求められる。そのプログラムが、節末プログラム 9.3.3 の prog 933(a) の最初の部分に与えられる。その結果は、 $\nu = 1$ 、 $\nu = 3$  にたいし

$$P_1(w) = 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{w}{2}, \quad P_3(w) = 1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{w}{2} + \frac{2}{5} \sin^4 \frac{w}{2} - \frac{4}{315} \sin^6 \frac{w}{2} \quad (9.28)$$

となる。

節末プログラム 9.3.3 は、 $a_n$  の数値を、(9.28)、(9.27)、(9.7) を用いて計算するものである。 $\nu = 1$ 、 $\nu = 3$  にたいして得られた  $a_n$  の数値は、プログラム 9.3.4 の prog 934(a) に与えられる。その数値から  $\phi(t)$  を (9.24) を用いて求めるプログラムを prog 934(b) に与える。 $\nu = 3$  にたいして得られた  $\phi(t)$  を図 9.2(b) に示す。

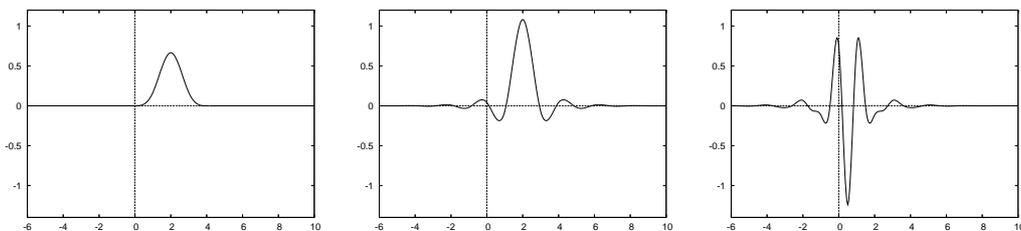


図 9.2: (a) 関数  $\theta_4(t)$ 、三次のスプラインの直交ウェーブレットの (b) スケーリング関数  $\phi(t)$ 、(c) マザーウェーブレット関数  $\psi(t)$

ここで、 $\Theta_{2\nu+2}(w)$  はフーリエ級数

$$\Theta_{2\nu+2}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_{2\nu+2}(n) e^{-inw} \quad (9.29)$$

であるとするとき、 $P_\nu(w)$  を

$$P_\nu(w) = \Theta_{2\nu+2}(w) e^{i(\nu+1)w} \quad (9.30)$$

として、 $\alpha(w)$  は (9.27) で定めることもできる。

[(9.30) の導出] (9.24) を直交関係 (8.6-o) に代入すると

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k a_l \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\nu+1}(t-k) \theta_{\nu+1}(t-n-l) = \delta_{n0}$$

となる。ここで、 $\theta_{\nu+1}(t)$  の一つに (9.23) を使い、 $t$  について積分すると、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k a_l \theta_{2\nu+2}(\nu+1+n+l-k) = \delta_{n0}$$

となる。この式に、 $e^{-inw}$  を掛け、整数  $n$  について和を取り、(9.29) を用いて、

$$\alpha(w) \alpha(-w) \Theta_{2\nu+2}(w) e^{i(\nu+1)w} = 1$$

を得る。 $P_\nu(w)$  を (9.30) とし、 $\alpha(w)$  を (9.27) とすれば、これは満たされる。  $\square$

[(9.9) の導出] 別の導出が、上で、(9.12) 式を含む所に与えられる。

(9.22) により、 $t \leq 0$  と  $t \geq 4$  で  $\theta_4(t) = 0$ 、 $\theta_4(1) = \theta_4(3) = 1/6$ 、 $\theta_4(2) = 2/3$  であるから、 $\Theta_4(w) = \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2} \cos w) e^{-2iw}$  となる。 $\nu = 1$  として、これを (9.30) の右辺に代入して、(9.27) を用いると、(9.9) が得られる。(因数  $e^{iw}$  は入れても入れなくてもよい。)  $\square$

(8.13) により、 $m_0(\frac{w}{2})$  は、

$$m_0\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\phi(w)}{\phi(w/2)} = e^{-i(\nu+1)w/4} \left(\cos \frac{w}{4}\right)^{\nu+1} \left[\frac{P_\nu(w/2)}{P_\nu(w)}\right]^{1/2} \quad (9.31)$$

となり、(8.36-o) により、 $m_1(\frac{w}{2}) = -e^{-iw/2} \overline{m_0(\frac{w}{2} + \pi)}$  となる。

$m_{1\alpha}(\frac{w}{2}) = m_1(\frac{w}{2}) \alpha(\frac{w}{2})$  と置くと (8.28) により

$$\hat{\psi}(w) = m_1\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}(w/2) = m_{1\alpha}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\theta}_{\nu+1}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (9.32)$$

となる。 $m_1(w)$  の Fourier 係数  $d_n/\sqrt{2}$  を計算し、更に  $m_{1\alpha}(w)$  の Fourier 係数  $b_n/\sqrt{2}$  を計算すると、 $\psi(t)$  は、(8.27) あるいは

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sqrt{2} \theta_{\nu+1}(2t-n) \quad (9.33)$$

で計算できる。

(9.31), (8.14), (8.37) を用いて、展開係数  $c_n, d_n$  を求め、 $\psi(t)$  を  $\phi(t)$  から (8.27) を用いて計算する Maxima のプログラムをプログラム 9.3.5 に与える。 $\nu = 3$  にたいして求まる  $\psi(t)$  を図 9.2(c) に示す。プログラム 9.3.6 は、 $b_n/\sqrt{2} = \text{bb}[n]$  を求め、更に (9.33) を用いて  $\psi(t)$  を計算するプログラムである。

[節 8.2 の条件 (iv) が成り立つことの証明] 節 9.2 の場合と同様である。 □

### 本節の計算に関係する数式処理システム Maxima のプログラム

プログラム 9.3.1 この節の以下のプログラムの前に読み込ませる。

```
prog931(a)$
nu:3; load(funcs); load(eigen); iax:20; ndt:200; dt:1/20; cplistp0:[];
dtout():=block([y],plot2d(pser(t),[t,tm,tx]),
  for t:tm step dt while t<=tx do (y:pser(t),print(float(t),y)));
asump():=block([sma:0],for i:-iax thru iax do
  (print(i,a[i]),sma:sma+a[i],print(sma)));
```

上で、最初の  $nu:3$  は  $\nu=3$  とすることを表す。これを  $nu:1$  とすれば、 $\nu=1$  にたいする結果が得られる。 $dtout()$  は、数値のデータと図を出力するためのものである。 $asump()$  は、 $a[i]$  とその和を印刷するものである。下の  $dtlist()$  は、関数  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  の正規直交関係 (8.6-o), (8.30-o), (8.32-o) を確かめるものである。 $mmnt(m)$  は、 $m$  次のモーメントを計算するためのものである。

```
prog931(b)$
dtlist():=block([y,hd,tl,pd,pda,dt:1/ndt],listper:[],
  for t:tm step dt while t<=tx do (y:pser(t),listper:append(listper,[y])),
  listp0:rest(listper,-3*ndt),listp3:rest(listper,3*ndt),
  for i:0 thru 3 do (hd:i*ndt,tl:(3-i)*ndt,
    listpi:rest(listper,hd),listpi:rest(listpi,-tl),
    pd:inprod(listp0,listpi),pda:float(pd/ndt),print("0",i,pda),
    if length(cplistp0)>ndt then (
      pd:inprod(cplistp0,listpi),pda:float(pd/ndt),print("cp0",i,pda),
      pd:inprod(cplistp3,listpi),pda:float(pd/ndt),print("cp3",i,pda))),
  cplistp0:copylist(listp0),cplistp3:copylist(listp3));
prog931(c)$
mmnt(m):=block([sm,sm0,y,dt:1/ndt],sm:0,sm0:0,
  for t:tm step dt while t<=tx do (y:pser(t),sm0:sm0+y,sm:sm+y*t^m),
  print(m,sm*dt,sm0));
```

プログラム 9.3.2  $\theta_{\nu+1}(t)$  を (9.22) を用いて計算する。

```
prog932;(prerequisite:[prog931(a)])$
heavisdu(t):=(if t>0 then t^nu else 0); sg:-1; fac:1/nu!;
for i:0 thru nu+1 do (sg:-sg,sgeo[i]:sg,combnu[i]:combination(nu+1,i));
gth(t):=sum(sgeo[i]*combnu[i]*heavisdu(t-i),i,0,nu+1);
gtha(t):=float(expand(fac*gth(t)));
tm:-1; tx:nu+2; dt:1/20; pser(t):=gtha(t); dtout();
```

プログラム 9.3.3  $\nu=1$ ,  $\nu=3$  にたいして  $a_n$  の数値を、(9.28), (9.27), (9.7) を用いて計算する。最初の 5 行で (9.28) が求められる。そこでは、 $Q_\nu(w)$  を  $Q_\nu(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{2}{w+2\pi k})^{2\nu+2}$  とすると、 $Q_0(w) = \frac{1}{\sin^2(w/2)}$ ,  $\frac{d^2}{dw^2} Q_{\nu-1}(w) = \frac{2\nu(2\nu+1)}{2^2} Q_\nu(w)$ ,  $P_\nu(w) = Q_\nu(w)(\sin \frac{w}{2})^{2\nu+2}$  が成り立つことを使う。

```
prog933(a); (prerequisite:[prog931(a)])$
qs[0](w):=1/(sin(w/2))^2; for i:0 thru 20 do combp[i]:combination(1/2,i);
for n:1 thru 3 do (qc[n](w):=expand(diff(qs[n-1](w),w,2)*2/(n*(2*n+1))),
  qs[n](w):=ratsubst(1-sin(w/2)^2,cos(w/2)^2,qc[n](w)),
```

```

ps[n](w):=expand(qs[n](w)*(sin(w/2))^(2*n+2)),
pz[n](z):=ratsubst(1/2-(1/4)*(z+1/z),sin(w/2)^2,ps[n](w));
prog933(b); (prerequisite:[prog933(a)])$
pnu(z):=pz[nu](z); pnua(z):=float(expand(pnu(z))); dnu(z):=pnua(z)-1;
if nu=1 then (iax:15,iaix:7); if nu=3 then (iax:20,iaix:9);
pprt(z):=1+sum(combp[i]*dnu(z)^i,i,1,20); pprta(z):=float(expand(pprt(z)));
for i:0 thru iaix do (ai[i]:coeff(pprta(z),z,i),if i>0 then ai[-i]:ai[i],
  print(i,ai[i]));
pprtb(z):=sum(ai[i]*z^i,i,-iaix,iaix);
prog933(c); (prerequisite:[prog933(b)])$
dprt(z):=(pprtb(z)/cp[0])-1; dprta(z):=float(expand(dprt(z)));
pirt(z):=sum((-dprta(z))^i,i,1,10)/cp[0]; pirta(z):=float(expand(pirt(z)));
for i:0 thru iax do (a[i]:coeff(pirta(z),z,i),if i>0 then a[-i]:a[i]); asump();

```

プログラム 9.3.4  $\nu = 1, \nu = 3$  にたいして  $\phi(t)$  を (9.24) を用いて求める。

```

prog934(a)$
if nu=1 then (a[0]:1.291675,a[1]:-.174663,a[2]:.035210,a[3]:-.007874,
  a[4]:.001848,a[5]:-.000446,a[6]:.000110,a[7]:-.000027,a[8]:.000007,
  a[9]:-.000002,iax:9);
if nu=3 then (a[0]:1.949926,a[1]:-.652938,a[2]:.251719,a[3]:-.104214,
  a[4]:.044430,a[5]:-.018675,a[6]:.007808,a[7]:-.003121,a[8]:.001246,
  a[9]:-.000471,a[10]:.000177,a[11]:-.000063,a[12]:.000022,a[13]:-.000007,
  a[14]:.000002,a[15]:-.000001,iax:15); for i:1 thru iax do a[-i]:a[i];
prog934(b); (prerequisites:[prog932,prog934(a),prog931(b)])$
splph(t):=sum(a[i]*gtha(t-i),i,-iax,iax); splinephi(t):=float(expand(splph(t)));
tm:-nu-3; tx:nu+7; dt:1/20; pser(t):=splinephi(t); dtout(); dtlist();

```

プログラム 9.3.5 (9.31), (8.27), (8.37) を用いて、展開係数  $c_n, d_n$  を求め、 $\psi(t)$  を  $\phi(t)$  から (8.27) を用いて計算する。 $c_n/\sqrt{2} = cc[n], d_n/\sqrt{2} = dd[n]$  となる。 $\psi(t)$  のモーメントを計算する。

```

prog935(a)$
if nu=1 then (ai[0]:.802896,ai[1]:.104705,ai[2]:-0.006949,ai[3]:.000927,
  ai[4]:-.000155,ai[5]:.000029,ai[6]:-.000006,ai[7]:.000001,iaix:7);
if nu=3 then (ai[0]:.640381,ai[1]:.186727,ai[2]:-0.009064,ai[3]:.002746,
  ai[4]:-.000748,ai[5]:.000176,ai[6]:-.000028,ai[7]:-.000001,ai[8]:.000003,
  ai[9]:-.000001,iaix:9); for i:1 thru iaix do ai[-i]:ai[i];
pprtb(z):=sum(ai[i]*z^i,i,-iaix,iaix);
prog935(b); (prerequisites:[prog933(b) or prog935(a),prog934(a)])$
pirtb2(z):=sum(a[i]*(z*z)^i,i,-iax,iax);
m0(z):=((1+z)/2)^(nu+1)*pprtb(z)*pirtb2(z); m0a(z):=float(expand(m0(z)));
icx:20; icm:nu+1-icx; idm:1-icx; idx:icx-nu;
for i:0 thru icx do (cc[i]:coeff(m0a(z),z,i),ii:(nu+1)-i,
  if ii<0 then cc[ii]:cc[i],print(i,cc[i]));
sg:1; for i:idm thru idx do (sg:-sg,dd[i]:sg*cc[1-i],print(i,dd[i]));
tm:-nu-3; tx:nu+7; dt:1/20;
prog935(c); (prerequisites:[prog934(b),prog935(b),prog931(b),prog931(c)])$
splpsd(t):=2*sum(dd[i]*splinephi(2*t-i),i,idm,idx);
splinepsid(t):=float(expand(splpsd(t)));
pser(t):=splinepsid(t); dtout(); dtlist(); for m:1 thru nu+1 do mmnt(m);

```

次の prog935(d) は、スケーリング関係式 (8.12) の右辺を計算して  $\phi(t)$  を求める計算となる。

```

prog935(d); (prerequisites:[prog934(b),prog935(b)])$
  splphc(t):=2*sum(cc[i]*splinephi(2*t-i),i,icm,icx);
  splinephic(t):=float(expand(splphc(t)));
  pser(t):=splinephic(t); dtout();

```

プログラム 9.3.6  $b_n/\sqrt{2} = bb[n]$  を求め、更に (9.33) を用いて  $\psi(t)$  を計算する。

```

prog936; (prerequisites:[prog932,prog933(b) or prog935(a),prog935(b)])$
  pirtb(z):=sum(a[i]*z^i,i,-iax,iax); m1(z):=sum(dd[i]*z^i,i,idm,idx);
  m1pirt(z):=m1(z)*pirtb(z); m1pirta(z):=float(expand(m1pirt(z)));
  for i:idm thru idx do (bb[i]:=coeff(m1pirta(z),z,i),print(i,bb[i]));
  splpsb(t):=sum(bb[i]*gtha(2*t-i),i,idm,idx);
  splinepsib(t):=float(expand(2*splpsb(t)));
  pser(t):=splinepsib(t); dtout();

```

## 9.4 Shannon のウェーブレット

$\hat{\phi}(w)$  を

$$\hat{\phi}(w) = \chi_{[-\pi,\pi]}(w) \quad (9.34)$$

とする。このとき、

$$\phi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (9.35)$$

となる。この  $\phi(t)$  が直交ウェーブレットの条件 (8.6-o) を満たすことは、(9.34) が (8.16-o) を満たすことから明らかである。

$\hat{\phi}(\frac{w}{2}) \neq 0$  のとき、 $m_0(\frac{w}{2}) = \hat{\phi}(w)/\hat{\phi}(\frac{w}{2})$  であり、 $\hat{\phi}(\frac{w}{2}) = \chi_{[-2\pi,2\pi]}(w)$  であるから

$$m_0(\frac{w}{2}) = \chi_{[-\pi,\pi]}(w), \quad -2\pi \leq w < 2\pi; \quad m_0(w) = \chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(w), \quad -\pi \leq w < \pi$$

となる。 $m_0(w)$  は周期  $2\pi$  をもつから、

$$m_0(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[2\pi k-\pi/2,2\pi k+\pi/2]}(w)$$

である。 $m_1(w)$  を (8.36-o) で定め、(8.28) を用いると

$$m_1(w) = -e^{-iw} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[2\pi k-3\pi/2,2\pi k-\pi/2]}(w), \quad m_1(\frac{w}{2}) = -e^{-iw/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[4\pi k-3\pi,4\pi k-\pi]}(w)$$

$$\hat{\psi}(w) = -e^{-iw/2} \{\chi_{[-2\pi,-\pi]}(w) + \chi_{[\pi,2\pi]}(w)\} = -e^{-iw/2} \{\chi_{[-2\pi,2\pi]}(w) - \chi_{[-\pi,\pi]}(w)\} \quad (9.36)$$

$$\psi(t) = -\frac{1}{\pi(t-\frac{1}{2})} \left\{ \sin\left(2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left(\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) \right\} \quad (9.37)$$

が得られる。図 9.3 に  $\hat{\phi}(w)$ ,  $m_0(\frac{w}{2})$ ,  $|m_1(\frac{w}{2})|$ ,  $|\hat{\psi}(w)|$  を示す。

以上 (9.34)~(9.37) で定まる  $\hat{\phi}(w)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\hat{\psi}(w)$ ,  $\psi(t)$  は、次節の図 9.5 に示されている。

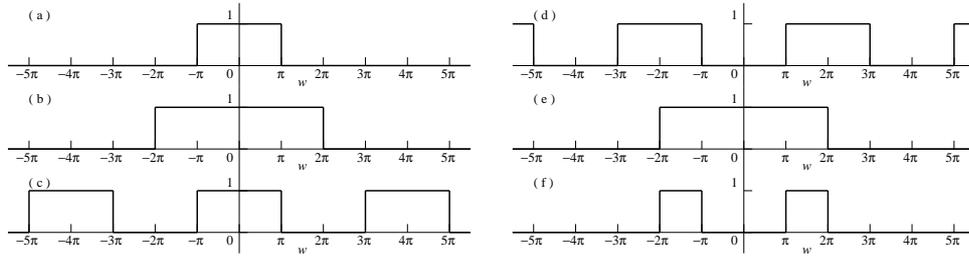


図 9.3: Shannon のウェーブレットの (a)  $\hat{\phi}(w)$ , (b)  $\hat{\phi}(\frac{w}{2})$ , (c)  $m_0(\frac{w}{2}) = \hat{\phi}(w)/\hat{\phi}(\frac{w}{2})$ , (d)  $|m_1(\frac{w}{2})| = m_0(\frac{w}{2} + \pi)$ , (e)  $\hat{\psi}(\frac{w}{2})$ , (f)  $|\hat{\psi}(w)| = |m_1(\frac{w}{2})|\hat{\phi}(\frac{w}{2})$

この場合には、 $m_0(w)$  と  $m_1(w)$  の積は常に 0 であるから、 $-e^{-iw/2}$  という因数なしで  $\phi(t)$  と  $\psi(t-n)$  の直交条件 (8.35-o) が満たされるので  $\hat{\psi}(w)$  として

$$\hat{\psi}(w) = \chi_{[\pi, 2\pi]}(w) + \chi_{[-2\pi, -\pi]}(w) = \chi_{[-2\pi, 2\pi]}(w) - \chi_{[-\pi, \pi]}(w) \quad (9.38)$$

を採用してもよい。この場合には

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi t} \{\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)\} \quad (9.39)$$

となる。

[節 8.2 の条件 (iv) が成り立つことの証明]  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  のとき、 $\hat{f}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  であるから、節 9.1 の議論を  $w$  の空間で行ない、 $w \in \mathbf{R}$  の階段関数の列  $\{\hat{\phi}_m(w)\}$  を作り、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{\phi}_m - \hat{f}\| = \|\phi_m - f\|$  を用いればよい。□

## 9.5 Meyer のウェーブレット

これは、前節の  $\hat{\phi}(w)$  を連続関数にしたものである。 $\hat{\phi}(w)$  を

$$\hat{\phi}(w) = 1, \quad |w| < \frac{2\pi}{3} \quad (9.40)$$

$$\hat{\phi}(w) = 0, \quad |w| > \frac{4\pi}{3} \quad (9.41)$$

とし、途中でも  $\hat{\phi}(w)$  が実数値をとり、 $-\frac{4\pi}{3} \leq w \leq -\frac{2\pi}{3}$  で非減少、 $\frac{2\pi}{3} \leq w \leq \frac{4\pi}{3}$  で非増加であり、 $\phi(t-n)$  の正規直交条件 (8.16-o) が満たされるように

$$\hat{\phi}(w-\pi)^2 + \hat{\phi}(w+\pi)^2 = 1, \quad -\frac{\pi}{3} < w < \frac{\pi}{3} \quad (9.42)$$

が成り立つように選ぶ。 $\phi(t)$  のスケール関係 (8.13) により  $\hat{\phi}(w) = m_0(\frac{w}{2})\hat{\phi}(\frac{w}{2})$  が成り立つ。 $|\frac{w}{2}| \leq \frac{2\pi}{3}$  で  $\hat{\phi}(\frac{w}{2}) = 1$  であり、 $|\frac{w}{2}| \geq \frac{2\pi}{3}$  で  $\hat{\phi}(w) = 0$  であるから、

$$m_0(\frac{w}{2}) = \begin{cases} 1, & |\frac{w}{2}| \leq \frac{\pi}{3} \\ \hat{\phi}(w), & \frac{\pi}{3} \leq |\frac{w}{2}| \leq \frac{2\pi}{3} \\ 0, & \frac{2\pi}{3} < |\frac{w}{2}| \leq \pi \end{cases} \quad (9.43)$$

となる。 $m_0(w)$  は周期  $2\pi$  をもつので、これで定まることになる。

$$|\frac{w}{2}| \leq \frac{4\pi}{3} \text{ で}$$

$$m_1(\frac{w}{2}) = -e^{-iw/2} \overline{m_0(\frac{w}{2} + \pi)} = \begin{cases} 0, & |\frac{w}{2}| < \frac{\pi}{3} \\ -e^{-iw/2} \hat{\phi}(w + 2\pi), & -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{w}{2} \leq -\frac{\pi}{3} \\ -e^{-iw/2} \hat{\phi}(w - 2\pi), & \frac{\pi}{3} \leq \frac{w}{2} \leq \frac{2\pi}{3} \\ -e^{-iw/2}, & \frac{2\pi}{3} \leq |\frac{w}{2}| \leq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

