

UD
PROJECT



連続体力学の基礎

れんぞくたいりきがくのきそ
Fundamentals of Continuum Mechanics

古口日出男・永澤 茂
共 著

GIGAKU Press

連続体力学の基礎

れんぞくたいりきがくのきそ
Fundamentals of Continuum Mechanics

古口日出男・永澤 茂
共 著

本書の目的と使い方

1. 本書の目的

本書は、工学部機械系の講義において学習される内容をまとめたものです。この基礎講座では、連続体としての固体にも流体にも共通な力学の原理を学びます。また、材料力学や流体力学に共通する数学的な問題を学んで、共通の数学的性質を理解します。そして数学的な用語を使って連続体の基本的な性質や特徴を表現できるようになることを目指します。

2. 達成したい目標

本書の第一の目標は、連続体の考え方を知り、応力、ひずみ、力の平衡方程式の意味を理解することです。さらに、場の支配方程式の意味を理解して、場の支配方程式を導出できることが第二の目標です。様々な保存則や原理を理解することで、連続体の力学の全貌が見えてくるでしょう。

3. 核となる用語(keywords)

連続体の考え方を習得するためには、幾つかの専門用語を正確に理解することが必要です。Internet で検索するときや参考書を調べるとき、以下の用語に注意してください。

引張 (tensile) ・ 圧縮 (compressive) ・ せん断 (shear) 応力
ひずみ (strain),
弾性 (elasticity) と 塑性 (plasticity),
粘性 (viscosity) と 速度 (velocity),
運動量の保存則, エネルギーの保存則, 質量の保存則,
ベクトル (vector) と テンソル (tensor),
基底ベクトル (basic vector),
束縛ベクトル (bound vector) と 自由ベクトル (free vector),

れんぞくたい
連続体

こたい りゅうたい
固体, 流体

きょうつう
共通

りきがく ちから
力学, 力

げんり ざいりょう
原理, 材料

せいしつ とくちよう
性質, 特徴

ひょうげん たっせい
表現, 達成

めざ おうりよく
目指す, 応力

へいこう しはい
平衡, 支配

ほうていしき
方程式

いみ ば
意味, 場

ほぞんそく ぜんぼう
保存則, 全貌

どうしゅつ かく
導出, 核

せんもん ようご
専門, 用語

ひっぱり あつしゆく
引張, 圧縮

せん断

だんせい そせい
弾性, 塑性

ねんせい そくど
粘性, 速度

うんどうりょう しつりょう
運動量, 質量

きてい そくばく
基底, 束縛

たへんすう びぶん
多変数, 微分

せきぶん
積分

ざひょうへんかん
座標変換

ぶつしつざひょう
物質座標

じつしつ
実質微分

そまじ そうわきやく
添字, 総和規約

くうかん じかん
空間, 時間

へんけい
変形

はっさん かいてん
発散, 回転

こうせい
構成方程式

ぜんびぶん ぞうぶん
全微分, 増分

へん
偏微分

じょう
常微分

れんきりつ
連鎖律

ぎょうれつ
行列

多変数の微分 (differentiation of functions with several variables)

積分 (integration),

座標変換 (coordinate transformation),

物質座標 (material coordinate)

物質微分(material derivative) = 実質微分(substantial derivative),

添字 (index), 総和規約 (summation convention),

空間(space) と時間 (time),

変形 (deformation) , 場 (field) と平衡 (equilibrium),

自由物体 (free body),

発散 (divergence)と回転 (rotation),

構成方程式 (constitutive equation),

Leibniz の積分公式 (Leibniz integral rule) と

Gauß の発散定理 (Gauss' divergence theorem),

全微分 (total differential) と増分 (increment),

偏微分 (partial derivative) と常微分(ordinary differential),

偏微分に関する連鎖律の公式 (chain rule for partial derivative),

行列とベクトルの積 (multiplication of a matrix by a vector) ,

行列と行列の積 (multiplication of matrices)

4. 本書の内容および本書を使った学習の方法

はじめに連続体力学の入門として, 固体材料の変形の基礎式と流体材料の流れの基礎式を導出する考え方を学びます. 連続体力学において変形場や流れ場の表示に用いられるベクトルとテンソルの基本的な性質について学びます. 連続体における応力とひずみの考え方およびそれらの求め方, 応力とひずみの関係について学びます. 固体および流体における変形場や流れ場の支配方程式の導出方法を学びます. 様々な保存則のうち, 質量の保存則, エネルギーの保存則, 運動量の保存則について学びます. 演習問題を多く解くことによって, 各項目の内容をより深く理解できるようになります.

ざいりょう
材料

なが ば
流れ場

うんどうりょう
運動量

えんしゅうもんだい
演習問題

こうもく と
項目, 解く

目次

本書の目的と使い方 (How to use this book and purposes)	i
1. 本書の目的	i
2. 達成したい目標	i
3. 核となる用語 (keywords)	i
4. 本書の内容および本書を使った学習の方法	ii
1. 連続体力学の考え方 (Definition of the continuum mechanics)	1
1.1 連続体力学の歴史 (History of the continuum mechanics)	1
1.2 連続体の概念を理解するための取り組み方 (Approach to philosophy)	2
1.3 力学とは? (What is mechanics?)	2
1.4 連続体の性質 (properties of a continuum body)	4
1.5 空間内の物質の連続分布: 密度と平滑化 (Distribution and smoothness)	4
1.6 微小要素の大きさについて (Size of infinitesimal elements)	7
1.7 連続量 (物理量)	7
1.8 場の量 (時空間で定義される連続量) と表記法	9
1.9 連続体の分類	10
1.10 連続体力学の学習に必要な考え方	12
1.11 例題 多質点系の平衡方程式	14
練習問題	16
復習 基礎知識	17
練習問題	21
2. ベクトルとテンソル (Vectors and tensors)	23
2.1 ベクトルの演算 (積) と座標変換則 (Vector product and the transformation rule of coordinates)	25
2.1.1 位置ベクトルと束縛ベクトル	25
2.1.2 ベクトルの等価性 (Equality of vectors)	26
2.1.3 ベクトル場 (Vector field)	27

2.1.4 ベクトルの演算 (Operation rules in vector space)	29
(1) スカラー積, 内積 (inner product)	29
例題 2.1	29
例題 2.2	29
例題 2.3	30
(2) ベクトル積, 外積 (outer product)	31
例題 2.4	31
(3) 基底ベクトルの外積演算	32
(4) 座標変換則 (Rules of translation and rotation of coordinates)	33
例題 2.5	34
(5) 演算規則に慣れよう	35
2.1.5 まとめ	36
練習問題	37
2.2 テンソルの演算 (積) と座標変換則	
(Tensor product and the transformation rule of coordinates)	39
2.2.1 ベクトルの演算 (積) 再考	39
2.2.2 テンソル積 (dyadic, tensor product) と基底 (diad)	40
2.2.3 テンソル積によって表現される物理量	43
2.2.4 テンソル積の座標変換則	45
2.2.5 関数としてのベクトル量 [復習]	47
練習問題	48
3. 応力 (Stress)	51
3.1 応力ベクトル (stress vector)	51
3.2 応力テンソル (stress tensor)	52
3.3 法線応力とせん断応力 (normal and shear stress)	55
3.4 せん断応力の対称性 (symmetry of shear stress components)	55
3.5 表面力の釣り合い	56
例題 3.1	59
例題 3.2	63
例題 3.3	65
3.6 Mohr の応力円 (Mohr's stress circle)	66

例題 3.4	68
例題 3.5	69
練習問題	70
4. ひずみ (Strain)	73
4.1 1次元の伸長変形	73
4.2 運動記述のための座標系の選択	74
4.3 3次元変形への導入	76
4.4 変形勾配	76
4.5 変形計量とひずみ	78
4.6 変位場を用いたひずみの表現	79
例題 4.1	80
例題 4.2	81
4.7 体積ひずみ (dilatation)	82
4.8 相対変位の分解 (並進と剛体回転) (Linear motion and rigid rotation)	82
練習問題	84
5. 構成方程式, 固体弾・塑性の基礎 (Plasticity and elasticity on metal)	87
5.1 固体の機械的性質	87
5.2 1次元材料引張試験	87
5.3 金属の結晶と塑性変形 (結晶のすべりによる変形)	90
5.4 真応力と対数ひずみの構成近似モデル	93
5.5 弾性変形における実用弾性率	95
練習問題	96
6. 固体・流体の構成方程式 (Constitutive equations on solid and fluid)	99
6.1 流体および固体の力学的特性の記述	99
6.2 完全流体 (perfect fluid)	99
6.2.1 理想気体 (ideal gas)	99
6.2.2 非圧縮性流体 (Incompressible fluid)	100
6.3 Newton 流体 (Newtonian fluid)	100
6.4 Stokes 流体 (Stokes fluid)	100

6.5 現実挙動の流体の状態方程式	101
6.6 Hooke 弾性固体 (Hookean elastic solid)	102
6.6.1 等方性弾性体 (Isotropic elasticity)	103
6.6.2 体積弾性係数 K	104
例題 6.1	105
6.6.3 ポアソン比	106
6.6.4 横弾性係数	107
6.6.5 温度効果 (Effect of temperature)	108
6.7 線形粘弾性体 (Linear viscoelastic bodies)	108
6.7.1 Maxwell 模型	109
6.7.2 Voigt 模型	110
6.7.3 Maxwell 模型のクリープ関数 (creep function)	111
6.7.4 Maxwell 模型の緩和関数 (relaxation function)	111
練習問題	112

7. 保存則と場の方程式 (Field equation and laws of conservation)

7.1 各種保存法則の復習	112
7.1.1 エネルギー保存則	113
(a) 現実世界の事象と変形過程の重要な性質	113
(b) 熱の性質	114
7.1.2 物体の運動の性質	114
7.1.3 線形 (並進) 運動量保存則	115
7.1.4 角運動量保存則	116
7.2 連続体力学から見たエネルギー保存則 (Balance of energy)	117
7.3 Gauss の定理	119
7.3.1 関数の定積分の公式	119
7.3.2 経路に沿った線積分による誘導	120
7.3.3 Gauss 定理の応用	123
(a) 物理量 A が速度 (\mathbf{w}) の場合	123
(b) 物理量 A がポテンシャル関数 Ψ の場合	124
(c) 物理量 A が速度 (u_i) の場合 (再び)	124
(d) 物理量 A が 2 階テンソル C_{ij} である場合	125

7.4 物質導関数 (Material derivative)	125
7.5 体積積分の物質導関数 (Material derivative of volume integral)	129
7.6 補足, Leibniz の積分公式 (Essential rules of Leibniz integration)	131
7.7 連続と運動の方程式 (Equations of continuity and motion)	132
7.7.1 質量保存則と連続の方程式	133
7.7.2 運動量保存則と運動方程式	133
7.8 エネルギー保存則の展開 (Description of energy balance)	135
練習問題	139
8. 固体の弾性理論と応力関数 (Theory of elasticity and stress function)	141
8.1 変位場解法の序	141
8.2 平面応力状態 (Plain stress state)	144
8.3 平面ひずみ状態 (Plain strain state)	145
8.4 Airy の応力関数 (Airy stress function)	146
例題 8.1 調和関数 ϕ と重調和関数 Φ の関係	150
例題 8.2 応力関数 Φ から変位場の解析	151
例題 8.3 応力場と平衡方程式の関係	154
例題 8.4 3次元丸棒の変形	157
例題 8.5 応力場から適合条件の照合	160
8.5 サンプナンの原理 (Principle of Saint-Venant)	161
練習問題	163
9. 流体の場の方程式と境界条件 (Field equation of fluid and boundary condition)	165
9.1 Navier-Stokes 方程式	165
9.2 境界条件について	166
9.3 Reynolds 数と相似則	169
練習問題 (1), (2)	170
9.4 水平な水路あるいは管内の流れ	171
例題 9.1	172
例題 9.2	177
例題 9.3	178
練習問題 (3), (4)	179

9.5 完全流体	179
9.6 渦度と循環	181
9.7 渦無し流れ	183
例題 9.4	184
練習問題 (5), (6), (7).....	186

1. 連続体力学の考え方

1.1 連続体力学の歴史

連続体力学に基づいて設計され製造された機械装置や乗り物は数多く存在します。原子力発電所(構造物の応力, 熱水), 飛行機(翼に作用する圧力, 空気の流れ), 宇宙シャトル(耐熱タイルの熱応力, 伝熱流れと飛散による放熱)は, その代表的な例です。ここで括弧の中は, 固体または流体とその力学状態を表す物理量(力学量)を例示しています。

連続体として扱われる対象物は, 変形の様子から, 固体と流体の2つに大別されます。さらに流体は, 液体と気体に分類されます。流体を構成する粒子は, 固体のように形状を拘束されないので, その動きは流れるように振る舞います。そこで, 液体でも気体でもそれを構成する粒子の速度(velocity)に注目します。これに対して, 固体を構成する粒子の動きを見ると, 変形する前の位置から移動先までの変位(displacement)に注目します。

固体に関する力学は, 17世紀から19世紀に発展しました。代表的なものとして, 次のものがあります。フックの法則(17世紀, フック), 弾性力学(18世紀, ベルヌーイ, オイラー, ラグランジュ, クーロン; 19世紀, ナビエ, コーシー), テンソルの概念を応力とひずみに導入(19世紀, コーシー), 実際の問題に対する解(19世紀, ポアソン)。

流体に関する力学もほぼ同様の時期に発展しました。例えば次のものがあります。パスカルの原理(1653年, パスカル), 粘性の概念の導出(1687, ニュートン), 数学的体系の確立(ダランベールを経て, オイラーとラグランジュ), 粘性の導入(1826, ナビエ), 流体の基礎式(1847, ストークス)。

連続体に関する力学は, 質点と剛体の力学, 弾性体の力学, 流体力学, 熱力学, 塑性力学, 振動・波動論などの各専門分野において独立して発展し形成されてきました。弾性体の力学は, 力と伸びの関係を扱います。流体の力学では, 流れ, パスカルの原理, ニュートン流体, 定常流れのエネルギー保存則などを扱います。

れきし
歴史

せつけい せいぞう
設計, 製造

きかいそうち
機械装置

の もの
乗り物

げんしりよくはつでんしょ
原子力発電所

ねつすい でんねつ
熱水, 伝熱

ひこうき つばさ
飛行機, 翼

さよう うちゅう
作用, 宇宙

たいねつ ねつおうりよく
耐熱, 熱応力

ひさん ほうち
飛散, 放熱

かっこ たいべつ
括弧, 大別

じょうたい ぶつりりょう
状態, 物理量

れいじ たいしやうぶつ
例示, 対象物

ようす ぶんるい
様子, 分類

りゆうし こうそく
粒子, 拘束

ふ ま
振る舞い

そくど へんい
速度, 変位

いどうさき
移動先

こたい りゆうたい
固体, 流体

だんせい ねんせい
弾性, 粘性

がいねん かい へ
概念, 解, 経る

じ き どうしゆつ
時期, 導出

げんり ほうそく
原理, 法則

たいけい かくりつ
体系, 確立

しんどう ほどう
振動, 波動

せんもんぶん や
専門分野

けいせい どりつ
形成, 独立

ていじやう
定常

ともな とういつ
伴う, 統一

さいぶんか
細分化

がくもんぶんや
学問分野

きょうがいりょういき
境界領域

たんじょう きょうつうせい
誕生, 共通性

にんしき じゅうよう
認識, 重要

とくゆう ものごと
特有, 物事

たんじゆんか かい
単純化, 解

とくせい はんようてき
特性, 汎用的

ていり ぐたいてき
定理, 具体的

てきよう とくしゆ
適用, 特殊

やすい ちゅういじこう
易い, 注意事項

こうしき ちゅうい
公式, 予め

じつざい りてん
実在, 利点

きげん じつざい
起源, 実在

ちゅうしやうか
抽象化

な た
成り立ち

ゆうどう きげん
誘導, 起源

これらの各分野の力学には、共通の性質があります。弾性体と流体の力学の間には、**力**と**変形**の関係という共通の概念、共通の基礎法則があります。それは、「連続体」の力学という一つの概念に統一出来ます。

学問分野の細分化に伴い、新しい境界領域が誕生している各学問分野の共通性を認識することは、正しい理解をするために重要です。

1.2 連続体の概念を理解するための取り組み方

対象物の力学問題を考える方法として2つの取り組み方があります。

- (1) 個々の力学問題に特有の方法で考えて、物事を単純化することで力学的な解を求める。
- (2) 概念や理論の一般的な特性を調べ、汎用的な法則や数学的な定理を立てた後で、個々の問題に適用する。

(1)の取り組み方は、特殊ですが単純化されており、具体的で分かり易いです。これに対して、(2)の取り組み方は、数学的な用語と一般的な概念・性質を予めよく学んでおく必要がありますが、全体の内容を形式的に理解しやすいという利点があります。(1)と(2)に共通の注意事項は、公式や定理・法則を正しく理解して正しく使わなければいけない、ということです。

本書で扱う連続体力学は、(2)の取り組み方です。実在する対象物の世界(変形し運動する様子)をみて、その数学的抽象化の方法を学びます。まず、基礎方程式の起源、成り立ちを理解する必要があります。次に自分の手で力学問題を支配する関係式を誘導する必要があります。大切なことは、取り上げた力学問題を支配する状態量を正しく理解し、基礎方程式の誘導の方法とその考え方を学ぶことです。

1.3 力学とは？

力学とはどのような学問か、その考え方を確認しておきます。

力学は、物質^{1*}の運動およびその運動で生じる力について調べる学問です。あるいはまた、力によって物質の運動が生じると考えることができます。ここで扱う物質の運動とは、**加速度**、**速度**、**変位**などの状態を指します。物質は、大きさ(体積)を持つ**物体** (material body, object, body) として空間に存在する原子の集合体です。質点は、質量を持ちますが大きさの無い、理想化された粒子です。原子と質点は同じではありません。ある時には原子と質点を同じとみなして考えることができますが連続体では違うものです。

初等力学で扱う質点の概念は、ある程度大きな体積を持つ物体(塊)であっても、考えている問題の単純化において空間的な回転運動を無視できるならば、注目する「点」に質量が集中しているとみなします。従って質点の場合、点の並進運動だけを議論すればよいのです。これに対して現実の物体は、空間内に有限の大きさを持ち、多くの「質点のような」ものの集合体と考えることができます。大きさを無視できない物体の運動においては、並進運動はもとより、回転運動も力学的に重要です。

ここで「質点のようなもの」の集合体が有限の大きさを持つ物体になるために、注意しておかなければいけないことがあります。大きさが無い質点がある位置の近くで無数に集めると、質量が過剰に集中することになります。これは現実的ではありません。質点の考え方は前述の通りですので、空間で連なった物体(連続体)を考えると、質点ではなく、限りなく小さいが大きさを持つ物体「**微小要素**」というものを考えます。微小要素の大きさは十分小さいので、その質量は小さくなります。

物体を構成する「微小要素」の相互関係は、力で支配されています。物体は力を受けると運動しますが、物体の運動は、物体内部のゆがみや流れ(変形)を生ずる場合と、物体内部で変形しない剛体(rigid body)のように平均的に空間を運動する場合とに分けることができます。

剛体の運動も連続体力学の範囲にあります。多質点系は離散化されていますが、質点を微小要素に置き換えてやれば、連続体と似た構造になります。従って多質点系の考え方は、連続体の力学において多くの共通点を持っています。連続体の

^{1*} 物質(material)とは、空間を占有する原子(atom)から構成される固体、液体、気体の状態をとる物体(material body, body) のことです。

指す
物体, 集合体
質点, 体積
粒子, 原子

塊
回転, 無視
集中

並進, 議論

有限

過剰

微小要素

相互関係

剛体

離散化

すでに、想定

基本的な支配方程式は、多質点系や剛体と同一の支配方程式から出発しています。本書では、流体力学と固体力学に限定して物体の運動を考えます。紙面の都合から、読者はある程度の力学の知識を既に持っているものと想定して、概念の説明や例題・演習問題を用意しました。

1.4 連続体の性質

実数

連続体の考え方は、数学の実数の性質から始まります。数直線の上で、任意の実数 a, b を考えます。ただし $a < b$ であるとし、区間 $[a, b]$ をいくら小さくなるように分割しても、その中間には無数の別の実数(点)があります。これを考えていくと無限個の実数が実数の間にあることがわかります。このように無限に切れ目なく連なって実数が存在するとき、この実数の集合(区間 $[a, b]$)を**連続体**(continuum body)と呼びます。

中間、無数

切れ目、連なり

集合

領域

挟む、桁数

無限

近傍

次の例は、区間 $[1, 2]$ の中間にある実数 1.5 を挟んだ数直線上の領域をみています。挟んでいる区間の大きさをいくら小さくしていても、小数点以下の桁数を無限に書いていくことで、いくらでも狭い区間を選ぶことができます。従って実数 1.5 の近傍には 1.5 の値に近い実数が無数に存在することがわかります。

$$[1, 2] \rightarrow [1.5, 1.512345]$$

$$\rightarrow [1.5000000000000001, 1.5120000000000009] \rightarrow \dots$$

連続性

この考え方をを使って物体の連続性を説明します。物体が存在する空間は3次元なので、ある質点(微小要素)の位置座標は、3つの実数 (x, y, z) で表現できます。この点のすぐ近くで無数の別の位置を考えることができますから、別の質点(微小要素)を無数におくことができます。従って無数の質点(微小要素)を有限の空間[区間]に切れ目なく無数において物体を作ることができます。逆にそのような物体をいくら分割しても無数に連なる小さい物体「微小要素」に分けられます。このように無数に小さい物体「微小要素」が連なることが連続体の性質です。

1.5 空間内の物質の連続分布: 密度と平滑化

密度、平滑化

現実の物質は、原子という離散化された存在を無数に組み合わせられてきています。これを大きな物体として取り上げるとき、原子1つ1つの動きは総合的に組み合わせられて平滑化され、物質の物理的性質が出来上がります。このような平滑化された性質は、空間に連続的に分布するとみなして扱うことができます。

小さい物体(微小要素)が連続的に空間に分布して、相対的に大きい物体(連続体)を構成する場合を考えてみます。このときの微小要素は、原子半径の大きさではなく、平滑化されて一様連続な性質をもつとみなせる程度の大きさを想定します。

いちようれんぞく
一様連続

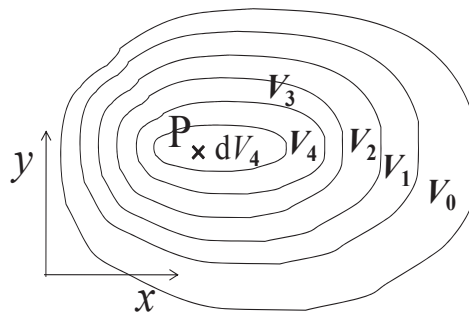


図 1.1 異なる物質から構成される物体

微小要素が連なって連続的に空間に分布する状態を考えます。連続体の中で位置 $P(x, y, z)$ にある微小要素の体積 $dV = dx dy dz$ を考えます。ここで dx , dy , dz は直方体の一辺の長さです。この微小要素(直方体)は、3種類の小さな表面積 $dx dy$, $dy dz$, $dz dx$ と1つの小さな体積 dV を持っています。連続体力学では、この微小要素の質量やエネルギー量ならびにそこに働く力と変形の間取り扱います。

ひようめんせき
表面積

物質は質量をもち、空間的な広がりをもつので、**単位体積あたりの質量**、すなわち**質量密度** ρ (mass density) を考える必要があります。そこで「密度の定義」をどうするのかを考えてみましょう。

たんたいせき
単位体積

図1.1のように地図の等高線のような区切りで、番号 $j=0\sim 4$ までの異なる物質を組み合わせ、大きな物体を作ります。それぞれの物質 j は、区切られた範囲に体積 V_j と質量 M_j を持ちます。

とうこうせん
等高線, 区切り
こと
異なる

きんいつ どういつ
均一, 同一

かんそく さんじゆつ
観測, 算術
へいきん
平均

ここで j は 0, 1, 2, 3, 4 の値をとります^{2*}. このとき質量密度 ρ をどのように計算できるでしょうか.

質量密度 ρ の意味は単位体積あたりの質量です. 物質が空間内で均一で同一ならば, 体積が2倍になると質量も2倍になります. 物体の体積が dV であれば, その質量は ρdV になります. 観測する区間を $j=0, 1$ の範囲で考えるとき, 算術平均の質量密度は,

$$\rho_{01} = (M_0 + M_1) / (V_0 + V_1) \quad (1.1)$$

になります. また観測する区間を $j=0$ の範囲で考えるとき, 算術平均の質量密度は

$$\rho_0 = M_0 / V_0 \quad (1.2)$$

になります. 観測区間を $j=0, 1$ の両方に半分くらいまたがって考えるとき, 算術平均の密度は ρ_{01} と ρ_0 のどちらでもない値になります.

くうかんぶんぷ いぞん
空間分布, 依存
ほんらい
本来

観測する範囲を大きくすると, 物質の空間分布に依存して算術平均 (平滑化) をすることになります. このような平均的な質量密度は, 本来の物質の質量密度ではないことは明らかです.

きよくげんち
極限值

観測区間 j に存在する位置 $P(x, y, z)$ における物質 j の質量密度 $\rho(x, y, z)$ は, 式 (1.3) のように質量 dM_j を体積 dV_j で割った式 dM_j/dV_j の極限值で定義されます. 図1 に $j=4$ の場合を例示しています. 質量密度 $\rho(x, y, z)$ は, 領域 V_j の範囲にあって P 点を取り囲む微小要素の質量 dM_j と体積 dV_j を考えて, dV_j を限りなく小さくする極限状態です (しかし原子半径よりは十分大きい). このような定義式にすれば, 他の物質が近くにあってもその影響を受けないで物質固有の密度を示すことができます.

かこ
囲む

こゆう
固有

点 P における質量密度:

$$\rho(x, y, z) = \rho(P) = \lim_{dV_j \rightarrow +0} \frac{dM_j}{dV_j} \quad (1.3)$$

そえじ しきべつ
添字, 識別

ここで添字 j は一つの物質の内部である観測区間 j を意味します. 一般に dV_j を限

^{2*} このような識別のために添えた文字を添字 (index) と呼びます. 整数を割り当てて識別することが一般的です.

りなく小さくとれば、いつも単一の物質の範囲で式 (1. 3) を考えることができます。従って異種の物質が隣接する境界面 (線) にある点Qを除いて、任意の添字 j に対してこの式を質量密度の定義として使うことができます。

点Pの位置 (x, y, z) は、実数で表現されているので、質量密度 $\rho(\mathbf{P})$ は、物理空間で連続的に分布しています。「空間に連続的に分布して定義できる」ことが連続体の性質です。

1.6 微小要素の大きさについて

連続体を構成する微小要素は十分小さいですが、それを集めれば物体としての大きさを持ちます。数学的極限として微小要素の体積 dV が無限小のときを考えるのは、物理量〇〇の密度を点 $\mathbf{P}(x, y, z)$ で定義するためです。十分小さいとされる体積 dV の大きさは、原子の半径よりも十分大きく、物質を構成する多くの原子の挙動から平滑化された物理的性質を取り扱うことができる程度でなければなりません。例えば、液体や気体の場合、次に示す数字の大きさ程度以上の「微小要素」を考える必要があります。

液体： 分子の大きさ以上であること。

水の分子の大きさは、約1オングストローム

空気： 分子の平均自由行程： $\lambda = 5 \times 10^{-6}$ cm

物質の微細構造を無視できる場合、連続体の考え方を適用できます。

1.7 連続量(物理量)

質量密度に関する考え方を物理量〇〇に関する定義についても適用できます。物体の運動に関する物理量として、**運動量**(linear momentum)、**角運動量**(angular momentum)、**エネルギー**(energy) 等があります。これらの物理量は何れも物体がもつ質量に関係します。

点 $\mathbf{P}(x, y, z)$ において微小要素を考えます。質量密度を ρ 、微小体積を $dV = dx dy dz$ 、

分子

空気、行程
微細構造

何れ

位置
外積

その微小要素の速度を $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ とするとき^{3*}, 微小要素が持っている運動量 $d\mathbf{p}=(dp_x, dp_y, dp_z)$ と原点 O まわりの角運動量 $d\mathbf{h}=(dh_x, dh_y, dh_z)$ は式(1.4), (1.5) のように定義されます^{4*}. ここで $OP=\mathbf{r}=(x, y, z)$ は原点 O からみた微小要素の位置 P を表す位置ベクトル(position vector)です. 式(1.5) の右辺に使われている演算記号「 \times 」は, 外積(outer product)の意味です. この演算の定義については, 後述するベクトル・テンソルの章で説明します.

$$d\mathbf{p} = \mathbf{v}\rho dV \quad (1.4)$$

$$d\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}\rho dV \quad (1.5)$$

式(1.4)を使って, 点Pにおける微小要素の速度 \mathbf{v} を式(1.6)のように求めることができます.

$$\mathbf{v}(x, y, z) \equiv \lim_{dV \rightarrow +0} \frac{\text{Momentum in } dV}{\rho dV} = \lim_{dV \rightarrow +0} \frac{d\mathbf{p}}{\rho dV} \quad (1.6)$$

仮想粒子
極限

式(1.4)を質量 ρdV で割れば, 残るのは \mathbf{v} だけです. それが極限における仮想粒子の速度になります. 仮想の粒子と表現する理由は, 実在はしないのですが無限小の大きさを考えて, 連続体を構成する物質の点のようにみなしているからです. 連続量として物質に依存しない普遍的な速度の表現は, 原子半径よりも大きい有限の大きさ dV を考えて, その領域での運動量 $d\mathbf{p}$ を計測し, それを質量 ρdV で割った算術平均です. 微小要素の大きさを $dV \rightarrow +0$ の極限として考えるとき, この式の意味・制約を常に思い起こしておく必要があります.

普遍的

制約

体積 dV の大きさが「原子半径の大きさ以下になったらどうするのか」を考えても物理的な意味はありません. 連続体の考え方は, あくまで原子半径の大きさよりも大きい領域で統計力学的な算術平均の意味の物理量を取り扱うのです.

領域
統計力学

^{3*} 速度 \mathbf{v} は, 3次元空間で大きさと方向を持つベクトル量です. ここでは3つの座標成分によって表現していますが, これを1つの太字(bold) \mathbf{v} で記すことにします.

^{4*} 運動量と角運動量は, 微小要素が持つ速度 \mathbf{v} と質量 ρdV から構成され, ベクトル量です.

1.8 場の量 (時空間で定義される連続量)と表記法

物体の運動を考えると、時刻 t (1つの実数)と3次元空間の位置 $\mathbf{r}=(x, y, z)$ (3つの実数)をあわせた空間を考えます。位置ベクトルの記号として \mathbf{r} の代わりに \mathbf{x} と書くこともあります。物体の運動は4次元空間における連続性を持ちます。4次元空間内の各点 (\mathbf{r}, t) で物理量が与えられます。連続体力学でよく扱う物理量として、以下のものがあります。

変位 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, 速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, 質量密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$, 圧力 $p(\mathbf{r}, t)$, 温度 $T(\mathbf{r}, t)$ など

このうち、変位と速度はベクトル量(vector quantity)なので太字(bold)表現であり、密度、圧力、温度はスカラー量(scalar quantity)なので普通の字体で記しました。文字が太いか細いかを区別しにくいときは、 \vec{u} のように上に矢印(\rightarrow)をつけてベクトルであることを明示する表記法もあります。あるいはまたベクトル成分を添字(index)^{5*}を使って表記することが多いので、ベクトル的な物理量を添字による成分で表現します。

$$\begin{aligned} \text{位置: } \mathbf{r} &= (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) = (x_k) = x_k, \quad (\text{但し } k=1, 2, 3) \\ \text{変位: } \mathbf{u} &= (u_1, u_2, u_3) = (u_k) = u_k, \quad (\text{但し } k=1, 2, 3) \\ \text{速度: } \mathbf{v} &= (v_1, v_2, v_3) = (v_k) = v_k, \quad (\text{但し } k=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

ここで k は任意の座標成分を識別するための添字であり、自由指標 (free index) という呼び名があります。これらの表記法を使うと、変位 \mathbf{u} は次のような形式になります。ここで k, j を異なる添字として使っています。

$$\text{変位: } u_k(x_j, t) \quad (\text{但し } k=1, 2, 3, j=1, 2, 3) \quad (1.8)$$

この式の意味は、ベクトルを簡略表現の座標成分で書いているということです。本来の意味は、すべての座標成分を列挙しているのと同じです。

$$\text{変位: } \mathbf{u} = [u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t)] \quad (1.9)$$

^{5*} 添字は変数です。固定された1つの文字ではありません。多くの場合、整数値 0,1,2,3,...を使います。

場の量
時空間
時刻

圧力, 温度

太字

矢印

但し

座標成分

簡略

本来, 列挙

整数値

かんい ひんばん
簡易, 頻繁

げんみつ
厳密

このように連続体の力学では、添字を使った簡易表記法が頻繁に出てきます。添字がでてきたら、単なる記号の識別のためではなく、物理量の座標成分を意味することが多いことに注意してください。なお、ここで例示したベクトルの成分表記法は、座標系の情報が不足しています。厳密にはどのような座標系を使ったかという定義を付け加える必要があります^{6*}。

1.9 連続体の分類

1.1で紹介しているように、様々な物質の力学問題が個別に研究され発達してきました。本節では、これらを変形の特徴に注目して紹介します。連続体として扱われる物質の状態は、大きく分けて「固体(solid)」と「流体(fluid)」になります。固体は、変形の状態を表すために「変位(displacement)」を基準にします。変位を基準にした物体内部のゆがみの定義を「ひずみ(strain)」と言います。これに対して流体は、流れの状態を表すので「速度(velocity)」を基準にします。この場合、ゆがみを表すために「ひずみ速度(rate of strain)」を使います。なお、固体においても速度に依存する応力成分を発生するものがあるのでひずみ速度を扱います。固体に属するモデルとして弾性体、塑性体、剛体等があります。流体は、運動中に生じる応力の性質によって各種の流体モデルに分類されています。

だんせいたい のぞ
弾性体, 除く
じよか
除荷
ひせんけい
非線形

弾性体：ひずみ ϵ と応力 σ が1対1に対応し、応力を除くとひずみが 0 になります。除荷によって元に戻る性質があります。

$$\text{非線形弾性体: ゴム等, } \sigma-\epsilon \text{ の関係: } \sigma=f(\epsilon) \quad (1.10)$$

線形弾性体: 軽負荷を受ける金属等。

$$\sigma-\epsilon \text{ の関係: } \sigma=E\epsilon \text{ (} E: \text{比例係数)} \quad (1.11)$$

塑性体：応力がある閾値(降伏点)を越えるとひずみが元に戻らなくなります。

金属(延性材料, ductile material), 固形樹脂(plastics), 粘土(clay soils)等

剛体：いかなる応力に対しても全くひずみません。理想化された物体であり十分剛性が大きく内部のゆがみを無視できます。

そせいたい こうふくてん
塑性体, 降伏点

しきいち きんぞく
閾値, 金属

えんせい ねんど
延性, 粘土

ごうたい まった
剛体, 全く

せいぶん きてい
成分, 基底

^{6*} ベクトルとテンソルの章において、成分(component)と座標系の基底ベクトル(base vector)との関係を紹介します。

流体(気体, 液体): 流体では, 体積を変えない変形(ひずみ)はどのような小さな力によっても生じます. 自発的に形を変える「流れる」性質をもつので流体と呼びます. せん断応力 τ とせん断ひずみ速度 $d\gamma/dt$ が線形 ($\tau = \mu d\gamma/dt$, μ : 粘性率) となる流体をニュートン流体といいます.

粘弾性体: 氷河(glacier), 固形樹脂, 糊(glue, adhesives), マヨネーズ(Mayonnaise) など. 塑性(弾性降伏) と非ニュートン粘性(せん断ひずみ速度のべき乗に比例) を含む非線形な流体の研究分野をレオロジー(Rheology) と呼びます^{7*}.

応力とひずみの定義については, 後の章で詳しく扱います. ここでは物理的な意味について簡単に紹介しておきます.

ひずみは, 物体内部のゆがみによって起きる物体の形状変化(変形)を表します. ひずみは, 変形前(元)の長さを基準にして, 変形後の伸縮量を比で表した無次元量です^{8*}. 力(荷重)が作用する面に対して垂直方向のひずみを「**垂直ひずみ**(normal strain)」と言い, 力の作用面に沿った方向(接線方向)に起きるひずみを「**せん断ひずみ**(shear strain)」と言います. 基本的にこの2種類の形態(垂直成分, せん断成分)があります.

応力は, 単位面積あたりに作用する力(荷重)であり, 「**面積力**」とも呼ばれます^{9*}. 単位として $N/m^2 = Pa$ や $N/mm^2 = MPa$ がよく使われます. 力の作用面に対して垂直成分を「**垂直応力**(normal stress)」と言い, 接線方向成分を「**せん断応力**(shear stress)」と言います.

力(force, structural load) は, 大きさと方向を持つベクトル(1階のテンソル)です. 応力は, 物理的意味として**力÷面積**になります. 応力の力学・数学的な性質については, 後で詳しく紹介します.

^{7*} 物質の変形および流動に関する物性科学です. 明確に区別できる弾性(elasticity)と線形粘性(viscosity)の中間に混在するすべての連続体の変形・流動現象を扱います.

^{8*} 3次元的なひずみの定義は, ひずみの章で紹介されます. 弾塑性体の変形を表すとき, 伸縮前後の要素長さの比の対数をとった値を使う場合があります. これを**対数ひずみ**(真ひずみ)といいます.

^{9*} 面積力に対する言葉として, 体積力(質量密度に比例するような力)があります.

りゅうたい, きたい
流体, 気体,
えきたい, じはつ
液体, 自発

ねんせいりつ
粘性率

ねんだんせいたい ひょうが
粘弾性体, 氷河
のり
糊

しょう くわ
章, 詳しく
あつか
扱う

しんしゆく
伸縮
すいちよく せつせん
垂直, 接線

きょうめん
作用面

ちから めんせき
力 ÷ 面積

たいすう
対数

がくしゅう
学習

つりあ
釣合い
ふくしゅう
復習
ふくすう
複数

じゅうしん ないりょく
重心, 内力
がいねん
概念

しゃめん
斜面

こうそく こうりょ
拘束, 考慮

みち きち
未知, 既知

せんちよく じゅうりょく
鉛直, 重力

まさつけいすう
摩擦係数

せいし
静止

さくず しゅほう
作図, 手法

1. 10 連続体力学の学習に必要な考え方

質点系と剛体の力学は、変形する連続体の力学を考える上で共通する考え方を多く持っています。ここでは、基本的で重要な運動法則や力の釣合いの考え方について復習しておきます。

質点系の力学(dynamics of multiple material points): 複数の質点からなる物理的な系の運動学です。単独の質点に関する運動の法則(支配方程式)のほか、異なる質点同士の衝突運動と作用・反作用の法則、空間的な広がりに対する系全体の「質量中心(重心)」の概念、重心に関する運動法則、系における内力と系に働く外力などの概念を扱います。

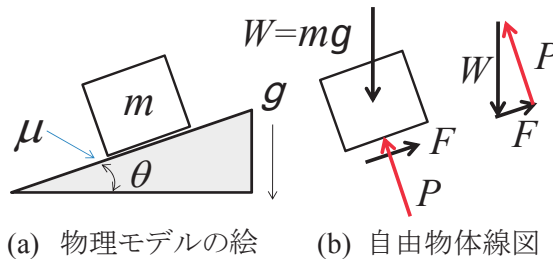


図 1.2 斜面におかれた物体の力の釣合い

自由物体(free body): 外力や拘束から自由な(考慮されていない)物体のことです。自由物体を使った解析法として**自由物体線図**(free body diagram)があります。自由な物体が力学的に釣合うようにすべての外力と反力をベクトルとして図の中に書き込んで釣合いの方程式を導きます。未知の力成分を既知の力成分との連立方程式として表現します。これによって未知の力成分について解くことができます。図1.2(a)は、鉛直方向の重力加速度 g 、物体の質量 m 、斜面角度 θ 、斜面と物体の摩擦係数 μ であるとき、物体を斜面上にのせて静止して(釣合っている)状態を示しています。これに対して図1.2(b)は、自由物体を考えてこの物体に働く外力 $W=mg$ と反力 F, P をすべて書き出した線図です。摩擦力が十分大きい場合、滑らずに静止します。このとき3つの力 W, F, P の合計は0になります。このような作図を伴う力の釣合い関係を自由物体に対して行う手法が物体の力の釣合いを求めるために使われます。連続体の場合、物体内部の応力分布

を知るために、「微小要素」や「構造物の一部」を自由物体として扱います。部分的な物体を扱うため、未知数が解けずに残りますが、残りの部分の釣合い方程式をさらに作って、それらを全体の連立方程式として考えます。「仮想的な断面による物体のある部分を取り出し、その平衡条件を調べる手法」と言えます。

構成方程式(constitutive equation): 作用する力と連続体の変形との関係を表した方程式です。固体の場合、応力 σ とひずみ ϵ の関係として表現されます。

線形弾性体: Hooke's law ($\sigma = C\epsilon$, C : 弾性係数) が代表的な構成方程式です。

流体の場合、せん断応力 τ とせん断ひずみ速度 $d\gamma/dt$ (t : 時間, γ : せん断ひずみ) との関係として表現されます。

釣合い方程式(equilibrium equation): 平衡方程式とも言います。自由物体に対してすべての外力と拘束による反力を書きこんで、座標方向毎に力の釣合いを考えます。これによって釣り合い方程式を導くことができます。連続体の場合、物体内部の応力成分、外表面に働く外力、重力などの体積力、拘束条件による反力を考えて、それらの釣り合い式を求めます。物体の拘束条件によって、回転力(力のモーメント)を外力または反力として含む場合があります。一般に物体内部の応力に関する微分・積分を含む方程式を構成します。

慣性座標系: 一様な速度で動く任意の座標系(方程式の形式が同じ)です。慣性力(加速度に対する反力)が0になります。

D'Alembert の原理(Lagrange-d'Alembert principle): 物体の加速度運動によって生ずる慣性力(速度の変化と逆に作用する) $-dp/dt$ とその他の外力・反力をすべて合成すると釣合います。すなわち釣合い方程式は静的な釣合いだけでなく、慣性力 $-dp/dt$ を含めて成立するという原理です。動力学を静力学に置き換えることができる考え方です。ここで p : 運動量, t : 時間。

力のモーメント(moment of force): 回転力のことです。トルク(torque)とも言います。大きさは、有効作用半径×力であり、回転軸の方向に対して右ねじが進む向きを持つベクトル量です。原点まわりの力のモーメントは、力が作用する位置を指す位置ベクトル r と力ベクトル F との外積 $r \times F$ で定義されます。

慣性の法則: Newtonの第一法則。物体に対して外力が働かない限り、その物体は一定の速度で運動を維持します。

こうぞうぶつ
構造物

かそうてき
仮想的
だんめん へいこう
断面, 平衡

こうせい
構成方程式

せんけいだんせいたい
線形弾性体

ごと
毎に

いちよう
一様
かんせい
慣性座標系
にんい
任意

かいてんりよく
回転力

がいせき
外積

かそくじ
加速度

はんきやう
反作用

けいけんそく
経験則

たほう はんたい
他方, 反対

まじれつ かい
亀裂, 破壊

かそうだんめん ごうりよく
仮想断面, 合力

運動の法則: Newtonの第二法則. 物体に対して外力が作用するとき, 外力はその物体が持つ運動量の時間的变化に等しいです. 外力が作用すると加速度運動(速度の変化)を生じます.

作用・反作用の法則: Newtonの第3法則. 力の作用は, 必ず反作用を生ずることで平衡を作り出しているという経験則です. 物体同士が互いに力を及ぼしあうとき, 一方が受ける力と他方が受ける力は向きが反対で大きさが等しいです. この法則によって, 物体の内部において亀裂などの破壊がない限り, 内部の仮想断面に作用する応力による合力はいつも釣り合います.

1.11 例題 多質点系の平衡方程式

「添字」の利用に慣れることと「内力」の釣り合い(作用・反作用の法則)を理解することを意図して, K 個の質点からなる質点系の「平衡状態」を「力の釣り合い」から考えてみます.

平衡状態のとき, 系のどの質点においても加速度が0です. 質点 I に関する力の釣り合いは, 外力(重力等)を $F_I^{(e)}$, 質点 J から質点 I へ及ぼす力(内力, 反力)を F_{IJ} とすると, 式(1.12)で与えられます.

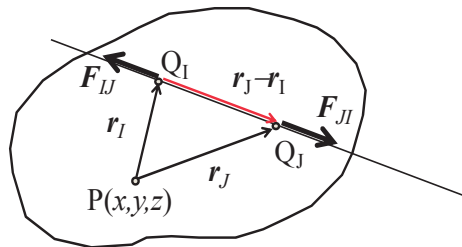


図 1.3 質点 I, J 相互に作用する力の方向

$$F_I^{(e)} + \sum_{J=1}^K F_{IJ} = 0 \quad (I=1,2,\dots,K) \quad (1.12)$$

質点 I を自由物体と考えてすべての力を書き出せば, その合計は0になります. 式(1.12)を $I=1,2,3,\dots,K$ についてすべて加算すると式(1.13), (1.14)が導かれます.

$$\sum_{I=1}^K \mathbf{F}_I^{(e)} + \sum_{I=1}^K \sum_{J=1}^K \mathbf{F}_{IJ} = 0 \quad (1.13)$$

$$\sum_{I=1}^K \mathbf{F}_I^{(e)} = 0 \quad (1.14)$$

ここで作用・反作用の法則から $\mathbf{F}_{IJ} = -\mathbf{F}_{JI}$ の関係が常に成立することを利用して、式(1.14)は、系が平衡であれば、系の外から作用する力(外力)の合計だけに注目して、釣合いを考えればよいことを示しています。

変形する連続体の平衡状態においても、物体の内力は合計で0になります。外力の合計も釣合います。

次に物体の回転力に関する釣合いを考えてみます。図3のように、空間内のP点から質点Iの位置 Q_I までの位置ベクトル \overline{PQ}_I を \mathbf{r}_I とします。式(1.12)の両辺に対して左から $\mathbf{r}_I \times ()$ をかけます。右辺は $\mathbf{0}$ (ベクトル) ですから、 $\mathbf{r}_I \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ になります。外積 $\mathbf{r}_I \times ()$ は、分配法則によって外力と内力の項に対して振り分けられるので、式(1.15) が導出されます。

$$\mathbf{r}_I \times \left\{ \mathbf{F}_I^{(e)} + \sum_{J=1}^K \mathbf{F}_{IJ} \right\} = 0 \quad (I=1,2,\dots,K)$$

$$\mathbf{r}_I \times \mathbf{F}_I^{(e)} + \mathbf{r}_I \times \sum_{J=1}^K \mathbf{F}_{IJ} = 0 \quad (1.15)$$

$I=1,2,3\dots K$ について式(1.15)を加算すれば式(1.16)を得ます。

$$\sum_{I=1}^K \mathbf{r}_I \times \mathbf{F}_I^{(e)} + \sum_{I=1}^K \sum_{J=1}^K \mathbf{r}_I \times \mathbf{F}_{IJ} = 0 \quad (1.16)$$

左辺第2項は内力ですから、作用・反作用の法則から $\mathbf{F}_{IJ} = -\mathbf{F}_{JI}$ です。 $I=J$ のときは $\mathbf{F}_{IJ} = \mathbf{0}$ です。同じく作用・反作用の法則から内力は各質点を結ぶ方向を向いているので、 $\mathbf{r}_I - \mathbf{r}_J$ は \mathbf{F}_{IJ} に平行なベクトル(同じ方向)になっています。外積の性質から平行な2つのベクトル同士の外積は常に $\mathbf{0}$ になるので、

$$(\mathbf{r}_I - \mathbf{r}_J) \times \mathbf{F}_{IJ} = \mathbf{0} \quad (1.17)$$

この式は、任意の $I, J=1,2,3\dots K$ に対して成立するので、

$$\sum_{I=1}^K \sum_{J=1}^K \mathbf{r}_I \times \mathbf{F}_{IJ} - \sum_{I=1}^K \sum_{J=1}^K \mathbf{r}_J \times \mathbf{F}_{IJ} = 0$$

この式で $\mathbf{F}_{IJ} = -\mathbf{F}_{JI}$ でなければなりません. そこで

$$\sum_{I=1}^K \sum_{J=1}^K \mathbf{r}_I \times \mathbf{F}_{IJ} = 0 \quad (1.18)$$

式(1.18)を式(1.16)に代入して式(1.19)を得ることができます.

$$\sum_{I=1}^K \mathbf{r}_I \times \mathbf{F}_I^{(e)} = 0 \quad (1.19)$$

すなわち, 質点 I に働く外力の \mathbf{r}_I に関するモーメントの総和は釣り合っています. 特殊なものとして, 大きさ F が等しくて互いに距離 D をなして平行で逆向きにある2つの力が物体に働くとき, この回転力を **偶力(Couple)** と言います. その大きさは FD です.

そうわ
総和
とくしゅ ひと
特殊, 等しい
たが ぎょり
互いに, 距離
ぐりょく
偶力

りょうたん しじ
両端支持

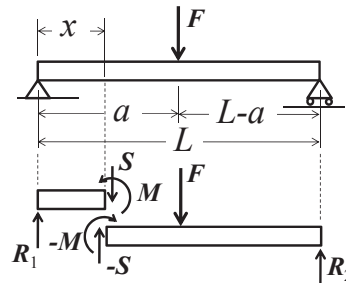
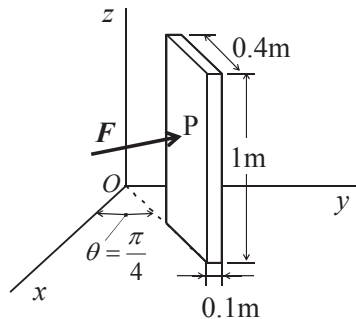


図 1.4 作用力のモーメント 図 1.5 荷重 F を受ける両端支持はり

練習問題

- (1) 図 1.4 のように剛体の点 O について各座標軸方向の力のモーメントの成分を求めなさい. ここで, 作用力は $\mathbf{F} = (-5\text{N}, 10\text{N}, 2\text{N})$, 作用点 P の座標は $(0.6 \cos 45^\circ \text{m}, 0.6 \sin 45^\circ \text{m}, 0.75\text{m})$ となっています.
- (2) 連続体における運動量とはどのような量であるか説明しなさい. また, 運動量保存則の例をあげて説明しなさい.
- (3) 連続体とはどのようなものですか.

- (4) 連続体力学の適用範囲 (対象) について述べなさい。
- (5) 図 1.5 のように左から位置 a のところに荷重 F を受ける長さ L の両端支持はりがあります。下の図のように、左端から位置 x のところではりの**仮想断面**を考えて、はりを左右に分割してそれぞれについて力の釣合い方程式をたてます。このとき、はりの仮想断面には、内力としてせん断力 S と曲げモーメント M が働いていると考えて作図します。この図は、はりの「**自由物体線図**」です。このはりの位置 x におけるせん断力 S と曲げモーメント M の大きさを外力 F ならびに作用位置の寸法 a, L を使って表しなさい。さらに両端の支点反力 R_1, R_2 を求めなさい。
- (6) 前問において、図 1.5 の仮想断面の法線方向の力を記していない理由について説明しなさい。

復習 基礎知識

- 1) **偏微分**: 二つ以上の独立変数を持つ (多変数関数) $f(x, t)$ を考えます。数学的な厳密性は問題にせず、扱う関数は非常に滑らかで好きなだけ微分できるものと仮定します。他の変数を固定し、一つの変数だけの関数と見なして微分することを意味します。偏微分をすると、常微分と同様に導関数を求めることができます。ただし微分する変数が t であるか x であるかによって求められる導関数が違います。ある位置 (x_0, t_0) における導関数の値をその位置における微分係数と言います。以下にこれらの式を示します。

- **偏微分係数**:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, t_0 + \Delta t) - f(x_0, t_0)}{\Delta t} \quad (1.18)$$

- **偏導関数**:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \quad (1.19)$$

- **高階偏導関数**

へんびぶん
偏微分
げんみつせい かんすう
厳密性, 関数
ひじょう なめ
非常, 滑らか
こてい
固定

びぶんけいすう
微分係数

どうかんすう
導関数

こうかい
高階

こんごう
混合

$$\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\partial^{n-1} f(x, t + \Delta t)}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} f(x, t)}{\partial t^{n-1}} \right\} \quad (1.20)$$

■ 混合偏導関数

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\partial f(x, t + \Delta t)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\partial f(x + \Delta x, t)}{\partial t} - \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right\} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (1.21)$$

りやつきほう
略記法

2) ベクトルの略記法

- 位置のベクトルを考えると、3次元ユークリッド空間で成分を考えます。デカルト座標の成分を1, 2, 3と添字を使って表すことが多いです。

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) = (x_k) = x_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.22)$$

- 位置以外の物理量○○をあらわすベクトル \mathbf{A} の成分も1, 2, 3 の添字を使って表すことが多いです。

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3) = (A_k) = A_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.23)$$

- ベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} の内積(inner product, scalar product)は、 \mathbf{A}, \mathbf{B} の成分同士の積を加算した式に等しいことはよく知られています。繰り返しを行って和を計算する形式の場合、習慣的に総和記号 Σ を省略して記します。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_1 \quad A_2 \quad A_3) \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 A_k B_k = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_i B_i \quad (1.24)$$

とくにことわらない限り、1つの式の中に同じアルファベットの添字が2回出てくる場合、空間次元にあわせて繰り返しをして和をとることにします。式(1.24)の添字変数 i, k を擬指標 (dummy index) と呼びます。ここで、 i, k は加算をしない自由指標と区別されています。この省略表現は、**アインシュタインの総和規約**

ないせき
内積
わ
和

ぎしひょう
擬指標

(summation convention) と呼ばれています。総和をとることを**縮約**と言います。

しゅくやく
縮約

3) よく使う変数記号

ギリシャ文字 α (アルファ, alpha), β (ベータ, beta), γ (ガンマ, gamma), δ (デルタ, delta), ε (イプシロン, epsilon), η (イータ, eta), ϕ (ファイ, phi), ψ (プサイ, psi), ξ (クサイ, xi), ζ (ゼータ, zeta), λ (ラムダ, lambda), μ (ミュー, mu), ν (ニュー, nu), π (パイ, pi), θ (シータ, theta), ρ (ロー, rho), σ (シグマ, sigma), ω (オメガ, omega) は、英小文字の $a, b, g, d, e, h, f, y, x, z, l, m, n, p, q, r, s, w$ に対応します。変数としてよく使うので、ギリシャ文字に慣れてください。

同様にギリシャ文字の $A, B, \Gamma, \Delta, E, H, \Phi, \Psi, \Xi, Z, \Lambda, M, N, \Pi, \Theta, P, \Sigma, \Omega$ は、英大文字の $A, B, G, D, E, H, F, Y, X, Z, L, M, N, P, Q, R, S, W$ に対応します。これに関して、便利な一覧表がインターネットで公開されていますので、参照してください。

こうかい, さんしやう
公開, 参照

<http://e-words.jp/p/r-greek.html>

「微分」の数学記号

微分量について、記号 d, D, δ, Δ がよく使われます。変数 x, t の関数 $y=f(x, t)$ に対して df や Df を f の微分量 (differential), 全微分 (total differential) とすることが多いです。同様の意味で微小な差分量や変化量 (increment) を表すのに dx と Dx ならびに Δx や δx を使います。変化量に関するこれらの記号の使い分けは、考えている制約条件の違いを識別するために便宜的に行われるものです。いずれも変数 x, t ならびに関数 f の微小な変化量を表すための記法であって、物理的には同じような変化量を表しています。これらの表記に共通することは、「微小要素」を考えているということです。

変数 x に対する関数 f の x の位置における**微分係数** [x で f を微分して**導関数**を求める] を考えるとき、常微分係数を df/dx のように表記します。もし f が多変数 x_1, x_2, x_3, \dots の関数であれば、 x_k ($k=1, 2, 3, \dots$) に関する偏微分係数を示すために、 df/dx_k ($k=1, 2, 3, \dots$) ではなく、 $\partial f / \partial x_k$ のように区別して記します。ここで演算子 ∂ をラウンド といいます。これは x_k のみ動かすという制約条件の下での微小変化量 df を考えるためです。

こうい かんれい
行為, 慣例

ただし ∂ は、微分係数を作る行為にだけ用いるのであって、微分量、差分量を表すときには慣例として使わないです。微分量は、 $df, Df, \delta f, \Delta f$ 等と記します。

「微分する」と「微分(量)」は意味が全く違うので注意してください。

4) 添字と総和

じゅうしひょう
自由指標

添字は、 x_1, x_2, x_3, \dots のような多くの変数を識別するときに、対象となる変数 x の右に添えてある記号文字を指します。添字を持つ変数を一般に x_k ($k=1, 2, 3, \dots$) のように記します。このときの添字 k は任意の**整数値**を指すので、**自由指標** (free index)と呼ばれます。

ぎしひょう
擬指標

次の1から10までの総和計算を表す式中の k は、指標を強制的に繰り返して使っているので、**擬指標**(dummy index) といいます。通常、添字は整数値を前提として物理空間の次元の数だけ変化の範囲を考えます。式(1.24)の k, i のいずれも擬指標です。

$$\sum_{k=1}^{10} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_{10} \quad (1.25)$$

ここで用いた**シグマ** Σ は、総和計算を行うときに慣例として用いる**数学記号**です。工学的には記号 Σ と σ は、応力度 (stress) を表す変数として用いられることが多いです。とくに小文字の σ を垂直方向の応力度としてよく使います。大文字の Σ も、誤解しないように注記をして、応力を意味する量として使われることがあります。

添字は、1種類(1系統)だけとは限りません。ある変数 x が2種類の添字 k, j を持つとき、

$$x_{kj} \quad (1.26)$$

のように記します。この式で k と j は、物理空間の次元の範囲で任意の整数値をとることを考えていて、自由指標となっています。この表記にあてはまる概念として数学の行列があります。第 k 行、第 j 列の行列 X の成分を式(1.26)のように記すことが多いです。

練習問題

- (7) 添字の自由標と擬標の違いは何ですか, 説明してください.
- (8) 三次元直交座標系 x, y, z の位置 $P(0, 0, 0)$ にある質量 10kg の質点に $F(1\text{N}, -2\text{N}, 2\text{N})$ の力が作用する場合の質点の運動方程式を書きなさい.
- (9) 次の式を偏微分しなさい.

$$(i) \frac{\partial(\sin(x+y))}{\partial x} =$$

$$(ii) \frac{\partial^2(e^x \sin y + e^y \cos x)}{\partial x \partial y} =$$

ヒント: (i) $x+y=z$ とおいて置換微分をしなさい. (ii) y と x に関する微分を順に 1 回実行しなさい. 一般に微分の順序は可換ではないので順番に注意してください.

- (10) 関数 $f(x, y)$ に対して全微分 df を説明しなさい. ただし位置 $P(x, y)$ において f の x, y に関する偏導関数 $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ が存在して, 位置 $Q(x+dx, y+dy)$ への移動に対して df を考えなさい.
- (11) 関数 $z=f(x, y)$ が全微分可能で x, y がいずれも u, v の関数でしかも微分可能であるとき, 次式を完成させなさい.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial(\quad)}{\partial(\quad)} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial(\quad)}{\partial(\quad)} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial(\quad)}{\partial(\quad)} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial(\quad)}{\partial(\quad)}$$

- (12) 関数 $z=f(x, y)$ が $z=f(y/x)$ の形式であるとき, 次式の値はいくらですか.

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

- (13) $z=f(x, y)$ が全微分可能で $x=r \cos(\theta), y=r \sin(\theta)$ であるとき, 次式を $\partial z / \partial r, \partial z / \partial \theta$ を使って表しなさい.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 =$$

- (14) ベクトル A, B, C を $A=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3$, $B=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3$,

$\mathbf{C} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3$ のように表わします。このとき、 $\mathbf{C} \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ を計算しなさい。

(15) 行列 \mathbf{A} を成分で表現するとき、第 i 列、第 k 行にある要素を a_{ik} のように添字 (index, subscript) をつけて書きます。

15.1 この表現にならって、次の3次の行列 (matrix) \mathbf{B} の要素 b_{12} , b_{31} , b_{33} を求めなさい。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

15.2 $b_{11} + b_{22} + b_{33}$ $\left(= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=i}^i b_{ik} \right)$ を求めなさい。

15.3 $\sum_{k=1}^3 b_{2k}$ を求めなさい。

(16) 行列 \mathbf{A} , ベクトル \mathbf{B} を次式で与えるとき、以下の計算をしなさい。

$$\text{3次行列: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad \text{3次列ベクトル: } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

16.1 \mathbf{A} と \mathbf{B} の積 \mathbf{AB}

16.2 a_{mn} : \mathbf{A} の第 m 行第 n 列の要素, b_h : \mathbf{B} の第 h 行の成分とするととき,

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} b_k$$

16.3 \mathbf{A} , \mathbf{B} に対して転置 \mathbf{B}^T , \mathbf{A}^T ならびに積 $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

(17) 行列 \mathbf{A} の逆行列 \mathbf{A}^{-1} を求めなさい。式の誘導を略さずに書いてください。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. ベクトルとテンソル

はじめに

本章では連続体力学を学ぶために必要な「数学的な言葉」を学習します。連続体は3次元空間に広がりを持って存在する「もの」なので、その空間における位置や方向の状態を誰にも誤解なく理解できるように「数学的な言葉」で表現する必要があります。このために必要な言葉とは、「ベクトル」と「テンソル」という「状態量」の性質であり、その概念が全体を見通すために役に立ちます。ベクトルやテンソルという性質によって何を表現できるのか、何に使えるのかは、基本的な定義と規則を正しく理解してから後で詳しく紹介します。

本書の中でテンソルとして理解する必要があるのは、「応力」と「ひずみ」です。

連続体の力学的な変形の状態をあらわすためには、応力とひずみの定義を正しく知っておく必要があります。

応力とひずみの元になるのは、ベクトルとしての「力」や「変位」です。「応力」の基本的な意味は、「単位面積あたりの力」です。すなわち応力の構成要素は、「力」と「面積」であり、定性的には「力」÷「面積」という意味です。ところが「面積」は3次元空間で考えると方向や向きを持っているから、これもまたベクトル量になっています。

じつはこのような物理量は、「2階のテンソル」の性質を持っています。2階テンソルの意味を知るためには1階テンソル(vector)と0階テンソル(scalar)の意味をまず理解することです。階数が0,1,2とくれば、3,4,5…のテンソルを一般に考えることができます。数学的には n 階のテンソルというものを考えることになります。弾性体においては、2階テンソルである応力とひずみを関係付ける弾性係数は4階テンソルということになります。

数学的な応力の定義とはどのように書けばよいのか？を理解するために、まず、ベクトルとテンソルの数学的な定義と性質を知って、ものごとを考察するための言葉として、ベクトルとテンソルの定義や規則を使えるようになる必要があります。

ことば
言葉

ごかい
誤解

がいねん みとお
概念, 見通す

やく きそく
役, 規則

くわ しょうかい
詳しく, 紹介

じょうたい
状態

もと へんい ちから
元, 変位, 力

ていせい
定性的

かい
階

こうさつ
考察

へんけいまえ
変形前

しんしゅくりょう ひりつ
伸縮量, 比率
ようそ
要素

しゅよう
主要

ひずみについても同様です。変形前の単位長さの要素が変形して変位（伸縮量）をもつとき、「元の長さに対する変位の比率」がひずみの意味です。つまり「変位」÷「要素の長さ」です。しかし「元の長さ」といっても 3 次元空間ですから方向と向きがあるし、「変位」も方向と向きを持っています。元の長さの要素と変位の方向は一般に異なっています。

以上のように、応力とひずみの数学的な性質を理解することが、本章の主要な目的になっています。

2.1 ベクトルの演算(積)と座標変換則

◆ ベクトル

大きさ(magnitude)と方向(direction), 向き(sense)を持つ量
 例) 位置, (並進)速度, 角速度, 加速度, 力のモーメント

◆ スカラー

大きさ(magnitude)を持つ量
 例) 温度, 時間

2.1.1 位置ベクトルと束縛ベクトル

原点 O から座標位置 $P(x_1, x_2, x_3)$ に伸ばした有向線分で表わします.
 式(2.1) のように表現されます. ここで e_k ($k=1,2,3$) は座標系の基底です.
 本書では, 原則として正規直交座標系^{1**} を扱います.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j \\ \mathbf{r} &= x_j \mathbf{e}_j = (x_j) \end{aligned} \tag{2.1}$$

2行目は, アインシュタインの総和規約を使っています.