となる。これを使い、

$$\hat{\psi}(w) = m_1(\frac{w}{2}) \hat{\phi}(\frac{w}{2}) = \begin{cases} 0, & |\frac{w}{2}| < \frac{\pi}{3} \\ -e^{-iw/2} \hat{\phi}(w + 2\pi), & -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{w}{2} \leq -\frac{\pi}{3} \\ -e^{-iw/2} \hat{\phi}(w - 2\pi), & \frac{\pi}{3} \leq \frac{w}{2} \leq \frac{2\pi}{3} \\ -e^{-iw/2} \hat{\phi}(\frac{w}{2}), & \frac{2\pi}{3} \leq |\frac{w}{2}| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0, & |\frac{w}{2}| > \frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (9.44)$$

を得る。図 9.4 に  $\hat{\phi}(w)^2$ ,  $m_0(\frac{w}{2})^2$ ,  $|m_1(\frac{w}{2})^2|$ ,  $|\hat{\psi}(w)^2|$  を示す。

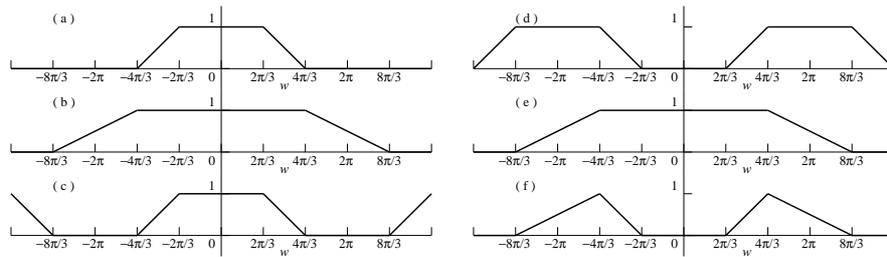


図 9.4: Meyer のウェーブレットの (a)  $\hat{\phi}(w)^2$ , (b)  $\hat{\phi}(\frac{w}{2})^2$ , (c)  $m_0(\frac{w}{2})^2 = \hat{\phi}(w)^2 / \hat{\phi}(\frac{w}{2})^2$ , (d)  $|m_1(\frac{w}{2})^2| = m_0(\frac{w}{2} + \pi)^2$ , (e)  $\hat{\phi}(\frac{w}{2})^2$ , (f)  $|\hat{\psi}(w)^2| = |m_1(\frac{w}{2})^2| \hat{\phi}(\frac{w}{2})^2$

$\frac{2\pi}{3} \leq |w| \leq \frac{4\pi}{3}$  での  $\hat{\phi}(w)$  の値を、それが節 6.4 の  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  に属するように選ぶと、(9.44) により  $\hat{\psi}(w)$  も  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  に属する。このとき、定理 6.12 (節 6.4) により  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  も  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  に属する  $|t|$  大で急速に減衰する関数になる。これは節 9.4 の場合と大きく異なるところである。

**例 9.5.1** 図 9.4 では、 $\frac{2\pi}{3} \leq |w| \leq \frac{4\pi}{3}$  での  $\hat{\phi}(w)$  の値を、 $\hat{\phi}(w) = \sqrt{2 - \frac{3}{2\pi}|w|}$  とした。これは、 $\hat{\phi}(w) = \sin[\frac{\pi}{2}(2 - \frac{3}{2\pi}|w|)] = \sin(\frac{3}{4}|w|)$  あるいは

$$\hat{\phi}(w) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{3}{2\pi}|w|\right)\right]\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2\left(\frac{3}{4}w\right)\right) \quad (9.45)$$

とすれば、 $\hat{\phi}(w) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$  あるいは  $\hat{\phi}(w) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$  となる。

図 9.5 に、 $\hat{\phi}(w)$  として、Shannon の (9.34), 例 9.5.1 の最初のもの (9.45) を使用した曲線を示す。

[節 8.2 の条件 (iv) が成り立つことの証明] 節 9.4 と同様に  $w$  を変数として、節 9.2 における証明の後半と同様の証明を行なう。 □

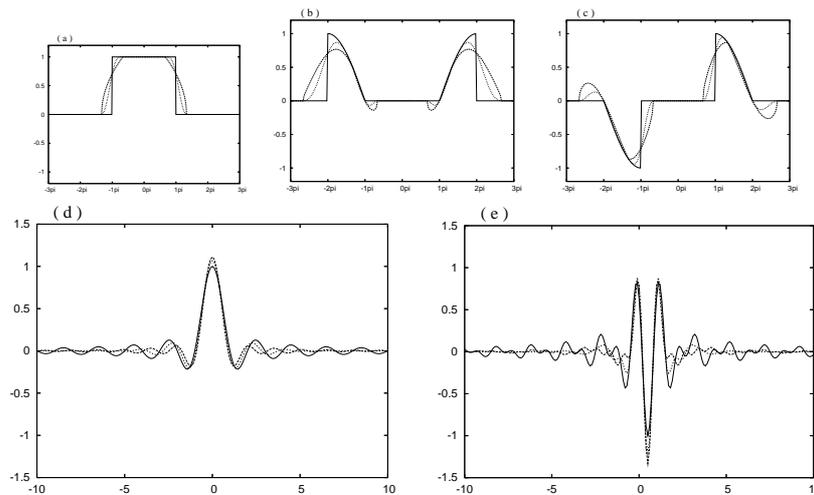


図 9.5: Shannon のウェーブレットと Meyer のウェーブレットの (d) スケーリング関数  $\phi(t)$ 、(a) その Fourier 変換  $\hat{\phi}(w)$ 、(e) マザーウェーブレット関数  $\psi(t)$  と、(b), (c) その Fourier 変換  $\hat{\psi}(w)$  の実部と虚部。(a)~(c) で角が不連続に変化するもの、(c), (d) で最もゆっくり減衰するものが Shannon のウェーブレットである。他の 2 本の曲線は  $\hat{\phi}(w)$  として、例 9.5.1 の最初のもの (9.45) を使用したものである。(a)~(c) で角で最もゆっくり変化するもの、(c), (d) で最も速く減衰するものが最後の選択の対応する。

### 本節の計算に関する数式処理システム Maxima のプログラム

プログラム 9.5.1 図 9.5 を求める計算での定数。(a) は Shannon の場合。

```
prog951(a)$
  meyer:0;hf:1/2;pihf:%pi/2;
prog951(b)$
  meyer:1; meyer:2; meyer:3; hf:1/2;pihf:%pi/2;
```

プログラム 9.5.2 図 9.5 を求める計算での副プログラム。

```
prog952(a); prerequisite:[prog951(a) or prog951(b)]$
  sbhphi2(aw2):=block([hp], if meyer=1 then hp:sqrt(aw2)
    else (hp:sin(aw2*pihf), if meyer=3 then hp:sin(pihf*hp*hp)), hp:ev(hp, numer));
  sbhphi(aw2):=block([hp], if aw2<0 then hp:0 else (
    if meyer=0 or aw2>=1 then hp:1 else hp:sbhphi2(aw2)));
  hpsi(w):=block([aw,aw2,hp], aw:abs(w),
    if meyer=0 then (aw2:nj1-aw, if nj>0 and aw2>0 then aw2:aw-nj)
    else (aw2:hf*(1-(aw-nj1)/lj1), if nj>0 and aw2>1 then aw2:hf*(1+(aw-nj)/lj)),
    ph:sbhphi(aw2));
  phit(stg,t):=block([sm,m], sm:sum(aphc[m]*cos(aphw[m]*t),m,1,mwx),
    if stg=4 then sm:sm-sum(aphs[m]*sin(aphw[m]*t),m,1,mwx),
    sm:ev(sm*dw/(2*pi), numer));
prog952(b); prerequisite:[prog952(a)]$
  fntolist(stg):=block([m,w,dx,ph],dx:ax/N,w:-ax-2*dx,
    for m:1 thru 2*N+3 do (w:ev(w+dx,numer),
    if stg=2 or stg=4 then ph:phit(stg,w) else (ph:hpsi(w),
```

```

    if stg=3 then (aphs[m]:sin(w/2)*ph,ph:-cos(w/2)*ph),
    aphw[m]:w,aphc[m]:ph),
  print(w,ph)),
if stg=3 then (
  for m:1 thru 2*N+3 do (w:aphw[m],ph:aphs[m],print(w,ph)));

```

プログラム 9.5.3 図 9.5 を求める計算での主プログラム。得られた結果に gnuplot を用いる。

```

prog953;prerequisite:[prog952(b)]$
N:100;Nw:N;mx:2*Nw+3; nj:0;nj1:%pi;l1j1:%pi/3; ax:nj1+l1j1;dw:ax/N; fntolist(1);
atx:10;N:100; ax:atx;fntolist(2);plot2d(phit(2,t),[t,-atx,atx]);
N:100;Nw:N;mx:2*Nw+3; nj:%pi;nj1:2*nj;l1j1:%pi/3;l1j1:2*l1j1; ax:nj1+l1j1;dw:ax/N;
fntolist(3);
atx:10;N:100; ax:atx;fntolist(4);plot2d(phit(4,t),[t,-atx,atx]);

```

## 9.6 マザーウェーブレットのモーメント

この節では  $r \in \mathbf{Z}_+$  とする。

節 6.4 で、 $\theta(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $\theta(t) \in C^r(\mathbf{R})$  を満たす急速減衰関数  $\theta(t)$  の集合  $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  を導入した。さらに、その Fourier 変換  $\hat{\theta}(w)$  は  $C^\infty(\mathbf{R})$  に属し、関数の集合  $\hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  に属することを示した。 $r = \infty$  のときには、 $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  も  $\hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  も  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  となることも示した。

**例 9.6.1** 節 9.5 の Meyer のウェーブレットで、例 9.5.1 のように  $\hat{\phi}(w)$  を  $C^r$  の関数にすると、 $\hat{\phi}(w)$ ,  $\hat{\psi}(w)$  は  $\hat{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R})$  に属し、 $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  は  $\mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  の関数である。したがって、 $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  は  $C^\infty(\mathbf{R})$  の関数で、 $|t|$  大で  $|t|^{-r}$  で減衰する。

$k \in \mathbf{Z}_+$  にたいし、 $\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt$  を  $\psi(t)$  の  $k$  次のモーメントという。

**定理 9.1** 双直交ウェーブレットのマザーウェーブレット  $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  にたいして、 $\psi(t)$  の  $r$  次までのモーメントがすべて有限値をとり、 $\tilde{\psi}(t) \in C^r(\mathbf{R})$  ならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r \quad (9.46)$$

$$\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r \quad (9.47)$$

が成り立つ。したがって、直交ウェーブレットの場合には、 $\psi(t) \in \mathcal{S}^r(\mathbf{R})$  ならば (9.46), (9.47) が成り立つ。

[証明の準備]  $m \in \mathbf{N}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $N = n/2^m$ ,  $j \in \mathbf{N}$ ,  $j > m > 0$  とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \overline{\tilde{\psi}(2^{-j}t + N)} dt = 0 \quad (9.48)$$

が成り立つことを示す。 $t' = t + N2^j$  とおくと、この式の左辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t' - N2^j) \overline{\tilde{\psi}(2^{-j}t')} dt'$$

となる。 $N2^j = n2^{j-m}$  は整数であるから、二つの関数は  $W_0$  と  $\tilde{W}_{-j}$  に属し、この積分は 0 である。□

[(9.46) の導出] (9.48) で  $\tilde{\psi}(N + 2^{-j}t)$  を  $N$  の周りで Taylor 展開すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \left\{ \overline{\tilde{\psi}(N)} + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} \overline{\tilde{\psi}^{(k)}(N)} 2^{-jk} t^k + \frac{1}{r!} \overline{\tilde{\psi}^{(r)}(N + \theta(t)2^{-j}t)} 2^{-jr} t^r \right\} dt = 0 \quad (9.49)$$

と書ける。ここで、すべての  $t$  にたいし  $\theta(t) \in [0, 1]$  である。(9.49) を用いて、(9.46) を数学的帰納法により証明する。 $N$  を  $\psi(N) \neq 0$  となるように選び、 $j \rightarrow \infty$  とすると、 $k = 0$  で (9.46) が成り立つことが示される。 $0 < l \leq r$  のとき  $k = 0, 1, \dots, l-1$  について (9.46) が成り立つとすると、(9.49) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \left\{ \sum_{k=l}^{r-1} \frac{1}{k!} \overline{\tilde{\psi}^{(k)}(N)} 2^{-jk} t^k + \frac{1}{r!} \overline{\tilde{\psi}^{(r)}(N + \theta(t)2^{-j}t)} 2^{-jr} t^r \right\} dt = 0$$

となる。 $N$  として  $\tilde{\psi}^{(l)}(N) \neq 0$  の点をととり、 $2^{jl}$  を掛けて、 $j \rightarrow \infty$  の極限をとると、 $k = l$  にたいする (9.46) を得る。□

[(9.47) の導出]

$$\hat{\psi}^{(k)}(w) = \frac{d^k}{dw^k} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^k \psi(t) e^{-iwt} dt$$

で  $w$  を 0 として (9.46) を用いればよい。□

**定理 9.2** スケーリング関数  $\phi(t)$  の  $r$  次までのモーメントがすべて有限であり、マザーウェーブレット  $\psi(t)$  の  $r$  次までのモーメントがすべて 0 であるとき、 $k = 0, 1, 2, \dots, r$  にたいし、 $m_0^{(k)}(0) = (-i)^k \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n n^k$  は有限であり、

$$m_1^{(k)}(0) = (-i)^k \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n n^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r \quad (9.50)$$

が成り立つ。双直交ウェーブレットの場合には、さらに

$$\tilde{m}_0^{(k)}(\pi) = (-i)^k \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \tilde{c}_n n^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r \quad (9.51)$$

が成り立つ。したがって、直交ウェーブレットの場合には、 $k = 0, 1, 2, \dots, r$  にたいし  $m_0^{(k)}(\pi) = \tilde{m}_0^{(k)}(\pi) = 0$  が成り立つ。

[証明] (8.13) は  $\hat{\phi}(w) = m_0(\frac{w}{2}) \hat{\phi}(\frac{w}{2})$  である。これを  $r$  回まで微分した式を書き、 $w$  を 0 とし、 $m_0^{(k)}(0)$  が有限であることを確かめる。そのさい、 $\hat{\phi}(w)$  の  $r$  回まで微分は、定理 6.4 により  $\phi(t)$  の  $r$  次までのモーメントで表されることを用いる。

(8.28) は  $\hat{\psi}(w) = m_1(\frac{w}{2}) \hat{\phi}(\frac{w}{2})$  である。これを  $r$  回まで微分した式を書く。その式で  $w$  を 0 とし、(9.47) と  $\hat{\phi}(0) \neq 0$  を用いることにより、 $m_1^{(k)}(0) = 0$  が示される。双直交ウェーブレットの場合には、(8.19) により  $\hat{\phi}(0) \neq 0$  であり、直交ウェーブレットの場合には、(8.22) により  $\hat{\phi}(0) = 1$  である。

双直交ウェーブレットの場合には、(8.36) を

$$\tilde{m}_0(w + \pi) = -e^{-iw} \overline{m_1(w)}$$

と書く。この両辺を  $r$  回まで微分した式を書き、 $w$  を 0 とし、 $m_1^{(k)}(0) = 0$  を用いることにより、 $\tilde{m}_0^{(k)}(\pi) = 0$  が示される。□

# 10

## ウェーブレットによる展開と補間公式

### 10.1 ウェーブレットによる展開

$\phi(t)$  がスケーリング関数であり、 $\psi(t)$  がマザーウェーブレットであるとする。このとき、 $m \in \mathbf{Z}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  にたいし  $\phi_{m,n}(t)$  と  $\psi_{m,n}(t)$  を

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \phi(2^m t - n), \quad \psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n) \quad (10.1)$$

で定義する。定理 8.1 (節 8.2)、定理 8.3 の系 (節 8.3) により、 $\{\phi_{m,n}(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  と  $\{\psi_{m,n}(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  は、それぞれ空間  $V_m, W_m$  を張り、

$$V_{m+1} = V_m \oplus W_m \quad (10.2)$$

が成り立つ。

$\psi_{m,n}(t)$  が直交ウェーブレットでない場合には、双直交ウェーブレットを考える。そのとき、もう一つのスケーリング関数  $\tilde{\phi}(t)$  ともう一つのマザーウェーブレット  $\tilde{\psi}(t)$  を、 $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  と  $\{\tilde{\phi}(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  が  $V_0$  と  $\tilde{V}_0$  の双直交基底となり、 $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  と  $\{\tilde{\psi}(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  が  $W_0$  と  $\tilde{W}_0$  の双直交基底となるようにする。このとき、 $\tilde{\phi}_{m,n}(t)$  と  $\tilde{\psi}_{m,n}(t)$  を、(10.1) で  $\phi$  と  $\psi$  をそれぞれ  $\tilde{\phi}$  と  $\tilde{\psi}$  で置き換えた式で定義すると、 $\{\phi_{m,n}(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  と  $\{\tilde{\phi}_{m,n}(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  は空間  $V_m$  と  $\tilde{V}_m$  の双直交基底となり、 $\{\psi_{m,n}(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  と  $\{\tilde{\psi}_{m,n}(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  は空間  $W_m$  と  $\tilde{W}_m$  の双直交基底となる。

以下で、直交ウェーブレットの場合には、 $\tilde{\phi}_{m,n}(t) = \phi_{m,n}(t)$ ,  $\tilde{\psi}_{m,n}(t) = \psi_{m,n}(t)$  とする。

$f(t) \in V_M$  とすると、(8.7), (10.2) により、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(M)} \phi_{M,n}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(M-1)} \phi_{M-1,n}(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(M-1)} \psi_{M-1,n}(t) \quad (10.3)$$

となり、これを繰り返すと、 $M_0 < M$  のとき、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(M_0)} \phi_{M_0,n}(t) + \sum_{m=M_0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(m)} \psi_{m,n}(t) \quad (10.4)$$

となる。ここで  $M_0 \rightarrow -\infty$  とすると、

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(m)} \psi_{m,n}(t) \quad (10.5)$$

となる。ここで、係数  $a_n^{(m)}$ ,  $b_n^{(m)}$  は

$$a_n^{(m)} = (f, \tilde{\phi}_{m,n}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\tilde{\phi}_{m,n}(t)} dt, \quad b_n^{(m)} = (f, \tilde{\psi}_{m,n}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\tilde{\psi}_{m,n}(t)} dt \quad (10.6)$$

で与えられる。

$M \rightarrow \infty$  とすると、(10.4), (10.5) は次の定理を与える。

**定理 10.1**  $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  は次のように表される。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(M_0)} \phi_{M_0,n}(t) + \sum_{m=M_0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(m)} \psi_{m,n}(t) \quad (10.7)$$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(m)} \psi_{m,n}(t) \quad (10.8)$$

ここで、係数  $a_n^{(m)}$ ,  $b_n^{(m)}$  は (10.6) で与えられる。

**定理 10.2** 係数  $a_n^{(m)}$ ,  $b_n^{(m)}$  は次の漸化式を満たす。

$$a_n^{(m)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(m-1)} c_{n-2k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{(m-1)} d_{n-2k} \quad (10.9)$$

$$a_k^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(m+1)} \bar{c}_{n-2k}, \quad b_k^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(m+1)} \bar{d}_{n-2k} \quad (10.10)$$

直交ウェーブレットの場合には、

$$d_{n-2k} = \tilde{d}_{n-2k} = (-1)^n \bar{c}_{1-n+2k}, \quad \tilde{c}_{n-2k} = c_{n-2k} \quad (10.11)$$

である。

[(10.9) の導出] (10.3) の右辺にスケール関係 (8.12), (8.27) を使う。(10.11) は、係数の関係 (8.37) による。□

[(10.10) の導出] (10.6) の両方の式の右辺にスケール関係 (8.12), (8.27) に対応する式を用いて、

$$\begin{aligned} a_k^{(m)} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{m/2} \overline{\tilde{\phi}(2^m t - k)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{m/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n \sqrt{2} \overline{\tilde{\phi}(2^{m+1} t - 2k - n)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n a_{2k+n}^{(m+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(m+1)} \bar{c}_{n-2k} \end{aligned} \quad (10.12)$$

$$\begin{aligned} b_k^{(m)} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{m/2} \overline{\tilde{\psi}(2^m t - k)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{d}_n a_{2k+n}^{(m+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(m+1)} \bar{d}_{n-2k} \end{aligned}$$

を得る。□

$f(t) \in V_M$  とする。このとき (10.2) により、

$$V_M = V_{M-1} \oplus W_{M-1} = V_{M-2} \oplus W_{M-2} \oplus W_{M-1} = \cdots \quad (10.13)$$

が成り立つので、 $f(t)$  には  $\{\phi_{M,n}(t)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  による表式、 $\{\phi_{M-1,n}(t), \psi_{M-1,n}(t)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  による表式、 $\{\phi_{M-2,n}(t), \psi_{M-2,n}(t), \psi_{M-1,n}(t)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  による表式、... が (10.3), (10.4) の形で存在する。(10.3) の第一式の  $\{\phi_{M,n}(t)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  による表式から、(10.3) の右辺の表式、...、への次々の表式における係数は (10.10) を用いて計算することができる。(10.10) は分解公式 (decomposition formula) と呼ばれる。この逆のプロセスを行うときには (10.9) が用いられる。(10.9) は再構成アルゴリズム (reconstruction algorithm) と呼ばれる。

### Haar のウェーブレット (節 9.1) の場合

この場合には、 $c_0 = c_1 = d_0 = 1/\sqrt{2}$ ,  $d_1 = -1/\sqrt{2}$  であり、それ以外の  $c_k, d_k$  は 0 であるから、再構成アルゴリズム (10.9) は

$$a_{2n}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_n^{(m-1)} + b_n^{(m-1)}), \quad a_{2n+1}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_n^{(m-1)} - b_n^{(m-1)}) \quad (10.14)$$

となり、分解公式 (10.10) は

$$a_n^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{2n}^{(m+1)} + a_{2n+1}^{(m+1)}), \quad b_n^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{2n}^{(m+1)} - a_{2n+1}^{(m+1)}) \quad (10.15)$$

となる。

## 10.2 補間アルゴリズム

関数  $f(t)$  が  $V_M$  に属するとする。このとき、 $m \geq M$  ならば (8.5) により  $f(t) \in V_m$  であるから、定理 8.1 により  $f(t)$  の展開係数を  $a_n^{(m)}$  として、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(m)} 2^{m/2} \phi(2^m t - n), \quad m \geq M \quad (10.16)$$

が成り立つ。 $f(t)$  の展開係数は漸化式

$$a_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(m)} c_{n-2k}, \quad m \geq M \quad (10.17)$$