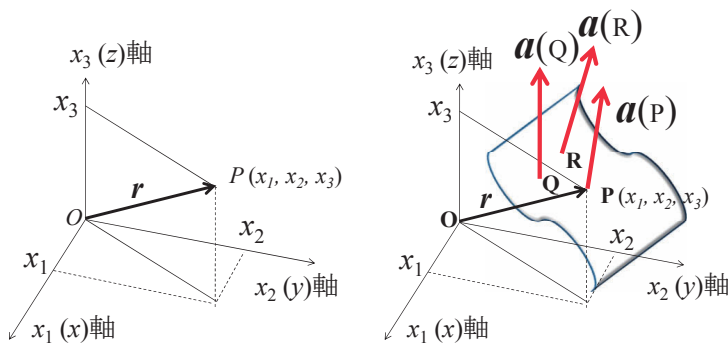


図 2.1 位置ベクトル \overrightarrow{OP} と点 P における束縛ベクトル $\mathbf{a}(P)$

^{1**} 座標軸が互いに直交して軸に沿った基底(ベクトル)が単位の長さ 1 であるとき, その基底を正規直交基底といいます.

演算, 積
 座標変換則
 方向, 向き
 位置, 並進
 速度, 角速度
 加速度, 温度
 時間

位置, 原点
 有向線分
 有向線分
 基底
 正規直交

総和規約

そくばく りょう
束縛, 量
くうかん してい
空間, 指定
してん
始点

にんい ぶんぶ
任意, 分布

じょうたいりょう
状態量
ば
場

じゆう
自由
へいこういどう
平行移動
ぶつりてきせいしつ
物理的性質

とうかせい
等価性

ひと
等しい
あいだ そんざい
間, 存在

りきがくてきこうか
力学的効果

ぼう
棒

座標系の原点 O に基づいて質点や物体等の「位置」を決めます. 位置ベクトルは, 点 O における束縛ベクトル (bound vector) です.

連続体の速度や力, 変位などは空間内のどの位置点におけるベクトル量なのかを指定しないと意味がありません. そこで空間内で始点 P を選んで, 速度ベクトルや変位ベクトルを割り付けます. これを点 P における束縛ベクトルと呼びます. 同様にして点 Q , 点 R などの任意の空間点に束縛された速度や変位を与えることで, 空間に分布したベクトル (連続体の中に状態量として分布するもの) を考えることができます. このようなベクトル量の空間分布をベクトル場 (vector field) と言います.

これに対して座標系の原点位置に依存しないベクトル $\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}_j = (a_j)$ を考えることができます. これを自由ベクトル (free vector) と呼びます. 自由ベクトルは, 座標空間内で平行移動しても物理的性質が変化しない量です.

束縛ベクトルは, 空間内の点 P と自由ベクトル \mathbf{a} とを組み合わせたものです. 連続体では, 力と変形に関する物理量をすべて「場」の関数として考えますから, 基本的にすべての量を束縛ベクトルとして扱います.

2.1.2 ベクトルの等価性

2 つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} が同じ大きさ, 同じ方向, 同じ向きを持つとき, これらは「等しい」といい $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ と表現します. 始点の異なる束縛ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} の間で $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (成分が等しい) であるものは数多く存在します.

2 つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} が力学的に同じ効果を生ずるとき, これらは「等価」であると言います. 一般に, 始点が異なり, 成分が等しい 2 つの束縛ベクトルは, 力学的に等価ではありません.

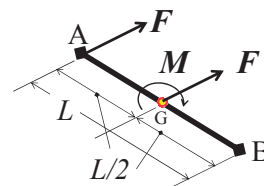


図 2.2 棒に作用する力の等価変換

図 2.2 のように長さ $2L$ の棒の端点 A に力 F が作用するとき、重心点 G まわりのモーメント

$$M = FL/2 \quad (2.2)$$

と G 点に作用する力 F との組み合わせと等価であることは、よく知られています。

物体内の点 \mathbf{a} を始点として物体に作用する力 \mathbf{F}_a があるとき、 \mathbf{F}_a の向きと同一の作用線上に物体内の点 \mathbf{b} があり、この点 \mathbf{b} を始点とする \mathbf{F}_a と等しい向きと大きさを持つ力 \mathbf{F}_b を考えます。このとき、 \mathbf{F}_a と \mathbf{F}_b は力学的に等価です。自由ベクトルは、任意の点を始点として力学的に等価とみなせるものです。上述の同一作用線上にある力の等価性は、同一作用線上という制約付きで力を自由ベクトルとみなしています。

2.1.3 ベクトル場

ベクトル場とは束縛ベクトルが定義された空間のことです。つまりベクトルを表す矢印をその始点 \mathbf{P} に対応させたことを「場」といいます。

ベクトル場:

空間内の各点 \mathbf{P} に対し、ベクトル量(有向線分)を張りつけたもの。

具体的な例として、「流体」の速度や「固体」内部の変位は、連続体の内部空間の位置 \mathbf{P} にある微小要素の速度や変位を指し示す物理量です。このとき、束縛ベクトルとしての「速度」や「変位」が空間に分布していると解釈します。

ここで「微小要素」の定義として、物質を構成する原子や分子のような不連続で確率的に不確定なものを想定するのではなく、数学的に無限小の大きさを持つ部材要素を想定しています。連続体は、この微小要素が無限に連なった有限の大きさを持つ「物体」です。従って連続体という近似の適用限界は、原子の半径よりも大きな「質量をも

端点, 重心

始点
作用線
同一

上述
制約付き

定義
対応

張る

内部

分布, 解釈

不連続,

不確定, 想定

無限小, 部材

有限, 確率

適用限界

しはい
支配,
れんせいりきがく
連成力学
そうごきょう
相互作用
きこう およ
機構, 及ぼす

「小さい要素の集合」から構成されるとみなせる物体です。

連続体を支配する力学は、多数の微小要素の連成力学であると理解してもよいでしょう。微小要素の中に質量が集中し、微小要素同士のつながりとして「ばね」や「ダッシュポット」のような相互作用を及ぼす機構を持っています。

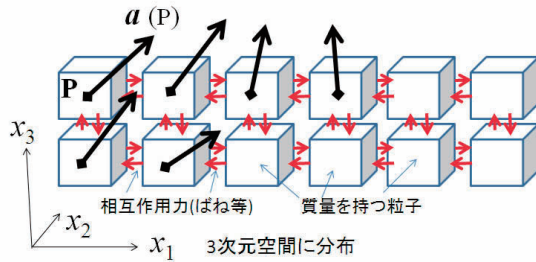


図 2.3 相互作用を持つ微小要素の集合

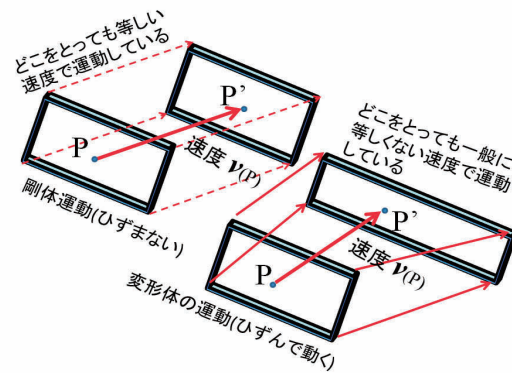


図 2.4 剛体運動と変形体運動の違い

ちが
違い

しんかんせん
新幹線
じどうしゃ
自動車

へいしん ざひょうけい
並進, 座標系
そうたいてき かんそく
相対的, 観測
じょうきょう
状況

これに対して剛体(走行する新幹線や自動車)の重心位置の並進速度やその加速度を議論するとき、座標系に対する相対的な動きとして1つの剛体の速度や加速度を意味付けるので、観測される剛体内部の位置には関係しない(どこをとっても同じ)。

言い換えると、剛体が動くような状況では、一質点の運動と同様に平均代表的な物理量のみで十分です。但し剛体は、空間に質量が分布するので回転慣性と回転の自由度を持ちます。剛体は、連続体の内部の変形がない特殊なものとして理解できます。また、一質点の場合であって

とくしゅ
特殊

も質点の位置ベクトル r だけは原点 O に依存する束縛ベクトルですから注意しておきましょう。

2.1.4 ベクトルの演算

(1) スカラー積, 内積 (inner product)

2つのベクトル a, b の内積は式(2.3)で定義されます。

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \quad (2.3)$$

演算に関して

$a \cdot b$ と $b \cdot a$ は等しい(可換)

という性質があります。

例題 2.1

$a = 1e_1 + 0e_2 = e_1$ とするとき,

a と $b = b_1e_1 + b_2e_2$ との内積は

式(2.4) のようになります。これ

は、図 2.5 に示すように、方

向余弦 $\cos \theta$ を使った e_1 方向

への b の射影成分に等しくなります。 e_1 方向の射影成分は x_1 軸方向

の成分です。

$$e_1 \cdot b = b_1 = |b| \cos \theta \quad (2.4)$$

内積は、ベクトルの射影成分を求める演算であり、座標成分を取り

出すために利用できます。

例題 2.2

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (2.5)$$

この式が成立することを示しなさい。

解答例

$a = a_i e_i, b = b_k e_k$ の式を内積の演算式に代入して展開します。

ここにおいて i, k は擬標であり総和規約に従います。内積は、双線形

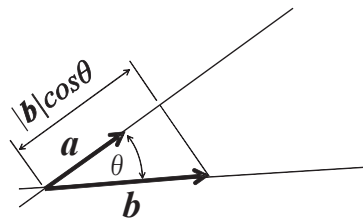


図 2.5 a に対する b の射影

ないせき
内積

かかん
可換

ほうこうよげん
方向余弦
しゃえいせいぶん
射影成分

てんかい ぎひょう
展開, 擬標
そうせんけいせい
双線形性

係数

性^{2**} をもつため、スカラー係数を式の左右へ移しても結果は等しいことに注意すれば、式(2.6) が導かれます。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i \mathbf{e}_i \cdot b_k \mathbf{e}_k = a_i b_k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \quad (2.6)$$

座標軸, 直交

デカルト座標系において座標軸の向きは互いに直交することから、 $i=k$ のとき

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = 1^2 \cos 0 = 1 \quad (2.7)$$

です。また $i \neq k$ のとき

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = 1^2 \cos 90^\circ = 0 \quad (2.8)$$

です。式(2.7), (2.8) をまとめて記述するため、クロネッカーのデルタ記号 δ_{ik} を使えば、式(2.9) のようになります。

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} \quad (2.9)$$

これより

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_k \delta_{ik} = a_k b_k$$

証明

以上のことから $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ が証明されました。

例題 2.3

挙げる

内積演算で表わされる物理量として何がありますか。例を挙げなさい。

解答例

移動距離, 力
仕事

仕事量は、物体に働く力 \mathbf{F} と移動距離(変位)の増分量 $d\mathbf{x}$ との内積を積分した式になります。

W_{AB} : 位置 \mathbf{x}_A から \mathbf{x}_B までの移動でなされる仕事量は、式(2.10) で表されます。

^{2**} 多変数関数において個々の変数について線形性をもつことです。

$$W_{AB} = \int_{x^A}^{x^B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{x^A}^{x^B} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 \quad (2.10)$$

(2) ベクトル積, 外積(outer product)

2つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} に対して図のような右ねじの向きをとり, 大きさは式(2.11)で与えられるベクトル \mathbf{c} を考える. これを \mathbf{a} , \mathbf{b} の外積と言います.

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin\theta \quad (2.11)$$

ここで大きさ $|\mathbf{c}|$ は, 平行四辺形の面積に等しくなります.

外積は, 数学的な性質として式(2.12)のような行列式で表現できることがわかっています.

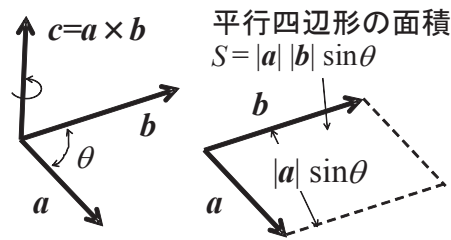


図 2.6 ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} の外積

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \mathbf{e}_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \mathbf{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

例題 2.4

外積演算で表現される物理量は何ですか? 例を挙げなさい.

解答例

質量 m を持つ物体の質量中心に関する位置ベクトルを \mathbf{r} , その速度を \mathbf{v} とします. このとき

- (i) 回転力(トルク, 力のモーメント) \mathbf{M} :

がいせき
外積

みぎ
右ねじ

へいこうしへんけい
平行四辺形

ぎょうれつしき
行列式
ひょうげん
表現

かいてんりよく
回転力

さようはんけい
作用半径

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{基準点からの作用半径} \times \text{力}) \quad (2.13)$$

(ii) 角運動量 \mathbf{L} :

うんどうりょう
運動量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) \quad (\text{作用半径} \times \text{運動量}) \quad (2.14)$$

たいふう たつまき
台風, 竜巻

流体中に発生する渦(台風や竜巻, 渦潮等)や独楽の回転において, その連続体中の回転流れ方向を向く速度は, 渦の角速度と作用半径の積で与えられます.

こま うず
独楽, 渦

(iii) 渦速度(回転運動の接線速度):

せつせん
接線

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\text{角速度} \times \text{作用半径}) \quad (2.15)$$

(3) 基底ベクトルの外積演算

みぎて きてい
右手, 基底
ちよつこう
直交

右手直交座標系 $O-x_1x_2x_3$ の x_1 軸, x_2 軸, x_3 軸に沿って定義される基底ベクトル \mathbf{e}_k ($k=1,2,3$) は, 互いに直交し大きさは 1 (単位長さ) です. それらの外積は, 第 3 の基底に等しい関係にあります.

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \quad (= \mathbf{e}_k) \quad (2.16)$$

ここで添字 i, j は 1, 2, 3 のいずれかの整数値をとる自由標です.

ゆいいつ
唯一

$i \neq j$ のとき, $|\mathbf{e}_i| = |\mathbf{e}_j| = 1$, $\sin\theta = \sin 90^\circ = 1$ だから $|\mathbf{e}_k| = 1$ です. 3次元空間でその向きは, i と j の両方に直交する第 3 の向きが唯一ですから, k は自ずと 1 つ決定されます. すなわち, 添字 i, j, k が 3次元空間の基底の成分を偶順列的に^{3**} あらわすものとして, 上の表現式は一般的に成立します.

おの
自ずと

ぐうじゆんれつ
偶順列

$i=j$ のとき, $\sin\theta = \sin 0 = 0$ だから $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ となります(成分がすべて 0 のベクトル).

また, 右ねじの性質から, 外積の向きに関して $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i$ が常に成立します.

以上のような外積演算による基底ベクトルの関係を 1 つの式で表現するために特別な置換記号(permutation symbol) ε_{ijk} を導入します.

この記号(変数)の意味は, 3 つの添字 (i, j, k) が偶順列であるとき,

ちかんきごう
置換記号

^{3**} 3 つの数字 1, 2, 3 の順列を考え, 偶数回の入れ換えで (1, 2, 3) の並びになるものを偶順列といいます.

値 1 をとり、奇順列であるとき、値 -1 をとり、それ以外の組み合わせのとき値 0 をとるというものです。例えば次のように書き出すことができます。

$$\varepsilon_{111}=\varepsilon_{222}=\varepsilon_{333}=\varepsilon_{122}=\varepsilon_{221}=\varepsilon_{212}=\dots=0 \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1 \quad (\text{偶順列}) \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1 \quad (\text{奇順列}) \quad (2.19)$$

この置換記号を使うと、ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} に関する外積の定義をきれいに式(2.20)のように1本で表現できます。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i \quad (\text{総和規約に従う}) \quad (2.20)$$

(4) 座標変換則

基底を換えてベクトルを表現することを考えます。即ち、基準となる座標系を取り換えてベクトルを表現するとき、ベクトルの成分と座標系との関係がどのようになっているのかを考えてみます。ここで取り扱うのは位置 \mathbf{P} を原点 \mathbf{O} とするベクトルです。慣性座標系で原点の平行移動を行っても、連続体の変形に関して本質的に違いはありません。座標系を原点 \mathbf{O} の周りに回転させ、適当な比例係数によって拡大・縮小を行う場合を考えます。

これを一般に扱う座標変換則は式(2.21)で与えられます。ここで添字 j は自由標、添字 k は擬標であり、 $\mathbf{P}=[p_{kj}]$ を座標変換行列といいます。

$$\mathbf{e}_j = p_{kj} \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\mathbf{e}}_k p_{kj} \quad (2.21)$$

成分をすべて書き出せば式(2.22)のようになります。

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

奇順列

座標変換則

慣性座標系
平行移動

比例係数

拡大, 縮小
行列

ひだりかいてん
左回転

例題 2.5

具体的に x_3 軸まわりに角度 θ だけ左回転(counter-clockwise) を与えた座標系を考えなさい.

解答例

図 2.7 は, $O-x_1x_2x_3$ 系に対して x_3 軸のまわりに角度 θ だけ傾いた $O-\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ 系を示します. このとき x_3 軸は変化しないので式(2.23), (2.24) が成立します.

$$x_3 = \bar{x}_3, \quad e_3 = \bar{e}_3 \tag{2.23}$$

$$p_{13}=p_{23}=0, \quad p_{33}=1 \tag{2.24}$$

次に (e_1, e_2) と (\bar{e}_1, \bar{e}_2) との幾何学的関係を調べてみます.

e_1 は (\bar{e}_1, \bar{e}_2) の座標系で表現できるので, これを未定係数 α, β を使って次のように書きます.

$$e_1 = \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2$$

\bar{e}_1 の e_1 方向への射影成分は $\cos \theta$ に等しいので

$$e_1 \cdot \bar{e}_1 = \alpha \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = \alpha \times 1 + \beta \times 0 = \alpha = \cos \theta$$

次に e_1 の \bar{e}_2 方向への射影成分を考えると $\cos(90^\circ + \theta)$ に等しいので

$$e_1 \cdot \bar{e}_2 = \alpha \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 + \beta \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = \alpha \times 0 + \beta \times 1 = \beta = \cos(\pi/2 + \theta)$$

$$\beta = \cos(\pi/2 + \theta) = -\cos(\pi/2 - \theta) = -\sin \theta$$

これらより次式が導かれます.

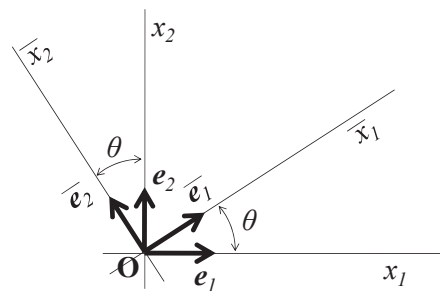


図 2.7 角度 θ をなす 2 つの座標系と基底ベクトル

きかがくてき
幾何学的
みていけいすう
未定係数
かてい
仮定

しゃいせいぶん
射影成分
ひと
等しい

みちび
導く

$$\mathbf{e}_1 = \cos\theta \bar{\mathbf{e}}_1 + (-\sin\theta) \bar{\mathbf{e}}_2 \quad (2.25)$$

$$p_{11} = \cos\theta, p_{21} = -\sin\theta, p_{31} = 0 \quad (2.26)$$

同様にして \mathbf{e}_2 に関する次式を導くことができます。これらの式の誘導については、各自で確認してみてください。

$$\mathbf{e}_2 = \sin\theta \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta \bar{\mathbf{e}}_2 \quad (2.27)$$

$$p_{12} = \sin\theta, p_{22} = \cos\theta, p_{32} = 0 \quad (2.28)$$

以上のことから、式(2.22)の係数成分 p_{ij} がすべて決まり、式(2.29)を得ることができます。

$$[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3] = [\bar{\mathbf{e}}_1 \ \bar{\mathbf{e}}_2 \ \bar{\mathbf{e}}_3] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

(5) 演算規則に慣れよう

式(2.29)は、座標変換行列 P に対して行形式に並べた基底ベクトルを左から掛けていることに注意してください。行列形式とベクトル形式の積演算は、右から掛ける場合と左から掛けるのでは結果が違います。

この式を添字形式で書くと、 $\mathbf{e}_j = \bar{\mathbf{e}}_k p_{kj}$ となります。ここにおいて、繰り返し動かすべきは添字 k です。転置をとると2つの積の順番が逆になるので注意してください。式(2.30)は式(2.29)と同じ内容です。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

(6) ベクトルの恒等式

ベクトル \mathbf{v} の**実体**(entity)は座標変換に関して不変ですが、座標系の

ぎょうけいしき
行形式
か
掛ける

てんちせき
転置, 積
じゅんばん
順番, 逆

こうとうしき
恒等式

じつたい
実体

基底ベクトル \mathbf{e}_k の取り方によって対応する座標成分 v_k は変化します。このとき恒等式 (2.31) が成立します。

$$\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j = \bar{v}_k \bar{\mathbf{e}}_k \quad (2.31)$$

これに基底ベクトルの変換則式(2.21): $\mathbf{e}_j = \bar{\mathbf{e}}_k p_{kj}$ を代入すれば、次の成分同士の関係を得ます。

$$\mathbf{v} = v_j \bar{\mathbf{e}}_k p_{kj} = \bar{v}_k \bar{\mathbf{e}}_k \Rightarrow v_j p_{kj} = \bar{v}_k \quad (2.32)$$

角度 θ だけ傾いている系同士の座標変換では、式(2.33) になります。

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

式(2.33)は、座標変換行列 P に対して、列形式にならべたベクトル成分を右から掛けた形式となっています。この式を転置したり、逆行列を掛けたりしてバーのつく系とバーのつかない系との関係をよく理解してください。

正規直交座標系の座標変換行列 P は、逆行列 P^{-1} と転置 tP とが等しい性質を持っています。このような行列を**直交行列**とといいます。

2.1.5 まとめ

変形する連続体では、原点 \mathbf{O} における座標の束縛とともに空間内のあらゆる位置 \mathbf{P} に張り付けられたベクトル量を取り扱う必要があります。これをベクトル場とといいます。

ベクトルの数学的な表現方法として、(a) 座標系に付随の基底ベクトルの線形結合式をもちいた書き方と、(b) 成分だけを括弧でくくりだして書く方法が使われます。どちらも同じ実体を表していますが、(b) の方式は暗黙のうちに座標基準を伏せて使っているのに対して、

れつけいしき
列形式
てんち きやくぎょうれつ
転置, 逆行列

ちよつこうぎょうれつ
直交行列

ふずい
付随
せんけいけつごう
線形結合
かっこ
括弧
あんもく ふ
暗黙, 伏せる

(a) の方式は明示的に座標基準を示します。

空間的に傾く姿勢が違う2つの座標系の間で、座標の変換を数式によって取り扱いました。ここで座標変換行列 P を導入しました。

座標変換行列 P を使って1回だけベクトルの成分と積演算を行うと、2つの座標系の間で成分の変換を行うことができることを紹介しました。この「1回だけ積演算をすればよい」という性質が、ベクトルの大きな特徴です。

総和規約の表現方法を紹介しました。同じ添字が複数あるとき、「繰り返し展開して和をとる」という擬標を持つ簡易表記法を扱いました。

ベクトルとベクトル成分との識別をするため、前者を太文字(Bold)とし、後者を普通の太さで書くとともに添字を書きます。同様の識別は、ベクトルとスカラーとの区別においても行います。ベクトル成分は大きさのみですから、スカラー量になっていることを考えれば自然な対応です。なお、帳面に書くとき、太文字と細文字を区別することが大変と感じられるときは、細い文字の上に→を付けて表現することも1つの便法です。

練習問題

(1) 式(E.2.1) が成立することを証明しなさい。具体的に添字を展開して書き出して、左辺と右辺が等しい関係になっていることを示しなさい。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 2\delta_{il} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6\end{aligned}\tag{E.2.1}$$

(2) $\mathbf{a}=(1, 2, 3)$, $\mathbf{b}=(0, -1, 1)$ のとき、次の式を求めなさい。

- (i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- (ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

めいじてきしせい
明示的, 姿勢

ざひょうべんかんぎょうれつ
座標変換行列

とくちょう
特徴
ふくすう
複数

かんいひょうきほう
簡易表記法

しきべつ
識別

ちやうめん
帳面

べんぼう
便法

しやうめい
証明

傾斜, 荷物
斜面

分力

証明
反時計
回り

分解
変換則

(iii) 3a-2b

(3) 以下の仕事を力と変位のスカラー積で求めなさい。

水平線に対して傾斜 30°の斜面上に荷物をおき, この斜面に沿って 9.8N の力で高さ 3m まで荷物を押し上げた。

(4) 水平となす角度 θ の斜面上に重さ 980 N の物体をおく. このとき物体に働く重力の斜面に沿った分力の大きさを求めなさい。

(5) 正規直交座標系の座標変換行列 $P=[p_{ij}]$ について tP と P^{-1} が等しいことを証明しなさい。

(6) 基底を e_1, e_2 とする 2次元直交座標系 $O-x_1x_2$ に対して, 反時計方向(左回り)に 30° 傾いた方向に座標系 $O-\bar{x}_1\bar{x}_2$ を考えます. このとき, $O-\bar{x}_1\bar{x}_2$ の基底 \bar{e}_1, \bar{e}_2 を e_1, e_2 を用いて表しなさい。

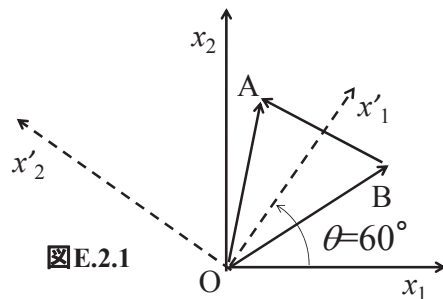
(7) 2つの正規直交座標系 $O-x_1x_2x_3$ と $O-\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ についてベクトル a を座標成分に分解して表現すれば, $a = a_j e_j = \bar{a}_k \bar{e}_k$ ($j, k: 1, 2, 3$) のようになります. このとき, \bar{a}_k と a_j との変換則は, 式(E.2.2) で与えられることを証明しなさい^{4**} .

$$\bar{a}_k = a_j p_{kj} = a_j (e_j \bullet \bar{e}_k) \tag{E.2.2}$$

(8) ベクトル $a = (0, 1, -1)$, $r = (x^2, x, 1)$ があるとき, ベクトル a と r が直交するように x を求めなさい。

(9) 直交座標系の単位基底ベクトルを e_1, e_2, e_3 とします. ベクトル $u = e_1 - 2e_2 + 3e_3$ が与えられるとき, u の方向の単位ベクトルの成分を求めなさい。

(10) 図 E2.1 の座標系 $O-x_1x_2$ を O 点回りに 60° 反時計回りに回転させます. 回転した新しい座標系 $O-x'_1x'_2$ でベクトル BA の成分を求めなさい. A 点, B 点の位置ベクトルは $\vec{OB} = (2, 1)$, $\vec{OA} = (0.5, 2)$ です.



^{4**} 変換行列 P の成分要素 p_{kj} は, k と j に関して可換ではありません。

2.2 テンソルの演算(積)と座標変換則

2.2.1 ベクトルの演算(積)再考

前節で2つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の積演算として外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を紹介しました。外積は、2つのベクトルから1つのベクトルを求める計算です。この延長で新しく素直な積を考えます。すなわち2つのベクトル $\mathbf{a} = a_k \mathbf{e}_k$, $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ ($k, j: 1, 2, 3$ 擬標) の直積 \mathbf{ab} を作ります。

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (a_k \mathbf{e}_k) (b_j \mathbf{e}_j) = a_k b_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \\ &= a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

直積は、ベクトルの実体をなす要素 ($a_1 \mathbf{e}_1, a_1 \mathbf{e}_2, \dots$) を素直に組み合わせて展開しただけの多項式です。この式の座標成分に注目すると、次のようにならべて行列を作っているのと同じです。

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

このことから、基底ベクトルを2つならべた式 $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j$ ($k, j: 1, 2, 3$ 自由標) は、行列成分の位置 (k 行 j 列) を示す識別子のような意味を持ちます。

本節では、このような積を一般式のまま利用するとうまく整理できる都合のよい物理対象を考えます。その前に、外積の性質をもう少し考えてみます。

演算(積) $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j$ について、次のように特殊な制限を加えます。

自由標 k, j について

$k=j$ のとき, $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = 0$.

$k \neq j$, k, j を入れ換えると符号反転: $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$

これらの2つの条件は、式(2.16)の性質を満足していることに注意してください。この制約条件によって式(2.34)は、次のようになります。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \mathbf{b} &= a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \quad (2.36) \end{aligned}$$

外積は、式(2.36)において、

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \rightarrow \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{e}_2$$

と置き換えたものに相当します。式(2.16)は、このような演算(積)を記号“ \times ”を使って記しており、

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

と書いています。

内積についても制約条件を書き出してみると、次のように整理できます。

自由標 k, j について

$$k=j \text{ のとき, } \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = 1. \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = 1$$

$$k \neq j \text{ のとき, } \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = 0. \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = 0$$

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.37)$$

以上のように目的に応じて演算規則を設けることでいろんな操作を定義して利用できるのです。内積は射影成分の取り出しを意図していますし、外積は力のモーメントや渦の回転速度を表現するために導入された演算です。以下では、式(2.34)と式(2.35)をそのまま扱うことを考えてみます。

2.2.2 テンソル積 (dyadic, tensor product) と基底 (diad)

2つのベクトル $\mathbf{a} = a_k \mathbf{e}_k, \mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ ($k, j: 1, 2, 3$ 擬標) の直積として知られる

これらの2つの条件は、式(2.16)の性質を満足していることに注意してください。この制約条件によって式(2.34)は、次のようになります。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \mathbf{b} &= a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \quad (2.36) \end{aligned}$$

外積は、式(2.36)において、

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \rightarrow \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{e}_2$$

と置き換えたものに相当します。式(2.16)は、このような演算(積)を記号“ \times ”を使って記しており、

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

と書いています。

内積についても制約条件を書き出してみると、次のように整理できます。

自由標 k, j について

$$k=j \text{ のとき, } \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = 1. \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = 1$$

$$k \neq j \text{ のとき, } \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = 0. \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = 0$$

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.37)$$

以上のように目的に応じて演算規則を設けることでいろんな操作を定義して利用できるのです。内積は射影成分の取り出しを意図していますし、外積は力のモーメントや渦の回転速度を表現するために導入された演算です。以下では、式(2.34)と式(2.35)をそのまま扱うことを考えてみます。

2.2.2 テンソル積 (dyadic, tensor product) と基底 (diad)

2つのベクトル $\mathbf{a} = a_k \mathbf{e}_k, \mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ ($k, j: 1, 2, 3$ 擬標) の直積として知られる

積(dyadic) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ならびに $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ を考えます^{5**} .

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_k b_j) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} = (b_k a_j) = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ と $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ は、一般に異なる対象です。このような演算順序の違いによって結果が異なることを **非可換** といいます。式(2.38),(2.39)は、成分のみを扱い、行列で表現されています。これに対して基底を用いて演算を表現すれば、次のようになります。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \otimes (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 \mathbf{e}_1 \otimes (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) + a_2 \mathbf{e}_2 \otimes (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_3 \mathbf{e}_3 \otimes (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.40)$$

この式は成分をすべて展開して記しています。手書きをすると大変ですので、上の式を省略記法(総和規約)で表わせば、

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_k \mathbf{e}_k) \otimes (b_m \mathbf{e}_m) = a_k b_m \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \quad (2.41)$$

ここで擬標 $k, m = 1, 2, 3$ について縮約をとっています。双線形性によって成分項 a_k や b_m を

$$\text{基底(diad)} \quad \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m$$

^{5**} 演算記号 \otimes を外して、ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の積を \mathbf{ab} のように書いてもよいです。

の左右に括りだすことができます^{6**} . ベクトルの成分と基底との線形結合式 $\mathbf{a} = a_k \mathbf{e}_k$ ($k=1,2,3$: 擬標) において, 線形性は成立しています. この線形性を 2 項演算(積)によって生成された基底 $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m$ と係数成分との関係でも成立することを述べたものが双線形性です.

積(diadic)の基底(diad) が持つ性質を以下に書き出します. これらは, 基底(diad) とベクトルとの演算(積)に関する制約として新たに導入(定義)されたものです.

(i) スカラー a と基底 $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ($i,j=1,2,3$: 自由標) と交換できます.

$$a \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \otimes a \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j a \quad (2.42)$$

(ii) 加法に関して交換法則と結合法則が成立します. スカラー a, b, c, d, f と基底に対して次式が成り立ちます($i,j,k=1,2,3$: 自由標). 簡単に言えば, 共通の基底に関してスカラーを括りだせます.

$$\begin{aligned} a \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i + b \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i + c \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j + d \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i + f \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j \\ = (a+d) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i + b \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i + (c+f) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (2.43)$$

(iii) 基底(diad)とベクトル \mathbf{z} との内積および外積は, 次の関係に従います($i,j,k=1,2,3$: 自由標).

内積の場合

$$\begin{aligned} (a \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + b \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \bullet \mathbf{z} &= a \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \bullet \mathbf{z}) + b \mathbf{e}_j (\mathbf{e}_k \bullet \mathbf{z}) \\ \mathbf{z} \bullet (a \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + b \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) &= a (\mathbf{z} \bullet \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j + b (\mathbf{z} \bullet \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (2.44)_{1,2}$$

外積の場合

$$\begin{aligned} (a \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + b \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \times \mathbf{z} &= a \mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{e}_j \times \mathbf{z}) + b \mathbf{e}_j \otimes (\mathbf{e}_k \times \mathbf{z}) \\ \mathbf{z} \times (a \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + b \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) &= a (\mathbf{z} \times \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j + b (\mathbf{z} \times \mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (2.45)_{1,2}$$

ここで式(2.44),(2.45) のような演算をなぜ導入する必要があるの

^{6**} 多変数関数の各変数について多重線形性があることです. ここでは 2 項演算(積)なので, 2 つの変数を持つ場合です. 例えば関数 $\psi(x,y)$ に対して $\psi(ax+bx, y) = a\psi(x,y) + b\psi(x,y)$, $\psi(x, ay+by) = a\psi(x,y) + b\psi(x,y)$ が成立します.

か、という問いかけをしたくなりますが、積(dyadic) と基底(diad) の整理をもう少し行ってから例題を次節 2.2.3 で紹介します、

積(dyadic) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ と基底(diad) $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ は、ベクトル量を 2 つ並べた形式のままで 1 つの新しい量として取り扱われます。

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ は、スカラー係数が成分となって $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ の線形結合で表されます。これは 2 つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の複合体とでもいうべきものです。一般にこれを **2 階のテンソル**(tensor of the second rank) と呼んでいます。これに応じて記号 \otimes を **テンソル積** の演算子と言います。「2 階(the second rank)」というのは、2 つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} から派生した複合体であることを象徴した性質を持っているからです。

一般化して考えれば、 n ($=0, 1, 2, 3, 4, \dots$) 個のベクトルから派生した複合体ならば、 n 階テンソルになります。元に戻って考えれば $n=1$ のとき、つまりベクトルを 1 階テンソルと呼びます。

まとめ

- 積(diadic) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ は、2 階テンソル(テンソル積)。
- 基底(diad) $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ は、2 つの基底ベクトル $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ から構成。
- 積(diadic) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ とベクトル \mathbf{z} との内積 \Rightarrow ベクトル
- 積(dyadic) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ とベクトル \mathbf{z} との外積 \Rightarrow テンソル積(dyadic)

一般化された概念

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \Rightarrow (2 \text{ 階テンソルの一般形})$$

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \dots \text{基底 } \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \text{ に関する成分: } T_{ij} \quad (2.46)$$

実体 \mathbf{T} : 2 階のテンソル, T_{ij} : 2 階のテンソルの成分。

2.2.3 テンソル積によって表現される物理量

積(diadic) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ によって表現される情報量または物理量として、連続体(物体)のある断面に働く力を表現するために必要な属性を考えてみます。

図 2.8 は、ある物体の中に微小要素(直方体)を考えて、第 3 軸方向に垂直な面 3 に働く力 F を示したものです。力 F はベクトルであり、座標成分 (F_1, F_2, F_3) を持ちます。ここで面 3 の面積を A_3 であるとします。

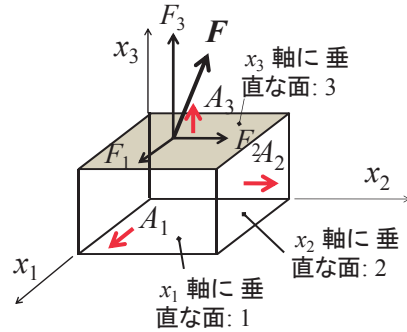


図 2.8 第 3 軸に垂直な面に作用する力

同様に第 1 軸に垂直な面 1 と第 2 軸に垂直な面 2 に対しても作用する力があります。このようなとき、単位面積あたりの力、すなわち応力を考えてみると、第 3 軸方向の面 3 に働く応力として、次の 3 つの量が考えられます。

$$\Sigma_{31} = \frac{F_1}{A_3}, \Sigma_{32} = \frac{F_2}{A_3}, \Sigma_{33} = \frac{F_3}{A_3} \quad (2.47)$$

考えている物体が微小要素の場合、微分量または差分量としての力と面積の比を扱いますから、応力は微分量の比で表現できます。そこで式(2.47)の変形版として、式(2.48)が物理的に興味ある量です。

$$\sigma_{31} = \frac{\partial F_1}{\partial A_3}, \sigma_{32} = \frac{\partial F_2}{\partial A_3}, \sigma_{33} = \frac{\partial F_3}{\partial A_3} \quad (2.48)$$

一般形で書けば、 k 軸に垂直な面の面積 A_k で作用力の j 軸方向成分 F_j を割った値: σ_{kj} を次のように表現します。ここで、形式的に面演算子: $a_k = \partial(\) / \partial A_k$ と作用力 $b_j = F_j$ の対応関係を考えます。

$$a_k b_j = \frac{\partial(\)}{\partial A_k} F_j = \frac{\partial F_j}{\partial A_k} \quad (2.49)$$

式(2.49)は、力ベクトルを面積ベクトルで割った意味 (応力) を持ち

ます。形式的に式(2.49)は、演算子ベクトル a_k と力ベクトル b_j との積 (dyadic) になっています^{7**}。

式の一般化として、割算や微分は -1 乗の積と考えることができますから、広い意味で微分演算は積の形式で記述できます。

面積⁻¹の演算子ベクトル \otimes 力ベクトル \rightarrow 応力

この応力を表す積(dyadic) は、面の方向と力の方向を指し示す添字を必要とします。このように **2つの添字** で示す代表的な物理量として、連続体の内部点における「応力」があります。同様の物理量として「ひずみ」も2つの添字を持ちます。応力とひずみの力学的な定義については、3~4章で改めて紹介します。

連続体内部の空間における属性ですから、束縛された量であり、「場」を作ります。本節ではテンソル積の形式から応力のような物理量を表現する事例を紹介しました。

内積に関する式(2.44)の規則は、射影としての成分を取り出すのに使われます。次節でその意義を紹介します。外積の式(2.45)の規則については、回転を伴う運動を表現するときに必要なになります。

2.2.4 テンソル積の座標変換則

ベクトルの座標変換則を2.1節で扱いました。ここでは2階のテンソル \mathbf{T} の座標変換則を考えてみます。

2つの座標系 $O-x_1x_2x_3$ と $O-\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ に対応する基底ベクトルをそれぞれ $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ とおきます。2階テンソル \mathbf{T} の成分は、それぞれの座標系に対して T_{kj}, \bar{T}_{kj} ($k, j=1, 2, 3$: 自由標) で与えられるものとします。

$$\mathbf{T} = T_{kj} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j = \bar{T}_{kj} \bar{\mathbf{e}}_k \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \quad (k, j=1, 2, 3: \text{擬標}) \quad (2.50)$$

^{7**} $a_k b_j = \partial F_j / \partial A_k$ と $b_j a_k = F_j \partial(\) / \partial A_k$ は違います。

これらの成分 T_{kj}, \bar{T}_{kj} は, 式(2.44) の内積演算式を使って射影成分として得ることができます.

$$T_{kj} = \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{T} \bullet \mathbf{e}_j, \quad \bar{T}_{kj} = \bar{\mathbf{e}}_k \bullet \mathbf{T} \bullet \bar{\mathbf{e}}_j \quad (2.51)$$

この2つのテンソル成分の間で基底ベクトルの座標変換則:

$$\bar{\mathbf{e}}_k = p_{kj} \mathbf{e}_j$$

が成立するので, 次の関係(2.52)を導くことができます.

$$\begin{aligned} \bar{T}_{kj} &= \bar{\mathbf{e}}_k \bullet \mathbf{T} \bullet \bar{\mathbf{e}}_j = (p_{kw} \mathbf{e}_w) \bullet \mathbf{T} \bullet (p_{jm} \mathbf{e}_m) \\ &= p_{kw} p_{jm} \mathbf{e}_w \bullet \mathbf{T} \bullet \mathbf{e}_m \\ &= p_{kw} p_{jm} T_{wm} \quad (w, m : \text{擬標}, k, j : \text{自由標}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

この関係式は2階テンソルの座標変換則として知られています. 逆に式(2.52)で座標変換される対象量があれば, その対象量は, 2階テンソルの性質を持っていると判定することができます.

2階テンソルを成分変換するためには, 座標変換行列 P を左から1回, 転置行列 ${}^t P$ を右から1回, 合計で2回掛けてやる必要があります. 式(2.52)を行列形式に書けば, 式(2.53)のようになります.

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} & \bar{T}_{13} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} & \bar{T}_{23} \\ \bar{T}_{31} & \bar{T}_{32} & \bar{T}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

ベクトル(1階テンソル)は, 1つの大きさ(magnitude)と1つの方向(direction)・向き(sense)を持つ量であるのに対して, 2階テンソルは, 1つの大きさと2つの方向・向きを持つ量になっています. そのため, 成分を識別するために2つの添字を使います.

一般に n 階のテンソルは, 成分を識別するための添字が n 個にな

っています。座標変換に際して、階数 n だけ座標変換行列 \mathbf{P} を掛けてやる必要があります。

2.2.5 関数としてのベクトル量[復習]

ベクトルで表わされる物理量 \mathbf{A} が時間 t の関数であるとき、すなわち時間とともに \mathbf{A} が連続的に変化するとき、次のように表現します。

$$\mathbf{A}(t) = A_k(t) \mathbf{e}_k = (A_k(t)) \quad (2.54)$$

ここでは、観測する座標系は時間に対して動かないので、 t に関する微分に対して定数のようにふるまいます。ベクトルの成分だけが時間 t の関数となっています。このとき、 $A_k(t)$ は t について微分可能ですから、導関数 dA_k/dt が成分 A_k に対して存在します。これをベクトル形式で次のように表現する。

$$d\mathbf{A}(t)/dt = dA_k(t)/dt \mathbf{e}_k = (dA_k(t)/dt) \quad (2.55)$$

同様にして、ベクトルで表わされる物理量 \mathbf{A} の時間 t に関する積分を考えることができます。

$$\int \mathbf{A}(t) dt = \mathbf{e}_k \int A_k(t) dt \quad (2.56)$$

ベクトル $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)$ の t についての微分 $d\mathbf{a}/dt, d\mathbf{b}/dt$ が存在するとき、次の演算に対して関係式(2.57)が成立します。

和と差: $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}$,

スカラー量 c とベクトル量 \mathbf{a} の積: $c\mathbf{a}$,

内積: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

外積: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

式(2.57)は、成分毎に成立することを合成形式として表現したものです。

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d(a_k + b_k)}{dt} = \frac{da_k}{dt} + \frac{db_k}{dt} \\ \frac{d(c\mathbf{a})}{dt} &= \frac{dc}{dt}\mathbf{a} + c\frac{d\mathbf{a}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d(ca_k)}{dt} = \frac{dc}{dt}a_k + c\frac{da_k}{dt} \\ \frac{d(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \bullet \frac{d\mathbf{b}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d(a_k b_k)}{dt} = \frac{da_k}{dt} b_k + a_k \frac{db_k}{dt} \\ \frac{d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d(\varepsilon_{ijk} a_j b_k)}{dt} = \varepsilon_{ijk} \frac{da_j}{dt} b_k + \varepsilon_{ijk} a_j \frac{db_k}{dt} \end{aligned}$$

(2.57)_{1,2,3,4}

練習問題

- (11) 式(2.44) の内積演算式を使って式(2.51)が成立することを証明しなさい。
- (12) 静止座標系を1つ選んで、そこを基準として動く座標系を定義できます。このとき、動く座標系の基底ベクトルを時間の関数という意味で $\mathbf{e}_k(t)$ のように記します。ベクトル \mathbf{v} の成分 v_k が時間の関数であり、なおかつ座標系が時間とともに運動するとき、 $d\mathbf{v}/dt$ はどのように表現されますか？
- (13) 置換記号 ε_{ijk} に関して次の計算をなさい。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{112} &= & \varepsilon_{111} &= & \varepsilon_{131} &= \\ \varepsilon_{2jk}\varepsilon_{2jk} &= & & & & \end{aligned}$$

- (14) 行ベクトル $\alpha=(1,0,0)$, 行ベクトル $\beta=(0,-1,0)$, 行列 $T=((-1, 0, 2), (1, 2, 3), (0, -2, 1))$ を使って $T \cdot {}^t\alpha$ と $\beta \cdot T$ を求めなさい。

ただし $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ を表します。

- (15) 座標系の基底ベクトルを \mathbf{e}_k ($k=1,2,3$) とします。ベクトル $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_2$ と 2 階のテンソル $T = -\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ を使って $T \cdot \mathbf{a}$ と $\mathbf{b} \cdot T$ を求めなさい。

(16) ベクトル $\mathbf{a}=(x^2, 2x, 1)$, $\mathbf{b}=(1, y, y^2)$, $\mathbf{c}=(1, 1, -2)$ に対して次の計算をなさい.

(i) テンソル積 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$

(ii) テンソル積とベクトルとの内積 $\mathbf{c} \bullet (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$ と $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c}$

(17) 以下は総和規約を用いて書かれた式です. 添字の動く範囲がそれぞれ 1~3 として, これらの式を具体的に書き下しなさい.

$$(a) dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k \quad (b) (a_j x_j)^3 \quad (c) \frac{\partial x_j}{\partial t_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_m} z_j$$

(18) 以下の式を総和規約で書きなさい.

$$t_1 = \tau_{11}n_1 + \tau_{21}n_2 + \tau_{31}n_3,$$

$$a) t_2 = \tau_{12}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{32}n_3,$$

$$t_3 = \tau_{13}n_1 + \tau_{23}n_2 + \tau_{33}n_3$$

$$b) a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} + a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33}$$

$$c) x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$d) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 c_{ijk} x_i x_j x_k$$

$$e) u = \sum_{k=1}^2 a_k x_k$$

$$f) \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

(19) **仕事**(mechanical work)は, 物体に働く力ベクトル \mathbf{F} の作用に伴うその移動(変位)ベクトル $d\mathbf{r}$ との内積で計算できます. 仕事を式で表せば, $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ となります. 物体に作用する力 \mathbf{F} が場所の関数であり, 次式で与えられます. ここで \mathbf{e}_k ($k=1,2,3$: 自由標) は基底ベクトルを表します.

$$\mathbf{F} = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2^2\mathbf{e}_2 + (x_1 + x_3)\mathbf{e}_3$$

物体がある点 $P(x_{P1}, x_{P2}, x_{P3})$ から点 $Q(x_{Q1}, x_{Q2}, x_{Q3})$ まで移動します。
 この移動経路 PQ に沿った微小変位を $d\mathbf{r} = dx_1\mathbf{e}_1 + dx_2\mathbf{e}_2 + dx_3\mathbf{e}_3$ とし
 て曲線 C に沿った P から Q までの仕事 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ の積分 W を考えます。

$$P \text{ から } Q \text{ までの仕事: } W = \int_{P \rightarrow Q} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \left(= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right)$$

点 P から点 Q までを通る曲線 C として、以下の3つを考えて仕事 W を求めなさい。

- (a) 直線 $x_1 = 1 - x_2 = x_3$ (図 E.2(a))
- (b) 曲線 $x_1 = t, x_2 = 1 - t, x_3 = t^2$ (図 E.2(b))
- (c) 直線 $x_1 = 0, x_2 = 1$ (図 E.2(c))

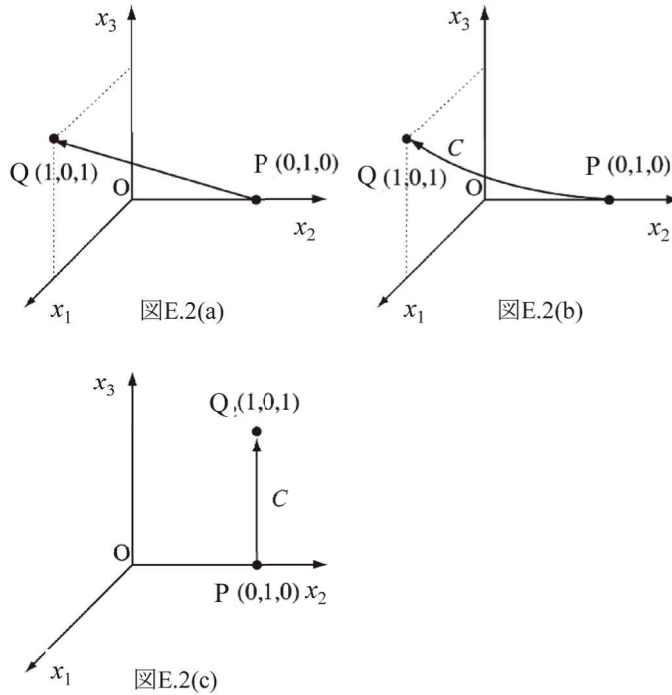


図 E.2 経路曲線 C

3. 応力 (Stress)

本章では、力学的な観点から応力の性質を紹介します。1章 1.2 節 (1)で述べた取り組み方を主に使います。このとき、2章で紹介した2階のテンソルの性質を思い起こすことで、応力の数学的な性質と力学的な性質の両面を知ることができます。

連続体[物体]に働く力は、2種類に大別されます。

(1) 単位体積当りの力 (体積力)

例. 重力, 電磁力: 体積(質量密度, 電荷密度)に関する力

(2) 単位面積当りの力 (面積力, 表面力)

例. 応力: 物理的な意味 = 力÷面積

(2)の面積力については、境界面を通して物体に働く**外力**と、物体内部で生ずる**内力**(反力)に分けることができます。物体の全体的な力の釣合いを考えると、1.11 節で紹介しているように内力と外力に分けて整理する必要があります。

ここでは、外部境界面と物体内部の仮想断面の両方を含む微小な自由物体(微小要素)を考えて、応力の性質を見ていくことにします。

3.1 応力ベクトル (stress vector)

図 3.1^{1***} のように座標空間の位置点 $P(x_1, x_2, x_3)$ をその面上に持つ仮想の微小面 ΔS (単位法線ベクトル: $\vec{\mathbf{v}}$) を通して、物体に外力 $\Delta \mathbf{f}$ が作用する場合を考えます。なお本節では、添字の有無にかかわらずベクトル量であることを強調するため、 \rightarrow を変数の上にしばしば併記することになります。これは、添字があるとスカラー的な成分であるという誤解を避けるためです。

^{1***} 一般にベクトル量を太文字(**bold**)で表します。普通の文字と比べて太さが鮮明でないと、スカラーなのかベクトルなのかが不明確になるので、 \rightarrow を変数の上に併記することになります。ただし、 \rightarrow が無くても文脈からベクトルであるとわかれば、太文字だけで表示します。

面積ベクトルの大きさを $|\Delta \vec{S}| = \Delta S$ とおいて無限小 $\Delta S \rightarrow +0$ とするとき，次の極限を点 $P(x_1, x_2, x_3)$ において考えます．

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S \rightarrow +0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} &= \frac{d \vec{f}}{dS} \\ &= \vec{t} \\ &= t_k \vec{e}_k \end{aligned} \quad (3.1)$$

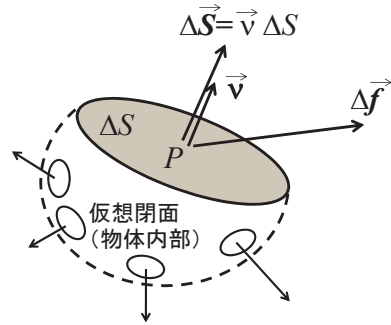


図 3.1 面 ΔS に働く力 $\Delta \vec{f}$

式(3.1)で定義される表面力 \vec{t} を「応力ベクトル」と呼びます．応力ベクトルの定義は，作用面の向き \vec{v} に関係なく， $\Delta \vec{f} = \Delta f_j \vec{e}_j$ が定義される座標系 (\vec{e}_j) の成分として記述されていることに注意してください． $\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{v}$ であり， $\Delta \vec{f}$ と $\Delta \vec{S}$ の方向と向きは一般に違います．

2 章で紹介した式(2.48) は，作用面 $\Delta \vec{S}$ として座標系の第 3 軸に垂直な面 3 を選択した場合に相当します．

3.2 応力テンソル

特殊な例として，連続体を占める空間の位置 P において，図 3.2 に示す

ような面 dA_3 (x_3 軸方向に面の法線 $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$) があり，大きさは $dA_3 = dx_1 dx_2$) に作用する力 $d\vec{f}_3 = \vec{\tau}_3 dA_3$ ならびに応力ベクトル $\vec{\tau}_3 = \tau_{3k} \vec{e}_k$ ($k = 1, 2, 3$: 擬標) を考えます．

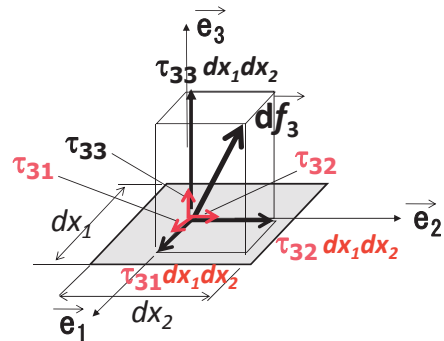


図 3.2 dA_3 に作用する力ベクトル $d\vec{f}_3 = \vec{\tau}_3 dA_3$

$$\begin{aligned}
 d\vec{f}_3 &= \vec{\tau}_3 dA_3 = \vec{\tau}_3 dx_1 dx_2 \\
 &= (\tau_{31} \vec{e}_1 + \tau_{32} \vec{e}_2 + \tau_{33} \vec{e}_3) dx_1 dx_2 \\
 &= \tau_{31} dx_1 dx_2 \vec{e}_1 + \tau_{32} dx_1 dx_2 \vec{e}_2 + \tau_{33} dx_1 dx_2 \vec{e}_3
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

同様にして 3 つの作用面 dA_1, dA_2, dA_3 について 3 つの応力ベクトル $d\vec{f}_1, d\vec{f}_2, d\vec{f}_3$ を考えます。

$$\vec{\tau}_i = \tau_{ij} \vec{e}_j \quad (i: \text{自由標}, j: \text{擬標}) \tag{3.3}$$

ここで τ_{ij} は、第 i 面に作用する第 j 方向の応力成分です。この 3 つの応力ベクトル $\vec{\tau}_i$ ($i=1,2,3$) を一組にして \mathbf{T} とおきます。

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \vec{\tau}_1 \\ \vec{\tau}_2 \\ \vec{\tau}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}) \\ (\tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23}) \\ (\tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

この式は行列として表現されていますが、基底を使った積(dyadic)の表現で書くと式(3.5)のようになります^{2***}。

$$\mathbf{T} = \vec{\nu}_k \otimes \vec{\tau}_k = \vec{e}_k \otimes \tau_{kj} \vec{e}_j = \tau_{kj} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_j \quad (k,j: \text{擬標}) \tag{3.5}$$

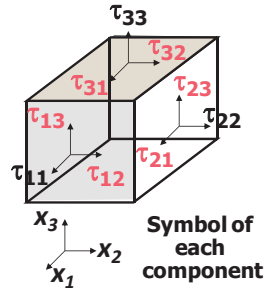
空間内の位置 \mathbf{P} における連続体の内部の応力を考えるため、連続体の内部に仮想的な直方体(微小要素)を図 3.3 のように考えて、それぞれの面が座標軸に直交するようにおきます。 $k=1,2,3$ として第 k 軸方向の面の法線ベクトル $\vec{\nu}_k = \vec{e}_k$ と応力ベクトル $\vec{\tau}_k$ との積(dyadic) を作ることによって、第 k 面の第 j 方向応力成分 τ_{kj} を線形

^{2***} 行列のような配置で成分がなる「座標軸に基づく 3 組の応力ベクトルの集合」を基底 $\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j$ を使って表現します。

結合した式(3.5) を得ることができます。

ここで定義した応力の集合体 T は、位置 P における内部応力の状態をすべて表していることがわかります。

	Stress component		
	x_1	x_2	x_3
x_1 に垂直な面	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}
x_2 に垂直な面	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}
x_3 に垂直な面	τ_{31}	τ_{32}	τ_{33}



- Stress $[\tau_{ij}]$, 2nd rank tensor
- $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ (τ_{ii}): normal stress
- $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}, \tau_{32}, \tau_{13}$ (τ_{ij}): shear stress ($i \neq j$)

EX. 1-plane, 2-component $\rightarrow \tau_{12}$

図 3.3 応力の座標系成分(テンソル成分)

このとき T は面の法線ベクトル(面積の微分演算子の向き)と応力ベクトルとの 2 項演算: テンソル積(dyadic) の表現になっているので、座標変換に関して 2 階のテンソル量になっています。

ここで導入した T を **応力テンソル**とといいます。応力テンソル T を導入することで、観測する座標系を回転させても数学的な変換規則に従って機械的に計算ができるという利点があります。

式(3.4), (3.5) によって表現される応力成分が 2 階テンソルの座標変換則: 式(2.52) に従うことは、数学的な定義からすれば当然ですが、しかしやや天下一の力学的な意味を吟味していないと言えます。この観点から、物体の平衡状態における表面力の釣り合いを考えて、2 階テンソルの変換則が成立することを 3.5 節で述べます。

応力ベクトルが応力テンソルに化けてしまうことに納得がいかない人がいるかもしれません。そこでもう一度両者の違いについて、確認をしておきます。

応力ベクトルは、特定の1つの作用面に限定して単位面積あたりの力を表したものを指します。応力テンソルは、考えている微小要素(直方体)が持つすべての作用面(3軸×正負方向2面=6面あります)において応力状態を扱うので、3組の応力ベクトルを1つの集合体として表現したものです。その中身(成分)を見たら、特定の応力ベクトルの成分と合致するものです。

任意の方向を持つ面に作用する応力ベクトルは、その面の法線応力とせん断応力に分解すると、応力テンソルの成分に等しくなります。なぜなら、座標軸方向に直方体(微小要素)の面が向くように考えて成分を表示したものは、図3.3の定義に合っているからです。

3.3 法線応力とせん断応力

図3.3の成分のうち、考えている作用面の方向と応力成分の方向と同じ座標軸方向であるとき、その応力は作用面の垂直方向に働きます。そこでこのような応力を垂直応力または法線応力(normal stress)と呼びます。これに対して作用面の方向に対して異なる方向に応力成分があるとき、すなわち応力が作用面に対して直交方向にあるとき、この応力をせん断応力(shear stress)と呼びます。

図3.1のような任意の面 $\vec{\Delta S}$ においても応力ベクトル \vec{t} から法線応力とせん断応力を分解抽出することができます。

3.4 せん断応力の対称性

平衡状態における回転力に関する釣り合い条件から、せん断応力が持つ性質として成分の対称性があることを紹介します。

図3.4に示すように、物体内に微小要素ABCDを考えます(第3軸に垂直な面内

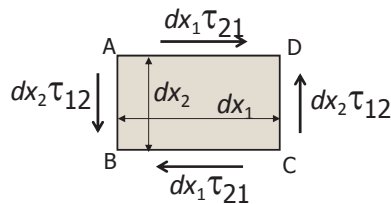


図 3.4 せん断応力の釣り合い

で). 回転力(力のモーメント)はベクトルですので, 座標軸方向に分解して考えれば, 2次元の釣合いをそれぞれの座標軸について考えれば十分です. 一般性を失いません.