を満たす。

[証明] (10.16) の右辺に、 $\phi(t)$  にたいするスケール関係 (8.12) を使うと

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(m)} 2^{m/2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \sqrt{2} \phi(2^{m+1} t - 2k - l)$$

を得る。(10.16) で  $m$  を  $m+1$  で置き換えた式と、この式を比べると (10.17) が得られる。□

[別の証明] 今、

$$V_m = V_M \oplus W_M \oplus W_{M+1} \oplus \cdots \oplus W_{m-1} \quad (10.18)$$

であるから、 $f(t) \in V_M$  を  $\{\phi_{M,n}(t), \psi_{M,n}(t), \psi_{M+1,n}(t), \dots, \psi_{m-1,n}(t)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の一次結合で表すとき、 $\psi_{M,n}(t), \psi_{M+1,n}(t), \dots, \psi_{m-1,n}(t)$  の係数はすべて 0 である。(10.17) は (10.9) で  $m$  を  $m+1$  とし、 $b_k^{(m)} = 0$  とした式が成り立つ。□

$f(t) \in V_M$  のとき、(10.16) により

$$f(t/2^m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(m)} 2^{m/2} \phi(t-n), \quad m \geq M \quad (10.19)$$

が成り立つ。 $\{a_k^{(m)}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  が既知ならば、この式により  $t$  が  $1/2^m$  の倍数のときの  $f(t)$  の値は、整数の  $t$  にたいする  $\phi(t)$  から計算できる。

例 1.  $\phi(t)$

$f(t) = \phi(t)$  とすると、 $\phi(t) \in V_0$  であるから、展開係数を  $c_k^{(m)}$  として、(10.16) は

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} 2^{m/2} \phi(2^m t - k), \quad m \geq 0 \quad (10.20)$$

となる。 $m=0$  のとき、この式は

$$c_k^{(0)} = \delta_{k0} \quad (10.21)$$

を与える。(8.12) により、 $c_k^{(1)} = c_k$  である。(10.17), (10.19) は

$$c_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} c_{n-2k}, \quad m \geq 0 \quad (10.22)$$

$$\phi(t/2^m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} 2^{m/2} \phi(t-k), \quad m \geq 0 \quad (10.23)$$

となる。(10.23) により、 $t$  が整数  $m > 0$  にたいする  $1/2^m$  の倍数のときの  $\phi(t)$  の値は、整数の  $t$  にたいする  $\phi(t)$  から計算できる。

定理 10.3 スケーリング関数  $\phi(t)$  が区分的に連続であるとき、整数  $m \geq 0$  にたいして

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^m} \phi(j/2^m) = \hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt \quad (10.24)$$

が成り立つ。直交ウェーブレットのときには、(8.22) により  $\hat{\phi}(0) = 1$  である。

[証明] (8.20) により  $m_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = 1$  が成り立つ。[この式は、直交ウェーブレットのときは、(8.23) である。] (10.22) を  $n$  について加え、これを用いると  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} = 2^{m/2}$  を得る。次に、(10.23) で、 $j$  を整数とし、 $t = j$  として、 $j$  について加え、今求めた等式  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} = 2^{m/2}$  を用いて  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^m} \phi(j/2^m) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(j)$  を得る。 $\phi(t)$  が区分的に連続関数のとき、 $m$  を  $\infty$  にすると、左辺は  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \hat{\phi}(0)$  となる。□

$f(t) \in V^M$  のときは、漸化式 (10.17) を一般化した式

$$a_n^{(M+m)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(M)} c_{n-2^m k}^{(m)}, \quad m \geq 0 \quad (10.25)$$

が成り立つ。

[(10.25) の導出]  $f(t) \in V^M$  であるから、(10.3) は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(M)} 2^{M/2} \phi(2^M t - n)$$

となる。この式の右辺に (10.20) を代入すると

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(M)} 2^{M/2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{(m)} 2^{m/2} \phi(2^{M+m} t - 2^m j - k)$$

となる。(10.16) で  $m$  を  $M+m$  とした式とこれを比べて (10.25) を得る。□

### 例 2. $\psi(t)$

$f(t) = \psi(t)$  の場合には、 $\psi(t) \in V_1$  であるから、このときの展開係数を  $\{d_k^{(m)}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  とすると、(10.16) は

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(m)} 2^{m/2} \phi(2^m t - k), \quad m \geq 1 \quad (10.26)$$

であり、 $d_n^{(m)}$  にたいする漸化式は

$$d_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(m)} c_{n-2k}^{(m)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k c_{n-2^m k}^{(m)}, \quad m \geq 1 \quad (10.27)$$

となる。(8.27) により、 $d_k^{(1)} = d_k$  である。(10.19) は

$$\psi(t/2^m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(m)} 2^{m/2} \phi(t - k), \quad m \geq 1 \quad (10.28)$$

となる。

双直交ウェーブレットの場合には、(8.37) を用いると、

$$d_k^{(1)} = d_k = (-1)^k \bar{c}_{1-k} \quad (10.29)$$

が成り立つ。

[(10.27) の導出] 第一の等式は (10.17) による。第二の等式は (10.25) と  $d_k^{(1)} = d_k$  による。□

**定理 10.4** 定理 9.2 (節 9.6) の条件が成り立つ。すなわち、スケーリング関数  $\phi(t)$  の  $r$  次までのモーメントがすべて有限であり、マザーウェーブレット  $\psi(t)$  の  $r$  次までのモーメントがすべて 0 であるとする。さらに、 $x \in \mathbf{R}$ 、整数  $m \geq 0$ 、 $l = 0, 1, 2, \dots, r$  にたいし、 $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(j+x)(j+x)^l$  がすべて有限であるとする。このとき、 $x \in \mathbf{R}$ 、整数  $m \geq 1$  にたいして

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi((j+x)/2^m)(j+x)^l = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, r \quad (10.30)$$

が成り立つ。

**補助定理 10.1** 定理 9.2 の条件が成り立つとき、 $m \geq 1, l = 0, 1, 2, \dots, r$  にたいして  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(m)} k^l = 0$  が成り立つ。

[証明] 定理 9.2 (節 9.6) により、 $l = 0, 1, 2, \dots, r$  にたいして  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k k^l$  は有限であり、 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(1)} k^l = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k k^l = 0$  である。(10.27) の第一の等式の両辺に  $n^l = ((n-2k)+2k)^l$  を掛け、 $n$  について加えた式を用いて、求める式を数学的帰納法で証明される。□

[定理 10.4 の証明] (10.28) の両辺に  $(j+x)^l = ((j+x-k)+k)^l$  を掛け、整数  $j$  について加えて、補助定理 10.1 を用いて (10.30) を得る。□

この節では、(10.29) 以外では直交ウェーブレットであるということはいらされていない。

### 10.3 補間公式

$f(t) \in V_0$  とすると、定理 8.1 (節 8.2) により、 $f(t)$  はスケーリング関数  $\phi(t)$  により

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(t-n) \quad (10.31)$$

と表され、この式の Fourier 変換は

$$\hat{f}(w) = \alpha(w) \hat{\phi}(w) \quad (10.32)$$

$$\alpha(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-inw} \quad (10.33)$$

となる。

$k \in \mathbf{Z}$  のときの  $f(k)$  を Fourier 係数とする Fourier 級数を  $F(w)$  とする。すなわち、

$$F(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-ikw} \quad (10.34)$$

とする。このとき、(10.31) を用いると

$$F(w) = \alpha(w) \Phi(w) \quad (10.35)$$

を得る。ここで

$$\Phi(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{-ikw} \quad (10.36)$$

である。

$\{f(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$  と  $\phi(t)$  が与えられると、(10.35) により  $\alpha(w)$  したがって  $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  が定まり、 $t \in \mathbf{R}$  での  $f(t)$  が (10.31) を用いて計算できる。 $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  が  $V_0$  の Riesz 基底のときには  $f(t) \in V_0$  にたいし  $\{a_k\} \in l^2$  となる。

$\phi(t), f(t)$  がコンパクトな台をもつときには、 $\{\phi(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}, \{f(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  もコンパクトな台をもち、(10.31) を満たす  $\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  もコンパクトな台をもつ。 $\phi(k), f(k)$  が、それぞれ  $k \in [A, A+K], k \in [B, B+N]$  のとき 0 でないとする、 $a_k$  は  $k \in [B-A, B+N-A-K]$  で 0 でない。 $\Phi_z(z), F_z(z), \alpha_z(z)$  を

$$\Phi(w) = e^{-iAw} \Phi_z(e^{-iw}), \quad F(w) = e^{-iBw} F_z(e^{-iw}), \quad \alpha(w) = e^{-i(B-A)w} \alpha_z(e^{-iw})$$

とすると、(10.35) は

$$F_z(z) = \alpha_z(z) \Phi_z(z)$$

となる。 $\Phi_z(z), F_z(z), \alpha_z(z)$  は、それぞれ  $K$  次、 $B$  次、 $B-K$  次の多項式である。この場合、 $F_z(z)$  は  $\Phi_z(z)$  を因数としてもたなければならない。

今の条件の下で、 $\{f(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}, \{\phi(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  を与えたときの  $\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  の計算は、次のように行うことができる。(10.31) を

$$f(B+n) = \sum_{l=0}^K a_{B+n-A-l} \phi(A+l)$$

と書き、これから

$$a_{B-A+n} \phi(A) = f(B+n) - \sum_{l=1}^K a_{B+n-A-l} \phi(A+l) \quad (10.37)$$

を得る。この式は  $n-l < 0$  にたいし  $a_{B-A+n-l} = 0$  として、 $n=0, n=1$  にたいして

$$a_{B-A} \phi(A) = f(B), \quad a_{B-A+1} \phi(A) = f(B+1) - a_{B-A} \phi(A+1)$$

となる。これは  $a_{B-A}, a_{B-A+1}, \dots, a_{B-A+N-K}$  を、(10.37) を順次使って求めることができることを示す。

$A=B=0, K=1$  のときには

$$\alpha_z(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = \frac{1}{\Phi(z)} F_z(z) = \frac{1}{\phi(0) + \phi(1)z} F_z(z) = \frac{1}{\phi(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{\phi(1)}{\phi(0)} z \right)^k \sum_{l=0}^N f(l) z^l$$

から

$$a_n = \frac{1}{\phi(0)} \sum_{\substack{k=0 \\ n-k \leq N}}^n \left( -\frac{\phi(1)}{\phi(0)} \right)^k f(n-k)$$

となる。この式は  $|\phi(1)/\phi(0)| < 1$  に使われる。 $|\phi(1)/\phi(0)| > 1$  のときには、誤差が増大するので使えない。そのときには  $a_{N-1}$  から逆の順に決められることになる。 $f(t)$  が  $V_0$  に含まれ、 $f(n)$  が有限列の場合には  $a_n$  は有限列に求まる。

$m \in \mathbf{N}$  にたいし  $f(t) \in V_m$  のときには、 $g(t)$  を  $g(t) = f(\frac{t}{2^m})$  で定義すると、 $g(t) \in V_0$  となる。したがって、この節の以上の議論で、 $f(t), \hat{f}(w)$  を  $g(t), \hat{g}(w)$  で置き換えた式が成り立つ。

### Shannon のサンプリング定理 (sampling theorem)

$w \notin [-\pi, \pi]$  のとき  $\hat{f}(w) = 0$  ならば、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \phi(t-n) \quad (10.38)$$

が成り立つ。ここで

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt} dw = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (10.39)$$

である。

[証明] 今の場合、Fourier 逆変換の公式は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w)e^{iwt} dw \quad (10.40)$$

となる。これは  $t$  が整数の  $f(t)$  が、 $w \in (-\pi, \pi]$  の関数  $\hat{f}(w)$  の Fourier 係数であることを示す。したがって、

$$\hat{f}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-inw} = F(w), \quad -\pi < w < \pi \quad (10.41)$$

が成り立つ。 $\phi(t)$  が節 9.4 の Shannon のウェーブレットであるとする、 $\hat{\phi}(w) = \chi_{[-\pi, \pi]}(w)$  であるから、(10.32) により  $F(w) = \alpha(w)$ 、したがって、 $a_n = f(n)$  を得る。したがって、(10.31) は (10.38) となる。(10.39) は (9.35) である。□

ここで  $\hat{f}(w)$  が  $w \notin [-\pi\nu, \pi\nu]$  で 0 の場合を考える。この  $\nu$  は Nyquist の周波数と呼ばれる。このときには、 $g(t) = f(t/\nu)$  とおくと、その Fourier 変換は  $\hat{g}(w) = \nu\hat{f}(\nu w)$  となるので、 $\hat{g}(w)$  が  $w \notin [-\pi, \pi]$  で 0 となる。このとき、(10.38) は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\nu)\phi(\nu t - n) \quad (10.42)$$

となる。

[(10.42) の導出]  $g(t)$  にたいし、(10.38) は

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\phi(t - n)$$

と書かれるので、

$$f(t/\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\nu)\phi(t - n)$$

となる。 $t/\nu$  を  $t$  とすると (10.42) となる。□

時刻  $t \in \mathbf{R}$  の関数  $f(t)$  から時間間隔  $\tau \in \mathbf{R}$  で取られた数列  $\{f(n\tau)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  は、時系列 (time series) と呼ばれる。この数列から、 $t \in \mathbf{R}$  の関数  $f^\dagger(t)$  を

$$f^\dagger(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau)\phi(t/\tau - n) \quad (10.43)$$

とするとき、その Fourier 変換  $\hat{f}^\dagger(w)$  は  $w \in [-\pi/\tau, \pi/\tau]$  で  $\hat{f}^\dagger(w) = \hat{f}(w)$ 、それ以外で  $\hat{f}^\dagger(w) = 0$  となる。

有限時間  $t \in [0, T)$  の場合には、 $N = \lceil T/\tau \rceil$  として、時系列は  $\{f(n\tau)\}_{n=0}^{N-1}$  となり、(10.43) での和は  $\sum_{n=0}^{N-1}$  となる。ここで、 $x \in \mathbf{R}$  にたいして  $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  を越えない最大の整数を表す。

**定理 10.5**  $\hat{\phi}(w)$  を  $\phi(t)$  の Fourier 変換とし、 $\Phi(w)$  を (10.36) で定義し、関数  $S(t)$  をその Fourier 変換  $\hat{S}(w)$

$$\hat{S}(w) = \frac{\hat{\phi}(w)}{\Phi(w)} \quad (10.44)$$

で定義すると、 $f(t) \in V_0$  のとき、補間公式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)S(t - n) \quad (10.45)$$

が成り立つ。

[証明]  $\Phi(w) \neq 0$  ならば、(10.35) を (10.32) に代入すると、

$$\hat{f}(w) = \frac{F(w)}{\Phi(w)} \hat{\phi}(w) \quad (10.46)$$

となる。この Fourier 逆変換は (10.45) となる。  $\square$

これは Shannon のサンプリング定理に対応する補間公式 (interpolation formula) である。この場合の関数  $S(t)$  は  $\phi(t)$  で定まる関数である。

$\phi(t)$  が Shannon のウェーブレットのばあいには  $\Phi(w) = 1$  である。

ここでは、 $S(t)$  を導入した。(10.36) の下で述べたように (10.35) を使って整数の  $t$  の値にたいする  $f(t)$  から  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$  を求めて、(10.31) で  $f(t)$  を計算することもできる。

$f(t) \in V_m$  のときには  $g(t)$  を  $g(t) = f(\frac{t}{2^m})$  で定義すると、 $g(t) \in V_0$  となる。したがって、

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)S(t-n) \quad (10.47)$$

すなわち、

$$f(t/2^m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n/2^m)S(t-n) \quad (10.48)$$

となる。これが  $f(t) \in V_m$  のときの補間公式となる。

この節では、 $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の直交性を用いていないことを注意しておく。

(10.31) で  $\phi(t)$  が (9.21) のスプラインならば、(10.45) は  $\{f(n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  のスプラインによる補間を与える。



# 11

## コンパクトな台をもつウェーブレット

### 11.1 コンパクトな台をもつスケーリング関数

ここでコンパクトな台をもつスケーリング関数  $\phi(t)$  を求める問題を考える。

スケーリング関数  $\phi(t)$  がコンパクトな台をもつとする。この  $\phi(t)$  をスケール関係 (8.12) の右辺に代入すると、係数の列  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  の中で有限個の  $c_k$  のみが 0 でないとするれば、左辺の  $\phi(t)$  もコンパクトな台をもち、矛盾しない。しかし、無限個の  $c_k$  が 0 でないときには、左辺の  $\phi(t)$  は一般にコンパクトな台をもたず矛盾する。ここではスケール関係 (8.12) の係数の列  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  の中で有限個の  $c_k$  のみが 0 でないような、コンパクトな台をもつスケーリング関数  $\phi(t)$  を求める。

**定理 11.1** 二つの整数  $A$  と  $B$  の間にある  $k$  にたいしてのみ  $c_k$  が 0 でないとする。このとき、 $\phi(t)$  がコンパクトな台をもつとすると、それは  $[A, B]$  である。さらに、二つの整数  $\tilde{A}$  と  $\tilde{B}$  の間にある  $k$  にたいしてのみ  $d_k$  が 0 でないとする。このとき、 $\psi(t)$  がコンパクトな台をもつとすると、それは  $[\frac{1}{2}(A + \tilde{A}), \frac{1}{2}(B + \tilde{B})]$  である。

[証明]  $\phi(t)$  がコンパクトな台  $[a, b]$  をもつとする。このとき、 $\phi(2t-k)$  の台は  $[\frac{1}{2}(a+k), \frac{1}{2}(b+k)]$  となる。スケール関係 (8.12) により、 $\phi(t)$  の台は

$$\cup_{k=A}^B [\frac{1}{2}(a+k), \frac{1}{2}(b+k)] = [\frac{1}{2}(a+A), \frac{1}{2}(b+B)]$$

となる。これは  $[a, b]$  に等しい筈である。したがって、 $a = A, b = B$  となる。更に、スケール関係 (8.27) により、 $\psi(t)$  の台は

$$\cup_{k=\tilde{A}}^{\tilde{B}} [\frac{1}{2}(a+k), \frac{1}{2}(b+k)] = [\frac{1}{2}(a+\tilde{A}), \frac{1}{2}(b+\tilde{B})] = [\frac{1}{2}(A+\tilde{A}), \frac{1}{2}(B+\tilde{B})]$$

となる。 □

ここで、二つの整数  $A$  と  $B$  の間にある  $k$  にたいしてのみ  $c_k$  が 0 でないという条件は、 $c_A \neq 0, c_B \neq 0, k < A$  で  $c_k = 0, k > B$  で  $c_k = 0$  を表すものとする。

**定理 11.1** の系 双直交ウェーブレットのスケーリング関数  $\phi(t), \tilde{\phi}(t)$  が、それぞれ長さ  $K, \tilde{K}$  のコンパクトな台をもつとき、(8.37) で定まるマザーウェーブレット  $\psi(t), \tilde{\psi}(t)$  は、共に長さ  $\frac{1}{2}(K + \tilde{K})$  のコンパクトな台をもつ。直交ウェーブレットの場合、この長さは  $K$  である。

[証明] 定理 11.1 の条件のとき、 $K = B - A$ ,  $\tilde{K} = \tilde{B} - \tilde{A}$  が成り立つ。  $\square$

$\phi(t)$  の台が  $[A, B]$  であり、 $A$  が整数ならば  $\phi(t - A)$  を  $\phi(t)$  の代わりにスケーリング関数として採用しても、座標の原点が  $A$  だけずれるだけで、ウェーブレット展開は同じである。 $\phi(t - A)$  を  $\phi(t)$  とし、 $K = B - A$  とすると、 $\phi(t)$  の台は  $[0, K]$  となり、0 でない  $c_k$  の  $k$  は  $0 \leq k \leq K$  を満たす。

ここで、スケーリング関数  $\phi(t)$  はコンパクトな台  $[0, K]$  を持ち、 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  の中で  $c_0, c_1, \dots, c_K$  のみが 0 でないとし、スケーリング関数  $\tilde{\phi}(t)$  はコンパクトな台  $[\tilde{A}, \tilde{A} + \tilde{K}]$  を持ち、 $\{\tilde{c}_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  の中で  $\tilde{c}_{\tilde{A}}, \tilde{c}_{\tilde{A}+1}, \dots, \tilde{c}_{\tilde{A}+\tilde{K}}$  のみが 0 でないとする。関数  $M_0(z)$ ,  $\tilde{M}_0(z)$  を

$$M_0(e^{-iw}) = m_0(w), \quad \tilde{M}_0(e^{-iw}) = \tilde{m}_0(w) \quad (11.1)$$

で定義する。(8.14) により

$$M_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^K c_k z^k, \quad \tilde{M}_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} z^{\tilde{A}} \sum_{k=0}^{\tilde{K}} \tilde{c}_{\tilde{A}+k} z^k \quad (11.2)$$

であるから  $M_0(z)$ ,  $\tilde{M}_0(z)/z^{\tilde{A}}$  はそれぞれ  $K$  次、 $\tilde{K}$  次の多項式である。

$m_0(w)$ ,  $\tilde{m}_0(w)$  が満たすべき条件 (8.20) と (8.18) は

$$M_0(1) = 1, \quad \tilde{M}_0(1) = 1, \quad M_0(-1)\overline{\tilde{M}_0(-1)} = 0 \quad (11.3)$$

$$M_0(z)\overline{\tilde{M}_0(z)} + M_0(-z)\overline{\tilde{M}_0(-z)} = 1, \quad |z| = 1 \quad (11.4)$$

と書かれる。

$\psi(t)$  の  $r$  次までのモーメントが 0 ならば (9.51) が成り立つ。それを使って、

$$\tilde{M}_0^{(k)}(-1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r \quad (11.5)$$

得る。ここで、関数  $\tilde{W}(z)$  を

$$\tilde{M}_0(z) = z^{\tilde{A}} \left( \frac{z+1}{2} \right)^{r+1} \tilde{W}(z) \quad (11.6)$$

で定義すると、 $\tilde{M}_0(z)/z^{\tilde{A}}$  が  $\tilde{K}$  次の多項式ならば  $\tilde{W}(z)$  は  $\tilde{K} - r - 1$  次の多項式である。(11.3)

の  $\tilde{M}_0(1) = 1$  の条件のために、 $\tilde{W}(1) = 1$  である。

[11.6] の導出] (11.5) は  $\tilde{M}_0(z)/z^{\tilde{A}}$  の  $z = -1$  の周りの Taylor 展開は  $(z+1)^{r+1}$  の項から始まることを示している。  $\square$

## 11.2 Daubechies のウェーブレット

この節ではコンパクトな台をもつ直交ウェーブレットを考える。節 8.2 において、係数  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  が (8.12) で導入されると、 $\phi(t)$  の正規直交条件から (8.17)、(8.23) 式、すなわち

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_{k-2n} = \delta_{0n}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (11.7)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = \sqrt{2}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k c_k = 0 \quad (11.8)$$

が示された。 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  が求まると、(8.14) により  $m_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw}$  が求まり、 $\hat{\phi}(w)$  は (8.24) により

$$\hat{\phi}(w) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0\left(\frac{w}{2^k}\right) \quad (11.9)$$

で定まる。 $\phi(t)$  が求まると、 $\psi(t)$  は (8.27)、(8.37) で与えられる。

$\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  の中で  $c_0, c_1, \dots, c_K$  のみが 0 でない直交ウェーブレットの場合、(11.7) から  $K$  には奇数のみが許されることを示される。したがって、 $K = 2N - 1$  で定義される整数  $N$  が用いられる。

[証明]  $K$  が偶数であるとするとき (11.7) は  $2n = K$  とすると  $c_K \bar{c}_0 = 0$  となり、仮定に反する。  $\square$

### 例 1. Haar のウェーブレット

$K+1 = 2N = 2$  とし、 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  の中  $c_0$  と  $c_1$  のみが 0 でないとすると、(11.8) は  $c_0 + c_1 = \sqrt{2}$ 、 $c_0 - c_1 = 0$  となり、

$$c_0 = c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (11.10)$$

となる。これは Haar のウェーブレットを与える。

(11.6) を使うと、 $r = 0$ 、 $W(1) = 1$  として、 $M_0(z) = \frac{1}{2}(1+z)$  を得る。これを (11.2) と比べて、(11.10) を得る。

### 例 2. Daubechies のウェーブレット $N = 2$

$K+1 = 2N = 4$  とし、 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  の中  $c_0 \sim c_3$  のみが 0 でないとすると、(11.8)、(11.7) は

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = \sqrt{2}, \quad c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 0 \quad (11.11)$$

$$c_0 \bar{c}_2 + c_1 \bar{c}_3 = 0 \quad (11.12)$$

となる。

この他に、(11.7) で  $n = 0$  とすると関係

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$$

が得られるが、これは (11.11)、(11.12) と独立ではないので除外する。

$$c_0 = \frac{\nu(\nu-1)}{\sqrt{2(\nu^2+1)}}, c_1 = \frac{1-\nu}{\sqrt{2(\nu^2+1)}}, c_2 = \frac{\nu+1}{\sqrt{2(\nu^2+1)}}, c_3 = \frac{\nu(\nu+1)}{\sqrt{2(\nu^2+1)}} \quad (11.13)$$

とすると任意の  $\nu$  で (11.11), (11.12) は満たされる。ただし、 $\nu = \pm 1$  とすると、 $c_0 = 0$  または  $c_3 = 0$  となるので、 $\nu = \pm 1$  は除外される。

ここでもう一つの条件  $\psi(t)$  の 1 次のモーメントが 0 であるという条件をつけると、これは定理 9.2 により  $m'_0(\pi) = 0$  となる。したがって、

$$m'_0(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k c_k k = 0 \quad (11.14)$$

となり、 $\nu$  は  $\nu = \pm 1/\sqrt{3}$  と定まる。このとき、(11.13) は

$$c_0 = \mp \frac{\sqrt{3} \mp 1}{4\sqrt{2}}, \quad c_1 = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} \mp 1)}{4\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} \pm 1)}{4\sqrt{2}}, \quad c_3 = \pm \frac{\sqrt{3} \pm 1}{4\sqrt{2}} \quad (11.15)$$

となる。これを求める Maxima のプログラムを節末に示す。

(11.6) を使うと、 $K = 4, r = 1, W(1) = 1$  として、 $M_0(z) = (\frac{z+1}{2})^2(1-a+az)$  を得る。 $a$  を (11.4) で定めると  $a = (1 \pm \sqrt{3})/2$  となる。この  $M_0(z)$  と (11.2) を比べて、 $c_0/\sqrt{2} = (1-a)/4, \dots$ , となり、(11.15) が得られる。

$\phi(t)$  はコンパクトな台をもつとすると、その台は  $[0, 3]$  である。 $t$  が整数のときスケール関係 (8.12) は

$$\begin{aligned} \phi(0) &= c_0\sqrt{2}\phi(0), \\ \phi(1) &= c_0\sqrt{2}\phi(2) + c_1\sqrt{2}\phi(1) + c_2\sqrt{2}\phi(0), \\ \phi(2) &= c_1\sqrt{2}\phi(3) + c_2\sqrt{2}\phi(2) + c_3\sqrt{2}\phi(1), \\ \phi(3) &= c_3\sqrt{2}\phi(3) \end{aligned} \quad (11.16)$$

となる。 $\nu \neq \pm 1$  のとき、 $c_0\sqrt{2} \neq 1, c_3\sqrt{2} \neq 1$  であるから  $\phi(0) = \phi(3) = 0$  であり、(10.24) により  $\phi(1) + \phi(2) = 1$  であることを用いて、

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}, \quad \phi(2) = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad \phi(3) = 0 \quad (11.17)$$

と定まる。これを求める Maxima のプログラムを節末に示す。 $m$  が正の整数であり、 $t$  が  $1/2^m$  の整数倍であるときの  $\phi(t)$  と  $\psi(t)$  は、それぞれ補間アルゴリズム (10.23) と (10.28) を使って計算される。 $m = 6$  として求まる  $\phi(t)$  と  $\psi(t)$  を図 11.1 に示す。このとき用いられる Maxima のプログラムを節末に示す。求まる  $\phi(t)$  と  $\psi(t)$  は連続関数であるが、微分可能ではないことが知られている。この点について本節の最後に補足する。

**例 3. Daubechies のウェーブレット  $N = 3$**

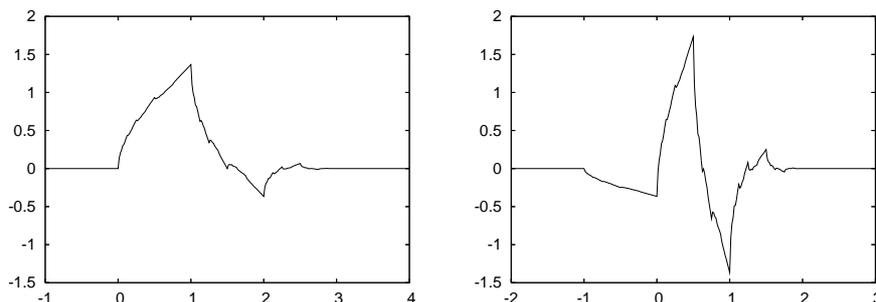


図 11.1: Daubechies のウェーブレット  $N = 2$  の (a)  $\phi(t)$ , (b)  $\psi(t)$

0 でない  $c_k$  が  $K + 1 = 2N = 6$  個ならば、 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  を決める条件は (11.8) と

$$c_0 \bar{c}_2 + c_1 \bar{c}_3 + c_2 \bar{c}_4 + c_3 \bar{c}_5 = 0, \quad c_0 \bar{c}_4 + c_1 \bar{c}_5 = 0$$

となり、 $\psi(t)$  の 1 次と 2 次のモーメントが 0 であるという条件をつけると、解が一意的に定まる。

$K = 2N - 1$ ,  $m_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} c_k e^{-ikw}$  とし、 $q_N(w) = |m_0(w)|^2$  とすると、

$$q_N(w) = |m_0(w)|^2 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_{2n-1} \cos(2n-1)w \quad (11.18)$$

となる。ここで、 $n \geq 0$  にたいし

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{2N-1-n} c_k \bar{c}_{k+n} \quad (11.19)$$

である。(11.18) を導くさいに、直交条件により  $q_N(w) + q_N(w + \pi) = 1$  であり、これを満たすためには  $\alpha_0 = 1$ ,  $n$  が正の偶数のとき  $\alpha_n = 0$  であることを用いた。

ここで、 $\psi(t)$  の  $N - 1$  次までのモーメントが 0 であるという条件をつけると、 $k \leq N - 1$  のとき  $m_0^{(k)}(\pi) = 0$  したがって、 $k \leq 2N - 2$  のとき  $q_N^{(k)}(\pi) = 0$  となる。(11.18) により  $q_N'(w) = -\sum_{n=1}^N (2n-1) \alpha_{2n-1} \sin(2n-1)w = -q_N'(\pi + w)$  であり、これは節 5.3 の例 2, 例 3 により  $\sin w$  の奇数べきのみからなる  $2N - 1$  次の多項式で表される。上の微分に関する条件により、 $q_N'(w)$  の Taylor 展開の  $2N - 3$  次までの係数は 0 であるから、 $C$  を定数として  $q_N'(w) = C(\sin w)^{2N-1}$  となる。これを積分し、 $q_N(0) = 1$ ,  $q_N(\pi) = 0$  の条件を用いて

$$q_N(w) = |m_0(w)|^2 = 1 - \frac{1}{C_N} \int_0^w (\sin x)^{2N-1} dx, \quad C_N = \int_0^\pi (\sin x)^{2N-1} dx \quad (11.20)$$

を得る。正整数  $n$  にたいして、 $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3$ ,  $(2n)!! = 2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2 = 2^n n!$  という記号を用いると、 $C_N$  は  $C_N = 2(2N-2)!! / (2N-1)!! = 2[2^{N-1}(N-1)!]^2 / (2N-1)!$  であることが知られている。

(11.18) と (11.20) を比べて、 $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2N-1}$  の値が定まると、(11.11) の二つの式と  $n = 2, 3, \dots, 2N - 1$  にたいする (11.19) を用いて  $c_0, c_1, \dots, c_{2N-1}$  を実数の範囲で求めることができる。ここで、 $n$  が正の偶数のとき  $\alpha_n = 0$  であることを用いる。

$N \rightarrow \infty$  とするとき、 $0 < w < \pi$  で  $q_N'(w) \rightarrow \delta(w - \pi/2)$  となることが、例 7.5.5 により示される。したがって、 $-\pi < w < \pi$  で  $q_N(w) \rightarrow \chi_{-\pi/2, \pi/2}(w)$  となる。この極限は Shannon のウェーブレット (節 9.4) と一致する。

$K = 2N - 1$ ,  $n \geq 2$  とする。このとき、(11.6) により  $m_0(w)$  は

$$m_0(w) = e^{-iw/2} \left(\cos \frac{w}{2}\right)^N W(e^{-iw}) \quad (11.21)$$

と表される。(11.9) により  $\hat{\phi}(w)$  は

$$\hat{\phi}(w) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0\left(\frac{w}{2^k}\right) = e^{-iw} \left(\frac{\sin \frac{w}{2}}{\frac{w}{2}}\right)^N \prod_{k=1}^{\infty} W(e^{-iw/2^k}) \quad (11.22)$$

となる。ここで  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$  を用いて、

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x} \quad (11.23)$$

が導かれることを用いた。 $\prod_{k=1}^{\infty} W(e^{-iw/2^k})$  は  $|w|$  大で  $|w|^{N-1}$  より遅く増大することが示されている。したがって  $N \geq 2$  のとき  $\hat{\phi}(w)$  は  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  に属し、その Fourier 逆変換  $\phi(t)$  は連続関数である。

この議論の詳細は A. K. Louis, P. Maass, A. Rieder: Wavelets, Theory and Applications, John Wiley (1991) pp. 151-155 にある。

### 本節の計算に関する数式処理システム Maxima のプログラム

プログラム 11.2.1 (11.11), (11.12), (11.14) を解いて (11.15) の  $c_k$  を求める計算。

```
prog1121$
  eqsetc:[ c0+c1+c2+c3=sqrt(2), c0-c1+c2-c3=0, -c1+2*c2-3*c3=0, c0*c2+c1*c3=0];
  ansc:algsys(eqsetc, [c0,c1,c2,c3]);
```

プログラム 11.2.2 以下の計算で用いる  $c_k = cck$  の入力。

```
prog1122$
  sq3:sqrt(3);sq2:sqrt(2); dnm:4*sq2;
  cc0:(sq3+1)/dnm;cc1:sq3*cc0;cc3:- (sq3-1)/dnm;cc2:-sq3*cc3;
```

プログラム 11.2.3 (11.16) を解いて、(11.17) で与えられる  $\phi(n) = xn$  を求める計算。

```
prog1123; (prerequisite:prog1122)$
  eqsetphi:[x0/sq2=cc0*x0, x1/sq2=cc0*x2+cc1*x1+cc2*x0, x3/sq2=cc3*x3,
  x0+x1+x2+x3=1];
  anspphi:algsys(eqsetphi, [x0,x1,x2,x3]);
```

プログラム 11.2.4 図 11.1 を求める計算のための、(11.15), (11.17) で与えられる値の入力。

```
prog1124; (prerequisite:prog1122)$
  kx[1]:3;px:2; cc[0]:cc0;cc[1]:cc1; cc[2]:cc2;cc[3]:cc3;
  phi1:(1-sq3)/2;phi2:(1+sq3)/2; phi[1]:float(phi2);phi[2]:float(phi1);
```

プログラム 11.2.5 図 11.1 を求める計算プログラム。 $\phi(t)$  の計算では (10.22), (10.23) を用い、 $\psi(t)$  の計算では (10.29), (10.27), (10.28) を用いる。

```
prog1125; (prerequisite:prog1124)$
  daubinterpol(stg,mx):=block([m,n,k,nk,kmx,kxmx,sm,s,t,tt,den,fac,dt,psii],
  if stg=2 then kn[1]:1-kx[1] else kn[1]:0,
  for k:0 thru kx[1] do (cc[k]:float(cc[k]),c[1,k]:cc[k],
  if stg=2 then d[1,1-k]:-(-1)^k*cc[k] else d[1,k]:cc[k]),
  for m:2 thru mx do (kn[m]:2*kn[m-1],kx[m]:2*kx[m-1]+kx[1],
  for n:kn[m] thru kn[m]+kx[m] do (dmn:0,
```

```

for k:kn[m-1] thru kn[m-1]+kx[m-1] do (nk:n-2*k,
  if nk>=0 and nk<=kx[1] then dmn:dmn+d[m-1,k]*cc[nk]),
  d[m,n]:float(dmn),print(m,n,d[m,n])),
knmx:kn[mx],kxmx:kx[mx],
den:2^mx,fac:sqrt(den),dt:1/den,fac:float(fac),dt:float(dt),
for t:knmx thru knmx+kxmx+2 do (sm:0,
  for s:1 thru px do (
    if t-s>=knmx and t-s<=knmx+kxmx then sm:sm+d[mx,t-s]*phi[s]),
  tt:ev(t*dt,numer),psii:ev(fac*sm,numer),print(tt,psii));

```

プログラム 11.2.6 図 11.1 を求める計算プログラムの実行。それぞれ  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  を与える。図は得られた数値に gnuplot を用いて得られた。

```

prog1126; (prerequisite:prog1125)$
daubinterpol(1,6);
daubinterpol(2,6);

```

### 11.3 双直交ウェーブレット 1

節 9.2 で、Franklin のウェーブレットを考えた。そのとき、

$$\theta_2(t) = (1 - |t - 1|) \chi_{[0,2]}(t) \quad (11.24)$$

とし、 $\phi(t)$  を  $\{\theta_2(t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の一次結合とし、 $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  が正規直交系になるように求めた。 $V_0$  はの整数のところの折れ目がある折れ線の関数の集合である。節 9.3 では、 $\theta_2(t)$  の代わりに  $\theta_{\nu+1}(t)$  を考えた。この節では、双直交ウェーブレットの一方のスケーリング関数  $\phi(t)$  として、 $\phi(t) = \theta_{\nu+1}(t)$  を採用する。この節では、もう一つのスケーリング関数  $\tilde{\phi}(t)$  も同じ  $V_0$  に属すると仮定する。すなわち、 $\tilde{V}_0 = V_0$  とする。

$\tilde{\phi}(t)$  が  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  の張る空間  $V_0$  に属するとき、定理 8.1 (節 8.2) により  $\alpha_2(w) \chi_{(-\pi, \pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  を満たす周期  $2\pi$  の関数  $\alpha_2(w)$  が存在して、

$$\tilde{\hat{\phi}}(w) = \alpha_2(w) \hat{\phi}(w) \quad (11.25)$$

と表すことができる。 $\phi$  と  $\tilde{\phi}$  の役割を交換した関係も成り立つので、 $\alpha_2(w)$  は

$$\alpha_2(w) \chi_{(-\pi, \pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}), \quad [1/\alpha_2(w)] \chi_{(-\pi, \pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) \quad (11.26)$$

を満たす。関係 (11.25) を使うと、双直交条件 (8.16) は

$$\alpha_2(w) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(w + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (11.27)$$

となる。 $\hat{\phi}(w)$  が与えられると、 $\alpha_2(w)$  はこの式で定まる。それは、周期が  $2\pi$  の、非負の周期関数である。以下では、 $\alpha_2(w)$ ,  $1/\alpha_2(w)$  はともに有界な連続関数であることを仮定する。 $\alpha_2(w) \geq 0$  であるから、定理 8.2 (節 8.2) の条件が成り立つ。

ここで、 $\hat{\phi}^\dagger(w)$  を

$$\hat{\phi}^\dagger(w) = \alpha_2(w)^{1/2} \hat{\phi}(w) \quad (11.28)$$

で導入すると、(11.27) は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}^\dagger(w + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (11.29)$$

となる。

(11.28) で定義される  $\hat{\phi}^\dagger(w)$  が Fourier 変換である関数  $\phi^\dagger(t)$  は、直交ウェーブレットのスケールリング関数である。

[証明] 定理 8.1 (節 8.2) により、 $f(t) \in V_0$  であるとき、 $\hat{f}(w) = A(w)\hat{\phi}(w)$  となる関数  $A(w)$  は、 $A(w)\chi_{(-\pi,\pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  を満たす、周期  $2\pi$  の周期関数である。このとき、 $\hat{f}(w) = A(w)\alpha_2(w)^{-1/2}\hat{\phi}^\dagger(w)$  が成り立ち、 $\alpha_2(w)^{-1}$  が有界であれば、 $A(w)\alpha_2(w)^{-1/2}$  は  $A(w)$  が満たすのと同じ条件を満たす。□

$\phi(t)$  は  $V_1$  に属するので、スケール関係 (8.12), (8.13) が成り立つ。すなわち、

$$\hat{\phi}(w) = m_0\left(\frac{w}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (11.30)$$

が成り立つ。

$\hat{\phi}(w)$  が与えられるとき、 $m_0(\frac{w}{2})$  は (11.30) で定まる。 $\alpha_2(w)$  は (11.27) で定まり、 $\tilde{\phi}(t)$  は (11.25) で定まる。このとき、 $\tilde{m}_0(\frac{w}{2})$  は

$$\tilde{m}_0\left(\frac{w}{2}\right) = \alpha_2(w)m_0\left(\frac{w}{2}\right)/\alpha_2\left(\frac{w}{2}\right) \quad (11.31)$$

となる。

[(11.31) の導出] (11.25), (11.30) により

$$\hat{\tilde{\phi}}(w) = \alpha_2(w)\hat{\phi}(w) = \alpha_2(w)m_0\left(\frac{w}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) = \alpha_2(w)m_0\left(\frac{w}{2}\right)\alpha_2\left(\frac{w}{2}\right)^{-1}\hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{w}{2}\right)$$

であることによる。□

$W_0$  を  $V_1 = V_0 \oplus W_0$  となる関数空間とし、この節では、マザーウェーブレットの組  $\psi(t)$  と  $\tilde{\psi}(t)$  は、 $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  と  $\{\tilde{\psi}(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  のそれぞれが  $W_0$  を張り、直交条件 (8.30) を満たすように選ぶ。

この条件のもとで、(11.25) と同様に、周期  $2\pi$  の関数  $\gamma(w)$  が存在して、

$$\hat{\tilde{\psi}}(w) = \gamma(w)\hat{\psi}(w) \quad (11.32)$$

であり、 $\gamma(w)$  は、(11.26) に対応して、

$$\gamma(w)\chi_{(-\pi,\pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}), \quad [1/\gamma(w)]\chi_{(-\pi,\pi)}(w) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) \quad (11.33)$$

を満たす。直交条件 (8.30) は、(11.32) を用いて

$$\gamma(w) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(w + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (11.34)$$

と表される。 $\psi(t) \in W_0$  と  $\phi(t-n) \in V_0$  の直交性は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(w+2\pi k) \overline{\hat{\phi}(w+2\pi k)} = 0 \quad (11.35)$$

を与える。

$\psi(t)$  は  $V_1$  に属するので、

$$\hat{\psi}(w) = m_1\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right), \quad \text{a.e.} \quad (11.36)$$

と表すことができる。(11.30), (11.36) を (11.27), (11.34), (11.35) に代入し、(11.27) を用いると

$$\alpha_2(w) \left\{ \frac{|m_0(\frac{w}{2})|^2}{\alpha_2(\frac{w}{2})} + \frac{|m_0(\frac{w}{2} + \pi)|^2}{\alpha_2(\frac{w}{2} + \pi)} \right\} = 1 \quad (11.37)$$

$$\gamma(w) \left\{ \frac{|m_1(\frac{w}{2})|^2}{\alpha_2(\frac{w}{2})} + \frac{|m_1(\frac{w}{2} + \pi)|^2}{\alpha_2(\frac{w}{2} + \pi)} \right\} = 1 \quad (11.38)$$

$$\frac{m_0(\frac{w}{2}) \overline{m_1(\frac{w}{2})}}{\alpha_2(\frac{w}{2})} + \frac{m_0(\frac{w}{2} + \pi) \overline{m_1(\frac{w}{2} + \pi)}}{\alpha_2(\frac{w}{2} + \pi)} = 0 \quad (11.39)$$

が得られる。

(11.38), (11.39) は、 $\gamma^*(w)$  が周期  $2\pi$  の関数であるとする、

$$m_1\left(\frac{w}{2}\right) = -e^{-iw/2} \overline{\gamma^*(w) m_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} / \alpha_2\left(\frac{w}{2} + \pi\right) \quad (11.40)$$

$$\gamma(w) = \alpha_2\left(\frac{w}{2}\right) \alpha_2\left(\frac{w}{2} + \pi\right) \alpha_2(w) / |\gamma^*(w)|^2 \quad (11.41)$$

により満たされる。

[証明] (11.40) を (11.38), (11.39) に代入すれば確かめられる。  $\square$

節 8.3 では、(8.36) すなわち  $m_1(w) = -e^{-iw} \overline{\tilde{m}_0(w+\pi)}$  を採用した。 $\tilde{V}_0 = V_0$  の仮定のもとで、 $\tilde{m}_0(w)$  は (11.31) で与えられるので、そこでは (11.40) で  $\gamma^*(w) = \alpha_2(w)$  を採用したことになる。上の (11.40) は  $m_1(w) = -e^{-iw} [\gamma^*(w)/\alpha_2(w)] \overline{\tilde{m}_0(w+\pi)}$  と書くことができる。

$\gamma(w) = 1$  とおくと、 $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$  となり、ウェーブレットは正規直交系となる。このとき、 $m_1(w/2)$  は (11.40) で与えられ、 $\gamma^*(w)$  は (11.41) で  $\gamma(w) = 1$  とおいて計算されるので平方根が現れる。