この要素 ABCD の周辺に作用するせん断応力による力のモーメントの合計は, 釣合っていないといけない.

AB, CD 面に働く力: 大きさ $dx_2 \tau_{12}$ で平行, 反対向き.

AD, CB 面に働く力: 大きさ $dx_1 \tau_{21}$ で平行, 反対向き.

AB-CD の 2 面に働く力は, 距離 dx_1 の偶力: $dx_1 (dx_2 \tau_{12})$ を作ります. 同様に, AD-CB 面の 2 面に働く力は, 距離 dx_2 の偶力: $dx_2 (dx_1 \tau_{21})$ を作ります. 回転力が全体で釣合うためには, これら 2 つの偶力の合計は 0 にならなければいけません.

$$dx_2 (dx_1 \tau_{21}) - dx_1 (dx_2 \tau_{12}) = 0 \tag{3.6}$$

これより $\tau_{12} = \tau_{21}$ が導出されます. 同様の議論を第 1 軸, 第 2 軸に対して行うことで, $\tau_{13} = \tau_{31}$, $\tau_{32} = \tau_{23}$ を得ることができます. すなわち, 一般に式(3.7)が成り立ちます.

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3: \text{自由標}) \tag{3.7}$$

3.5 表面力の釣り合い

図 3.5 のように境界面 (外表面) に点 P を持つ物体の微小要素(自由物体)を考えます. 境界面以外は, 物体内部に連なっており, 微小要素は, 仮想断面によって閉面を形成するものとします.

本節では, 物体の外表面

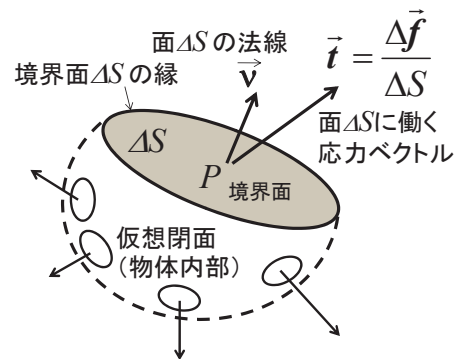


図 3.5 自由物体に作用する表面力

面に働く面積力と内部の応力状態(テンソル)との関係を力の釣り合いから説明します. 体積力が 0 のとき, 境界面 ΔS を通して働く面外力と仮想断面に働く内力の総和は, 釣り合っていないなりません. 式(1.13)に対応させて力の釣り合いを次のように表現できます.

$$\begin{aligned} & \text{境界面を通して物体に働く外力の和} + \\ & \text{境界面を除く仮想閉面に働く内力(反力)の和} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

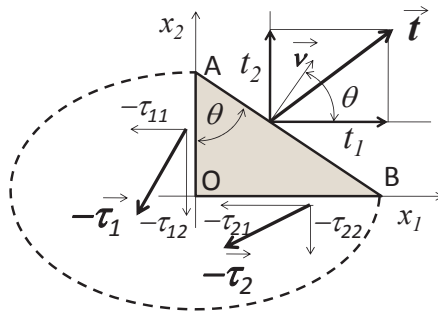


図 3.6 自由物体 OAB に働く力の釣り合い

以下では説明を簡単にするため, 2次元の応力状態^{3***}にある自由物体を考えます. 必要に応じて3次元に拡張して考えることにします.

図 3.6 のように微小要素(自由物体)を閉じた2次元三角形 OAB の面(線)で構成することを考えます. 三角形 OAB の斜面(線) AB に働く応力ベクトルと, 座標系に沿ってとった面(線) AO 及び面(線) BO に働く応力ベクトルを使って, 力の釣り合いを考えます(奥行長さ:1). 面 AB の法線は,

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (3.9)$$

です(記号 v : ニュー, θ : シータ).

AB: 境界面に

$$\text{応力ベクトル } \vec{t} = (t_1, t_2) \quad (3.10)$$

^{3***} 第3軸方向に関する応力成分 $\tau_{33}, \tau_{31}, \tau_{32}$ がすべて 0 となる状態を考えます. これを平面応力(plane stress)状態といいます.

が外力として作用.

AO+BO: 仮想内面に

$$\text{応力ベクトル } \vec{\tau}_1 = (-\tau_{11}, -\tau_{12}), \vec{\tau}_2 = (-\tau_{21}, -\tau_{22}) \quad (3.11)$$

が内力として作用.

仮想内面 AO, BO は連続体の中で考えています. 隣接する残りの物体要素があり, 反対側に $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ の応力ベクトルが作用しています(作用・反作用の法則).

微小要素に働く力の釣り合いを考えると, 力はベクトル量なので座標軸方向に分解して扱います.

x_1 軸方向の力の釣り合い:

AB: $t_1 dS$, AO: $-\tau_{11} dS_1$, BO: $-\tau_{21} dS_2$... 合計が 0 です.

$$\tau_{11} dS_1 + \tau_{21} dS_2 = t_1 dS \Rightarrow \tau_{11} \frac{dS_1}{dS} + \tau_{21} \frac{dS_2}{dS} = t_1 \quad (3.12)$$

x_2 軸方向の力の釣り合い:

AB: $t_2 dS$, AO: $-\tau_{12} dS_1$, BO: $-\tau_{22} dS_2$... 合計が 0 です.

$$\tau_{12} dS_1 + \tau_{22} dS_2 = t_2 dS \Rightarrow \tau_{12} \frac{dS_1}{dS} + \tau_{22} \frac{dS_2}{dS} = t_2 \quad (3.13)$$

これらの関係式をまとめると, 式(3.14)のようになります. 但し

$$\text{AB: } dS, \text{ AO: } dS_1 = dS \cos \theta, \text{ BO: } dS_2 = dS \sin \theta$$

の関係を使います.

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}, \quad d\vec{S} = \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} dS = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} dS \quad (3.14)$$

この式は, 応力テンソルの成分 τ_{kj} と面 AB の応力ベクトルの成分 t_j との関係を与えます. ここにおいて, 式(3.9)の関係がありますから, 式(3.14)は, 式(3.15), (3.16) のようにまとめることができます. さらに

に、総和規約を使えば、式(3.17)の形にまとめることができます。この関係式を応力に関する **Cauchy の公式** といいます。

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

式(3.15)を転置した形式で書けば、式(3.16)になります。

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$t_j = \tau_{kj} v_k \quad (k=1,2: \text{擬標}, j=1,2: \text{自由標}) \quad (3.17)$$

基底を使った形式で表せば、式(3.18)のようになります。

$$\vec{t} = \vec{v} \cdot \mathbf{T} \quad (3.18)$$

ここで応力テンソル \mathbf{T} は 2 次元ですが式(3.5)の形式です。また、せん断応力の対称性によって $\tau_{kj} = \tau_{jk}$ が成立しますので、式(3.15),(3.16)の転置の違いは釣り合いに関しては重要ではありません。

例題 3.1

面 AB に作用する応力ベクトル \vec{t} を面 AB の法線方向 ($\overline{x_1}$ 軸) と接線方向 ($\overline{x_2}$ 軸) に分解して成分を取り出すと、どのような式が得られますか。

この問いは、3.2 節の末尾で説明した内容に関係し、座標変換に関する応力のテンソル成分の性質を理解するためのものです。

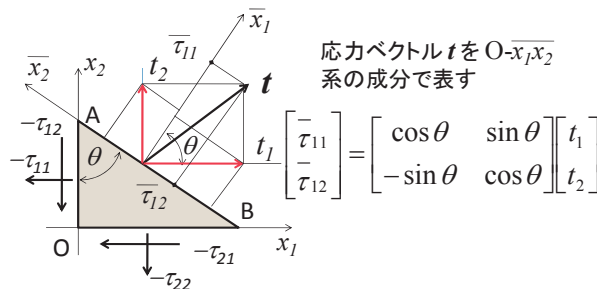


図 3.7 角度 θ 傾いた座標系における応力成分

解答例

ここでは、斜面 AB を第 2 軸に持つ傾いた座標系を識別するため、上にバーのついた変数を採用することにします。そこで実体ベクトルの上に矢印を明記しないことにします。

\bar{x}_1 軸を法線に持つ面 AB に関する成分 $\bar{\tau}_{11}$, $\bar{\tau}_{12}$ を調べます。図 3.7 に示すように応力ベクトル \mathbf{t} は、2 つの座標系 $O-x_1x_2$ と $O-\bar{x}_1\bar{x}_2$ に関する基底ベクトル $[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]$, $[\bar{\mathbf{e}}_1 \ \bar{\mathbf{e}}_2]$ を使って、次のように表現できます。

$$\mathbf{t} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{e}}_1 \ \bar{\mathbf{e}}_2] \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{11} \\ \bar{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

基底ベクトルの座標変換則に関する式(2.29)から、2次元では次の関係が成り立ちます。

$$[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2] = [\bar{\mathbf{e}}_1 \ \bar{\mathbf{e}}_2] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_j = \bar{\mathbf{e}}_k p_{kj}$$

この式を前述の応力ベクトル \mathbf{t} の関係式(3.19) に代入すると成分に関する次式を得ます。

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}_{11} \\ \bar{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\tau}_{1k} = p_{kj} t_j \quad (3.20)$$

これに Cauchy の公式 (3.15) を代入すれば、

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}_{11} \\ \bar{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

\bar{x}_2 軸を法線とする面における応力成分 $\bar{\tau}_{21}$, $\bar{\tau}_{22}$ についても同様に調べることができます。 \bar{x}_2 軸方向の法面は、Cauchy の公式で回転角度 θ を $\theta + \pi/2$ と置き換えて考えることで得られます。但し 2 つの座標系 $O-x_1x_2$ と $O-\bar{x}_1\bar{x}_2$ に関する基底ベクトル $[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]$, $[\bar{\mathbf{e}}_1 \ \bar{\mathbf{e}}_2]$ は、前

述のものを使うこととします.

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}_{21} \\ \bar{\tau}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ここで $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta$, $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$ です. まとめると次式になります.

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}_{11} & \bar{\tau}_{21} \\ \bar{\tau}_{12} & \bar{\tau}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

上式の誘導から, 座標系 $O-x_1x_2$ と座標系 $O-\overline{x_1x_2}$ で表現した **応力成分** は, **座標変換行列 P を 2 個使って等価変換できる関係** を持っていることがわかります. この関係は, 座標変換則(2.53)を満たしています. これは **2 階のテンソル** が持つ性質ですから, 座標系に沿った応力成分は 2 階のテンソルであると言えます. これが求める解答になります.

この式の転置をとったものについても, 次の 2 階テンソルの変換則を満たします. 但し, せん断応力の **対称性** によって, これらの区別は実質的に必要ありません.

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}_{11} & \bar{\tau}_{12} \\ \bar{\tau}_{21} & \bar{\tau}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

[例題終わり]

まとめ

座標変換行列を 2 回掛ける理由は, **作用面の方向変換** と **応力成分の方向変換** の 2 つを取り扱うためです. 式(3.23)をもう一度分解して, 中身の構成を確認します.

式(3.23)の右辺で, 左から掛けている変換行列は, 応力ベクトルの成分を座標軸成分に分解するために必要なものです. そして右から掛けている変換行列(転置)は, 作用面の法線ベクトルを 2 つならべた集合体という意味を持ちます. これらの関係を次に書いています.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Cauchy の公式に基づく変換式

2 つの応力ベクトルの集合体(応力テンソル) に右から座標変換行列を掛けているのは、いわゆる Cauchy の公式そのものを表しています。

図 3.7 で三角形 ABO の斜面 AB に働く応力ベクトル t をバーのついていない元の座標系の成分 t_k であらわすとき、**応力ベクトルの成分**と呼びます。これに対して、同じ応力ベクトルをバーのついていない斜面に沿った座標系の成分であらわすとき、 $\bar{\tau}_{11}$ 、 $\bar{\tau}_{12}$ と記します。こちらの成分は、テンソル変換則に従います。どちらも応力ベクトル t の分解成分であるのに、成分 t_k は 2 階テンソルの変換則に従わず $\bar{\tau}_{1k}$ は 2 階テンソルの変換則に従います。

以上のことから、物体の応力状態を調べるときは、考えている仮想面の法線方向と接線方向について分解したものを取り出すと、テンソル変換則に従うので、任意の座標系で表現する処理手順がわかって都合がよいのです。

次に 3 次元の力の釣り合いを考えるため、**図 3.8** のような微小要素(四面体) PABC を取り出して考え

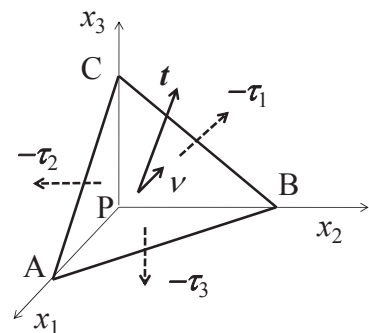


図 3.8 微小四面体に作用する応力ベクトル

てみます。2次元の場合と同様に、任意の向きを持つ外表面 dS : ABC に対して物体内の仮想断面として座標軸に垂直な面 dS_1 : PBC, dS_2 : PCA, dS_3 : PAB を考えて、閉じた自由物体 PABC を作ります。

体積力が無いとき、平衡状態で力の釣り合い方程式は、次のように表現されます。

$$\vec{t} dS = \vec{\tau}_1 dS_1 + \vec{\tau}_2 dS_2 + \vec{\tau}_3 dS_3 \quad (3.25)$$

面積ベクトルの成分 dS_k は、 dS の射影で与えられます。

$$dS_k = \nu_k dS \quad (k=1,2,3: \text{自由標}) \quad (3.26)$$

ここで ν_k は、面 dS :ABC の法線ベクトルの成分です。

式(3.4)で定義される応力テンソル \mathbf{T} を使うと式(3.27),(3.28)が導出されます。

$$\vec{t} = \nu_1 \vec{\tau}_1 + \nu_2 \vec{\tau}_2 + \nu_3 \vec{\tau}_3 = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau}_1 \\ \vec{\tau}_2 \\ \vec{\tau}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{T} \quad (3.27)$$

成分で書けば、

$$t_j = \nu_k \tau_{kj} = \tau_{kj} \nu_k \quad (j=1,2,3: \text{自由標}, k=1,2,3: \text{擬標}) \quad (3.28)$$

これは、式(3.17)と同じです。Cauchy の公式は、3次元でも成立するのです。

例題 3.2

原点 O の回りに座標系 $O-x_1x_2x_3$ の x_3 軸を角度 θ だけ回転した座標系 $O-\underline{x}_1\underline{x}_2\underline{x}_3$ を考え、応力成分に関する2階の変換則の式(3.24)から、座標系 $O-\underline{x}_1\underline{x}_2\underline{x}_3$ における応力成分を座標系 $O-x_1x_2x_3$ の成分を使って具体的に求めなさい。

解答例

式を短く表現するため、 $\cos\theta \Rightarrow c$, $\sin\theta \Rightarrow s$ と記すことにします。

第3軸は不変であり, $\bar{x}_3 = x_3, \bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$ です. 式(3.24)を第3軸成分を考慮して3次元で書きなおすと式(3.29)になります. 具体的に展開してみます. せん断応力の対称性: $\tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{13} = \tau_{31}, \tau_{23} = \tau_{32}$ を使います.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{11} & \bar{\tau}_{12} & \bar{\tau}_{13} \\ \bar{\tau}_{21} & \bar{\tau}_{22} & \bar{\tau}_{23} \\ \bar{\tau}_{31} & \bar{\tau}_{32} & \bar{\tau}_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11}c + \tau_{12}s & -\tau_{11}s + \tau_{12}c & \tau_{13} \\ \tau_{21}c + \tau_{22}s & -\tau_{21}s + \tau_{22}c & \tau_{23} \\ \tau_{31}c + \tau_{32}s & -\tau_{31}s + \tau_{32}c & \tau_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

さらに展開すれば, 以下のようになります.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{11} &= c(\tau_{11}c + \tau_{12}s) + s(\tau_{21}c + \tau_{22}s) = \tau_{11}c^2 + \tau_{22}s^2 + 2\tau_{12}sc \\ \bar{\tau}_{12} &= c(-\tau_{11}s + \tau_{12}c) + s(-\tau_{21}s + \tau_{22}c) = cs(\tau_{22} - \tau_{11}) + \tau_{12}(c^2 - s^2) \\ \bar{\tau}_{13} &= c\tau_{13} + s\tau_{23} \\ \bar{\tau}_{21} &= -s(\tau_{11}c + \tau_{12}s) + c(\tau_{21}c + \tau_{22}s) = \bar{\tau}_{12} \\ \bar{\tau}_{22} &= -s(-\tau_{11}s + \tau_{12}c) + c(-\tau_{21}s + \tau_{22}c) = \tau_{11}s^2 + \tau_{22}c^2 - 2\tau_{12}sc \\ \bar{\tau}_{23} &= -s\tau_{13} + c\tau_{23} \\ \bar{\tau}_{31} &= \tau_{31}c + \tau_{32}s = \bar{\tau}_{13} \\ \bar{\tau}_{32} &= -\tau_{31}s + \tau_{32}c = \bar{\tau}_{23} \\ \bar{\tau}_{33} &= \tau_{33} \end{aligned} \quad (3.30)_{1-9}$$

平面応力状態のとき式(3.30)において $\tau_{33} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$ とおきます. これより $\bar{\tau}_{33} = \bar{\tau}_{32} = \bar{\tau}_{31} = 0$ です. せん断応力の対称性によって添字を逆にした成分も同様です. これらは, 式(3.24)を直接展開した結果と一致します.

ここで, θ に関する**倍角の公式**を使うと式(3.31)のように整理できます. これらの変換式(3.31)は, 材料力学でよく知られている平面応力状態における**Mohrの応力円**を与える関係式になっています.

$$\begin{aligned}
 \bar{\tau}_{11} &= \tau_{11} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \tau_{22} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{12} \sin 2\theta \\
 &= \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} + \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \cos 2\theta + \tau_{12} \sin 2\theta, \\
 \bar{\tau}_{22} &= \tau_{11} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{22} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \tau_{12} \sin 2\theta \\
 &= \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} - \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \cos 2\theta - \tau_{12} \sin 2\theta, \\
 \bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_{21} &= -\frac{(\tau_{11} - \tau_{22})}{2} \sin 2\theta + \tau_{12} \cos 2\theta
 \end{aligned} \tag{3.31}_{1,2,3}$$

例題 3.3

図 3.9 のような矩形形状物体の x_1 軸方向に荷重 W を与えたとき、角度 θ 傾いた斜面 OB おける応力状態について調べなさい。

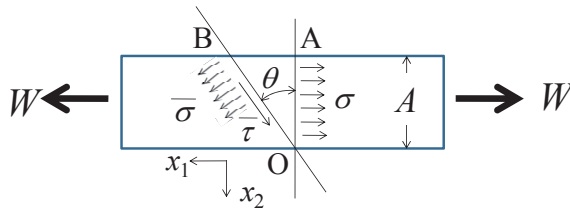


図 3.9 x_1 軸方向引張を受ける物体の応力状態

解答例

引張荷重 W を受ける断面積を A とおくと、 x_1 軸方向に応力 $\sigma = W/A$ を受け、他の応力成分は 0 です。そこで O - x_1x_2 座標系で応力テンソルの成分を書き出すと式(3.32)の通りです。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \tag{3.32}$$

このとき、 θ だけ回転した座標系で面 OB に働く法線応力 σ とせん断応力 τ は、それぞれ式(3.24) の $\bar{\tau}_{11}$ 、 $\bar{\tau}_{12}$ に対応することから、次の式(3.33)で計算できます。

$$\begin{bmatrix} \overline{\sigma} \\ \overline{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \cos^2\theta \\ -\sigma \sin\theta \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

ここで $\tau = -\sigma \sin\theta \cos\theta = -(\sigma/2)\sin 2\theta$ ですから、面 OB 上のせん断応力は、図 3.9 に示す向きに対して逆向きに作用し、 $\theta=45^\circ (= \pi/4 \text{ rad.})$ のときに絶対値が最大 $\sigma/2$ となります。

3.6 Mohr の応力円(Mohr's stress circle)

応力円は、その名の通り、円の作図によって任意の方向を向く仮想面に働く応力成分を求める一つの簡易手法です。例題 3.2 や例題 3.3 からわかるように、2次元問題の応力成分を任意の仮想面で調べるだけでも、2階テンソルの座標変換則を扱うので、3次元になるとかなり大変そうです。

本節では、例題 3.2 で扱った第 3 軸まわりに角度 θ だけ回転する座標系を想定して、2次元的な応力成分の関係式 (3.31) を **作図的に求める方法**として「応力円」を紹介します。つまり、応力テンソルの座標変換則は、応力円の幾何学的な関係と等価な関係になっています。

前節で式(3.24)から式(3.31)を導きました。この式をさらに変形して「円の方程式」を考えてみます。応力円という概念は、図 3.7 の微小要素 OAB における面 OA に作用する応力の垂直成分(法線) $\sigma (= \tau_{11})$ と接線成分(せん断) $-\tau (= -\tau_{12})$ をある **空間の点** $(\sigma, -\tau)$ として考えて、円の方程式の上で応力の状態を調べることに由来します。

結果を先に紹介しますが、基準面 \overline{OA} から相対的に角度 θ だけ傾いた方位の面 \overline{AB} に働く応力の点 $(\overline{\sigma}, -\overline{\tau}) = (\tau_{11}, -\tau_{12})$ は、ある所定の円の方程式の円周上で角度 2θ だけ回転した位置にあります。つまり円周上を移動し追跡すれば、任意の角度方向の仮想面における垂直応力とせん断応力を算出できるという簡易で便利なものが「応力円」です。

円の方程式の誘導

式(3.31)から $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ の成分を消去して

$$(\overline{\tau}_{11}, -\overline{\tau}_{12}) \Leftrightarrow (\tau_{11}, -\tau_{12})$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_{22} \\ -\bar{\tau}_{21} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\tau_{22}, -\tau_{21})$$

の関係を求めます。式(3.31)を次のように変形します。

$$\begin{aligned} \left(\bar{\tau}_{11} - \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} \right) &= \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \cos 2\theta + \tau_{12} \sin 2\theta, \\ \left(\bar{\tau}_{22} - \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} \right) &= -\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \cos 2\theta - \tau_{12} \sin 2\theta, \\ \bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_{21} &= -\frac{(\tau_{11} - \tau_{22})}{2} \sin 2\theta + \tau_{12} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.34)_{1,2,3}$$

式(3.34)_{1,3}の2乗和を作れば、式(3.35)₁が得られます。同様に式(3.34)_{2,3}の2乗和を作れば、式(3.35)₂を求めることができます。

$$\begin{aligned} \left(\bar{\tau}_{11} - \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} \right)^2 + (\bar{\tau}_{12})^2 &= \left(\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \right)^2 + (\tau_{12})^2, \\ \left(\bar{\tau}_{22} - \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} \right)^2 + (\bar{\tau}_{12})^2 &= \left(\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \right)^2 + (\tau_{12})^2 \end{aligned} \quad (3.35)_{1,2}$$

図形として横軸に**法線(垂直)応力**、縦軸に**せん断応力**をとった2次元空間の点 $P(\bar{\tau}_{11}, -\bar{\tau}_{12})$ ならびに点 $Q(\bar{\tau}_{22}, +\bar{\tau}_{21})$ を考えるならば、式(3.35)は、半径 R 、中心点 $(\sigma_{ave}, 0)$ を持つ円の方程式を表します。4***

考える作用面 AB の方向 θ が任意のときでも、式(3.35)は成立します。円の半径 R と中心位置は式(3.36)で定義されます。

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\left(\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \right)^2 + (\tau_{12})^2}, \\ \sigma_{ave} &= \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} \end{aligned} \quad (3.36)_{1,2}$$

4*** 点 P, Q の定義に関してせん断応力の符号が逆になっています。これは、円の中心を挟んで直径の両端で対になった2点(位相差 $2\theta=180^\circ$)をうまく表現するために便宜的に工夫されたものです。なお、教科書によっては、縦軸の下向きを(+)にとって、応力点を $P(\bar{\tau}_{11}, +\bar{\tau}_{12}), Q(\bar{\tau}_{22}, -\bar{\tau}_{21})$ のように定義していることがあります。このように定義しても絵としては、ここで紹介する幾何学的内容と同じです。

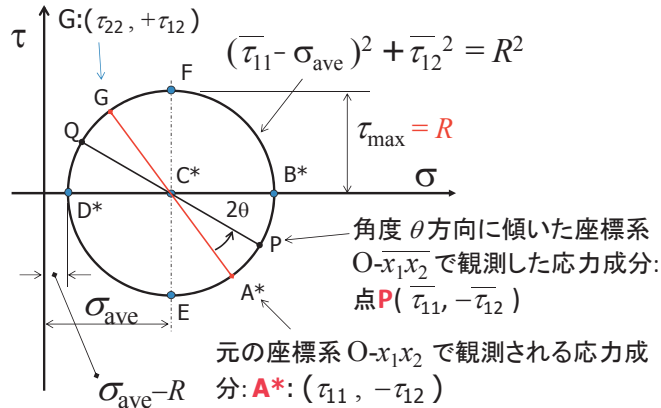


図 3.10 Mohr の応力円

円の半径と中心位置は、 $O-x_1x_2$ 座標系で観測される応力 τ_{11} , τ_{22} , τ_{12} によって決定されます。図 3.10 は、式(3.35) で表される円の方程式と $O-x_1x_2$ 座標系で観測される応力空間点 A^* と座標系 $O-\bar{x}_1\bar{x}_2$ で示される応力空間点 P との幾何学的な関係を表しており、**Mohr の応力円** と呼ばれています。ここで、 $\tau_{11} > \tau_{22}$ の場合を描いています。 $\tau_{11} < \tau_{22}$ の場合、左下に点 A^* を書いて右上に点 G を書くことになります。

例題 3.4

図 3.10 において、反時計廻りに円周上を角度 2θ だけ動かすとき、物理空間で同じ反時計方向に角度 θ だけ傾いた面を観測することになることを説明しなさい。

解答例

式(3.34)によって点 P, Q と点 A^*, G との関係が決まっています。

- (i) $\theta=0$ とおくと、 $\bar{\tau}_{11} = \tau_{11}$, $\bar{\tau}_{22} = \tau_{22}$ です。せん断応力は $\bar{\tau}_{12} = \tau_{12}$ です。
- (ii) $\theta=90^\circ$ とおくと、 $\cos(2 \times 90^\circ) = -1$, $\sin(2 \times 90^\circ) = 0$ なので、垂直応力は $\bar{\tau}_{11} = \tau_{22}$, $\bar{\tau}_{22} = \tau_{11}$ です。せん断応力は $\bar{\tau}_{12} = -\tau_{12}$ となります。従ってこのとき $P=G$ の関係になります。
- (iii) $\theta=45^\circ$ のとき $\cos(2 \times 45^\circ) = 0$, $\sin(2 \times 45^\circ) = 1$ なので、垂直応力: $\bar{\tau}_{11} = \sigma_{ave} + \tau_{12}$, $\bar{\tau}_{22} = \sigma_{ave} - \tau_{12}$, せん断応力: $\bar{\tau}_{12} = -(\tau_{11} - \tau_{22})/2$.

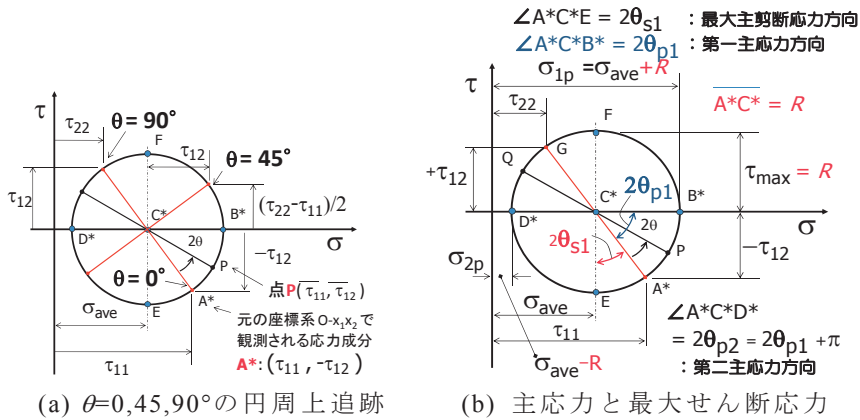


図 3.11 Mohr の応力円による観測仮想面の位相と応力成分の関係

このとき応力点は、円の右上にあります。

以上のことから、物理空間における $\theta=0,45,90^\circ$ の角度変化は、図 3.11(a) に示すように反時計まわりに 2θ ずつ移動します。

例題 3.5

図 3.6 において第 1, 第 2 主応力 σ_{1p}, σ_{2p} とその方位角度 θ_{p1}, θ_{p2} を求めなさい。また最大せん断応力 τ_{max} とその方位角度 θ_{s1} を求めなさい。

解答例

作図で考えます。組み合わせ(多軸方向に作用する)応力における主応力状態は、せん断応力が 0 になっている仮想断面にあります。図 3.11(b) において、 $\tau=0$ となる横軸切片の点 B^* が第 1 主応力(最大)の点です。もう 1 つは円の直径の反対側にあり、点 D^* が第 2 主応力(最小または中間極値)の点です。そこで求める主応力は、

$$\angle A^*C^*B^* = 2\theta_{p1}$$

$$\angle A^*C^*D^* = 2\theta_{p2} = 2\theta_{p1} + 90^\circ$$

の角度方向にあります。主応力の大きさは、

$$\sigma_{1p} = \sigma_{ave} + R$$

$$\sigma_{2p} = \sigma_{ave} - R$$

です。ここで R は円の半径で式(3.36)₁ で与えられます。

最大せん断応力は、円の半径に等しく $\tau_{\max} = R$ となります。その方位角度は、

$$\angle A^*C^*E = 2\theta_{s1}$$

$$\angle A^*C^*F = 2\theta_{s1} + 90^\circ$$

です。

練習問題

(1) 図 3.12 の応力成分に記号をつけなさい。座標系の向きに注意すること（応力成分: j 面の k 成分を τ_{jk} と記す）。

(2) 物体内のある場所(点) $\mathbf{P}(x_1, x_2)$ の応力のテンソル成分を次の行列 \mathbf{T} で表わします。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ここで応力の単位は MPa です。この場所 $\mathbf{P}(x_1, x_2)$ を通る面(線): $x_1 + 3x_2 = 1$ の外側(原点 0 の反対側)に作用する応力ベクトルを求めなさい(図 3.13)。

(ヒント) まず、面(線)の単位法線ベクトル \mathbf{v} を求めます。 \mathbf{v} がわかったら Cauchy の応力公式から、その面(線)に作用する応力ベクトルを求めます。

(3) 図 3.14 に示すような物体において、物体内の応力が以下のような

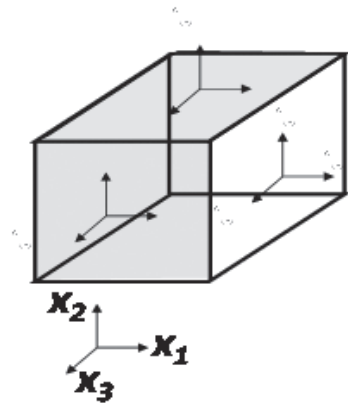


図 3.12 座標軸に沿った微小要素(直方体)に働く応力成分

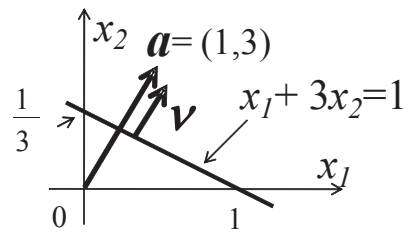


図 3.13 物体内のある仮想断面

になっている場合，7つの面 **AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA** の外向き法線ベクトル $\mathbf{v}_{AB}, \mathbf{v}_{BC}, \mathbf{v}_{CD}, \mathbf{v}_{DE}, \mathbf{v}_{EF}, \mathbf{v}_{FG}, \mathbf{v}_{GA}$ および応力ベクトル $\mathbf{t}_{AB}, \mathbf{t}_{BC}, \mathbf{t}_{CD}, \mathbf{t}_{DE}, \mathbf{t}_{EF}, \mathbf{t}_{FG}, \mathbf{t}_{GA}$ を求めなさい。

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 & 1 \\ 19 & 0 & -20 \\ 1 & -20 & -2 \end{bmatrix}$$

図 3.14 は 2次元ですが，応力場は 3次元であることに注意してください。応力の単位は MPa で，物体の寸法の単位は cm です。

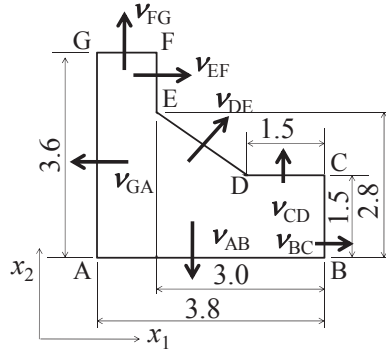


図 3.14 物体 ABCDEFG

(4) 図 3.15 のような物体内の微小要素に次の平面応力場が作用しています。

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

このとき，斜面 AB に働く応力 σ, τ を求めなさい。

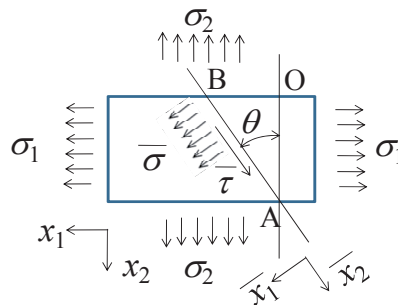


図 3.15 2軸応力を受ける微小要素

(5) 式(3.34) から次式が成り立つことを説明しなさい。

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{11}}{\partial \theta} = 2\bar{\tau}_{12}, \quad \frac{\partial \bar{\tau}_{22}}{\partial \theta} = -2\bar{\tau}_{12} \quad (3.37)$$

(6) 式(3.34) において $\bar{\tau}_{12} = 0$ のとき次式が成り立つことを説明しなさい。

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{12}}{\tau_{11} - \tau_{22}} \quad (3.38)$$

なお、式(3.38)のようなせん断応力が 0 となる特定の角度方向を**主方向** (principal direction)と呼びます。

(7) 式(3.34)₃において、 $\bar{\tau}_{12}$ が θ に関して極値をとるとき、次式が成り立つことを説明しなさい。

$$\tan 2\theta = -\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2\tau_{12}} \quad (3.39)$$

(8) 式(3.39)を満たす角度方位は、式(3.38)で与えられる主方向に対して $\pm 45^\circ$ 方向になることを説明しなさい。

(9) 平面応力にある要素部材の応力状態を $O-x_1x_2$ 系でみたとき、次の通りでした。

$$\sigma_{11} = -80 \text{ MPa}, \sigma_{22} = 50 \text{ MPa}, \tau_{12} = -25 \text{ MPa}$$

この応力状態を時計方向に 30° 回転した $O-x_1'x_2'$ 系でみたときの応力成分を求めなさい。

4. ひずみ(Strain)

4.1 1次元の伸長変形

物体(固体)に外部から力が作用すると、物体内部に力学的な緊張状態(応力)が発生して、物体中の2点間の距離が変化します。2点を結ぶ線素(十分細い要素部材)に注目し、線素に対する変形とゆがみを考えます。まず、1次元の細い棒または弦の伸長問題を考えてみましょう。

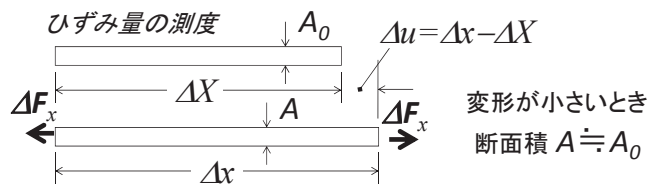


図 4.1 1次元の伸長 (弦の変形)

図 4.1 において次のような要素部材(線素)の長さの変化を考えます。

変形前の長さ: ΔX ,

変形後の長さ: Δx ,

相対的な伸び: $\Delta u = \Delta x - \Delta X$

ここで u は線素の端点が空間内で移動する量(距離)を表し、これを「変位」(displacement)と呼びます。このとき線素の一端(左)で $u=0$ 、他端(右)で $u = \Delta u$ です。

式(4.1)で定義される線素の両端の距離の変化の比 F は変形勾配と呼ばれています。

$$F = 1 + E_x = \frac{\Delta x}{\Delta X} \quad (4.1)$$

$$E_x = \frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} = \frac{\Delta u}{\Delta X} \quad \left(\varepsilon_x = \frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \quad (4.2)_{1,2}$$

式(4.2)₁ で与えられる E_x は変形前の長さ ΔX を基準にした「Green のひずみ」です。これに対して、変形後の長さ Δx を基準にしたひずみ ε_x は「Euler のひずみ」と呼ばれています。変位 Δu が十分小さいときは、 $\Delta x \approx \Delta X$ ですから $E_x \approx \varepsilon_x$ となって2つのひずみはほとんど等しくなります。

x 軸方向に引張荷重 ΔF_x を受ける線素(要素部材)の変形前の断面積を A_0 、変形後の断面積を A とするとき、作用する法線応力は真応力(true stress) $\Delta \sigma_x$ ならびに公称応力(nominal stress) $\Delta \sigma_{x0}$ として評価されます。

伸び変形が小さいとき断面積はほとんど変化しないとみなせますので、これら2つの応力はほぼ等しく区別する必要はありません。

$$\Delta \sigma_x = \frac{\Delta F_x}{A} = \frac{\Delta F_x}{A_0 + \Delta A} \approx \Delta \sigma_{x0} = \frac{\Delta F_x}{A_0} \quad (4.3)$$

4.2 運動記述のための座標系の選択

物体は、物質点(微小要素)の集合から構成され、空間に配置されます。この物質点の配置状態 (configuration) が時間とともに変化することを物体の運動 (motion) と言います。物体の運動状態を表現するには、物質粒子の空間における位置の情報が必要です。そこで、物質点の運動について次のように変数を使って表現します。

時刻 t_0 における物体内の物質粒子の位置ベクトル: \mathbf{X}

時刻 $t > t_0$ における粒子 \mathbf{X} の空間位置ベクトル: \mathbf{x}

\mathbf{x} は \mathbf{X} と t とによって決定されるので、次の関数(写像)関係が成り立ちます。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (4.4)_1$$

$$x_k = x_k(X_j, t) \quad (k, j = 1, 2, 3: \text{自由標}) \quad (4.4)_2$$

この式は、物質粒子の時刻に関する位置を記述しているので、粒子の運動を表します。 \mathbf{X} と \mathbf{x} は、1対1に対応しますので、逆関数(逆写像)

が存在します.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (4.5)1$$

$$X_a = X_a(x_b, t) \quad (a, b=1, 2, 3: \text{自由標}) \quad (4.5)2$$

位置 \mathbf{X} は、同一の物質粒子を指すので、**物質座標** (material coordinate) と言います. これに対して、位置 \mathbf{x} は空間内の位置を表すので**空間座標** (spatial coordinate) と呼ばれています.

4.1 節でひずみを扱ったとき、要素部材は一端を固定して動かないものとし、その固定端を原点とする座標系を1つ採用して説明しています. これは、連続体を構成する微小要素の粒子に注目して、粒子の動きを記述したものです. このような表示は、物質粒子の座標 X_k を独立変数とするものなので**ラグランジュ表示** (Lagrangian description) または**物質表示** (material description) と言います. 固体の微小変形を扱うときは、この表示法がよく使われます.

物質表示によれば、粒子 \mathbf{X} の時刻 t における速度 \mathbf{v} は、 \mathbf{X} を固定して t で \mathbf{x} を微分することに他なりません.

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}} \quad (4.6)$$

これに対して流体の場合、時間的に経過すると粒子が大移動してしまい、元の場所には全く異なる粒子群が存在します. このような状態では、観測する空間を粒子の動きとは独立に採用して、観測用の**窓枠**を用意して、その中を通過する粒子群の動きを記述することになります. 例えば、式(4.5)によって \mathbf{x} を選定して速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を評価します. この表示法を**オイラー表示** (Eulerian description) または**空間表示** (spatial description) と呼びます.

運動を記述するとき、物質粒子の動き(速度や加速度)を評価するため、時間に関する微分をすることがあります. このとき、物質粒子に注目した時間微分のことを**物質微分** (material time derivative) と呼びます. 物質表示の速度 $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ を時間で偏微分すれば、物質粒子の加

速度を得ることができますが、空間表示の速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を時間で偏微分しても物質粒子の加速度にはなりません。このような空間表示のときに物質粒子の時間導関数を求める式が知られています。これを物質微分と呼んでいます。詳しくは、7章の物質導関数の節を見てください。

4.3 3次元変形への導入

3次元における変形（ひずみ）を考えてみます。

3次元的な応力成分として垂直応力とせん断応力があり、線素の同一方向への伸縮 (stretching) のみならず、線素の直交方向への単純せん断 (simple shear) や回転変形であるせん断ねじれ (twisting) も表現する必要があります。よく知られたもう1つの変形は、曲げ (bending) であり、伸縮量が直交する方向に異なる比率で分布することで生じます。曲げの場合、伸縮が0となる中立軸(面)が存在して、その中立軸から離れると伸びる側と縮む側とに分かれます。

以下では、これらの3次元の変形を統一的に表現するため、一般的で汎用的なひずみの定義を導入します。

3次元空間の応力成分は2階テンソル量として9個（そのうち独立な成分は6個）存在します。4.1節の1次元変形では、垂直応力による伸縮のみを考えましたが、3次元空間の変形においては、仮要素として3次元空間にある2点をむすぶ「線素」 $d\mathbf{X}, d\mathbf{x}$ をとりあげて、その3次元的なゆがみを定義するため、成分に分けて考えます。

ひずみを「変位ベクトル÷基準長さベクトル」の意味で合理的に定義する必要があります。「ベクトル÷ベクトル」の意味をもつ別の物理量として、既に応力（2階テンソル）＝「力ベクトル÷面積ベクトル」を取り上げています。このことから容易に推測できるように、ひずみについても2階テンソルとしての性質を持つような量の定義が可能です。

4.4 変形勾配

3次元問題として物体内にある点 \mathbf{P} と点 \mathbf{Q} に関する変形前後の状

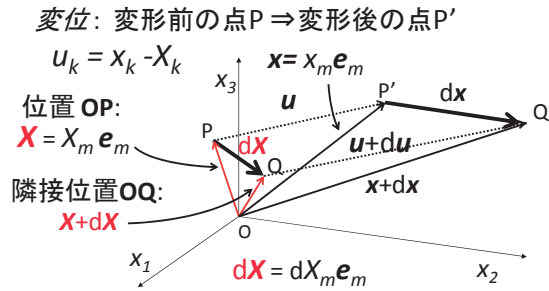


図 4.2 位置点 P, Q と変位 \vec{PP}' , \vec{QQ}'

態を考えます．点 \mathbf{P} は変形前の位置ベクトル $\vec{\mathbf{X}} = (X_k)$ で表わされ，変形後の点 \mathbf{P}' は，位置ベクトル $\vec{\mathbf{x}} = (x_k)$ で表わされます．このとき変位ベクトル $\vec{\mathbf{u}} = (u_k)$ は

$$\vec{\mathbf{X}} + \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{x}} \quad (4.7)$$

の関係を満たします．同様に，隣接する点 \mathbf{Q} についてもその状態を記述できる．これらの関係を図 4.2 に示します．

2つの粒子 \mathbf{P} , \mathbf{Q} の間の線素 $d\vec{\mathbf{X}} = dX_m \vec{\mathbf{e}}_m$ は変形によって $d\vec{\mathbf{x}} = dx_m \vec{\mathbf{e}}_m$ に変化します．変位場 $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{X}}$ が分かっていたら， $\vec{\mathbf{X}} \rightarrow \vec{\mathbf{x}}$ の正写像： $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\vec{\mathbf{X}})$ の関数関係が存在して，線素 $d\vec{\mathbf{X}}$ と $d\vec{\mathbf{x}}$ との間に式(4.9) が成り立ちます．ここで

$$\mathbf{F} = (F_{kj}) = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right) \quad (4.8)$$

を**変形勾配** (deformation gradient) と言います．

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j, \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

変形前後を逆写像: $\vec{x} \rightarrow \vec{X}$ ($X = \mathbf{X}(\mathbf{x})$) として考えることもできます.
 この場合, 逆変換 \mathbf{F}^{-1} が存在します.

$$dX_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_j, \quad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \bullet d\mathbf{x} \quad (4.10)$$

4.5 変形計量とひずみ

伸縮のゆがみを評価するため, 隣接する 2 点 \mathbf{PQ} を結ぶ線素の距離 (スカラー) の 2 乗差 $ds^2 - dS^2$ を導いてみます.

線素 \mathbf{PQ} : $d\vec{X} = dX_k \vec{e}_k$ の長さの 2 乗: dS^2 ならびに線素 $\mathbf{P'Q'}$: $d\vec{x} = dx_k \vec{e}_k$ の長さの 2 乗: ds^2 は, それぞれ次式(4.11)_{1,2} によって得られる.

$$\begin{aligned} dS^2 &= d\vec{X} \bullet d\vec{X} = dX_k dX_k = \delta_{kj} dX_k dX_j \\ ds^2 &= d\vec{x} \bullet d\vec{x} = dx_m dx_m = \delta_{ij} dx_i dx_j \end{aligned} \quad (4.11)_{1,2}$$

これらの式に変形勾配 \mathbf{F} ならびに逆変換 \mathbf{F}^{-1} を代入すれば,

$$\begin{aligned} dS^2 &= \delta_{kj} dX_k dX_j = \delta_{kj} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_m} dx_m \right) \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_h} dx_h \right) \\ &= \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_k}{\partial x_h} dx_m dx_h \\ ds^2 &= \delta_{kj} dx_k dx_j = \delta_{kj} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_m} dX_m \right) \left(\frac{\partial x_j}{\partial X_h} dX_h \right) \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_m} \frac{\partial x_k}{\partial X_h} dX_m dX_h \end{aligned} \quad (4.12)_{1,2}$$

線素長さの 2 乗差 $ds^2 - dS^2$ は, 式(4.12) を使って式(4.13),(4.14) のように表現されます.

線素長さの 2 乗差は大きさのみの物理量でありスカラーです. 線素 $d\mathbf{X}$, $d\mathbf{x}$ はベクトルであって $dX_k dX_j$ は, テンソル積(dyadic) $d\mathbf{X} \otimes d\mathbf{X}$ として表現できる 2 階テンソルの変換則に従う量 です.

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{kj}dX_kdX_j, \\ \text{where } E_{kj} = \frac{1}{2} \left(\delta_{is} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_s}{\partial X_j} - \delta_{kj} \right) \quad (4.13)_{1,2}$$

$$ds^2 - dS^2 = 2e_{kj}dx_kdx_j, \\ \text{where } e_{kj} = \frac{1}{2} \left(\delta_{kj} - \delta_{is} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_s}{\partial x_j} \right) \quad (4.14)_{1,2}$$

テンソル積(dyadic) dX_kdX_j と内積をとってスカラーになるような E_{kj} は、必然的に 2 階のテンソルになっています。同様に e_{kj} も 2 階のテンソル量です^{1†}。

E_{kj} を変形前の座標を基準とした **グリーンのひずみテンソル** Green's (Lagrangian) strain tensor, e_{kj} を変形後の座標を基準とした **オイラーのひずみテンソル** Almansi's (Eulerian) strain tensor と呼んでいます。

ここで用いた変形勾配 \mathbf{F} を 2 個掛け合わせた

$$\delta_{is} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_s}{\partial X_j} = \frac{\partial x_s}{\partial X_k} \frac{\partial x_s}{\partial X_j} = C_{kj} \\ \delta_{is} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_s}{\partial x_j} = \frac{\partial X_s}{\partial x_k} \frac{\partial X_s}{\partial x_j} = c_{kj} \quad (4.15)_{1,2}$$

これらは、**変形計量テンソル**と呼ばれています。

4.6 変位場を用いたひずみの表現

変位 $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ を用いてひずみの式を書きなおせば、次のようになります。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{I} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \\ \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (4.16)$$

^{1†} このような階数を明言できるところがテンソル量を扱う意義です。

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} &= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) = \delta_{ij} \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \delta_{ik} \\ &= \delta_{jk} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} E_{kj} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right], \\ e_{kj} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \tag{4.17}_{1,2}$$

微小な変形で $\frac{\partial u_m}{\partial X_k} \ll 1$ であるとき, 上式で 2 次の項

$$\frac{\partial u_m}{\partial X_k} \frac{\partial u_m}{\partial X_j}, \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_j}$$

を無視できます. このとき次のような近似が成立します.

$$\frac{\partial}{\partial X_k} = \frac{\partial x_j}{\partial X_k} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial (X_j + u_j)}{\partial X_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \approx \frac{\partial X_j}{\partial X_k} \frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$E_{kj} = e_{kj} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \tag{4.18}$$

微小変形するとき, Green のひずみ成分 E_{kj} と Euler のひずみ成分 e_{kj} とは近似的に等しいです.

大変形の場合には, Green のひずみと Euler のひずみが異なる値をとること, ひずみの定義式において 2 次の項が無視できないこと等が留意すべき事項です.

以下, 固体の微小変形を例題として扱います.

例題 4.1

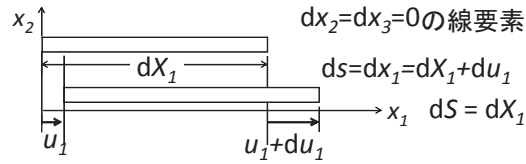


図 4.3 1次元要素の微小な伸長問題

要素部材が図 4.3 のような x_1 軸方向に du_1 の変位を生ずるとき、ひずみを求めなさい。但し微小ひずみ変形 ($du_1 \ll dX_1$) を仮定します。

解答例

$$\begin{aligned}
 ds^2 - dS^2 &= 2e_{ij} dx_i dx_j = 2e_{11} (dx_1)^2 \\
 ds - dS &= du_1 = 2e_{11} \frac{(dx_1)^2}{ds + dS} = \frac{2e_{11} (dx_1)^2}{2dx_1} = e_{11} dx_1 \quad (4.19)_{1,2,3} \\
 e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}
 \end{aligned}$$

$E_{11} = e_{11} = \partial u_1 / \partial X_1$ は 1次元問題で扱った式(4.2) $E_x = \partial u / \partial X$ と同じ内容になっています。

例題 4.2

図 4.4 のような変位場に対してひずみを求めなさい。微小変形を仮定します。

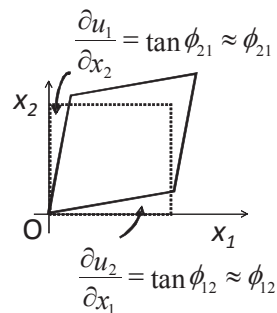


図 4.4 せん断ひずみ

解答例

$$\gamma_{12} = 2e_{12} = \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] = \phi_{12} + \phi_{21} \quad (4.20)$$

せん断ひずみの 2 倍: $2e_{12}$ は、角度 x_1 -O- x_2 の相対変化という幾何学的意味を持っています。これを「工学せん断ひずみ」と呼びます。

4.7 体積ひずみ(dilatation)

微小ひずみを考えるとき, 垂直方向ひずみの総和 e は幾何学的意味を持っています.

$$e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{kk} \quad (k=1,2,3: \text{擬標}) \quad (4.21)$$

簡単な変形条件として $e_{ij}=0$ ($i \neq j$) であるとき, 変形前に一辺が 1 である直方体の変形後の体積 V は, 式(4.22) で与えられます.

$$V = (1+e_{11})(1+e_{22})(1+e_{33}) \quad (4.22)$$

高次の項を無視すれば, 体積の変化 $\Delta V = V - 1$ は $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ に等しくなります. 単位体積あたりの体積膨張をあらわす意味から, これを **体積ひずみ** と呼びます.

4.8 相対変位の分解 (並進と剛体回転)

図 4.2 において, $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ は, $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ における \mathbf{u} のことです. 式で書いてみると次のように表現されます.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}) + d\mathbf{u} \quad (4.23)$$

相対変位 $d\mathbf{u}$ は, $d\mathbf{X}$ に関する全微分によって表せるので, 次のように書き換えられます.

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} &= \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \bullet d\mathbf{X} \\ du_k &= u_k(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - u_k(\mathbf{X}) = \frac{\partial u_k}{\partial X_j} dX_j \end{aligned} \quad (4.24)_{1,2}$$

式(4.8)で定義される \mathbf{F} が変形勾配と呼ばれているのに対して, 式(4.24)に出てくる $\mathbf{L} = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{X} = [\partial u_k / \partial X_j]$ を **変位勾配** (2 階テンソル)と言います. この式は, 次のように書くことができます.

$$du_k = L_{kj} dX_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \right) dX_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \right) dX_j \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \right) dX_j &= w_{kj} dX_j = \mathbf{W} \bullet d\mathbf{X}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \right) dX_j &= e_{kj} dX_j = \mathbf{E} \bullet d\mathbf{X}, \\ du &= \mathbf{L} \bullet d\mathbf{X} = (\mathbf{E} + \mathbf{W}) \bullet d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (4.26)_{1,2,3}$$

式(4.25),(4.26)において $\partial u_j / \partial X_k$ の項が $+/-$ の符号によって互いに打ち消されてしまうため、左辺 $d\mathbf{u}$ は式(4.24)₂と等しいこととなります。式(4.25)の右辺第1項 e_{kj} は、微小変位の場合、式(4.18)と同じになります。つまり、第1項 e_{kj} は k,j に関して**対称成分**(symmetric part)であり、ひずみテンソルの意味を持ちます。これに対して第2項 w_{kj} は、 k,j に関して反対符号をとる性質を持つので、**交代成分**(antisymmetric part)と呼ばれます。

この交代成分の意味について、以下、紹介します。

$\mathbf{W} \bullet d\mathbf{X}$ の成分は、具体的に展開すれば式(4.27)になります。この内容は、式(4.28)で定義される**ハミルトンの微分演算子**(nabla)を使った式(4.29): $\nabla \times \mathbf{u}$ を用いて、式(4.30)のように書き換えることができます。

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$\nabla = \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial X_k} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &= \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial X_j} \times \mathbf{e}_k u_k = \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k \frac{\partial u_k}{\partial X_j} = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \equiv \varpi_i \mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)\end{aligned}\tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) \times d\mathbf{X} &= \frac{1}{2} \varpi_j \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k dX_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varpi_j dX_k \mathbf{e}_i \\ &= \frac{1}{2}(\varpi_2 dX_3 - \varpi_3 dX_2) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}(\varpi_3 dX_1 - \varpi_1 dX_3) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}(\varpi_1 dX_2 - \varpi_2 dX_1) \mathbf{e}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varpi_3 & \frac{1}{2}\varpi_2 \\ \frac{1}{2}\varpi_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varpi_1 \\ -\frac{1}{2}\varpi_2 & \frac{1}{2}\varpi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.30}$$

式(4.30)は、式(4.27)と同じ内容になっています。 $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\varpi}$ は、回転流れの渦度(角速度)を表しますから、

$$\mathbf{W} \bullet d\mathbf{X} = \frac{\boldsymbol{\varpi}}{2} \times d\mathbf{X}$$

は、角速度 $\boldsymbol{\varpi}/2$ の剛体回転を表します。

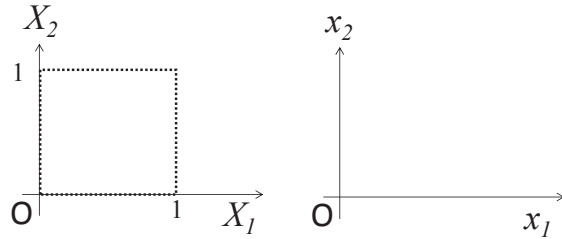
練習問題

(1) 物体内の粒子位置 \mathbf{P} を表す位置ベクトル \mathbf{X} が変形後に $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ で与えられます。ここで x_k と X_j の関係は、次式で表現されています：

$$x_1 = X_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} X_2, \quad x_2 = X_2 - \sqrt{2} X_1, \quad x_3 = X_3\tag{E.4.1}$$

このとき、変形勾配 \mathbf{F} の成分を計算して示しなさい。また、変形前後の様子がわかるように下図(左)の矩形物体が変形後にどのようなものになるのかを右図の中に示しなさい。

ただし、変形勾配は $\mathbf{F} = (F_{kj}) = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right)$ で与えられます。



(2) 前問において x_k と X_j の関係が次式で表現されています：

$$x_1 = X_1 + \frac{X_2}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 \quad (\text{E.4.2})$$

変形勾配 \mathbf{F} の成分を求め、さらに一辺の長さが 1 である矩形物体が変形後にどのようなになるのかを図に示しなさい。

(3) 物体内のある場所(点) $\mathbf{P}(x_1, x_2)$ の変位成分を (u_1, u_2) とするとき、ひずみの成分 e_{ij} ($i, j=1, 2$: 自由標) を (u_1, u_2) に関する微分式で表わしなさい。但し変位は十分に微小であると仮定し、ひずみの定義式において (u_1, u_2) の微分の 2 次の項を無視できます。

(4) 変位場 $\mathbf{u}=(u_i)$ ($i=1, 2, 3$) が以下の式で与えられる物体があります。このとき、微小変形を仮定してひずみテンソルの成分を求めなさい。

$$(a) \quad (u_1, u_2, u_3) = [-3ax_1, ax_1 + 2ax_2, -5ax_3] \quad (\text{E.4.3})$$

$$(b) \quad (u_1, u_2, u_3) = [e^{-x_3}(x_1^2 - x_2^2), e^{-x_3}x_2^2, e^{-x_3}\sin x_1 \cos x_2] \quad (\text{E.4.4})$$

(5) 微小ひずみの場合に、ひずみの適合条件式(E.4.5) が成り立つことを説明しなさい。ひずみの定義式として式 (4.18) を仮定します。

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right), \quad \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right),$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} \right),$$

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2}, & 2 \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2}, \\
 2 \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2}
 \end{aligned} \tag{E.4.5}$$

(6) 式(E.4.6) によって変位場 \mathbf{u} が与えられています. このとき, x_1 軸から角度 θ の方向に原点からの距離 r の位置 \mathbf{P} における変位ベクトルの方向と大きさを説明しなさい. また, $\nabla \times \mathbf{u}$ の意味と変形の特徴を説明しなさい. ここで, a を正の定係数, 位置ベクトルを \mathbf{x} とします.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax_2 \\ ax_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{OP} = \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{E.4.6}_{1,2}$$

(ヒント) 2次元空間の変形です. 変位の大きさ $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ は, 距離 r が一定で角度 θ を変えたときどのような値になりますか. 変位 \mathbf{u} が位置ベクトル \mathbf{x} に対してなす方向余弦を計算して, \mathbf{u} と \mathbf{x} とのなす角度を調べなさい.

(7) 式(4.18), (4.29)に基づいて, 次の2次元変位 \mathbf{u} に対するひずみと回転 $\nabla \times \mathbf{u}$ を求めなさい. ここで a, b, c, d は非零の定数です.

$$(i) \quad \mathbf{u} = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \tag{E.4.7}$$

$$(ii) \quad \mathbf{u} = (\log_e r, 0) \quad \text{但し } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{E.4.8}$$

(8) 問題(2) において有限変形で平面ひずみ状態のとき, Green のひずみテンソルの成分を求めなさい.

5. 構成方程式 -固体弾・塑性の基礎-

5.1 固体の機械的性質

4.3 節で紹介したように，固体の変形（ゆがみ）には，伸縮（引張りと圧縮），単純せん断，せん断ねじれ，曲げ等があります．ここでは，固体の変形に対する機械的性質として，固有の**変形抵抗**を取り扱います．つまり，作用力と変形量の関係を取り扱います．質点系の力学と違って，連続体の力学では，局所特性と大域特性とのつながりをもたせるため，単位面積当たりの力（応力）や単位体積当たりの力に注目します．そして単位長さあたりの変位量（ひずみ）を調べます．

固体の「引張り，曲げ，せん断，圧縮，振り」の変形抵抗の特性を評価するため，それぞれに対応した**機械的な試験法**が設定され利用されます．固体が持つ基本的な変形抵抗の性質として，次の2つがあります．

- (a) **弾性**(elasticity): 外力を取り除くと，内部応力は消滅し元の形状に戻ろうとする性質です．特に応力とひずみの間に比例関係（Hooke's law）が成り立つとき，**線形弾性**とといいます．線形弾性の性質を具体的に表す材料固有の量として縦弾性係数，横弾性係数，ポアソン比等があります．
- (b) **塑性**(plasticity): 外力を取り除いても元の形状に戻らないで永久変形が残る性質です．多くの固体材料では，外力が**弾性限界**となるある応力状態を超えることで，永久変形を生じます．塑性を表す具体的な量として，**降伏点**(応力)があります．

5.2 1次元材料引張試験

試験材料を棒状に切削して，棒の長手方向に引っ張って，引きち切れるまでの変形（伸び）とこれに対抗する力とを測って，材料の変形抵抗の性質を知ることができます．変形の様子を絵にしたものを図

こうせい
構成

しんしゆく ひっぱ
伸縮，引張り，
あつしゆく たんじゆん
圧縮，単純
へんけいていこう
変形抵抗，

きよくしよ たいいき
局所，大域，

へんいりよう
変位量

ねじ
振り

ひようかく たいおう
評価，対応

だんせい しょうめつ
弾性，消滅，
比例

そせい のぞ
塑性，除く，
もど げんかいい
戻る，限界

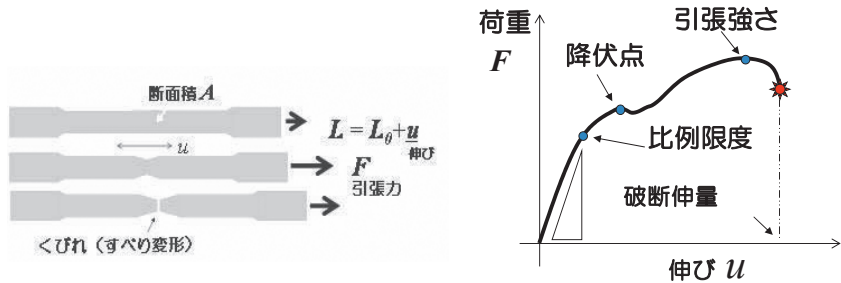
こうふく
降伏

ぼうじよう せつさく ながて
棒状，切削，長手，
たいこう ようす
対抗，様子

応答, 描く

荷重, 破断, の伸び

5.1(a) に示します. 図 5.1(b) は, このときの力と伸びの代表的な応答関係を描いたものです.