### 例 11.3.1 Franklin のウェーブレット

$\phi(t) = \theta_2(t)$ ,  $\gamma(w) = 1$  とする。節 9.2 の  $\hat{\theta}_2(w)$ ,  $\alpha(w)$  を用いて、

$$\hat{\phi}(w) = \hat{\theta}_2(w) = e^{-iw} \frac{\sin^2 \frac{w}{2}}{\left(\frac{w}{2}\right)^2} \quad (11.42)$$

$$m_0\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\hat{\theta}_2(w)}{\hat{\theta}_2(w/2)} = e^{-iw/2} \cos^2 \frac{w}{4} = e^{-iw/2} \frac{1 + \cos \frac{w}{2}}{2} \quad (11.43)$$

$$\alpha_2(w) = |\alpha(w)|^2 = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}_2(w+2\pi k)|^2 \right)^{-1} = \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos w \right)^{-1} \quad (11.44)$$

となる。これを (11.41), (11.40), (11.36) に代入して、

$$\gamma^*(w) = \frac{3}{2} \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4} \cos^2 \frac{w}{2})(1 + \frac{1}{2} \cos w)} \right]^{1/2} \quad (11.45)$$

$$m_1\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1 - \cos \frac{w}{2}}{2} \left[ \frac{3}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} \cos \frac{w}{2}}{(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{w}{2})(1 + \frac{1}{2} \cos w)} \right]^{1/2} \quad (11.46)$$

$$\hat{\psi}(w) = e^{-iw/2} \frac{1 - \cos \frac{w}{2}}{2} \left[ \frac{3}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} \cos \frac{w}{2}}{(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{w}{2})(1 + \frac{1}{2} \cos w)} \right]^{1/2} \frac{\sin^2 \frac{w}{4}}{(\frac{w}{4})^2} \quad (11.47)$$

を得る。これは、(9.17) に (9.18) を用いて得られる式と一致している。

もっとも簡単な  $\gamma^*(w)$  の選択は、 $\gamma^*(w) = 1$  を採用するものである。このとき、(11.40), (11.41) は

$$m_1\left(\frac{w}{2}\right) = -e^{-iw/2} \overline{m_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} / \alpha_2\left(\frac{w}{2} + \pi\right) \quad (11.48)$$

$$\gamma(w) = \alpha_2\left(\frac{w}{2}\right) \alpha_2\left(\frac{w}{2} + \pi\right) \alpha_2(w) \quad (11.49)$$

となる。これは、平方根を含まない式になる。

### 例 11.3.2 スプライン

$\nu \in \mathbf{N}$  にたいし、関数  $\theta_{\nu+1}(t)$  とその Fourier 変換  $\hat{\theta}_{\nu+1}(w)$  が節 9.3 に与えられている。ここで、 $\phi(t) = \theta_{\nu+1}(t)$  とし、 $\gamma^*(w) = 1$  とする。このとき、(11.30), (11.48) により、

$$m_0(w) = \frac{\hat{\theta}_{\nu+1}(2w)}{\hat{\theta}_{\nu+1}(w)} = \left( e^{-iw/2} \cos \frac{w}{2} \right)^{\nu+1} = \left( \frac{1 + e^{-iw}}{2} \right)^{\nu+1} = \frac{1}{2^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\nu+1} \nu_{+1} C_k e^{-ikw} \quad (11.50)$$

$$m_1(w) = -e^{-iw} \overline{m_0(w + \pi)} P_\nu(w + \pi) \quad (11.51)$$

となる。 $P_\nu(w)$  は (9.26) で定義され、 $P_1(w), P_3(w)$  が (9.28) に与えられている。

(11.50) により、 $m_0(w)$  の展開係数の中で 0 でないものは、 $\nu \in \mathbf{N}$  にたいし

$$c_k / \sqrt{2} = \frac{1}{2^{\nu+1}} \nu_{+1} C_k, \quad k = 0, 1, \dots, \nu + 1 \quad (11.52)$$

である。節 9.3 の節末のプログラム 9.3.3 の作り方から  $P_\nu(w)$  は  $\sin^2 \frac{w}{2}$  の  $\nu$  次式であることが示される。(11.51) により、 $m_1(w)$  の展開係数  $d_n / \sqrt{2} = \text{dd}[n]$  の中で 0 でないものは、 $n \in [-2\nu, \nu + 1]$  にたいするものである。実際、 $\nu = 1$  のとき

$$\text{dd}[-2] = \text{dd}_-[2] = 1/24, \quad \text{dd}[-1] = \text{dd}_-[1] = -1/4, \quad \text{dd}[0] = 5/12$$

$\nu = 3$  のとき

$$\begin{aligned} \text{dd}[-6] = \text{dd}[4] &= 1/80640, \quad \text{dd}[-5] = \text{dd}[3] = -31/20160, \quad \text{dd}[-4] = \text{dd}[2] = 559/26880, \\ \text{dd}[-3] = \text{dd}[1] &= -247/2520, \quad \text{dd}[-2] = \text{dd}[0] = 9241/40320, \quad \text{dd}[-1] = -337/1120 \end{aligned}$$

となる。

上述により、定理 11.1 の  $[A, B]$ ,  $[\tilde{A}, \tilde{B}]$  は  $[0, \nu + 1]$ ,  $[-2\nu, \nu + 1]$  となるので、 $\phi(t)$  と  $\psi(t)$  の台は、定理 11.1 により  $[0, \nu + 1]$  と  $[-\nu, \nu + 1]$  になる。(11.51) は、定理 9.2(節 9.6) により  $\psi(t)$  の  $\nu$  次までのモーメントが 0 であることを示す。

$\nu = 1, \nu = 3$  にたいする  $\phi(t)$  と  $\psi(t)$  を図 11.2(a), (b)、図 11.3(a), (b) に示す。

(8.27) は

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \sqrt{2} \theta_{\nu+1}(2t-n) \quad (11.53)$$

となる。 $\nu=1$  のときには、 $k$  が整数ならば  $\psi(\frac{k}{2}) = 2(d_k/\sqrt{2})$  となる。

$\hat{\phi}(w)$ ,  $\hat{\psi}(w)$  は  $\alpha_2(w) = P_\nu(w)^{-1}$  として (11.25), (11.32), (11.49) で与えられる。このとき、 $\hat{\phi}(t)$ ,  $\hat{\psi}(t)$  の台はコンパクトではない。

例 11.3.2 での  $m_1(w)$  の展開係数  $d_n/\sqrt{2} = \text{dd}[n]$  を求め、更に  $\psi(t)$  を計算するプログラムを節末に記す。

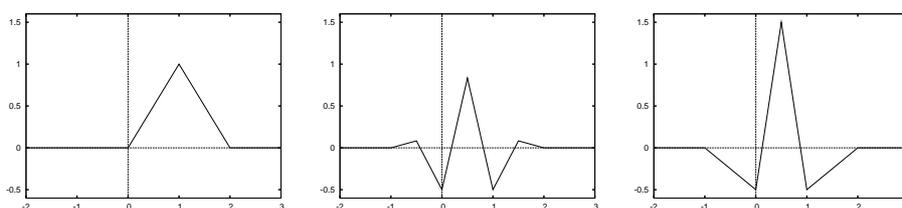


図 11.2: 例 11.3.2、例 11.4.1 の、1 次のスプライン ( $\nu=1$ ) の (a) 関数  $\phi(t)$  と (b), (c) それぞれの  $\psi(t)$

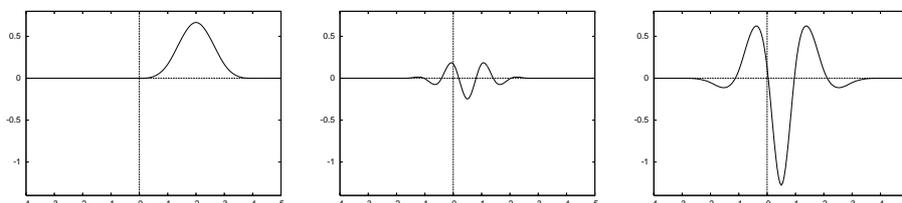


図 11.3: 例 11.3.2、例 11.4.2 の、3 次のスプライン ( $\nu=3$ ) の (a) 関数  $\phi(t)$  と (b), (c) それぞれの  $\psi(t)$

### 本節の計算に関する数式処理システム Maxima のプログラム

プログラム 11.3.1 (11.51) の展開係数  $d_n/\sqrt{2} = \text{dd}[n]$  を求め、更に (11.53) により  $\psi(t)$  を計算する。prog1132 では、例 11.3.2 にたいして prog933(a) または prog1131(a) を使い、節 11.4 の例 11.4.1, 例 11.4.2 にたいして、それぞれ  $\text{nu}:1$ ,  $\text{nu}:3$  として、prog1131(b) を用いる。

```
prog1131(a)$
  ps[1](w):=1-(2/3)*sin(w/2)^2;
  ps[3](w):=1-(4/3)*sin(w/2)^2+(2/5)*sin(w/2)^4-(4/315)*sin(w/2)^6;
prog1131(b)$
  ps[1](w):=1+2*sin(w/2)^2;
  ps[3](w):=1+4*sin(w/2)^2+10*sin(w/2)^4+20*sin(w/2)^6;
prog1132; (prerequisite:[prog933(a) or prog1131(a) or prog1131(b)])$
```

```

nu:3; pnupi(w):=ps[nu](w+%pi)$
pnupi(w):=ratsubst(cos(w/2)^2,sin(w/2)^2,ps[nu](w));
pnupis(w):=ratsubst(1-sin(w/2)^2,cos(w/2)^2,pnupi(w));
pnupiz(z):=ratsubst(1/2-(z+1/z)/4,sin(w/2)^2,pnupis(w));
m0piz(z):=((1-1/z)/2)^(nu+1); m1z(z):=-z*pnupiz(z)*m0piz(z);
m1za(z):=expand(m1z(z)); idm:-2*nu; idx:nu+1; tm:-nu-1; tx:nu+2;
for i:idm-1 thru idx+1 do (dd[i]:coeff(m1za(z),z,i),print(i,dd[i]));
prog1133; (prerequisites:[prog931(a),prog932,prog1132])$
splinephi(x):=gtha(x);

```

上のプログラムの後に、節 9.3 の prog935(c) を用いると、 $\psi(t)$  が計算される。

```
prog935(c); (prerequisite:[prog1133])$
```

## 11.4 双直交ウェーブレット 2

この節では、 $\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  は双直交ウェーブレットのスケーリング関数とし、 $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  はこれに対応するマザーウェーブレットとする。 $\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$  にたいする双直交条件は、(8.13) で定義される  $m_0(w)$ ,  $\tilde{m}_0(w)$  にたいし (8.18) すなわち

$$m_0(w)\overline{\tilde{m}_0(w)} + m_0(w+\pi)\overline{\tilde{m}_0(w+\pi)} = 1 \quad (11.54)$$

与えられる。前節では、 $\tilde{V}_0 = V_0$  とした。この節では、これを仮定しない。

**補助定理 11.1**  $A, \tilde{A}$  は整数、 $K, \tilde{K}$  は正整数とする。 $\phi(t)$  がコンパクトな台  $[A, A+K]$  を持ち、 $c_A = c_{A+K}$ ,  $c_{A+1} = c_{A+K-1}$ ,  $\dots$  を満たし、 $\tilde{\phi}(t)$  がコンパクトな台  $[\tilde{A}, \tilde{A}+\tilde{K}]$  を持ち、 $c_{\tilde{A}} = c_{\tilde{A}+\tilde{K}}$ ,  $c_{\tilde{A}+1} = c_{\tilde{A}+\tilde{K}-1}$ ,  $\dots$  を満たす。このとき、 $K$  と  $\tilde{K}$  は共に偶数であるか、共に奇数であり、 $\tilde{A} + \frac{1}{2}\tilde{K} = A + \frac{1}{2}K$  を満たす。

[証明] 定義 (8.14) により  $m_0(w)$ ,  $\tilde{m}_0(w)$  は  $e^{-iw(A+\frac{1}{2}K)} \times (\text{実数})$ ,  $e^{-iw(\tilde{A}+\frac{1}{2}\tilde{K})} \times (\text{実数})$  と表され、(11.54) の左辺が実数であるためには  $\tilde{A} + \frac{1}{2}\tilde{K} = A + \frac{1}{2}K$  が必要十分である。  $\square$

**定理 11.2**  $K, \tilde{K}$  は共に偶数であるか、共に奇数であるとし、 $\Delta K = (\tilde{K} - K)/2$  とする。(i)  $\phi(t)$  がコンパクトな台  $[0, K]$  を持ち、 $c_0 = c_K$ ,  $c_1 = c_{K-1}$ ,  $\dots$  を満たす。(ii)  $\tilde{\phi}(t)$  がコンパクトな台  $[-\Delta K, K + \Delta K]$  を持ち、 $\tilde{c}_{-\Delta K} = \tilde{c}_{K+\Delta K}$ ,  $\tilde{c}_{-\Delta K+1} = \tilde{c}_{K+\Delta K-1}$ ,  $\dots$  を満たす。(iii)  $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  のモーメントは、それぞれ  $r$  次、 $\tilde{r}$  次までが 0 である。このとき、 $r$  と  $\tilde{r}$  は、 $K, \tilde{K}$  が偶数ならば共に奇数であり、 $K, \tilde{K}$  が奇数ならば共に偶数である。 $m_0(w)$ ,  $\tilde{m}_0(w)$  は

$$m_0(w) = e^{-iwK/2} \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{\tilde{r}+1} L(\cos w), \quad \tilde{m}_0(w) = e^{-iwK/2} \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{r+1} \tilde{L}(\cos w) \quad (11.55)$$

と表される。ここで、 $L(\cos w)$ ,  $\tilde{L}(\cos w)$  は、それぞれ  $(K - \tilde{r} - 1)/2$  次、 $(\tilde{K} - r - 1)/2$  次の  $\cos w$  の多項式であり、 $L(1) = \tilde{L}(1) = 1$  を満たす。

[証明]  $\phi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  にたいする条件から、 $M_0(e^{-iw}) = m_0(w)$  を満たす  $M_0(z)$  は、(11.6) に対応して、 $M_0(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^{\tilde{r}+1} W(z)$  と表され、 $W(z)$  は  $K - \tilde{r} - 1$  次の多項式で、 $W(1) = 1$ ,  $W(-1) \neq 0$  を満たす。係数の対称性から  $K - \tilde{r} - 1$  が奇数であるとき  $W(-1) = 0$  となり仮定に反するので、 $K - \tilde{r} - 1$  は偶数である。したがって、(11.55) が得られる。  $\square$

Cohen, Daubechies and Feauveau による次の定理を与える。

**定理 11.3** 定理 11.2 の条件が満たされる時、 $q = \frac{1}{2}(r + \tilde{r}) + 1$ ,  $P(\sin^2 \frac{w}{2}) = L(\cos w)\tilde{L}(\cos w)$  と置くと、 $P(y)$  は

$$P(y) = P_1(y) + y^q P_3(y) \quad (11.56)$$

で与えられる。ここで、

$$P_1(y) = \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q+k-1}{k} y^k \quad (11.57)$$

であり、 $P_3(y)$  は  $P_3(y) + P_3(1-y) = 0$  を満たす。これを満たす多項式  $P(y)$  で次数が最も低いものは  $q-1$  次で  $P(y) = P_1(y)$  で与えられる。このとき  $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  の台の長さは共に  $r + \tilde{r} + 1$  となる。

ここで用いられている  $P_1(y)$ ,  $P_2(y)$ ,  $P_3(y)$  は、節 9.3 の  $P_\nu(w)$  とは全く異なるものである。

[証明] ここで、 $q = \frac{1}{2}(r + \tilde{r}) + 1$ ,  $P(\sin^2 \frac{w}{2}) = L(\cos w)\tilde{L}(\cos w)$  と置くと、(11.54) は

$$\left(\cos^2 \frac{w}{2}\right)^q P\left(\sin^2 \frac{w}{2}\right) + \left(\sin^2 \frac{w}{2}\right)^q P\left(\cos^2 \frac{w}{2}\right) = 1 \quad (11.58)$$

となる。(11.58) の解を求めるために、ここで

$$(1-y)^q P(y) + y^q Q(1-y) = 1 \quad (11.59)$$

を満たす多項式  $P(y)$ ,  $Q(1-y)$  を求める問題を考える。(11.59) を満たす  $P(y)$  は、べき級数  $P_2(y)$ , 多項式  $P_3(y)$  により、

$$P(y) = \frac{1}{(1-y)^q} + y^q P_2(y) = P_1(y) + y^q P_3(y) \quad (11.60)$$

と表される。(11.59) で  $y = 1-z$  と置くと、同様にして、 $Q(z)$  は、べき級数  $Q_2(z)$ , 多項式  $Q_3(z)$  により、

$$Q(z) = \frac{1}{(1-z)^q} + z^q Q_2(z) = P_1(z) + z^q Q_3(z) \quad (11.61)$$

と表される。したがって、(11.59) は

$$(1-y)^q [P_1(y) + y^q P_3(y)] + y^q [P_1(1-y) + (1-y)^q Q_3(1-y)] = 1 \quad (11.62)$$

となる。この式の  $y$  の  $2q$  次以上の項の係数は 0 であるから  $P_3(y) + Q_3(1-y) = 0$  である。(11.58) では、 $Q(y) = P(y)$  であるから、解は (11.60) で与えられ、 $P_3(y)$  は  $P_3(y) + P_3(1-y) = 0$  を満たさなければならない。最後の  $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  の台の長さは定理 11.1 の系による。□

**例 11.4.1**  $\tilde{r} = 1$ ,  $r = 1$ ,  $K = 2$ ,  $\tilde{K} = 4$  と置くと、定理 11.3 により、最も簡単なものは  $q-1 = 1$  次の  $P(y) = P_1(y) = 1 + 2y$  を採用するもので、(11.55) は

$$m_0(w) = e^{-iw} \cos^2 \frac{w}{2}, \quad \tilde{m}_0(w) = e^{-iw} \cos^2 \frac{w}{2} \left(1 + 2 \sin^2 \frac{w}{2}\right) \quad (11.63)$$

となる。(11.63) の  $m_0(w)$  は、例 11.3.1,  $\nu = 1$  にたいする例 11.3.2 と同じで、 $\phi(t)$  は 1 次のスプライン  $\theta_2(t)$  である。ここで (8.36) により  $m_1(w) = -e^{-iw} \tilde{m}_0(w + \pi)$  とすると、 $m_1(w) = \sin^2 \frac{w}{2} (1 + 2 \cos^2 \frac{w}{2})$  となる。

これは、 $\nu = 1$  にたいする例 11.3.2 の  $\psi(t)$  にたいする  $m_1(w) = \frac{1}{3} \sin^2 \frac{w}{2} (1 + 2 \sin^2 \frac{w}{2})$  と異なっている。

この例と次の例にたいし、 $m_1(w)$  の展開係数  $d_n / \sqrt{2} = \text{dd}[n]$  を計算し、 $\psi(t)$  も求めるプログラムが前節の最後に与えられている。また、 $\psi(t)$  の図は、図 11.2(c), 図 11.3(c) に描かれている。

例 11.4.2  $\tilde{r} = 3$ ,  $r = 3$ ,  $K = 4$ ,  $\tilde{K} = 10$  と置くと、定理 11.3 により、最も簡単なものは  $q - 1 = 3$  次の  $P(y) = P_1(y) = 1 + 4y + 10y^2 + 20y^3$  を採用するもので、(11.55) は

$$m_0(w) = e^{-2iw} \cos^4 \frac{w}{2}, \quad \tilde{m}_0(w) = e^{-2iw} \cos^4 \frac{w}{2} \left( 1 + 4 \sin^2 \frac{w}{2} + 10 \sin^4 \frac{w}{2} + 20 \sin^6 \frac{w}{2} \right) \quad (11.64)$$

となる。このとき、 $\phi(t)$  は 3 次のスプライン  $\theta_4(t)$  である。

例 11.4.3 (11.55) で  $L(\cos w) = 1$ ,  $\tilde{L}(\cos w) = P_1(\sin^2 \frac{w}{2})$  を採用すると、 $\phi(t)$  は  $\tilde{r}$  次のスプライン  $\theta_{\tilde{r}+1}(t)$  である。

Mallat の本に、定理 11.3 による  $\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  の例が多数載っている。

## 12

# 積分ウェーブレット変換

### 12.1 積分ウェーブレット変換による表式 1

$\phi(t), \tilde{\phi}(t), \psi(t), \tilde{\psi}(t)$  が双直交ウェーブレットのスケーリング関数、マザーウェーブレットであるときのウェーブレットによる展開は節 10.1 の (10.3)~(10.8) に与えられている。ここで、積分ウェーブレット変換  $(\tilde{\Phi}f)(a, b), (\tilde{\Psi}f)(a, b)$  を

$$(\tilde{\Phi}f)(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |a|^{-1/2} \overline{\tilde{\phi}\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \quad (12.1)$$

$$(\tilde{\Psi}f)(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |a|^{-1/2} \overline{\tilde{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \quad (12.2)$$

で定義すると、(10.6) で与えられる展開係数  $a_n^{(m)}, b_n^{(m)}$  は

$$a_n^{(m)} = (\tilde{\Phi}f)(2^{-m}, 2^{-m}n), \quad b_n^{(m)} = (\tilde{\Psi}f)(2^{-m}, 2^{-m}n) \quad (12.3)$$

と表され、(10.7) は、 $M_0$  を  $M$  とすると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\Phi}f)(2^{-M}, 2^{-M}n) 2^{M/2} \phi(2^M t - n) \\ &\quad + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(2^{-m}, 2^{-m}n) 2^{m/2} \psi(2^m t - n) \end{aligned} \quad (12.4)$$

となり、(10.8) は

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(2^{-m}, 2^{-m}n) 2^{m/2} \psi(2^m t - n) \quad (12.5)$$

となる。これらの式には、 $n$  と  $m$  についての和が現われる。これらを積分にした式が成り立つことを示す。

以下、本節では  $\phi(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}), \tilde{\phi}(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  を仮定する。

**定理 12.1**  $\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  が双直交ウェーブレットのスケーリング関数、マザーウェーブレットであるとき、 $L \in \mathbf{Z}$ ,  $N \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathbf{R}$  として  $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{N} \sum_{m=L}^{L+N-1} 2^{m/N} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Phi}f)(2^{-m/N}, b) 2^{m/(2N)} \phi(2^{m/N}(t-b)) db \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{m=L}^{\infty} 2^{m/N} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(2^{-m/N}, b) 2^{m/(2N)} \psi(2^{m/N}(t-b)) db \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{m/N} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(2^{-m/N}, b) 2^{m/(2N)} \psi(2^{m/N}(t-b)) db \quad (12.7)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\log 2} \int_{A/2}^A \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Phi}f)(a, b) a^{-1/2} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \right] da \\ &+ \frac{1}{\log 2} \int_0^A \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(a, b) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \right] da \end{aligned} \quad (12.8)$$

$$f(t) = \frac{1}{\log 2} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(a, b) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \right] da \quad (12.9)$$