(a) 試験片の変形の様子

(b) 荷重と伸びの関係

図 5.1 棒状試験片の引張変形特性

鋼, 銅, 金属

範囲

復元, 範囲, 比例限界,

物性, 部材, 要素, 面積, 体積

鋼や銅のような金属材料の引張試験の変形において, 弾性(復元する性質)に2つの特徴が見られます.

- (i) 荷重と伸びの関係が線形である範囲(応力とひずみの線形性)
- (ii) 復元するけれども非線形な応答をする範囲. 線形と非線形の限界を**比例限界**と言います.

固体物性としての変形抵抗をみるためには, 部材要素の単位の長さ¹と単位の面積を考慮して, 伸びと作用荷重を評価する必要があります. これは, 連続体の単位体積当たりの性質を評価していることとなります.

垂直

垂直方向応力 (normal stress):

$$\sigma = \frac{F}{A} \text{ 単位面積当たりの抵抗力 (表面力)}$$

表面

垂直方向ひずみ (normal strain):

$$e = \frac{u}{L_0} \text{ 単位長さ当たりの変位量 (伸縮量), ただし } u = \int_{L_0}^L dL$$

規則

基準, 公称

応力 σ とひずみ e の関係規則を数式にしたものを「**構成方程式**」²と言います. 初期の長さ L_0 を基準にしたひずみ $e=u/L_0$ を**公称ひずみ**

み(nominal strain, engineering strain) といいます。これに対して、変形後の長さ L を基準にした増分形式のひずみ dL/L を使うことがあります。これを積分すれば対数になりますので**対数ひずみ**(logarithmic strain) といいます。これは、塑性を取り扱う場合によく利用されます。

$$e (= \varepsilon_N) = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \frac{L}{L_0} - 1 \quad (5.1), (5.2)$$

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln(1 + \varepsilon_N)$$

式(5.1), (5.2) は、引張試験における公称ひずみ e と対数ひずみ ε の定義式を表します。

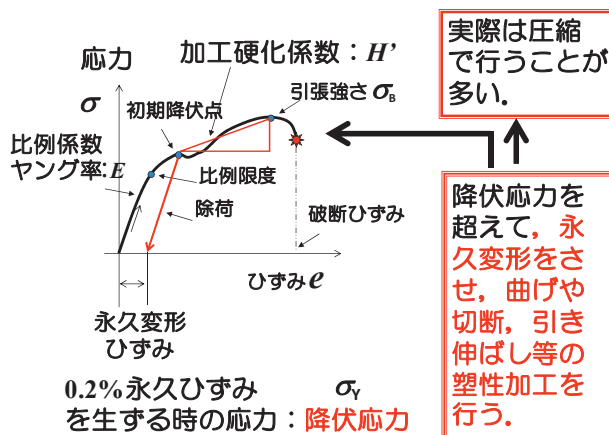


図 5.2 引張試験の弾・塑性変形と特性量

図 5.2 は、引張り試験から得られる応力とひずみの関係を模式的に示したものです。図中、固体の変形抵抗の特徴を表す量として次の項目を取上げています。

弾性の比例係数: E , ヤング率(縦弾性係数)

比例限度(応力): σ_E

初期降伏点(応力): σ_Y

0.2%永久ひずみを生ずる時の応力: $\sigma_{0.2}$ ($\approx \sigma_Y$ の代用)

いぞんせい ころか
依存性, 硬化
はだん
破断
げんかい
限界

むげんだい
無限大
たいすう ちよくぜん
対数, 直前,
すんぽう ひりつ
寸法, 比率,
かさん せきぶん
加算, 積分,
ゆうげん けいりょう
有限, 計量

けっしょう そうしよう
結晶, 双晶,
たいしょう かいてん
対称, 回転,
かた がいねん
硬い, 概念

えんせい こうし
延性, 格子,
そう てんい
層, 転位,
えいきゅう やす
永久, 易い,
めん たけっしょう
面, 多結晶,
くいちが けっかん
喰違い, 欠陥

加工硬化係数: H' (降伏点のひずみ依存性を表す)

破断強さ(応力): σ_B

破断限界(ひずみ): e_B

固体の伸縮変形では, 引張りによる伸びだけでなく圧縮に対する変形も見受けられます. 圧縮変形では, 厚みをゼロにするために無限大の対数ひずみ(負)とするほうが感覚的にあっています. 対数ひずみは, 直前の寸法に対する微小変形の増分比率を計算して加算(積分)するので, 初期にくらべて大きな有限伸びをする塑性変形では自然な計量法です.

公称ひずみ (engineering strain, nominal strain) は, Green のひずみの考え方に基づくのに対して, 対数ひずみ (logarithmic strain) は, Euler のひずみの考え方に基づきそれを積分したものです.

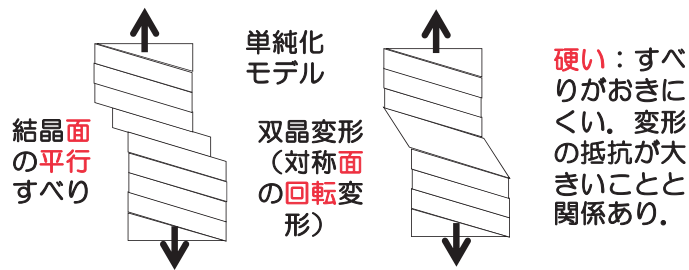


図 5.3 塑性すべり変形 の概念図

5.3 金属の結晶と塑性変形 (結晶のすべりによる変形)

延性金属の場合, 結晶格子のある層が特定の方向にすべり(転位)^{1*}を起こしやすいという性質があります. 転位の進行は元に戻らない永久変形です. このような永久変形を「塑性」といいます. すべり易い方向の面は, 結晶の種類によって決まっています. ただし多くの金属は多結晶体ですので, いろんな方向を向いた結晶が要素部材内に存在します.

^{1*} 転位 (dislocation) は, 喰違いの格子欠陥 (lattice defects) です.

このため、大域的にはすべりやすい方向は等方的にあるとみなすことができます。このことから、多くの固体材料において引張荷重をかけたとき、最大せん断応力が作用する約 45°傾いた方向にすべり変形が発生しやすい傾向があります。

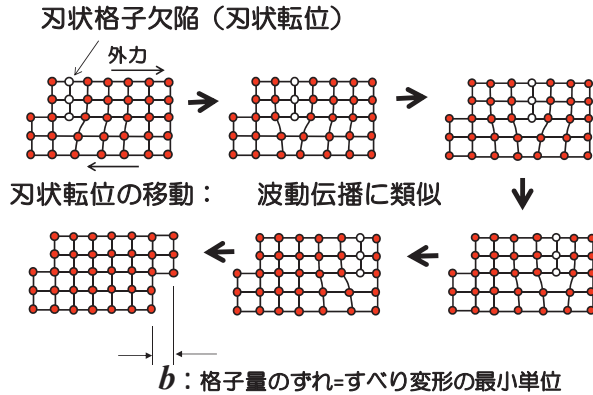


図 5.4 刃状転位による塑性変形

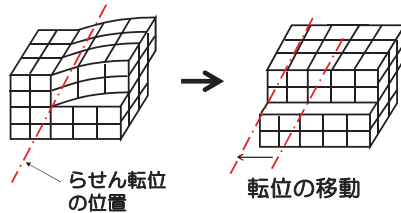


図 5.5 らせん転位による塑性変形

鋼や銅のような金属材料において、すべり変形（塑性）はどのように起きるのでしょうか？

結晶格子のある層が特定の方向にすべり（転位）を起こし易いと書きましたが、この変形の様子を絵にしたものが図 5.4 と図 5.5 です。

図 5.4 は、ある結晶面にそって存在する刃状の喰違いである「格子欠陥」に対してせん断力を作用させたとき、格子欠陥が移動する様子を描いています。このような格子欠陥を「刃状転位」といいます。この転位の移動によって格子 1 個分の永久変形(すべり)を生じます。

格子欠陥としては、刃状のほかに図 5.5 に示す「らせん状転位」も

とうほう, たいいき
等方, 大域

はじょう, いどう
刃状, 移動,
でんぱん, はどう
伝搬, 波動,
るいじ
類似

こうしりょう
格子量

い ち
位置

いちよう
一様
どうじ かりつは
同時, 孤立波
きこう せうたいでき
機構, 相対的

そうご かんしやう
相互, 干渉
がたい しょうめつ
合体, 消滅
かいざいぶつ もしき
介在物, 模式的
の へりこ
乗り越え,
けっしょうりゆう
結晶粒

げんしょう
現象
きよくぶ
局部

せきしゆつ じやうしやう
析出, 上昇

くうこう けっかん
空孔, 欠陥

べつすべり めん
別すべり面

よく知られています。

転位の移動は、図 5.6 に示すように波動伝播に似た運動です。一様かつ同時に結晶面がすべるのではなく、ソリトン（孤立波）が進行するような変形機構です。このため、外から与える力は相対的に小さくても塑性変形は進行するのです。

永久(塑性)変形が進むと、結晶内で多くの転位の相互干渉によるひずみが生じます。図 5.7 は、異なるすべり面同士の干渉や合体消滅、介在物の乗り越えを模式的に示しています。図 5.8 は、結晶粒内での

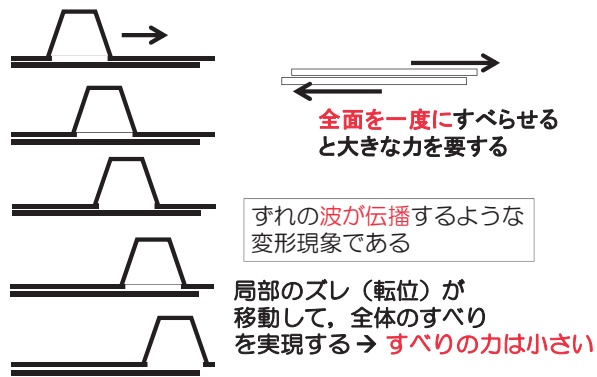


図 5.6 転位線の移動

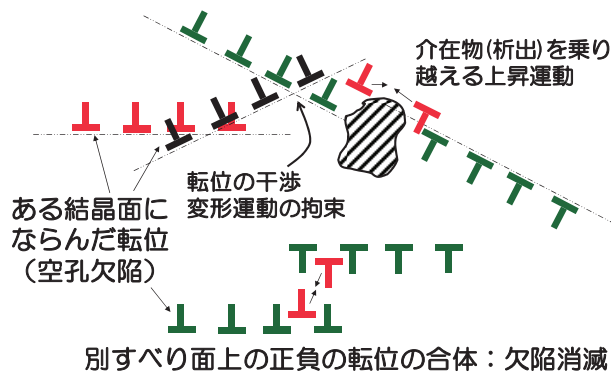


図 5.7 転位の合体と相互干渉

転位の相互干渉や粒界での集積を模式的に示したものです。このような複数の転位の干渉によって、すべり変形は次第に起き難くなります。このような抵抗の増加を加工硬化(work hardening)と言います。

連続体の力学は、このような結晶構造と転位の挙動に基づく局部現象を大局的な加工硬化則として取り扱います。

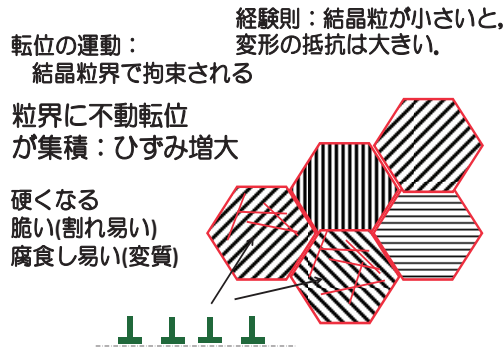


図 5.8 結晶粒内の転位の挙動

5.4 真応力と対数ひずみの構成近似モデル

塑性力学では、真応力-対数ひずみ ($\sigma-\epsilon$) の関係曲線を用います。弾性限界を超えた領域での塑性挙動を含む応力とひずみの構成方程式として、いろいろな関数形式が使われています。主なものを以下に示します。

◇ 弾・線形硬化則

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & (\epsilon < \frac{\sigma_{Y0}}{E}) \\ \sigma_{Y0} + H'\epsilon & (\epsilon > \frac{\sigma_{Y0}}{E}) \end{cases} \quad (5.3)$$

◇ n 乗硬化則 Ludwik [1909]: $\sigma = C\epsilon^n \quad (0 \leq n < 1) \quad (5.4)$

n : 加工硬化指数, くびれ点: $\epsilon = n$

粒界, 集積
次第に, 難く
増加, 硬化
挙動, 現象

経験則, 粒界,
不動転位,
脆い, 腐食,
変質

真応力, 近似

指数

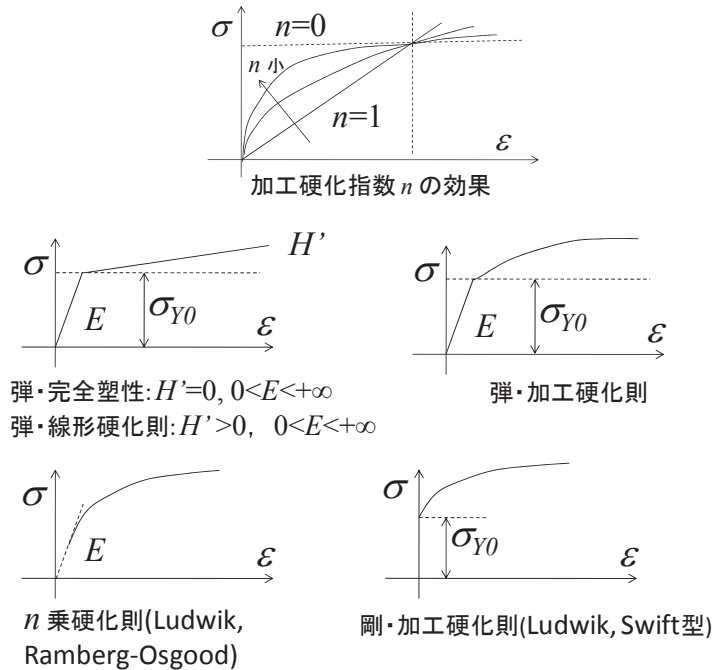


図 5.9 様々な弾・塑性挙動の構成模型 (a)~(e)

◇ 修正 n 乗硬化則:
$$\sigma = \sigma_0 + K \varepsilon^n \quad (5.5)$$

◇ 修正 n 乗硬化則 Swift[1952]:
$$\sigma = C (\varepsilon_0 + \varepsilon)^n \quad (5.6)$$

◇ 指数硬化則 Voce [1948]:
$$\sigma = C(1 - m \varepsilon^{-ne}) \quad (5.7)$$

$C(1-m) = \sigma_{y0}$, 飽和傾向あり

◇ Ramberg and Osgood[1946]:
$$\varepsilon = (\sigma/E) \{1 + (\sigma/B)^n\} \quad (5.8)$$

弾/塑性体の広範囲挙動に適用しやすい.

Chakrabarty [1987]: 弾・加工硬化則 (修正 Ludwik)

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & (\varepsilon \leq \sigma_{y0}/E) \\ E\varepsilon(E\varepsilon/\sigma_{y0})^{n-1} & (\varepsilon \geq \sigma_{y0}/E) \end{cases} \quad (5.9)$$

◇ 速度依存形の塑性構成式

$$\diamond \text{Hart}[1967]: \quad \sigma = C \varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m \quad (5.10)$$

$$\diamond \text{Backofen}[1964]: \quad \sigma = K \dot{\varepsilon}^m \quad (5.11)$$

$$\diamond \text{クリープ特性 (Newton 則)}: \quad \dot{\varepsilon} = F \sigma^\mu \quad (5.12)$$

ここでドット(・)は時間微分を表します.

$$\frac{d}{dt}(\quad) = (\dot{\quad})$$

超塑性は速度依存の式において m の値が大きい場合に相当します.

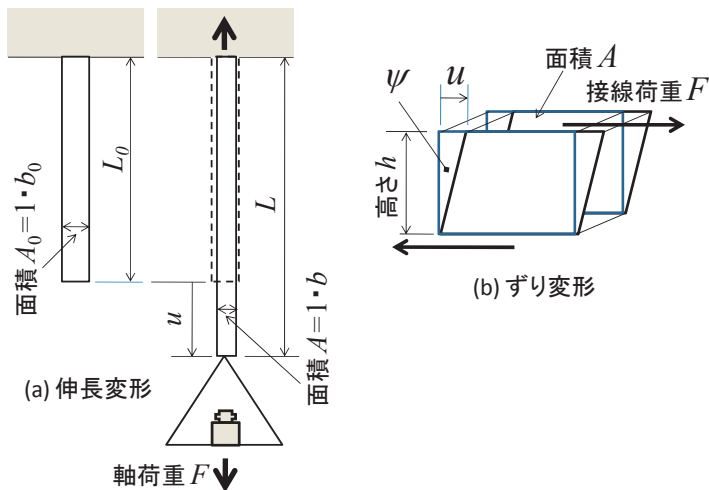


図 5.10 縦弾性係数と横弾性係数の測定原理

5.5 弾性変形における実用弾性率

(1) 縦弾性係数(ヤング率)

図 5.10(a) のような棒材の引張り変形において、微小変形の範囲で垂直応力 σ と垂直ひずみ e の間に Hooke's law が成立します。この比例係数 E を縦弾性係数(Young's modulus) といいます。ヤング率は、棒材の曲げたわみを表すときにも必要な物性値です。

$$E = \frac{\sigma}{e} = \frac{F L}{A u} \quad \left(u = \int_{L_0}^L dL = L - L_0 \right) \quad (5.13)$$

(2) 剛性率(ずり弾性率)

図 5.10(b) のような立方弾性体の底面を固定し、上面に接線力 F を作用させると図のようなずり変形を起こします。これをせん断変形 (shear) といいます。このとき、せん断応力 τ とせん断ひずみ $2e_t$ の間に Hooke's law が成立します。この比例係数

$$G = \frac{\tau}{2e_t} = \frac{F h}{A u} = \frac{F}{A \tan \psi} \approx \frac{F}{A \psi} \quad (5.14)$$

を横弾性係数または剛性率(rigidity), ずり弾性率(shear modulus) などと呼びます。ここで、高さ方向を x_2 軸にとり、接線力方向を x_1 軸とすれば、次のようにおくことができます。

$$\tau = \tau_{21}, e_t = e_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{u}{2h} \quad (5.15)_{1,2}$$

(3) ポアソン比

図 5.10(a) のような棒部材の伸長変形において、垂直ひずみ e のほかに横方向に収縮ひずみ e_c を生じます。この比例係数

$$\nu = -\frac{e_c}{e} \quad (5.16)$$

をポアソン比(Poisson's ratio) といいます。また、ポアソン比の逆数 $m = 1/\nu$ をポアソン数と言います。

練習問題

(1) 図 5.3 のような細長い 2 次元の板に引張荷重を作用させ、引張方向の応力を σ_1 、これに直交する方向の応力 σ_2 をゼロとします。この σ_1 が作用する方向に対し $\theta=45^\circ$ 傾いた方向の応力成分を求め

なさい。それはどのような状態ですか。

(ヒント) 2階テンソルの変換則の式(E.5.1) を使って, $\theta=45^\circ$ 傾いた方向の応力成分を計算すれば, 様子がわかります。

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{E.5.1})$$

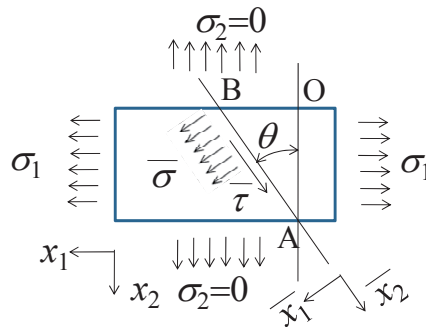


図 5.3 1 軸引張応力を受ける 2 次元部材の応力状態

- (2) 真応力と真ひずみの定義を説明しなさい。
- (3) 図 5.10(b) においてせん断ひずみ e_{12} が式(5.15)₂ になることを説明しなさい。
- (4) ポアソン比 ν を図 5.10(a) の変数 b, b_0, F, L, L_0 などを用いて表しなさい。ただし $L > L_0, b < b_0$ とします。
- (5) 図 5.10(a) において, 軸荷重 F が作用することで棒部材に蓄えられる単位体積あたりの弾性エネルギー v_E は, 次式(E.5.2)で与えられることを説明しなさい。

$$v_E = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{Ee^2}{2} \quad (\text{E.5.2})$$

(ヒント) 全弾性エネルギーは $U = ALv_E = \int_{L_0}^L FdL$ で与えられます。

また $u = \int_{L_0}^L dL = L - L_0$ であることから, $du = dL$ です.

- (6) $O-x_1x_2x_3$ 座標系の位置 $P(x_1, x_2, 0)$ における物体内の応力のテンソル成分が次式で与えられます.

$$[\tau_{kj}] = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5.3})$$

このとき, $O-x_1x_2x_3$ 座標系に対して x_3 軸を中心にして反時計まわりに角度 θ だけ回転した座標系 $O-x'_1x'_2x'_3$ における応力のテンソル成分 $[\tau'_{kj}]$ を求めなさい.

(ヒント) $\cos(\theta) = c$, $\sin(\theta) = s$ とおくとき, 第3章応力の例題 3.2 ならびに式(3.24)に関する説明を参照すれば, 次の関係が成り立ちます. なお, せん断応力の対称性によって $\tau'_{kj} = \tau'_{jk}$ です.

$$\begin{bmatrix} \tau'_{11} & \tau'_{12} & \tau'_{13} \\ \tau'_{21} & \tau'_{22} & \tau'_{23} \\ \tau'_{31} & \tau'_{32} & \tau'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5.4})$$

- (7) 実際によく用いられる弾性係数(弾性率)の名称(めいしょう)を3つ書きなさい.

- (8) ある棒材に引張軸荷重をかけたところ, 弾性限界を超えて永久変形をした. このとき, ひずみの増加とともに作用応力もわずかに増加した. このような現象・効果を何というか書きなさい.

6. 固体・流体の構成方程式

6.1 流体および固体の力学的特性の記述

連続体の力学特性は、変形（流動）と応力の関係を記述した構成方程式を以て表すことができます。すなわち、**構成方程式**(Constitutive equation) とは、物質の力学的特性を数式で表したものです。

第5章では固体の弾性と塑性について基本的な性質を概観しました。この第6章では、まず、流体における変形挙動に関して、応力とひずみ速度との関係を紹介します。次に、線形弾性体の応力とひずみの3次元構成方程式について紹介します。さらに弾性と粘性を備えた粘弾性体について、1次元の応力とひずみならびに応力とひずみ速度との関係を述べたいくつかの基本的な構成式を紹介します。本章における重要点は、物質の力学的特性を構成式によって抽象化することと、実在物体の特徴を構成式によつて的確にとらえることです。

以下では、代表的な例として**完全流体**、**ニュートン流体**、**完全弾性体**、**線形粘弾性体**を取上げます。

6.2 完全流体 (perfect fluid)

完全流体は、粘性と圧縮性がないと仮定した理想の流体です。流体が境界表面と接するとき、垂直方向の力(圧力)だけが作用し、接線方向の力(せん断応力)は発生しないとされます。完全流体では応力テンソル τ_{ij} が等方です。

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad \delta_{ij} : \text{クロネッカーのデルタ} \quad (6.1)$$

この行列表記は次の通りです。

$$[\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad \text{ここで } p \text{ はスカラー量}$$

6.2.1 理想気体 (ideal gas)

容器等に密閉された状態にある理想気体の圧力 p 、温度 T 、密度 ρ の関係は、

記述, 流体
流動, 以て

概観
挙動, 速度

粘性, 粘弾性

抽象化, 実在,
特徴, 的確に
完全

仮定, 理想,
境界, 壁面,
接する, 垂直,
接線, 等方

行列表記

容器, 密閉

かんしゅうてき へいこう
慣習的, 平衡,
せいし とくしゅ
静止, 特殊

みつど ようせき
密度, 容積,
じょうすう ひょうせき
定数, 比容積
えきたい ぼうちよう
液体, 膨張

ちようりゆう げんどうき
潮流, 原動機
ねんしよう きようかい
燃焼, 境界
じょうけん きてい
条件, 規定

とうほうてき
等方的

慣習的に気体の**状態方程式**と呼ばれています。これは、流体を平衡静止状態としてみている特殊な構成方程式です。

$$p = \rho RT \quad (\text{状態方程式}) \quad (6.2)$$

ここで、 $\rho=1/v$: 密度(v : 比容積), T : 温度, R : 気体定数

6.2.2 非圧縮性流体 (Incompressible fluid)

水などの**液体**は、気体と比べて圧力を受けてもほとんど圧縮されず、温度変化に対して膨張量も小さいため、その質量密度 ρ は圧力 p や温度 T に対して一定とみなすことができる。そこで理想的な非圧縮性流体を考えることができ、次のように記述できる。

$$\rho = \text{constant} \quad (\text{状態方程式}) \quad (6.3)$$

地球の潮流、大洋における波、飛行機の飛行、ジェットエンジン内の流れ、自動車の原動機内の燃焼等では、流体を完全流体として扱っている。通常、流体力学では非圧縮性流体を扱う。圧力は境界条件で規定する。

6.3 Newton 流体

せん断応力が変形速度に比例する流体です。構成方程式は式(6.4)で与えられます。

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ijkl}V_{kl} \quad (6.4)$$

ここで、

$$\tau_{ij}: \text{応力テンソル}, \quad V_{kl}: \text{変形速度テンソル} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

D_{ijkl} : 粘性係数テンソル, u_k : 速度.

Newton 流体では、 D_{ijkl} を温度の関数と考えてもよいですが、応力や変形速度の関数ではありません。3次元空間では4階テンソルの成分は $3^4=81$ 個ありますが、全てが独立であると限りません。流体が**等方的**であるとき、次のように2つの独立な定数で表せます。

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + D_{ijkl}V_{kl} \\
&= -p\delta_{ij} + (\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}))V_{kl} \\
&= -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}V_{kk} + 2\mu V_{ij}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

この式を縮約すると、式(6.7) ようになります。

$$\tau_{kk} = -3p + (3\lambda + 2\mu)V_{kk} \tag{6.7}$$

縮約 (Contraction)は、良く出てくるので覚えてください。

6.4 Stokes 流体

Stokes 流体では、応力は体積ひずみ V_{kk} に依存しないことから、

$$3\lambda + 2\mu = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{6.8}$$

が得られます。結局、応力は式(6.9)で表されます。

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3}\mu V_{kk}\delta_{ij} \tag{6.9}$$

これが Stokes 流体の構成方程式です。なお、平均垂直応力 $\frac{\tau_{kk}}{3}$ が p です。

6.2.2 において説明した非圧縮性流体の場合、次のようになります。

$$V_{kk}=0 \rightarrow \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \tag{6.10}$$

完全流体の場合、粘度 $\mu=0$ ですから、この構成方程式は、式(6.1) に帰着します。

6.5 現実挙動の流体の状態方程式

弾性固体の構成方程式は、後述するようにひずみを使って応力を決定する形式で表現されます。

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

ここで e_{ij} : ひずみテンソル, λ および μ : **Lame の定数**です。これに対して、流体力学では圧力項を基準にして、質量密度や粘性等の付加項を考慮する表現法

あつか
扱い

こうあつ かみつ
高圧, 過密,
きえき そう
気液, 2相,
いんりょく そうご
引力, 相互

さどうとう さんぎょう
作動筒, 産業,
どうき さどうゆ
動作, 作動油,
けいすう こうりょ
係数, 考慮する,
こゆう しんどうすう
固有, 振動数,
かとおうとう
過渡応答
きょうがいへき いぞん
境界壁, 依存
ねんせいこう だいひょうてき
粘性項, 代表的
こうか
効果

を用いています。つまり、固体力学と流体力学の違いは、圧力項の扱いにあります。理想気体の式(6.2)を含めて、流体力学では静止平衡状態において圧力を規定する関係式を状態方程式 と言います。

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (6.11)$$

高圧状態で気体分子が過密になってくると、気液 2 相の状態が出てきますので、式(6.2) に従わない状態となります。実在する気体の状態方程式として van der Waals の式(6.12) が知られています。ここで β は気体分子の体積に比例する量であり、 αV^{-2} は気体分子相互の引力を表します^{1‡}。

$$\left(p + \frac{\alpha}{V^2} \right) (V - \beta) = RT \quad (6.12)$$

完全流体としてみた液体は、式(6.3) で表現されますが、実在する液体としての水や油は圧縮性を持ちます。例えば、油圧作動筒を使った産業機械の動作は、作動油(液体)の圧縮に対する弾性係数を考慮することで、固有振動数や過渡応答の解析をすることが可能です。

流れを持つ流体については、静止平衡状態の圧力のみでは、構成方程式を記述できません。流れ(動き)を伴う場合、境界壁と流体との相対関係に依存して圧力が変化します。このとき、粘性項が重要になります。代表的な粘性流体は次の 2 つです。

Newton 流体：

応力に対する粘性の効果が変形速度の線形関係で表されます。

非 Newton 流体：

変形勾配の非線形関係で表されます。

6.6 Hooke 弾性固体(Hookean elastic solid)

3 次元の弾性固体において、応力テンソルとひずみテンソルに線形関係があるとき、次のような構成方程式で表現できます。

^{1‡} 例えば, Y.C.Fung: A first course in continuum mechanics, third edition (1994), page 182 (Prentice Hall) に紹介されています。

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (6.13)$$

ここで τ_{ij} : 応力テンソル, e_{kl} : ひずみテンソル, C_{ijkl} : 弾性定数あるいは弾性係数テンソル(4 階のテンソル) です. これは, 最大で $3^4=81$ 個の成分を持ちます. 線形な弾性は, 微小変形の状態で見受けられることが多いので, ひずみの定義として式(4.18)を前提として考えます. 応力とひずみの対称性を考慮すると,

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = \tau_{ji} &\rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} \\ e_{kl} = e_{lk} &\rightarrow C_{ijkl} = C_{jilk} = C_{ijlk} \end{aligned} \quad (6.14)$$

つまり, ひずみテンソルと応力テンソルは, それぞれ 6 個の独立な成分しか持ちません. 従って独立な弾性定数 C_{ijkl} の数は, $6^2=36$ 個ということになります.

独立な弾性定数の最も少ない材料は, **等方性弾性体** (Isotropic elastic materials) です. 等方性弾性体では, あらゆる方向で材料特性が等しく座標の取り方に無関係です.

6.6.1 等方性弾性体

4 階の**等方**テンソルの一般形は次のように書けます^{2‡}.