Fourier 変換を用いない証明を先ず与え、それを用いる証明を定理 12.2 の後に与える。

[ $N = 1, L = M$  のときの (12.6) の導出] (10.1) の代わりに、座標の原点を任意の  $b \in \mathbf{R}$  だけずらして、

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \phi(2^m(t-b) - n), \quad \psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m(t-b) - n)$$

としても、 $\{\phi_{m,n}(t)\}, \{\psi_{m,n}(t)\}$  により (12.4) のように展開できる。その式は、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{M/2} \overline{\tilde{\phi}(2^M(x-b) - n)} dx \right\} 2^{M/2} \phi(2^M(t-b) - n) \\ &+ \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{m/2} \overline{\tilde{\psi}(2^m(x-b) - n)} dx \right\} 2^{m/2} \psi(2^m(t-b) - n) \end{aligned}$$

となる。この式を  $b$  について 0 から  $2^{-M}$  まで積分し、 $2^M$  をかけると、(12.6) で  $N = 1, L = M$  と置いた式が得られる。この計算で右辺第二項では、 $n = 2^{m-M}k + l$  とおき、 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$  を  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{2^{m-M}-1}$  と書き、 $k$  の和と  $b$  の積分  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2^{-M}} db$  は  $b + 2^{-M}k$  を  $b$  とすると  $\int_{-\infty}^{\infty} db$  となる。その後で  $b + 2^{-m}l$  を  $b$  とすると  $l$  についての和は因数  $2^{m-M}$  となる。□

[ $N > 1$  にたいする (12.6) の導出]  $\lambda \in \mathbf{R}$  とし、 $N = 1, L = M$  にたいする (12.6) で  $t, x, b$  を  $2^\lambda t, 2^\lambda x, 2^\lambda b$  で置き換え、さらに、 $f(2^\lambda t)$  を  $f(t)$  とすると、

$$\begin{aligned} f(t) &= 2^{M+\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{(M+\lambda)/2} \overline{\tilde{\phi}(2^{M+\lambda}(x-b))} dx \right\} 2^{(M+\lambda)/2} \phi(2^{M+\lambda}(t-b)) db \\ &+ \sum_{m=M}^{\infty} 2^{m+\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{(m+\lambda)/2} \overline{\tilde{\psi}(2^{m+\lambda}(x-b))} dx \right\} 2^{(m+\lambda)/2} \psi(2^{m+\lambda}(t-b)) db \end{aligned} \quad (12.10)$$

となる。(12.10) で  $\lambda = \nu/N$  とし、 $\nu$  について  $\nu_0 \in \mathbf{Z}$  から  $\nu_0 + N - 1$  まで加え、 $N$  で割り、 $M + \lambda$  と  $m + \lambda$  を  $m/N$  とし、 $L = MN + \nu_0$  と置くと、 $N > 1$  にたいする (12.6) が得られる。□

[(12.8) の導出] 下記補助定理 12.1 を用い、(12.6) で  $N \rightarrow \infty$  にする。または (12.10) を  $\lambda$  について  $\lambda_0$  から  $\lambda_0 + 1$  まで積分し、 $M + \lambda$  と  $m + \lambda$  を  $\lambda$  とすると、

$$f(t) = \int_{M+\lambda_0}^{M+\lambda_0+1} 2^\lambda \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{\lambda/2} \overline{\tilde{\phi}(2^\lambda(x-b))} dx \right\} 2^{\lambda/2} \phi(2^\lambda(t-b)) db \right] d\lambda \\ + \int_{M+\lambda_0}^{\infty} 2^\lambda \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{\lambda/2} \overline{\tilde{\psi}(2^\lambda(x-b))} dx \right\} 2^{\lambda/2} \psi(2^\lambda(t-b)) db \right] d\lambda$$

となり、ここで  $a = 2^{-\lambda}$ ,  $\log a = -\lambda \log 2$ ,  $A = 2^{-M-\lambda_0}$  とすると (12.8) が得られる。  $\square$

[(12.7) の導出] (12.6) で  $L \rightarrow -\infty$  として、(12.7) が得られる。  $\square$

[(12.9) の導出] (12.8) で  $A \rightarrow \infty$  として、(12.9) が得られる。  $\square$

**補助定理 12.1**  $L, L_1, M, X \in \mathbf{Z}$ ,  $X > M$ ,  $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ ,  $0 \leq \lambda_0 < 1$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L}{N} = M + \lambda_0$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L_1}{N} = X + \lambda_0$ ,  $g(t)/t \in \mathcal{L}^1(0, \infty)$  のとき、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=L}^{L_1} g(2^{-m/N}) = \int_{M+\lambda_0}^{X+\lambda_0} g(2^{-\lambda}) d\lambda = \frac{1}{\log 2} \int_B^A \frac{1}{a} g(a) da$$

が成り立つ。ここで、 $\lambda_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L_0}{N}$ ,  $\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L_1}{N}$ ,  $A = 2^{-M-\lambda_0}$ ,  $B = 2^{-X-\lambda_0}$  である。

[証明] 左辺で  $\lambda = m/N$  とすると、第 1 の等式が得られる。ここで、 $a = 2^{-\lambda}$ ,  $\log a = -\lambda \log 2$  とすると右辺になる。  $\square$

元の式 (12.4), (12.5) では  $2^{-m}$  の整数倍の場所を特別扱いしているのに比べ、(12.6)~(12.9) ではすべての場所を同等に扱っている。式 (12.4)~(12.7) では  $2^{-m}$  または  $2^{-m/N}$  のスケールを特別扱いしているのに比べ、(12.8), (12.9) ではすべてのスケール  $a$  の値を同等に扱っている。

**補助定理 12.2**  $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  たいし (12.6) が成り立つためには、 $\phi(t)$ ,  $\tilde{\phi}(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  が

$$\frac{1}{N} \sum_{m=L}^{L+N-1} \overline{\tilde{\phi}(2^{-m/N}w)} \hat{\phi}(2^{-m/N}w) + \frac{1}{N} \sum_{m=L}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}(2^{-m/N}w)} \hat{\psi}(2^{-m/N}w) = 1 \quad (12.11)$$

を満たすことが必要十分である。さらに、この条件の下で (12.8) も成り立つ。

[証明] (12.6) の Fourier 変換をとると、左辺は  $\hat{f}(w)$  となり、右辺は  $\hat{f}(w)$  に (12.11) の左辺を掛けた式になる。したがって、(12.6) が成り立つためには (12.11) が成り立つことが必要十分である。  $\square$

**補助定理 12.3**  $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  たいし (12.7) が成り立つためには、

$$\frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}(2^{-m/N}w)} \hat{\psi}(2^{-m/N}w) = 1 \quad (12.12)$$

が満たされることが必要十分である。さらに、この条件の下で (12.9) も成り立つ。

[証明] 補助定理 12.2 の証明で、(12.6), (12.11) を (12.7), (12.12) で置き換えればよい。  $\square$

例 12.1.1 節 9.5 の Meyer のウェーブレットは直交ウェーブレットであり、 $N = 1$  にたいする (12.12) を満たす。(9.44) で与えられる  $\hat{\psi}(w)$  は複素数値を取るが、これを絶対値で置き換え、

$$\hat{\psi}(w) = \begin{cases} 0, & |\frac{w}{2}| < \frac{\pi}{3} \\ \hat{\phi}(w + 2\pi), & -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{w}{2} \leq -\frac{\pi}{3} \\ \hat{\phi}(w - 2\pi), & \frac{\pi}{3} \leq \frac{w}{2} \leq \frac{2\pi}{3} \\ \hat{\phi}(\frac{w}{2}), & \frac{2\pi}{3} \leq |\frac{w}{2}| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0, & |\frac{w}{2}| > \frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (12.13)$$

としても、 $N = 1$  にたいする (12.12) は満たされる。

補助定理 12.4 (12.8) が成り立つためには

$$\frac{1}{\log 2} \int_{1/2}^1 \frac{1}{a} \overline{\hat{\phi}(aw)} \hat{\phi}(aw) da + \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{1}{a} \overline{\hat{\psi}(aw)} \hat{\psi}(aw) da = 1 \quad (12.14)$$

が満たされることが必要十分である。

[証明] (12.8) の Fourier 変換は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \hat{f}(w) \left[ \frac{1}{\log 2} \int_{A/2}^A \frac{1}{a} \overline{\hat{\phi}(aw)} \hat{\phi}(aw) da + \frac{1}{\log 2} \int_0^A \frac{1}{a} \overline{\hat{\psi}(aw)} \hat{\psi}(aw) da \right] \\ &= \hat{f}(w) \left[ \frac{1}{\log 2} \int_{1/2}^1 \frac{1}{a} \overline{\hat{\phi}(Aaw)} \hat{\phi}(Aaw) da + \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{1}{a} \overline{\hat{\psi}(Aaw)} \hat{\psi}(Aaw) da \right] \end{aligned}$$

したがって、(12.8) が成り立つためには、(12.14) が必要十分である。  $\square$

補助定理 12.5 (12.9) が成り立つためには

$$\frac{1}{\log 2} \int_0^\infty \frac{1}{a} \overline{\hat{\psi}(a)} \hat{\psi}(a) da = 1 \quad (12.15)$$

が満たされることが必要十分である。

[証明] (12.9) の Fourier 変換は次のようになる。

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\log 2} \hat{f}(w) \int_0^\infty \frac{1}{a} \overline{\hat{\psi}(aw)} \hat{\psi}(aw) da = \frac{1}{\log 2} \hat{f}(w) \int_0^\infty \frac{1}{a} \overline{\hat{\psi}(a)} \hat{\psi}(a) da$$

したがって、(12.9) が成り立つためには、(12.15) が満たされることが必要十分である。  $\square$

定理 12.2  $\phi(t), \psi(t), \tilde{\phi}(t), \tilde{\psi}(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  が、 $\phi(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}), \tilde{\phi}(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  を満たし、スケール関係 (8.12), (8.27) とそれに対応するスケール関係を満たし、 $\hat{\phi}(0)\overline{\hat{\phi}(0)} = 1$  であり、さらに (8.13), (8.28) とそれに対応する式で定義される  $m_0(w), \tilde{m}_0(w), m_1(w), \tilde{m}_1(w)$  が

$$m_0(w)\overline{\tilde{m}_0(w)} + m_1(w)\overline{\tilde{m}_1(w)} = 1 \quad (12.16)$$

を満たすとする。このとき、 $m_0(0)\overline{\tilde{m}_0(0)} = 1, m_1(0)\overline{\tilde{m}_1(0)} = 0$  であり、(12.6) ~ (12.9) が成り立つ。

この定理は、(12.6) ~ (12.9) が成り立つためには、 $\phi(t), \tilde{\phi}(t), \psi(t), \tilde{\psi}(t)$  が双直交条件を満たさなくても、スケール関係と (12.16) を満たすことが十分であることを示す。

[証明] 今の条件で (12.11) が成り立つことを示す。(12.16) で  $w$  を  $\frac{w}{2}$  とし、 $\hat{\phi}(\frac{w}{2})\overline{\hat{\phi}(\frac{w}{2})}$  を掛けると、

$$\hat{\phi}(w)\overline{\hat{\phi}(w)} + \hat{\psi}(w)\overline{\hat{\psi}(w)} = \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right)\overline{\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right)} \quad (12.17)$$

となる。この式から

$$\sum_{m=M_0}^M \hat{\psi}(2^m w)\overline{\hat{\psi}(2^m w)} = \hat{\phi}(2^{M_0-1}w)\overline{\hat{\phi}(2^{M_0-1}w)} - \hat{\phi}(2^M w)\overline{\hat{\phi}(2^M w)}$$

を得る。この式で  $M_0 \rightarrow -\infty$ 、 $M = -L$  とする。 $\phi(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 、 $\tilde{\phi}(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  であるから  $\hat{\phi}(w)$ 、 $\hat{\psi}(w)$  は連続関数である。したがって、右辺第一項は  $M_0 \rightarrow -\infty$  で  $\hat{\phi}(0)\overline{\hat{\phi}(0)} = 1$  となり、得られた式は  $N = 1$  にたいする (12.11) である。これから  $N \neq 1$  にたいする (12.11) を導く計算は、定理 12.1 での  $N = 1$  にたいする (12.6) からの  $N > 1$  にたいする (12.6) の導出と同様である。 $L \rightarrow -\infty$  にすると、(12.11) の左辺第一項は、Riemann-Lebesgue の定理により 0 となり、(12.11) は (12.12) となる。□

[定理 12.1 の (12.6)~(12.9) の別導出] 双直交条件が満たされるときには (8.18), (8.34), (8.35) が成り立つ。まず、(8.35) の二つの式を用い、次に (8.18), (8.34) を用いて

$$\begin{aligned} m_1(w)\overline{\tilde{m}_0(w)}m_0(w)\overline{\tilde{m}_1(w)} &= m_1(w+\pi)\overline{\tilde{m}_0(w+\pi)}m_0(w+\pi)\overline{\tilde{m}_1(w+\pi)} \\ &= [1 - m_1(w)\overline{\tilde{m}_1(w)}][1 - m_0(w)\overline{\tilde{m}_0(w)}] \\ &= 1 - m_1(w)\overline{\tilde{m}_1(w)} - m_0(w)\overline{\tilde{m}_0(w)} + m_1(w)\overline{\tilde{m}_1(w)}m_0(w)\overline{\tilde{m}_0(w)} \end{aligned}$$

を得る。これは (12.16) を示す。したがって、定理 12.2 により (12.6) ~ (12.9) が成り立つ。□

**例 12.1.2**  $m$  を正整数として、 $\phi(t)$  を  $m$  次のスプライン (節 9.3) として、

$$\hat{\phi}(w) = \hat{\psi}(w) = \hat{\theta}_{m+1}(w) = e^{-i(m+1)w/2} \left( \frac{\sin \frac{w}{2}}{\frac{w}{2}} \right)^{m+1} \quad (12.18)$$

とする。このとき、

$$m_0(w) = \tilde{m}_0(w) = e^{-i(m+1)w/2} \left( \cos \frac{w}{2} \right)^{m+1}, \quad 1 - m_0(w)\overline{\tilde{m}_0(w)} = 1 - \left( \cos \frac{w}{2} \right)^{2(m+1)}$$

であるから、たとえば、

$$m_1(w) = -e^{-iw/2} \sin \frac{w}{2}, \quad \tilde{m}_1(w) = -e^{-iw/2} \sin \frac{w}{2} \sum_{n=0}^m \left( \cos \frac{w}{2} \right)^{2n}$$

と置くと、(12.16) が満たされる。このとき、

$$\hat{\psi}(w) = -e^{-i(m+2)w/4} \frac{w}{4} \left( \frac{\sin \frac{w}{4}}{\frac{w}{4}} \right)^{m+2}, \quad \hat{\phi}(w) = \hat{\psi}(w) \sum_{n=0}^m \left( \cos \frac{w}{4} \right)^{2n} \quad (12.19)$$

である。この  $\psi(t)$  は  $m+1$  次のスプライン  $\theta_{m+1}(2t)$  の一回微分である。

## 12.2 積分ウェーブレット変換による表式 2

$\psi(t)$  が与えられたとき (12.7), (12.9) が満たされるように  $\tilde{\psi}(t)$  を定めることができることを示す。

定理 12.3  $\psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $N \in \mathbf{N}$  にたいし  $w$  の関数  $c_{\psi,N}(w)$  を

$$c_{\psi,N}(w) = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-m/N}w)|^2 \quad (12.20)$$

で定義する。 $c_{\psi,N}(w)$  が有限値をとるときには、関数  $\tilde{\psi}(t)$  をその Fourier 変換  $\hat{\tilde{\psi}}(w)$  が

$$\hat{\tilde{\psi}}(w) = \frac{\hat{\psi}(w)}{c_{\psi,N}(w)} \quad (12.21)$$

となるように定義するとき、 $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  は (12.7) と表される。また、(12.7) で  $\psi(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  をそれぞれ  $\tilde{\psi}(t)$ ,  $\psi(t)$  で置き換えた式も成り立つ。

[証明] 補助定理 12.3 の条件が成り立つことは明らか。  $\square$

ここで  $\psi_{a,b}(t)$  を

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (12.22)$$

とし、積分ウェーブレット変換  $(\Psi f)(a, b)$  を

$$(\Psi f)(a, b) = (f, \psi_{a,b}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |a|^{-1/2} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \quad (12.23)$$

で定義する。

定理 12.4  $\psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  にたいし定数  $C_{\psi,1}$ ,  $C_{\psi}$  を

$$C_{\psi,1} = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw, \quad C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw \quad (12.24)$$

で定義する。 $C_{\psi,1}$  が有限値をとるときには、 $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  は

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi,1}} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) db \right] da \quad (12.25)$$

と表される。また、 $C_{\psi}$  が有限値をとるときには、 $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  は

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) db \right] da \quad (12.26)$$

と表される。

[証明]  $N \rightarrow \infty$  とするとき補助定理 12.1 により (12.21) は

$$\hat{\tilde{\psi}}(w) = \frac{\hat{\psi}(w)}{\frac{1}{\log 2} C_{\psi,1}} \quad (12.27)$$

となる。これを (12.9) に代入すると (12.25) となる。また、(12.25), (12.26) は、補助定理 12.5 と同様に確かめられる。  $\square$

以上の二つの定理は、それぞれ関数  $c_{\psi,N}(w)$ , 数  $C_{\psi,1}$ ,  $C_{\psi}$  が有限値をとるときに成り立つ。これらの条件は許容条件 (admissibility condition) と呼ばれる。 $\psi(t)$  が  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  に属し、 $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$  であり、 $\hat{\psi}'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t\psi(t) dt$  が有限値を取るならば満たされる。

[ $C_\psi$  にたいする証明] 任意の  $\epsilon > 0$  にたいして、 $\delta > 0$  が存在して、 $|w| < \delta$  で

$$\left| \frac{\hat{\psi}(w)}{w} \right| < |\hat{\psi}'(0)| + \epsilon$$

となるので、

$$|C_\psi| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \int_{-\delta}^{\delta} (|\hat{\psi}'(0)| + \epsilon)^2 |w| dw + \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(w)|^2 dw$$

となる。 □

[ $C_{\psi,1}$  にたいする証明] 上の証明で  $w$  の積分範囲を  $w > 0$  に限ればよい。 □

[コメント] 関数  $c_{\psi,N}(w)$  は、 $N$  大で  $\frac{1}{\log 2} C_{\psi,1}$  で評価される。 [コメント終わり]

ウェーブレットを考えるとときには、通常  $\psi(t)$  として  $|t|$  大で減衰する関数を考えるので、この条件は自動的に満たされるものである。

例 12.2.1 メキシコ帽子ウェーブレットは

$$\psi(t) = -\frac{2}{3^{1/2}\pi^{1/4}} \frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2/2} = \frac{2}{3^{1/2}\pi^{1/4}} (1-t^2)e^{-t^2/2} = \frac{1}{3^{1/2}} [h_0(t) - 2^{1/2}h_2(t)] \quad (12.28)$$

で与えられる。ここで  $h_n(t)$  は節 6.4 の例 1 の Hermite 関数である。この  $\psi(t)$  を図 12.1 に示す。定数  $C_{\psi,1}$  は (6.55), (6.42) を用いて

$$C_{\psi,1} = \int_0^{\infty} \frac{1}{w} |\tilde{\psi}(w)|^2 dw = \int_0^{\infty} \frac{1}{w} 2\pi w^4 h_0(w)^2 dw = \frac{8}{3} \pi^{1/2} \int_0^{\infty} w^3 e^{-w^2} dw = \frac{4}{3} \pi^{1/2}$$

と評価される。(12.21) を用いるとき、関数  $c_{\psi,N}(w)$  の  $1 \leq w \leq 2^{1/N}$  での最大値と最小値の比は、 $N = 1, 2, 3, 4$  にたいして

1.08346, 1.000180, 1+2.67e-7, 1+3.32e-10

である。したがって、 $N \geq 3$  で  $c_{\psi,N}(w) \simeq C_{\psi,1}/\log 2$  としてよい。

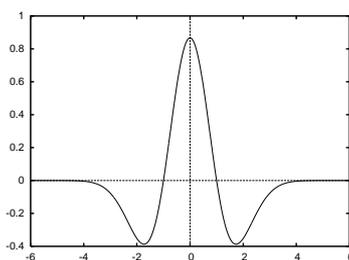


図 12.1: 例 12.2.1 のメキシコ帽子ウェーブレットの関数  $\psi(t)$

例 12.2.2 例 11.3.2 で、コンパクトな台を持つスプラインウェーブレットについて述べた。例 11.3.2 での 3 次スプラインの場合の  $c_{\psi,N}(w)$  の最大値と最小値の比は、 $N = 1, 2, 3, 4, 5$  にたいして

2.9736, 1.04427, 1.0009570, 1.00003324, 1.000008486

である。したがって、 $N \geq 4$  で  $c_{\psi,N}(w)$  は定数で、 $c_{\psi,N}(w) \simeq \frac{1}{\log 2} C_{\psi,1} = 0.0377409$  としてよい。

**例 12.2.3** 例 11.4.2 でも、コンパクトな台を持つスプラインウェーブレットについて述べた。その場合の  $c_{\psi,N}(w)$  の最大値と最小値の比は、 $N = 1, 2, 3, 4, 5$  にたいして

$$1.33111, 1.001958, 1.00002745, 1.000006279, 1.0000007796$$

である。したがって、 $N \geq 4$  で  $c_{\psi,N}(w)$  は定数で、 $c_{\psi,N}(w) \simeq \frac{1}{\log 2} C_{\psi,1} = 1.746182$  としてよい。

上の例での数値計算のプログラムを節末に記す。

次に、 $\phi(t), \psi(t)$  が与えられたとき (12.6), (12.8) が満たされるように  $\tilde{\phi}(t), \tilde{\psi}(t)$  を定めることができる可能性があることを示す。

**定理 12.5**  $\phi(t), \psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $N \in \mathbf{N}$  にたいし  $w$  の関数  $c_{\phi,\psi,N}(w)$  を

$$c_{\phi,\psi,N}(w) = \frac{1}{N} \sum_{m=L}^{L+N-1} |\hat{\phi}(2^{-m/N}w)|^2 + \frac{1}{N} \sum_{m=L}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-m/N}w)|^2 \quad (12.29)$$

で定義する。(12.20) で定義される  $c_{\psi,N}(w)$  が有限値をとり、 $c_{\phi,\psi,N}(w)$  が  $c_{\psi,N}(w)$  で近似されるときには、関数  $\tilde{\phi}(t), \tilde{\psi}(t)$  をその Fourier 変換  $\hat{\phi}(w), \hat{\psi}(w)$  が

$$\hat{\tilde{\phi}}(w) = \frac{\hat{\phi}(w)}{c_{\psi,N}(w)}, \quad \hat{\tilde{\psi}}(w) = \frac{\hat{\psi}(w)}{c_{\psi,N}(w)} \quad (12.30)$$

となるように定義するとき、 $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  は (12.6) と表される。また、(12.6) で  $\phi(t), \psi(t), \tilde{\phi}(t), \tilde{\psi}(t)$  をそれぞれ  $\tilde{\phi}(t), \tilde{\psi}(t), \phi(t), \psi(t)$  で置き換えた式も成り立つ。

[証明] 補助定理 12.2 の条件が成り立つことは明らか。 □

**定理 12.6**  $\phi(t), \psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $A \in \mathbf{R}$  にたいし  $w$  の関数  $c_{\phi,\psi,A}(w)$  を

$$c_{\phi,\psi,A}(w) = \int_{A/2}^A \frac{1}{a} |\hat{\phi}(aw)|^2 da + \int_0^A \frac{1}{a} |\hat{\psi}(aw)|^2 da \quad (12.31)$$

で定義する。(12.24) で定義される  $c_{\psi,1}$  が有限値をとり、 $c_{\phi,\psi,A}(w) = c_{\phi,\psi,1}(Aw)$  が定数  $C_{\psi,1}$  で近似できるときには、関数  $\tilde{\phi}(t), \tilde{\psi}(t)$  をその Fourier 変換  $\hat{\phi}(w), \hat{\psi}(w)$  が

$$\hat{\tilde{\phi}}(w) = \frac{\hat{\phi}(w)}{\frac{1}{\log 2} C_{\psi,1}}, \quad \hat{\tilde{\psi}}(w) = \frac{\hat{\psi}(w)}{\frac{1}{\log 2} C_{\psi,1}} \quad (12.32)$$

となるように定義するとき、 $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  は (12.8) と表される。

[証明] 補助定理 12.4 の条件が成り立つことは明らか。 □

### 本節の計算に関する数式処理システム Maxima のプログラム

**プログラム 12.2.1** 例 12.2.1 にたいする図 12.1 のグラフを描く。prog1221(a) または prog1221(b) を用いる。prog931(a) は節 9.3 節末のプログラムである。

```

prog1221(a)$
  fact:2/((3^0.5)*(%pi^0.25)); psi(t):=-fact*diff(exp(-0.5*t^2),t,2);
  plot2d(psi(t),[t,-6,10]);
prog1221(b); (prerequisite:[prog931(a)])$
  fact:2/((3^0.5)*(%pi^0.25)); psi(t):=fact*(1-t^2)*exp(-0.5*t^2);
  tm:-6; tx:6; pser(t):=psi(t); dtout();

```

プログラム 12.2.2 例 12.2.1~ 例 12.2.3 での  $c_{\psi,N}(w)$  の最大値と最小値の比を計算する。例 12.2.1 の場合、prog1222(a), prog1222(c) を用いる。例 12.2.2 の場合、prog1121(a), prog1222(b), prog1222(c) を用いる。例 12.2.3 の場合、prog1121(b), prog1222(b), prog1222(c) を用いる。

```

prog1222(a)$
  rtpi:%pi^0.5; F2(w):=(8/3)*rtpi*(w^4)*exp(-w*w);
prog1222(b); prerequisite:[prog1121(a) or prog1121(b)]$
  nu:3; atphi(w):=(sin(w/2)/(w/2))^(nu+1);
  am0pi(w):=sin(w/2)^(nu+1); am1(w):=am0pi(w)*ps[nu](w+%pi);
  atpsi(w):=am1(w/2)*atphi(w/2); F2(w):=atpsi(w)^2;
prog1222(c); prerequisite:[prog1222(a) or prog1222(b)]$
  for N:1 thru 5 do (a:1,fact:2^(1/N),af:2^(1/(20*N)),mxs:0.001,mns:1000,
    for n:0 thru 20 do (a:a*af,s:0,w:a*2^(-10),
      for m:0 thru 40*N do (w:w*fact,s:s+F2(w)),sn:float(s/N),
        if sn>mxs then mxs:sn,if sn<mns then mns:sn),
      rat:mxs/mns,print(N,mns,mxs,rat));

```

## 12.3 Parseval の等式

双直交基底にたいする Parseval の等式は節 7.4 の最後に与えられている。(12.4), (12.5) にたいし、その等式は

$$\begin{aligned}
 (f, f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\Phi}f)(2^{-M}, 2^{-M}n) \overline{(\Phi f)(2^{-M}, 2^{-M}n)} \\
 &+ \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(2^{-m}, 2^{-m}n) \overline{(\Psi f)(2^{-m}, 2^{-m}n)}
 \end{aligned} \tag{12.33}$$

$$(f, f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(2^{-m}, 2^{-m}n) \overline{(\Psi f)(2^{-m}, 2^{-m}n)} \tag{12.34}$$

となる。(12.6)~ (12.9) にたいする Parseval の等式は

$$\begin{aligned}
 (f, f) &= \frac{1}{N} \sum_{m=L}^{L+N-1} 2^{m/N} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Phi}f)(2^{-m/N}, b) \overline{(\Phi f)(2^{-m/N}, b)} db \\
 &+ \frac{1}{N} \sum_{m=L}^{\infty} 2^{m/N} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(2^{-m/N}, b) \overline{(\Psi f)(2^{-m/N}, b)} db
 \end{aligned} \tag{12.35}$$

$$(f, f) = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{m/N} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(2^{-m/N}, b) \overline{(\Psi f)(2^{-m/N}, b)} db \tag{12.36}$$

$$\begin{aligned}
(f, f) &= \frac{1}{\log 2} \int_{A/2}^A \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Phi}f)(a, b) \overline{(\Phi f)(a, b)} db \right] da \\
&\quad + \frac{1}{\log 2} \int_0^A \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(a, b) \overline{(\Psi f)(a, b)} db \right] da
\end{aligned} \tag{12.37}$$

$$(f, f) = \frac{1}{\log 2} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}f)(a, b) \overline{(\Psi f)(a, b)} db \right] da \tag{12.38}$$

である。

[(12.35), (12.37) の導出] (12.6), (12.8) の (12.4) からの導出と同様にして、(12.33) から導かれる。□

[(12.36), (12.38) の導出] (12.7), (12.9) の (12.5) からの導出と同様にして、(12.34) から導かれる。□

(12.25) にたいする Parseval の等式は

$$(f, f) = \frac{1}{C_{\psi,1}} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |(\Psi f)(a, b)|^2 db \right] da \tag{12.39}$$

である。

[(12.39) の導出] (12.38) に (12.27) を代入する。□

## 12.4 不確定性原理

本書では、ウェーブレットについては、スケーリング関数から出発して、直交または双直交ウェーブレットを作ることを考えた。これは数学的には自然な立場である。しかし、実際に、ある時間  $t$  の関数  $f(t)$  でどの時刻にどのような周波数の振動が重要であるかを知りたいときには、許容条件を満たすマザーウェーブレットを考え、それを用いてウェーブレット解析するのが自然である。このときに、 $\psi(t)$  は時間  $t$  の関数として局在し、しかもその Fourier 変換  $\hat{\psi}(w)$  が  $w$  の関数として局在していることが望まれる。ここで両者の局在性を同時によくすることはできないということを示す関係があることに注意しておく。

### Heisenberg の不確定性原理 (uncertainty principle)

$\psi(t)$  が殆どいたるところで微分可能であり、 $(1 + |t|)\psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $\psi'(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  であるときには

$$\langle (t - \langle t \rangle_t)^2 \rangle_t \langle (w - \langle w \rangle_w)^2 \rangle_w \geq \frac{1}{4} \tag{12.40}$$

という関係である。ここで、

$$\langle t^n \rangle_t = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^n |\psi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt}, \quad \langle w^n \rangle_w = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w^n |\hat{\psi}(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(w)|^2 dw}, \quad n = 0, 1, 2 \tag{12.41}$$

である。

[証明] 先ず、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (w - \langle w \rangle_w)^2 |\hat{\psi}(w)|^2 dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(-i\psi'(t) - \langle w \rangle_w \psi(t))(w)|^2 dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |-i\psi'(t) - \langle w \rangle_w \psi(t)|^2 dt \end{aligned}$$

に注意する。これと Schwarz の不等式を用いて

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle_t)^2 |\psi(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} (w - \langle w \rangle_w)^2 |\hat{\psi}(w)|^2 dw \\ &\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle_t) \psi(t) \overline{[-i\psi'(t) - \langle w \rangle_w \psi(t)]} dt \right|^2 \\ &\geq \left| \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle_t) \psi(t) \overline{[-i\psi'(t) - \langle w \rangle_w \psi(t)]} dt \right|^2 \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle_t) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\psi(t)|^2 dt \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt \right]^2 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(w)|^2 dw \end{aligned}$$

となる。

□



# 13

## 時系列の調和ウェーブレット解析

時系列に Fourier 解析を適用すると、どの周波数（振動数）が全体として重要かが分かる。どの周波数（振動数）が、どの時刻に重要かを知りたいときには、調和ウェーブレット解析を用いる。

節 9.4 の Shannon のウェーブレット、節 9.5 の Meyer のウェーブレットを用いる節 10.1 の展開が、調和ウェーブレット解析の例である。例 12.1.1 も、その例を与える。

この章では、 $L$  箇の実数値からなる時系列  $\{f(t)\}_{t=0}^{L-1}$  の調和ウェーブレット解析を考える。例として、7 時から 5 分おきに取りられた 1 日分のデータであるとする。それは、 $L = 288$  箇の数値からなる (図 13.1)。

この時系列は  $L$  次元ベクトル空間  $\mathbf{R}^L$  の要素として扱われる。

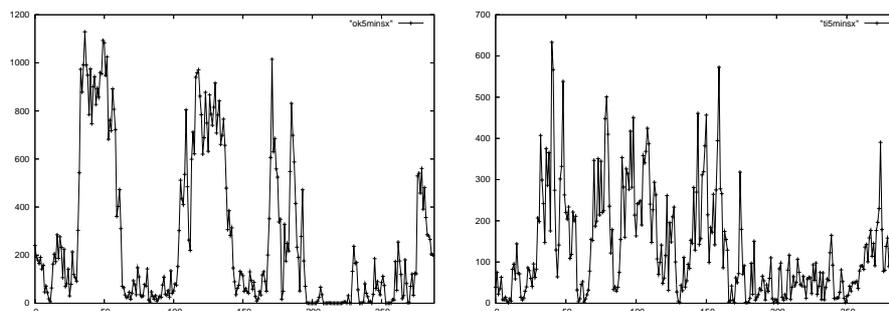


図 13.1: 7 時から 5 分おきに取りられた 1 日分の二組のデータ。288 箇の数値の時系列

### 13.1 時系列の Fourier 解析

#### 13.1.1 Fourier 解析 1

$L$  次元ベクトル空間  $\mathbf{R}^L$  での Fourier 解析では、基底ベクトルとして、 $p = 0, 1, 2, \dots, L/2$  にたいする  $\{\cos \frac{2\pi pt}{L}\}_{t=0}^{L-1}$  と  $p = 1, 2, \dots, L/2 - 1$  にたいする  $\{\sin \frac{2\pi pt}{L}\}_{t=0}^{L-1}$  を用いる。このとき、

Fourier 係数  $a_p, b_p$  を

$$a_p = \frac{2}{L} \sum_{t=0}^{L-1} f(t) \cos \frac{2\pi pt}{L}, \quad b_p = \frac{2}{L} \sum_{t=0}^{L-1} f(t) \sin \frac{2\pi pt}{L} \quad (13.1)$$

として、 $f(t)$  の Fourier 級数展開は

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{L/2-1} \left( a_p \cos \frac{2\pi pt}{L} + b_p \sin \frac{2\pi pt}{L} \right) + \frac{1}{2}a_{L/2} \cos \pi t \quad (13.2)$$

となり、Parseval の公式は

$$\frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} f(t)^2 = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{L/2-1} (a_p^2 + b_p^2) + \frac{1}{4}a_{L/2}^2 \quad (13.3)$$

となる。 $E_p = \frac{1}{2}(a_p^2 + b_p^2)$  はパワースペクトラム (power spectrum) と呼ばれる。それは、図 13.1 のデータにたいし、図 13.2 となる。この図は、このデータにおいて、どの波数  $p$  が重要であるかを示している。

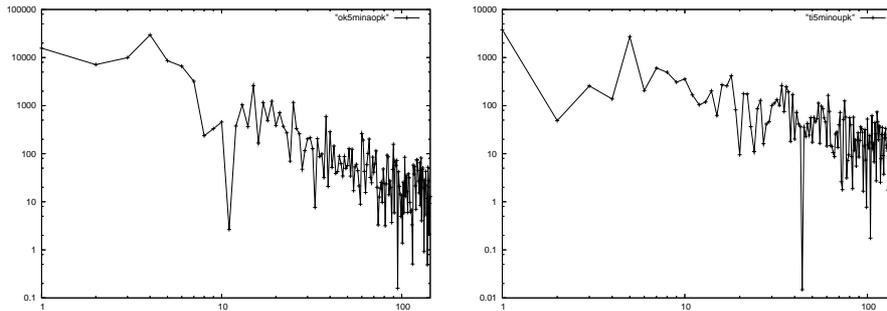


図 13.2: 図 13.1 の二組のデータのパワースペクトラム  $E_p$ 、横座標は  $p$ 。

### 13.1.2 Fourier 解析 2

指数関数を用いる Fourier 展開では、基底ベクトルとして、 $p = -L/1 + 1, -L/2 + 2, \dots, L/2$  にたいする  $\{e^{2\pi pt/L}\}_{t=0}^{L-1}$  を用いる。このとき、(13.1)~(13.3) は次のようになる。

Fourier 係数  $c_p$  を

$$c_p = \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} f(t) e^{-2\pi ipt/L} \quad (13.4)$$

とすると、 $c_{-p} = \overline{c_p}$  を満たす。 $f(t)$  の Fourier 級数展開は

$$f(t) = \sum_{p=-L/2+1}^{L/2} c_p e^{2\pi ipt/L} \quad (13.5)$$

となり、Parseval の公式は

$$\frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} f(t)^2 = \sum_{p=-L/2+1}^{L/2} |c_p|^2 \quad (13.6)$$

となる。パワースペクトラム  $E_p$  は、 $p = 0, p = L/2$  にたいし  $E_0 = |c_0|^2, E_{L/2} = |c_{L/2}|^2$  で、 $0 < p < L/2$  の整数にたいし  $E_p = |c_p|^2 + |c_{-p}|^2$  で与えられる。

$\tau > 0$  は実数であるとし、 $g(t)$  が  $0 \leq t < T = L\tau$  の実数  $t$  の関数であるとする。その Fourier 級数は

$$g(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p e^{2\pi i p t / (L\tau)} \quad (13.7)$$

である。ここで  $p > L/2, p \leq -L/2$  のとき  $c_p = 0$  が成り立つとする。このときには、整数  $n$  にたいし  $f(n) = g(n\tau)$  とすると、(13.7) は (13.5) となる。

(13.7) は  $p$  に対応する振動数は  $p/(L\tau)$  であることを示す。

## 13.2 調和ウェーブレット解析

与えられた整数  $L$  にたいし、次の条件を満たす整数  $J$  と整数の列  $\{n_j\}, \{m_j\}$  を選ぶ。 $n_0 = 0, n_1 = 1, m_0 = 1, n_{J+1} = L/2 - 1, n_{J+2} = L/2, m_{J+1} = 1$  とし、 $1 \leq j \leq J+1$  の整数  $j$  にたいし、 $n_j > 0, m_j = n_{j+1} - n_j > 0$  とする。

節 13.1.1 に対応して、ウェーブレット展開に用いるウェーブレットとして、 $1 \leq j \leq J$  の整数  $j$  にたい

$$\psi_j^{(c)}(t) = \left(\frac{2}{m_j L}\right)^{1/2} \sum_{p=n_j}^{n_{j+1}-1} \cos \frac{2\pi p t}{L}, \quad \psi_j^{(s)}(t) = \left(\frac{2}{m_j L}\right)^{1/2} \sum_{p=n_j}^{n_{j+1}-1} \sin \frac{2\pi p t}{L} \quad (13.8)$$

と、 $\psi_{L+1}^{(c)}(t) = \frac{1}{L^{1/2}}(-1)^t = \frac{1}{L^{1/2}} \cos(\pi t)$  と、スケール関数  $\phi_0(t) = \frac{1}{L^{1/2}}$  を用いる。

図 13.1 のデータを解析するのに用いた  $\{n_j\}, \{m_j\}$  を表 13.1 の (a) または (b) に示す。ここでは、 $J = 14$  とした。代表的な周期  $T_j$  が選ばれた後、それに対応する波数を  $p_j$  とし、表 13.1 の (a) では  $n_j$  は  $\log p_j$  が区間  $[\log n_j, \log(n_{j+1}-1)]$  の中央に近くなるように、 $n_j = [(p_{j-1} p_j)^{1/2}] + 1$  とした。ここで  $[x]$  は実数  $x$  を越えない最大の整数である。(b) では、それに近い値で  $m_j$  が  $L$  の除数となるように選ばれている。図 13.3 には、表 13.1 の (a) を用いたときの関数  $\psi_j^{(c)}(t-t')$  と  $\psi_j^{(s)}(t-t')$  が示されている。(13.8) におけるように、ある区間にある波数の正弦波の和で表される波は、波束 (wave packet) と呼ばれる。

すべての  $m_j$  が  $L$  の除数であるときには、 $j = 1, 2, \dots, J, k = 0, 1, 2, \dots, m_j - 1$  の  $\{\psi_j^{(c)}(t - t_j - \frac{kL}{m_j})\}$  と  $\{\psi_j^{(s)}(t - t_j - \frac{kL}{m_j})\}$  に、 $\phi_0(t) = 1/L^{1/2}$  と  $\psi_{J+1}^{(c)}(t) = (-1)^t/L^{1/2}$  と合わせたものは、正規直交基底となる。ここで、 $t_j$  は任意の整数である。

(b) を採用するとき、この基底による展開は

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{m_j-1} \left\{ \psi_j^{(c)}\left(t - t_j - \frac{kL}{m_j}\right) (\Psi_j^{(c)} f)\left(t_j + \frac{kL}{m_j}\right) + \psi_j^{(s)}\left(t - t_j - \frac{kL}{m_j}\right) (\Psi_j^{(s)} f)\left(t_j + \frac{kL}{m_j}\right) \right\} + \frac{1}{2} a_{L/2} \cos \pi t \quad (13.9)$$

表 13.1:  $L = 288$  のときの代表的な周期  $T_j$  と対応する波数  $p_j$ . (a)  $n_j$  の一つの選び方、(b) すべての  $m_j$  が  $L$  の除数となる  $n_j$  の選び方、(c) 節 13.3 の  $n_j, l_j$  の選び方。

$j$	period	$T_j$	$p_j$	(a)		(b)		(c)		
				$n_j$	$m_j$	$n_j$	$m_j$	$n_j$	$m_j$	$l_j$
0			0	0	0.5	0	0.5	0	1	0
1	24 h	288	1	1	1	1	1	1	1	0.5
2	12 h	144	2	2	1	2	1	2	1	0.5
3	8 h	96	3	3	1	3	1	3	1	0.5
4	6 h	72	4	4	1	4	1	4	1	0.5
5	4 h	48	6	5	2	5	2	5	1	0.5
6	3 h	36	8	7	3	7	3	6	3	0.5
7	2 h	24	12	10	4	10	4	9	4	1.5
8	90 m	18	16	14	6	14	6	13	6	2
9	1 h	12	24	20	10	20	8	19	10	3
10	40 m	8	36	30	12	28	12	29	12	5
11	30 m	6	48	42	17	40	16	41	17	6
12	20 m	4	72	59	25	56	24	58	25	8.5
13	15 m	3	96	84	34	80	32	83	34	12.5
14	10 m	2	144	118	26	112	32	117	26	17
15	10 m	2	144	144	0.5	144	0.5	143	1	0.5
16				145	0	145	0	144	0	0

となる。展開係数は

$$\begin{aligned}
 (\Psi_j^{(c)} f)(t') &= \left(\frac{L}{2m_j}\right)^{1/2} \sum_{p=n_j}^{n_{j+1}-1} \left(a_p \cos \frac{2\pi p t'}{L} + b_p \sin \frac{2\pi p t'}{L}\right), \\
 (\Psi_j^{(s)} f)(t') &= \left(\frac{L}{2m_j}\right)^{1/2} \sum_{p=n_j}^{n_{j+1}-1} \left(b_p \cos \frac{2\pi p t'}{L} - a_p \sin \frac{2\pi p t'}{L}\right)
 \end{aligned} \tag{13.10}$$

で与えられる。(13.9) にたいする Parseval の式は

$$\frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} f(t)^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{m_j-1} \left\{ |(\Psi_j^{(s)} f)(t_j + \frac{kL}{m_j})|^2 + |(\Psi_j^{(c)} f)(t_j + \frac{kL}{m_j})|^2 \right\} + \frac{1}{4} a_{L/2}^2 \tag{13.11}$$

と書ける。

(13.9), (13.11) は、 $t_j$  を任意の整数として成り立つので、 $t_j$  を含む項を 0 から  $L/m_j - 1$  まですべて  $t_j$  について加え合わせ、 $L/m_j$  で割ると、

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^J \frac{m_j}{L} \sum_{t'=0}^{L-1} \left\{ \psi_j^{(c)}(t-t') (\Psi_j^{(c)} f)(t') + \psi_j^{(s)}(t-t') (\Psi_j^{(s)} f)(t') \right\} + \frac{1}{2} a_{L/2} \cos(\pi t), \tag{13.12}$$

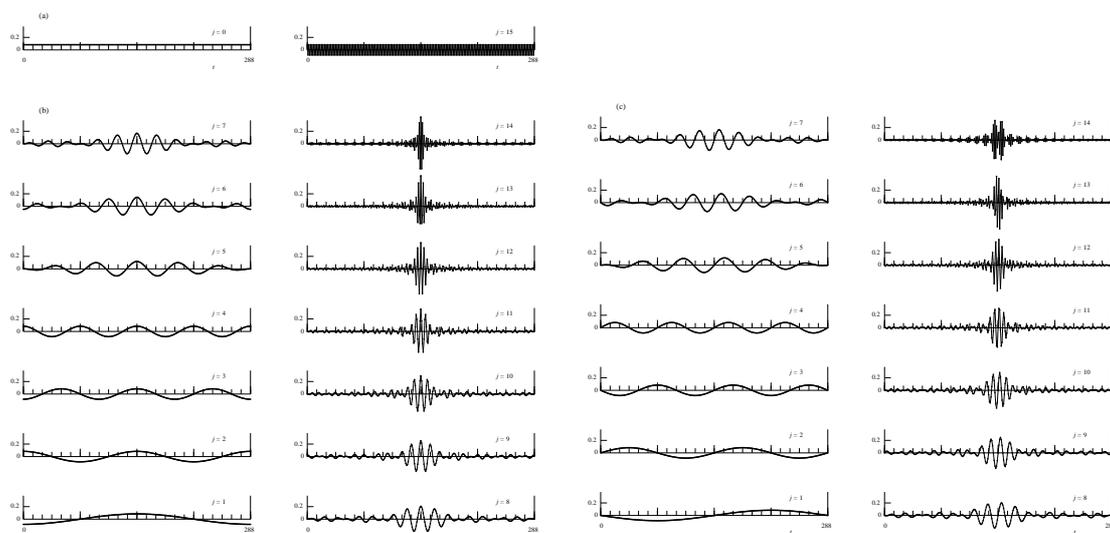


図 13.3:  $n_j$  に表 13.1 (a) の値を用いたときのウェーブレット。(a)  $\phi_0(t - t')$ ,  $\psi_{J+1}^{(c)}(t - t')$ , (b)  $\psi_j^{(c)}(t - t')$ , (c)  $\psi_j^{(s)}(t - t')$ 。ここで  $t' = L/2$ 。

$$\frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} f(t)^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^J \sum_{t'=0}^{L-1} e_j(t') + \frac{1}{4} a_{L/2}^2 \tag{13.13}$$

を得る。ここで、

$$e_j(t') = \frac{m_j}{L} \{ |(\Psi_j^{(c)} f)(t')|^2 + |(\Psi_j^{(s)} f)(t')|^2 \} \tag{13.14}$$

がパワースペクトラムの役割をする。

(13.9), (13.11) は、すべての  $m_j$  が  $L$  の除数であるときに成り立つ式であるが、(13.12), (13.13) は、その条件がなくても成り立つことが確かめられる。

これを確かめるには、(13.12), (13.13) の右辺に (13.8), (13.10) を代入し  $t'$  についての和を実行し、(13.2), (13.3) と比較すればよい。

図 13.1 のデータにたいする  $e_j(t)$  を図 13.4 に示す。ここでは  $n_j$  として表 13.1 (a) の値を用いた。この図は、このデータにおいて、どの時刻  $t$  にどの波数のグループ  $j$  が重要であることを示している。

図 13.5 に  $\bar{E}_j = \frac{1}{L} \sum_{t'=0}^{L-1} e_j(t') = \frac{1}{2m_j} \sum_{p=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_p^2 + b_p^2)$  を示す。これは、グループ  $j$  のそれぞれにたいし、図 13.1 のグラフを  $p$  について平均したものである。

本節の計算に関係する数式処理システム Maxima のプログラム

プログラム 13.2.1 表 13.1 (a) の  $p_j, n_j, m_j$  を求める計算プログラム。

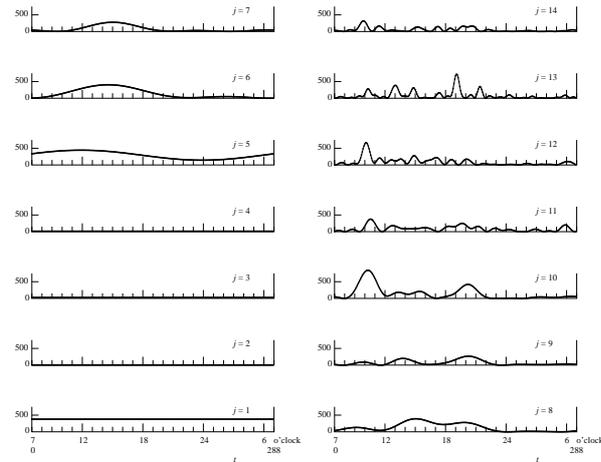


図 13.4: 図 13.1 のデータにたいするウェーブレット展開 (13.12) のパワースペクトラム  $e_j(t)$

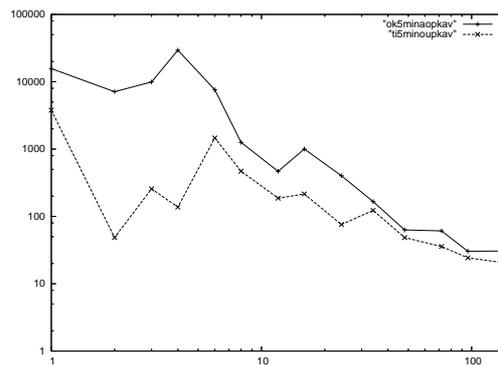


図 13.5: 図 13.1 の二つのデータに対する調和ウェーブレットに基づくパワースペクトル  $\bar{E}_j$ 、横座標は  $p_j$ 。上(下)の曲線が図 13.1, 図 13.2 の左(右)の図に対応する。

```

prog1321(a)$
  L:288;J:14; meyer:0;
prog1321(b): prerequisite:[prog1321(a) or prog1331]$
  for j:0 thru 3 do p[j]:j; n[0]:0;m[0]:0.5;l[0]:0;
  for j:4 thru J+1 do (if j=10 then p[j]:36 else p[j]:2*p[j-2]);
  p[J+1]:L/2;p[J+2]:L/2+1;m[J+2]:0;l[J+1]:0.5;l[J+2]:0;
  mj:0.5; if meyer>0 then mj:1; m[0]:mj;m[J+1]:mj;
  for j:1 thru J+2 do ( if j>J then nj:L/2+j-J-1
    else (nj:sqrt(p[j-1]*p[j]),nj:float(nj),nj:entier(nj)+1),
    if meyer>0 then (if j>5 then nj:nj-1), n[j]:nj,
    if j>1 and j<J+2 then m[j-1]:n[j]-n[j-1],
    if j<=J then (lj:m[j-1]/2,lj:float(lj), l[j]:lj));
  if meyer=0 then ( for j:0 thru J+2 do print(j,p[j],n[j],m[j]))
  else ( for j:0 thru J+2 do print(j,p[j],n[j],m[j],l[j]));

```

### 13.3 急速減衰調和ウェーブレット解析

#### 13.3.1 急速減衰調和ウェーブレット 1

与えられた正整数  $L$  にたいし、正整数  $J$  と、次の条件を満たす整数の数列  $\{n_j\}$ ,  $\{m_j\}$ , 実数の数列  $\{l_j\}$  を選ぶ。  $n_0 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $m_0 = 1$ ,  $l_0 = 0$ ,  $l_1 = 0.1$ ,  $n_{J+1} = L/2 - 1$ ,  $n_{J+2} = L/2$ ,  $m_{J+1} = 1$ ,  $l_{J+1} = 0.1$ ,  $l_{J+2} = 0$  とし、  $0 \leq j \leq J+1$  を満たす  $j$  にたいし、  $n_j \geq 0$ ,  $m_j = n_{j+1} - n_j > 0$ ,  $l_j \geq 0$ ,  $l_j + l_{j+1} \leq m_j$  とする。

$L = 288$  の場合に、  $J = 14$  とした  $n_j$ ,  $m_j$ ,  $l_j$  の選び方の例が表 13.1(c) に示されている。その Maxima のプログラムが節末にある。

$0 \leq j \leq J+1$  を満たす  $j$  にたいし、ウェーブレット  $\psi_j(t)$  は、  $0 \leq t \leq L-1$  の整数  $t$  の関数として、そのフーリエ係数  $\tilde{\psi}_j(p)$  により次の式で与えられる。

$$\psi_j(t) = \sum_{p=-L/2+1}^{L/2} \tilde{\psi}_j(p) e^{2\pi i p t / L} \quad (13.15)$$

ここで  $\psi_j(t)$  は実数とする。したがって、フーリエ係数  $\tilde{\psi}_j(p)$  は  $\tilde{\psi}_j(-p) = \overline{\tilde{\psi}_j(p)}$  を満たす。(13.15) により、  $\psi_j(t)$  はしばしば周期  $L$  の周期関数として扱われる。ここでの  $\psi_0(t)$  はスケーリング関数と呼ばれるべきものである。

ここでは、  $0 \leq j \leq J+1$ ,  $0 \leq p \leq L/2$  の整数  $j$ ,  $p$  にたいし  $\tilde{\psi}_j(p) = \overline{\tilde{\psi}_j(-p)}$  は

$$\tilde{\psi}_j(p) = \begin{cases} e^{-i[\frac{\pi}{4} - (p-n_j)\pi/(4l_j)]} u_j(n_j - p), & j > 0, \quad n_j - l_j \leq p \leq n_j + l_j, \\ 1, & n_j + l_j \leq p \leq n_{j+1} - l_{j+1}, \\ e^{i[\frac{\pi}{4} + (p-n_{j+1})\pi/(4l_{j+1})]} u_{j+1}(p - n_{j+1}), & j < J+1, \quad n_{j+1} - l_{j+1} \leq p \leq n_{j+1} + l_{j+1}, \\ 0, & \text{以上以外} \end{cases} \quad (13.16)$$

とする。ここで、  $u_j(l)$  は、正整数  $j$  にたいし  $-[l_j] \leq l \leq [l_j]$  を満たす整数  $l$  の実数値関数であり、  $u_j([l_j]) = 0$  であり、条件  $u_j(l)^2 + u_j(-l)^2 = 1$  を満たすものとする。

$u_j(l)$  としては

$$u_j(l) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{4l_j}\right)\right) \quad (13.17)$$

を採用する。

このとき、  $1 \leq j \leq J$  を満たすすべての整数  $j$  にたいして、  $m_j$  が  $n_j$  の除数であり、  $L/2$  の除数であるとするれば、  $\tilde{\psi}_j(p)$ ,  $\psi_j(t)$  は、次の正規直交条件を満たす。

$$\frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \psi_j(t) \psi_{j'}(t) = \sum_{p=-L/2+1}^{L/2} \tilde{\psi}_j(p) \overline{\tilde{\psi}_{j'}(p)} = 2m_j \delta_{j,j'} \quad (13.18)$$

このとき、  $0 \leq j \leq J+1$  を満たす整数  $j$ ,  $0 \leq k \leq 2m_j - 1$  を満たす整数  $k$  の  $(1/\sqrt{2m_j})\psi_j(t - kL/(2m_j))$  は直交基底となる。

### 13.3.2 急速減衰調和ウェーブレット 2

$\tilde{\psi}_j(p)$  として、(13.16) の  $\tilde{\psi}_j(p)$  の絶対値を採用する。  $0 \leq j \leq J+1, 0 \leq p \leq L/2$  の整数  $j, p$  にたいし  $\tilde{\psi}_j(p) = \overline{\tilde{\psi}_j(-p)}$  は次のものとする。

$$\tilde{\psi}_j(p) = \begin{cases} u_j(n_j - p), & j > 0, n_j - l_j \leq p \leq n_j + l_j, \\ 1, & n_j + l_j \leq p \leq n_{j+1} - l_{j+1}, \\ u_{j+1}(p - n_{j+1}), & j < J+1, n_{j+1} - l_{j+1} \leq p \leq n_{j+1} + l_{j+1}, \\ 0, & \text{以上以外} \end{cases} \quad (13.19)$$

この  $\tilde{\psi}_j(p)$  は実数値を取り、非負であり、  $\frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \psi_j(t)^2 = \sum_{p=-L/2+1}^{L/2} \tilde{\psi}_j(p)^2 = 2m_j$  を満たすが、(13.18) での  $j \neq j'$  にたいする直交条件は満たさない。

**13.3.3 展開式と Parseval の等式** ここで、ウェーブレット変換  $(\Psi_j f)(t')$  を、  $0 \leq t' \leq L-1$  を満たす整数  $t'$  にたいし、次式で定義する。

$$(\Psi_j f)(t') = \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \psi_j(t) f(t' + t) \quad (13.20)$$

このとき、次式が成り立つ。

$$(\Psi_j f)(t') = \sum_{p=-L/2+1}^{L/2} \overline{\tilde{\psi}_j(p)} c_p e^{2\pi i p t' / L} \quad (13.21)$$

(13.20) により、  $(\Psi_j f)(t')$  は実数値をとる。

次の定理が証明される。

**定理 13.1**  $J, \{n_j\}, \{l_j\}$  はこの節の始めに記した条件を満たし、  $\tilde{\psi}_j(p)$  が (13.16) または (13.19) で与えられ、  $\psi_j(t)$  と  $(\Psi_j f)(t')$  が (13.15) と (13.20) で与えられるとする。このとき、展開式

$$f(t) = \sum_{j=0}^{J+1} \frac{1}{L} \sum_{t'=0}^{L-1} \psi_j(t-t') \{(\Psi_j f)(t')\} \quad (13.22)$$

が成り立ち、さらに Parseval の等式

$$\frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} f(t)^2 = \sum_{j=0}^{J+1} \frac{1}{L} \sum_{t'=0}^{L-1} e_j(t') \quad (13.23)$$

が成り立つ。ここで、  $e_j(t')$  は

$$e_j(t') = \{(\Psi_j f)(t')\}^2 \quad (13.24)$$

である。

[証明] (13.22), (13.23) の右辺に (13.15), (13.21) を代入し、  $t'$  についての和を実行すると、(13.22), (13.23) が成り立つためには  $\sum_{j=0}^{J+1} |\tilde{\psi}_j(p)|^2 = 1$  が十分条件であることが確かめられる。  $\square$

(13.23) により、  $e_j(t')$  は時刻  $t'$  に  $j$  番目のウェーブレットが持っているエネルギーとみなすことができる。したがって、  $e_j(t')/(2m_j)$  が、そこでのエネルギー密度となる。

本節の計算に関する数式処理システム Maxima のプログラム

プログラム 13.3.1 表 13.1 (c) の  $p_j, n_j, m_j, l_j$  を求める計算プログラム。prog1331, prog1321(b) を用いる。

```
prog1331$
  L:288;J:14; meyer:1; meyer:2; meyer:3;
```

プログラム 13.3.2 (13.19), (13.15) で与えられる  $\tilde{\psi}_j(w), \psi_j(t)$  を求める計算プログラム。

```
prog1332; prerequisites:[prog1321(b),prog952(a)]$
  piqt:%pi/4;pihf:%pi/2;hf:1/2;dw:2*%pi/L;
  writefile("outfile");
  for j:0 thru J+1 do (nj:n[j],nj1:n[j+1],
    if meyer=0 then (nj1:nj1-1,lj:0,lj1:0) else (lj:1[j],lj1:1[j+1]),
    m:0,lji:entier(lj),lj1i:entier(lj1),if lj=0 then lj:0.5,if lj1=0 then lj1:0.5,
    for w:nj-lji thru nj1+lj1i do (m:m+1,aphw[m]:w*dw,
      if w=0 or w=L/2 then ph:0.5 else ph:hpsi(w), aphc[m]:ph), mx:m,
      print("j=",j), for t:0 thru L-1 do (ps:phit(2,t-L/2), print(t,ps)));
  closefile();
```

## あとがき

第 13 章で調和ウェーブレット解析を取り上げた。これは、  
T.Morita and T. Takeuchi, Harmonic Wavelet Analysis of Time Sequence,  
Interdisciplinary Information Sciences, Vol. 4, No. 2, pp. 139-148 (1998)  
T.Morita and M. Kaneko, Harmonic Wavelet Analysis of Sound,  
Interdisciplinary Information Sciences, Vol. 14, No. 2, pp. 245-253 (2008)  
の一部を紹介したものである。なお、いくつかの図は

守田徹、佐藤憲一、Harmonic wavelet expansion and power spectrum、  
平成 17 年度日本大学工学部学術研究報告会講演要旨集、総合教育部会  
による。

本書では、スケーリング関数、マザーウェーブレットのグラフは Haar のウェーブレット、  
Daubechies のウェーブレット  $N = 2$ 、1 次、3 次ののスプラインのウェーブレット、メキシコ帽  
子以外載せていない。次の著書に多くのグラフが載っているので参考にされたい。

榎原進著 ウェーブレット ビギナーズガイド 東京電機大学出版局 (1995)

主としてスプラインウェーブレットの計算に関係して、数式処理システム Maxima のプログ  
ラムを記載した。Maxima については、次の本に詳しい。

横田博史著 はじめての Maxima 工学社 (2008)

## 索引

## Alphabet

- Banach 空間 ..... 48  
 Bessel の不等式 ..... 59  
 Cauchy 列 (ノルム空間) ..... 48  
 Cauchy 列 (数列) ..... 5  
 Chebyshev の多項式 ..... 65  
 Daubechies のウェーブレット ..... 135  
 Dirac のデルタ関数 ..... 90  
 Fatou の補題 ..... 25  
 Fourier 逆変換の公式 ..... 70  
 Fourier 逆変換の公式 ( $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の) ..... 75  
 Fourier 級数 ..... 62,63  
 Fourier 級数 (時系列の) ..... 160  
 Fourier 係数 ..... 62,63  
 Fourier 変換 ..... 69  
 Fourier 変換 ( $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  の) ..... 73  
 Franklin のウェーブレット ..... 108,141  
 Fubini の定理 ..... 29  
 Fubini の定理 (微分に関する) ..... 15  
 Haar のウェーブレット ..... 97,99,107  
 Heaviside の階段関数 ..... 55  
 Heine-Borel の定理 ..... 9  
 Hermite の多項式 ..... 66  
 Hermite 関数 ..... 81  
 Hilbert 空間 ..... 48  
 Kronecker のデルタ ..... 58  
 Lebesgue の定理 ..... 24  
 Lebesgue の定理の拡張 ..... 25  
 Lebesgue の定理 (微分に関する) ..... 14  
 Lebesgue 積分 ..... 19  
 Legendre の多項式 ..... 65  
 Levi の定理 ..... 22  
 Lipschitz の条件 ..... 35  
 Maxima ... 111,115,120,138,143,154,163,166  
 Meyer のウェーブレット ..... 118,150  
 Nyquist の周波数 ..... 130  
 Parseval の等式 ..... 60  
 Parseval の等式 (Fourier 変換) ..... 71  
 Parseval の等式 ( $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  Fourier 変換) ... 74  
 Parseval の等式 (ウェーブレット) ..... 155  
 Parseval の等式 (双直交の基底) ..... 89  
 Poisson の和の公式 ..... 82  
 Riemann 積分 ..... 21  
 Riemann-Lebesgue の定理 ..... 40  
 Riesz 基底 ..... 88  
 Riesz-Fischer の定理 ..... 52  
 Rodrigues の公式 ..... 65  
 Schmidt の直交化 ..... 61  
 Schwarz の不等式 ..... 44  
 Shannon のウェーブレット ..... 117  
 Shannon のサンプリング定理 ..... 129  
 Taylor の公式 ..... 12  
 Weierstrass の近似定理 ..... 66  
 Weierstrass の判定法 ..... 10  
 Wiener-Khinchine の定理 ..... 74  
 Wiener-Khinchine の定理の系 ..... 75
- カタカナ**  
 ウェーブレット ..... 97  
 ウェーブレット (Daubechies) ..... 135  
 ウェーブレット (Franklin) ..... 108,141  
 ウェーブレット (Haar) ..... 97,99,107  
 ウェーブレット (Meyer) ..... 118,150  
 ウェーブレット (Shannon) ..... 117  
 ウェーブレット (メキシコ帽子) ..... 153  
 ガンマ関数 ..... 55

コンパクト	8	可測集合	27
コンパクトな台	8	可分	57
サンプリング定理 (Shannon)	129	階段関数	17
スカラー積	44	階段関数 (Heaviside の)	55
スケーリング関数	98	完全	59
スケール関係	100	完備	48
スプライン	112,142	緩増加超関数	93
テスト関数	90	関数空間 $C^n$	47
ノルム	44	関数空間 $\mathcal{D}(\mathbf{R})$	78
ノルム (線形作用素)	85	関数空間 $\mathcal{L}^1$	19,50
ノルム空間	44	関数空間 $\mathcal{L}^2$	51
パワースペクトラム	160	関数空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$	78
ベクトル空間	43	基底	58
ベクトル空間 ( $n$ 次元)	43	逆作用素	77
マザーウェーブレット	97	逆変換の公式 (Fourier 変換)	70
メキシコ帽子ウェーブレット	153	逆変換の公式 ( $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ の Fourier 変換)	75
モーメント	121	級数	6
ユニタリ作用素	76	共役な作用素	88
あ行		共役空間	85
一次従属	57	局所可積分	28
一次独立	57	区間	1
一様収束	10	空集合	2
一様連続	9	広義積分	25
押さえられる	26	合成関数	54
か行		合成関数の Fourier 変換	71
下界	2	合成積	54
下極限	4	さ行	
下限	2	再構成アルゴリズム	125
可算個	1	三角多項式	62
可算集合	2	三角不等式	45
可積分	19	時系列	130
可測関数	26	射影定理	84
		収束	3

収束 (級数) .....	6	直和 .....	84
集合 .....	1	通常超関数 .....	90
上界 .....	2	等長 .....	76
上極限 .....	4	同型 .....	76
上限 .....	2	導関数 .....	11
数列空間 $l^2, l^1, l^\infty, l^m$ .....	45	特性関数 .....	8
正規直交系 .....	58		
正規直交条件 .....	58	な行	
絶対連続 .....	35	内積 .....	44
線形空間 .....	43		
線形作用素 .....	76	は行	
線形汎関数 .....	85	非整数回積分 (Riemann-Liouville の) .....	56
漸化式 .....	64	非整数回積分 (右側超関数の) .....	92
全変動 .....	12	非整数回微分 (Riemann-Liouville の) .....	56
双対空間 .....	85	非整数回微分 (右側超関数の) .....	92
双直交の基底 .....	89	微係数 .....	11
双直交ウェーブレット基底 .....	98	微分に関する Fubini の定理 .....	15
測度 .....	27	微分に関する Lebesgue の定理 .....	14
		微分可能 .....	11
た行		不確定性原理 .....	156
多項式 (Chebyshev) .....	65	不定積分 .....	33
多項式 (Hermite) .....	66	部分積分 .....	37
多項式 (Legendre) .....	65	分解公式 .....	125
多項式増加 .....	93	平均収束 .....	52
多重解像度解析 .....	98	平均値の定理 .....	11
台 .....	8	平均値の定理 (第一) .....	37
第一平均値の定理 .....	37	平均値の定理 (第二) .....	38
第二平均値の定理 .....	38	閉部分空間 .....	83
超関数 .....	90	閉包 .....	8
超準解析 .....	4	補空間 .....	84
稠密 .....	8	殆どいたるところで .....	8
直交系 .....	58		
直交条件 .....	58	ま行	
直交補空間 .....	84	右側超関数 .....	92

無限集合 .....	2
無限小実数 .....	4
無限積 .....	16
無限大数 .....	4

## や行

有界 .....	2
有界 (関数の) .....	9
有界 (線形作用素) .....	76
有界 (点集合) .....	8
有界な台 (右側で (左側で)) .....	8
有界変動関数 .....	12
有限集合 .....	2
要素 .....	1

## ら行

零ベクトル .....	44
零集合 .....	8
零要素 .....	44
連続 .....	9
連続作用素 .....	76