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \nu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6.15)$$

上述した**対称性**を考慮すると, $\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} = 0$ となり

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6.16)$$

これを上記の応力とひずみの関係式に代入すると

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= C_{ijkl} e_{kl} \\ &= (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) e_{kl} \\ &= \lambda \delta_{ij} e_{kk} + \mu (e_{ij} + e_{ji}) \\ &= \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \end{aligned} \quad (6.17)$$

式(6.17)から, すべての成分式を x_1, x_2, x_3 座標系 (または x, y, z 座標系) について書くと (なお, μ を G と書くことが多いです), 式(6.18), (6.19) のように展開できます.

^{2‡} ここで導入した係数 λ, μ は Lamé の定数と呼ばれるものです.

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11}, & \tau_{12} &= 2\mu e_{12} \\ \tau_{22} &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{22}, & \tau_{23} &= 2\mu e_{23} \\ \tau_{33} &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{33}, & \tau_{31} &= 2\mu e_{31}\end{aligned}\tag{6.18}_{1-6}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2\mu e_{xx}, & \tau_{xy} &= 2\mu e_{xy} \\ \tau_{yy} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2\mu e_{yy}, & \tau_{yz} &= 2\mu e_{yz} \\ \tau_{zz} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2\mu e_{zz}, & \tau_{zx} &= 2\mu e_{zx}\end{aligned}\tag{6.19}_{1-6}$$

以上は、応力について表現した関係式です。これを逆に、ひずみについて解いておきます。初めに、 $i=j$ とおいて縮約をとります。

$$\tau_{ii} = 3\lambda e_{kk} + 2\mu e_{ii} = (3\lambda + 2\mu)e_{kk}\tag{6.20}$$

ここで $\tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$, $e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, $e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ です。

$e_{kk} = \frac{\tau_{kk}}{3\lambda + 2\mu}$ を上記の式(6.18)に代入し、 e_{ij} について解きます。これより、

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \tau_{kk}\tag{6.21}$$

を得ます。ここで Lamé の定数 λ とヤング率 E 、ポアソン比 ν との関係から、

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E = 2\mu(1+\nu) \quad \text{を用いると}^{3\ddagger} \quad \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\nu}{1+\nu} \quad \text{とな$$

り、

$$\begin{aligned}e_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \tau_{kk} \right) \\ &= \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \tau_{kk} \delta_{ij}\end{aligned}\tag{6.22}$$

が得られます。

6.6.2 体積弾性係数 K

^{3‡} 練習問題 (10) を参照してください。

体積弾性係数は、体積ひずみと静水圧応力の比で定義されます。微小長さ dx_1, dx_2, dx_3 の辺からなる微小直方体を考えます。このとき変形後の辺の長さは、それぞれ

$$dx_1(1+e_{11}), dx_2(1+e_{22}), dx_3(1+e_{33})$$

で与えられ、体積の変化 ΔV は次のようになります。

$$\begin{aligned} \Delta V &= dx_1(1+e_{11}) dx_2(1+e_{22}) dx_3(1+e_{33}) - dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= dx_1 dx_2 dx_3 (1+e_{11} + e_{22} + e_{33} + \underline{e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{11}e_{33}} + \underline{e_{11}e_{22}e_{33}}) - dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\approx dx_1 dx_2 dx_3 (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \dots \dots \text{高次項を省略(近似)} \end{aligned}$$

これより **体積ひずみ** は、

$$\Delta V/V = (e_{11} + e_{22} + e_{33}) = e_{kk} \quad (6.23)$$

となります。上記の式(6.21)において、次のようにおきます。

$$\tau_{kk} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = -3p \quad (6.24)$$

さらに次の縮約 ($i=j$) をとります。

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{1}{2\mu} \tau_{ii} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ii} \tau_{kk} = \frac{1}{2\mu} \left[-3p - \frac{3\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} (-3p) \right] \\ &= \frac{1}{2\mu} (-3p) \left(1 - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) = \frac{1}{2\mu} (-3p) \left(\frac{3\lambda + 2\mu - 3\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) \\ &= \frac{1}{2\mu} (-3p) \left(\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu} \right) = \frac{-3p}{3\lambda + 2\mu} \quad (6.25) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ を使いました。以上の関係から、式(6.26)を得ます。

$$\text{体積弾性係数} : \frac{-p}{e_{kk}} = \frac{2}{3} \mu + \lambda = K \quad (6.26)$$

例題 6.1

体積ひずみが e_{kk} であることを示しなさい。

解答例

体積ひずみを e で表すことにします。すなわち $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ であることを証

明します。ひずむ前の体積 V_0 を $dx_1 dx_2 dx_3$ とおくことにします。これがひずみを受けた後、その体積 V は $(1+e_{11})dx_1(1+e_{22})dx_2(1+e_{33})dx_3$ となります。従って、体積ひずみは、式(6.27) のように表されます。

$$\begin{aligned} e &= \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{(1+e_{11})dx_1(1+e_{22})dx_2(1+e_{33})dx_3 - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} \\ &= \frac{((1+e_{11})(1+e_{22})(1+e_{33}) - 1)dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} \\ &= (1+e_{11}+e_{22}+e_{33}+e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11}+e_{11}e_{22}e_{33}) - 1 \\ &= e_{11}+e_{22}+e_{33}+e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11}+e_{11}e_{22}e_{33} \quad (6.27) \end{aligned}$$

ここで、ひずみの積は 2 次以上の微小量ですから無視できます。よって体積ひずみは、1 次項が残って

$$e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

で表されます。

6.6.3 ポアソン比

ポアソン比は、縦ひずみに対する横ひずみの比のマイナスです。断面積 S の真直棒を軸方向 (x_3 方向) に引張るとする。応力は τ_{33} だけが非零です。式(6.18) より、 $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{12} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11}, & 0 &= 2\mu e_{12} \\ 0 &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{22}, & 0 &= 2\mu e_{23} \\ \tau_{33} &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{33}, & 0 &= 2\mu e_{31} \end{aligned}$$

となります。これより $2(\lambda + \mu)(e_{11} + e_{22}) + 2\lambda e_{33} = 0$ なので、

$$e_{11} + e_{22} = -\frac{\lambda}{\lambda + \mu} e_{33} \quad (6.28)$$

これを上記の 3 番目の式 $\tau_{33} = \dots$ に代入すると、

$$\begin{aligned}\tau_{33} &= \left[\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) + 2\mu \right] e_{33} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + \mu} \right) \mu e_{33} \\ &= \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu e_{33}\end{aligned}$$

したがって、

$$e_{33} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \tau_{33} \quad (6.29)$$

式(6.28)を $0 = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11}$ の式に代入すると、

$$\lambda e_{33} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) + 2\mu e_{11} = 0 \rightarrow e_{33} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = -2e_{11} \rightarrow \frac{e_{11}}{e_{33}} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (6.30)_1$$

同様に式(6.28)を $0 = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{22}$ の式に代入して、

$$\frac{e_{22}}{e_{33}} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (6.30)_2$$

以上の関係から、ポアソン比は、次のようになります。

$$\nu = -\frac{e_{11}}{e_{33}} = -\frac{e_{22}}{e_{33}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (6.31)$$

縦弾性係数(ヤング率) E の定義は垂直応力 τ_{33} に対する垂直ひずみ e_{33} の比率なので、式(6.29)を使って式(6.32) が得られます。

$$E = \frac{\tau_{33}}{e_{33}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (6.32)$$

以上のことから、 E , ν を Lamé の定数 λ, μ によって表現した式を得ることができました。

6.6.4 横弾性係数

せん断ひずみとせん断応力の比例係数が横弾性係数です。2次元的な単純せ

せん断変形を考えてみます。応力テンソルの成分 τ_{12} を除いてすべて 0 である場合を考えます。

$$\tau_{12} = \tau, \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0 \quad (6.33)$$

式(6.18) から

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11}, & \tau &= 2\mu e_{12} \\ 0 &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{22}, & 0 &= 2\mu e_{23} \\ 0 &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{33}, & 0 &= 2\mu e_{31} \end{aligned}$$

これより

$$e_{12} = \frac{\tau}{2\mu} \rightarrow \mu = \frac{\tau}{2e_{12}} \quad (6.34)$$

この時, $\mu = G$ とおいて, G を剛性率または横弾性係数 (Modulus of Rigidity) と呼びます。

6.6.5 温度効果

弾性体の場合, Hooke の法則は温度効果を考慮するために, Duhamel-Neumann の法則に拡張することが出来ます。今, 弾性体の比例係数 C_{ijkl} とひずみ e_{kl} を一様な一定温度 T_0 の下で測定したとします。この後, 弾性体が一様な温度 T に変化したら, 式(6.35) のようにおくことができます。

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0) \quad (6.35)$$

等方性材料の場合, 次のように表されます。

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \beta (T - T_0) \delta_{ij} \quad (6.36)$$

ここで β は, 線膨張係数を α とするとき,

$$\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha = \frac{E}{1 - 2\nu}\alpha \quad (6.37)$$

の関係があります。

6.7 線形粘弾性体

高分子材料，生体材料などは弾性的性質と粘性的性質を併せ持っています．これらの材料については，現在でも構成方程式の研究が行われています．

変形が十分小さい場合，「応力とひずみの関係が線形」な線形粘弾性体と置くことができます．粘弾性は，基本的に線形ばね(linear spring)とダッシュポット(dashpot) の組み合わせモデルとして表現され，2 要素模型 (基本: Maxwell model, Voigt model)，3 要素モデル，4 要素モデル，一般化モデルなどがあります．

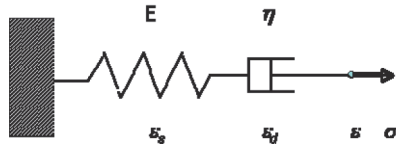


図 6.1 Maxwell model (2 要素模型)

6.7.1 Maxwell 模型

図 6.1 に示すような Maxwell 模型の応力-ひずみ関係式を導出します．

線形ばね部分のひずみ： ϵ_s ダッシュポットのひずみ： ϵ_d

線形ばねとダッシュポットは，直列に結合されているので，

$$\text{模型全体のひずみ： } \epsilon = \epsilon_s + \epsilon_d \quad (6.38)$$

の関係が成り立ちます．ばねとダッシュポットの応力は，それぞれ

$$\text{線形ばねの応力： } \sigma_s = E\epsilon_s \quad (6.39)$$

$$\text{ダッシュポットの応力： } \sigma_d = \eta \frac{d\epsilon_d}{dt} \quad (6.40)$$

となります．但し E は線形ばねのヤング率， η はダッシュポットの粘性係数です．変数 t は時間を表します．以上の式から ϵ_s および ϵ_d を消去します．式(6.38)の両辺を時間で微分すれば，式(6.41)が成り立ちます．

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_s}{dt} + \frac{d\epsilon_d}{dt} \quad (6.41)$$

式(6.39)より $\frac{d\epsilon_s}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_s}{dt}$ ，式(6.40)より $\frac{d\epsilon_d}{dt} = \frac{\sigma_d}{\eta}$ ．これらの式を式(6.41)に代

入します．これより式(6.42)を誘導できます．

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_s}{dt} + \frac{\sigma_d}{\eta} \quad (6.42)$$

ここで、 $\sigma_s = \sigma_d = \sigma$ と置くことが出来ます(直列並び)。以上のことから

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (6.43)$$

ここで $\lambda = \eta/E$ を緩和時間と呼びます。 (6.44)

6.7.2 Voigt 模型

これは、図 6.2 に示すように線形ばねとダッシュポットが並列に並んでいる模型です。

Voigt 模型の応力とひずみの関係式は、次のようになります。

線形ばねの応力: σ_s

ダッシュポットの応力: σ_d

2つの要素が並列に接続されているので、

模型全体の応力: $\sigma = \sigma_s + \sigma_d$ (6.45)

このとき、式(6.39)、(6.40) はそのまま使えます。ここでひずみについては2つの要素が並列なので、 $\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_d$ とおけます。以上のことから

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (6.46)$$

Maxwell 模型と Voigt 模型を一緒にして、より一般的な挙動を表せるようにした 3 要素模型 (Maxwell 模型と線形ばねを並列に配置したもの) を **標準線形模型** といいます。このときの応力とひずみの関係は式(6.47)の形式になります。

$$\sigma + \lambda_e \frac{d\sigma}{dt} = E_R \left(\varepsilon + \lambda_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (6.47)$$

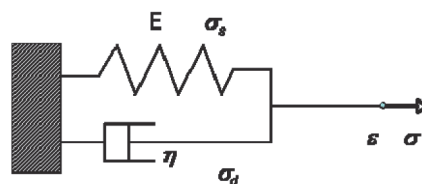


図 6.2 Voigt model (2 要素模型)

ここで λ_e, λ_d は2つの時定数であり, E_R は緩和弾性係数です.

6.7.3 Maxwell 模型のクリープ関数

それぞれの模型において, 応力 $\sigma(t)$ を単位ステップ関数 $u(t)$ とし, ひずみ $\varepsilon(t)$ について解いた結果を **クリープ関数**(creep function) $c(t)$ と呼びます. クリープは, 一定荷重下で永久ひずみが増加する塑性現象です. Creep を強いて訳せば, 「永久ひずみ漸動」という意味です.

ここでは, Maxwell 模型のクリープ関数を求めてみます. 式(6.42)をラプラス変換^{4†}すると

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(s) + \lambda s \bar{\sigma}(s) &= \eta s \bar{\varepsilon}(s) \\ (1 + \lambda s) \bar{\sigma}(s) &= \eta s \bar{\varepsilon}(s)\end{aligned}\quad (6.48)$$

応力 $\sigma(t)=u(t)$ のラプラス変換は $1/s$ ですから, これを上記の式(6.48)に代入し, $\bar{\varepsilon}(s)$ について解き, 逆ラプラス変換を施すと, ひずみの応答関数を得ます.

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{(1 + \lambda s)}{\eta s^2} = \frac{1}{\eta} \frac{1}{s^2} + \frac{\lambda}{\eta} \frac{1}{s} = \frac{1}{\eta} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{E} \frac{1}{s} \quad (6.49)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} t + \frac{1}{E} u(t) = c(t) \quad (t > 0) \quad (6.50)$$

ひずみ漸動 (creep) 関数として $c(t) = (t/\eta + 1/E)u(t)$ が得られます.

6.7.4 Maxwell 模型の緩和関数

Maxwell 模型においてひずみ $\varepsilon(t)=u(t)$ を入力とする応力の応答関数 $\sigma(t)$ を **緩和関数**(relaxation function) $k(t)$ と呼びます.

緩和関数は式(6.48)を $\bar{\sigma}(s)$ について解き, ひずみのラプラス変換に $1/s$ を代入し, $\bar{\sigma}(s)$ の逆ラプラス変換を行うことにより, 得ることができます.

^{4†} 時間 t の関数 $f(t)$ が与えられているとき, その Laplace 変換 $\bar{f}(s)$ は s を引数として, $\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ のように定義されます.

$$\bar{\sigma}(s) = \frac{\eta s}{1 + \lambda s} \bar{\varepsilon}(s) = \frac{\eta s}{1 + \lambda s} \frac{1}{s} = \frac{\eta}{1 + \lambda s} = \frac{\eta}{\lambda} \left(\frac{1}{s + \lambda^{-1}} \right) = \frac{E}{s + \lambda^{-1}} \quad (6.51)$$

$$\sigma(t) = E e^{-t/\lambda} \quad (t > 0) \quad (6.52)$$

これより(応力)緩和関数は $k(t) = E e^{-t/\lambda}$ で表されます。

練習問題

- (1) Voigt 模型のクリープ関数 $c(t)$, 緩和関数 $k(t)$ が以下の式で与えられることを説明しなさい。ここで $\delta(t)$ は $u(t)$ を時間微分したものであり、単位のインパルス関数です。

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{E} (1 - e^{-t/\lambda}) \mu(t) \\ k(t) &= \eta \delta(t) + E u(t) \end{aligned} \quad (E.6.1)_{1,2}$$

- (2) 完全流体の構成方程式を書きなさい。
 (3) Newton 流体の構成方程式を書きなさい。
 (4) Newton 流体に関して、等方な場合の粘性係数テンソルを書きなさい。
 (5) 等方な場合の弾性体の弾性係数テンソルを書きなさい。
 (6) 等方な場合の弾性体の応力とひずみの関係(構成方程式)を書きなさい。
 (7) 等方性弾性体に対する $\varepsilon_{zz}=0$ (平面ひずみ) の場合の二次元(O-xy) のフックの法則を求めなさい。
 (8) Maxwell 模型, Voigt 模型, 標準線形模型の模型図を書きなさい。ひずみと応力とばね係数(ヤング率) E ならびにダッシュポットの粘性係数 η をそれぞれの要素に対して併記しなさい。
 (9) 式(6.17)において、次式の展開が成り立つことを説明しなさい。

$$(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) e_{kl} = e_{ij} + e_{ji} = 2e_{ij} \quad (E.6.2)$$

- (10) 式(6.31), (6.32) を参考にして、次の式を誘導しなさい。

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (E.6.3)_{1,2}$$

7. 保存則と場の方程式

7.1 各種保存法則の復習

前章まで、物体(連続体)の要素部材に注目して作用する力(応力)と変形(ひずみ)ならびに流れ(ひずみ速度)との関係を見てきました。物体の変形挙動を表した応力とひずみの関係(構成方程式)を適当な境界条件のもとで考えれば、物体の変形を表す変位の解を求めるための微分方程式を作ることができます。このための基礎知識は、既に 1.10 節において、質点系の力学、自由物体線図の考え方のところで紹介しています。多質点系の平衡方程式は、連続体において**仮想の微小要素**を質点とみなした場合の力学系にかなり近い形式になっています。つまり、連続体の変形運動に関する支配方程式は、運動量保存則、エネルギー保存則、質量保存則等に従います。

そこでまず、基本的な保存の法則を復習しておくことにします。

「**保存の法則**」は、何かが変わらないという命題です。科学で最も退屈な種類の説明のように見えるかもしれませんが、ところが、最も深遠で重要な種類の科学的法則です。

7.1.1 エネルギー保存則

(a) 現実世界の事象と変形過程の重要な性質

空間を進む物体の運動の性質を考えてみます。物体は、重力(万有引力)や電磁気力等の体積力が存在することによって**位置のエネルギー**を持ちます。外力によって加速度を受けると、速度の増減(変化)を生じますが、これによって質量を持つ**速度の(運動の)エネルギー**が変化します。また、固体としての物体が外力を受けて変形するとき、物体の内部にはひずみを生じますが、それが弾性変形であれば、外力を解放することで元に戻る能力を持っています。これは、**ひずみ(変形)のエネルギー**です。ひずみのエネルギーは、物体内部の応力の増減としてみることができますから、仮想断面における応力に関する作用・反作用の法則が根底に存在します。なお、流体の場合、ひずみの代わりに圧力が状態量となりますので、

ほぞんそく、ば
保存則, 場
かくしゆ ふくしゆ
各種, 復習

ぶざい
部材

じゆうぶつたいせんず
自由物体線図

かそう ひしやうようそ
仮想, 微小要素
しはいほうていしき
支配方程式

めいだい たいくつ
命題, 退屈
しんえん
深遠

じしやう かてい
事象, 過程
がいろよく たいせきりよく
外力, 体積力,
かそくど ぞうげん
加速度, 増減

かいほう のうりよく
解放, 能力

こんてい
根底

はんちゆう
範疇
けいたい
形態
でんたつ
伝達, ねつ
熱

しやうこう
昇降させる
しゅうしゆく
収縮

へんかん
変換

こすあ
擦れ合い, まきつ
摩擦
はつねつ
発熱, りゅうし
粒子

ぶつせいち
物性値

圧力のエネルギーを考えます。つまり内部の応力によって表現されるエネルギーという点で見れば、固体も流体も応力によってエネルギー状態を表現できます。

以上のように位置、速度、ひずみ(圧力)に関わるエネルギー形態が物体の変形と運動に関わっていますが、これらは、空間内で閉じた系に存在しますから、そこにある全体のエネルギーは変化しない(保存される)という法則が見出されます。なお、ひずみや圧力のエネルギーは、内部エネルギーの範疇に入りますが、内部エネルギーのもう1つの形態として物体の「温度」を考慮する必要があります。温度変化を引き起こすエネルギー伝達の過程を熱と呼んでいます。物体の変形・運動は、このような熱を含めた機械的なエネルギーの合計が保存された条件下で進みます。

(b) 熱の性質

熱は、物体の温度を昇降させるエネルギーとして知られています。物体は、温度変化によって膨張・収縮を起こしますから、圧力変化やひずみの変化を生じます。従って温度変化は、一般化された変位のような量であり、エネルギー状態の変化を表します。

気体の膨張・収縮に見られるように体積の変化を機械的な運動(変位)に変換することで、エネルギーの変換が可能です。逆に機械的な圧縮・膨張によって物体の温度を変化させることができます。物体同士の擦れ合いによる摩擦現象は、発熱を引き起こします。これは物体の境界同士のみならず、物体内部の粒子の相互運動によっても起きます。温度が分子運動の速度エネルギーの状態を表すことはよく知られています。

以上のことから、物体の内部エネルギーは、ひずみや応力(圧力)の関数として決まる部分と温度として決まる熱量(温度変化)の部分から構成されていることがわかります。なお、温度の変化は、一般に物体の構成方程式を支配する物性値(弾性係数、粘性係数、降伏応力の大きさ等)を変化させます。

7.1.2 物体の運動の性質

物体(連続体)を仮定の微小要素に分割すれば、多質点系の集合体です。質量を持つ微小要素の運動を考えるならば、NEWTON の運動の法則に従うことになります。この法則は、系全体の重心位置に対しても成立します。

1. 物体は新たに力を受けない限り、一様な直線運動を続けます (慣性の法則).
2. 物体の加速度は加わった力に比例します.
力= 質量×加速度 (慣性質量 : 力に対する粒子の応答尺度)
3. 全ての作用は、それと大きさが等しい逆向きの反作用を受けます(作用・反作用の法則).

慣性

尺度

並進

7.1.3 線形(並進) 運動量保存則

N 個の質点系で j 番目の要素が持つ線形運動量 \vec{p}_j は、式(7.1)で与えられます。ここで m_j : j 番目の要素の質量, \vec{v}_j : j 番目の要素が持つ速度(ベクトル)です。個々の粒子が持つ速度ベクトル \vec{v}_j は、それぞれ違う方向と大きさを持っています。

$$\vec{p}_j = m_j \vec{v}_j \quad (7.1)$$

系全体の運動量 \vec{p} は、式(7.2)で与えられます。

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j \quad (7.2)$$

線形運動量保存の法則は、「 N 個の粒子の集まり(閉じた系) からなる線形運動量の総和は、外から加わる力が無ければ時間的に変化しない」という意味です。

「外から力が無ければ」という意味は、系の中で粒子同士が衝突することによって反発しあうことは、一見すると運動量を変えているようですが、系全体でみたとき、衝突した粒子同士は、作用・反作用の法則 (第3法則) が成立しているので合計された運動量としては衝突の前後で変化していない、という平衡の状態を表しています。

N 個の粒子の集まりの具体的な例として、専用競技机の上にビリヤードの球が配置された状態を想定することができます。キュー (棒) を使って、机上で静止している 3 番目の球に対して、速度 \vec{v}_3 で打ちこんだとします。すると、 \vec{v}_3 の大きさでキューの向く方向に打ちこまれた時以降、系としては、 $d\vec{p} = m_3 \vec{v}_3$ の運動量だけ変化したことになります。その後、3番目の球は、別の複数の球に衝突してさら

と閉じた系

総和

衝突

反発しあう

成立する

専用競技机, 球, 以降, 複数

に衝突を受けたそれぞれが次の運動を引き起こします。このような複雑な動きを伴う状態であっても、系全体が持つ運動量は、最初に打ち込んだときの \vec{dp} のみが増加した量です。それ以降の全体の運動量は一定であり、保存されています。この法則は、系の規模が違っていても適用されます。運動の舞台を拡大して「宇宙」に当てはめてみるすることができます。宇宙を1つの閉じた系として考えます。宇宙には、一定量の線形運動量があるに違いありません。もし、あなたが自動車を走らせて、加速して運動量を増したり、道路の曲がり角でまがって、運動量の方向を変えると、あなたが乗っている自動車の運動量は変化します。しかし、宇宙のどこかで何かの運動量が反発作用によって調整されているのです。実際には車を走らせていると、あなたは地球を反対方向にわずかに押しているのです。

7.1.4 角運動量保存則

第3法則 (作用・反作用) から得られる別の保存則として、角運動量の保存則があります。第1章の例題1.11 でI番目の質点の力 \vec{F}_I の代わりに、力積 $\vec{F}_I \Delta t$ を考えてみます。内力 \vec{F}_{IJ} に対応する内部作用による運動量を $\vec{p}_{IJ} = \vec{F}_{IJ} \Delta t$ とおくことができます。ここで Δt は、質点Iと質点Jとが相互作用している時間を表しています。この式は、力積の大きさが運動量の変化に等しいという関係を使っています。例題1.11の論旨は、力 \vec{F}_{IJ} を線形運動量 $\vec{p}_{IJ} = \vec{F}_{IJ} \Delta t$ に置き換えても成り立ちますから、結局、系の角運動量は、外から回転力による介入が無い限り、変化しないこととなります。作用・反作用の力の下では、角運動量は保存されるのです。

$$\sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N \vec{r}_I \times \vec{F}_{IJ} \Delta t = 0 \quad (7.3)$$

発電された電気エネルギーの蓄積に巨大なフライホイールが使われます。これは電動機の回転力 (torque) によって回転物体の運動エネルギーに変換して一時的に蓄積する手段です。高速回転する重いフライホイールの角運動量は非常に大きいです。物体が別の物体に回転力を加える時、角運動量は回転する物体間で受け渡されます。受け取る側の物体のトルク応答性は、物体の質量だけでなく、質量の配分のされ方にも影響を受けます。いわゆる慣性能率 (moment of inertia) が回転物体のまわりにくさ (停止しにくさ) を決めています。

系に外部から回転力が作用しない限り、角運動量は保存されます。相互作用する粒子群の角運動量の総和は変化しません。例えば、ビリヤードの球の回転が摩擦で低下しても、系としての角運動量は変化しません。じつは、地球に受け渡されています。その結果、地球の回転速度が増減します。

7.2 連続体力学から見たエネルギー保存則

連続体のエネルギー状態については、質量を持つ微小要素(仮想粒子)の速度(運動)エネルギーや位置エネルギーだけでなく、内部に蓄えられたひずみ(または応力)と温度変化によるエネルギーを考慮する必要があります。これは、**熱力学第一法則**として知られている機械的なすべてのエネルギーの保存則です。

図7.1 に示すように体積 V 、境界表面 S を持つ物体が境界面の一部 S_s から外力として応力ベクトル \mathbf{T} の分布作用を受け、また、体積力 \mathbf{F} を領域 V 内で受け、さらに境界面の一部 S_h において熱流束 \mathbf{h} を受けているものとします。この物体が持つ機械的エネルギーを考えてみます。微小要素の体積を dV とするとき、質量密度 ρ に対して、その微小要素が持つ質量は ρdV です。連続体の場合、このような微小要素が持つエネルギー式を体積 V と表面積 S の領域について積分することで、系全体のエネルギーを計算します。次の3つのエネルギーを考えます：

- 運動エネルギー： K 、
- 位置エネルギー： G 、
- 内部エネルギー： E

ここで内部エネルギーとは、物体内部に蓄えられているひずみや温度のエネルギーです。

領域 V 内の運動(速度)エネルギー：

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho v_j v_j dV \quad (j: \text{擬標}) \quad (7.4)$$

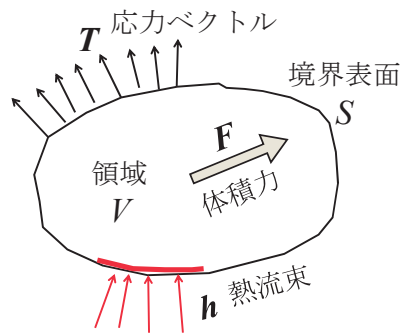


図 7.1 外力と伝熱を受ける物体

v_j : 体積要素 dV 内にある粒子の速度ベクトル成分.
 ρ : 物質の質量密度.

領域 V 内の位置エネルギー:

$$G = \int_V \rho \phi(x) dV \quad (7.5)$$

$\phi(x)$: 単位質量当たりの重力ポテンシャル
 $\phi(x)$ が一様な重力場の場合, gz

領域 V 内の内部エネルギー:

$$E = \int_V \rho \psi dV \quad (7.6)$$

ψ : 単位質量当たりの内部エネルギー (ひずみと温度の関数)

物体 V が持つ機械的なエネルギーは, 式(7.4),(7.5),(7.6) の総和 $K+G+E$ で与えられます. 系の外から仕事や熱の出入りがあると, このエネルギー $K+G+E$ の変化を生じます. これを単位時間あたりの変化率で表すと, 式(7.7)のようになります. ここで, 右辺の \dot{Q}, \dot{W} の上につくドット(.) は, 単位時間当たりの変化率を表します. また, 左辺の演算子 $D(\)/Dt$ は, 4.2節で紹介した「物質微分」の意味で時間微分を行っています.

$$\frac{D}{Dt}(K + G + E) = \dot{Q} + \dot{W} \quad (7.7)$$

\dot{Q} : 吸収熱量の単位時間当たりの変化率

\dot{W} : 系になされた仕事の単位時間当たりの変化率

式(7.7)は, 積分形式の物理量として存在するエネルギーの保存則を記述したものです. 左辺の項目は, 質量密度 ρ を介した速度の2乗和 $v_j v_j$ や密度関数 ϕ, ψ の体積積分になっています. 右辺の項は, 面積積分(応力と熱流束の合計)と体積積分(重力以外の体積力の合計)の2種類から構成されます. エネルギー保存則から与えられる運動の支配方程式を導くためには, これらの面積積分と体積積分の混在した保存則の式を統一して体積積分だけの形式に等価変換する必要があります. なぜなら, すべての項目を体積積分の形式にできれば, 共通の微小要素体積 dV に

関して被積分関数を括り出せるからです。一般に、積分領域 V を微小要素 dV に選んだ場合にも式(7.7)は成立する必要があります。逆に、微小要素 dV について保存則が成立すれば、任意の領域 V について積分をとっても式(7.7)は成立します。

数学的にはこのような論理で式を展開することになります。ここで、体積積分と面積積分を等価変換すると書きましたが、この変換は、**Gaussの定理**によって処理されます。そこで次にこの積分変換の定理についてみていくことにします。

7.3 Gauss の定理

7.3.1 関数の定積分の公式

Gauss の定理の本質は、**定積分の公式**そのものです。定積分ができるということは、親関数と子関数(導関数)とがあつて、

$$\text{親関数の引き算} = \text{子関数の定積分} \quad (7.8)$$

という恒等的な関係が成立することです。この意味がわかれば Gauss の定理の意味もわかったと同じです。そこでまず、簡単な関数の定積分の復習をしておきます。

関数 $y = y(x_k)$ の導関数 $\partial y / \partial x_k$ に関する積分を考えてみてください。

$$y = y(\mathbf{x}) = y(x_k) \quad (k=1,2,3) \quad (7.9)$$

スカラー関数 y が変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ の空間領域で与えられるとき、そして導関数 $\partial y / \partial x_k$ が存在するとき、空間内におけるある曲線経路 L に沿った線積分に関して、全微分 $dy = (\partial y / \partial x_k) dx_k$ が存在して

$$y_2 - y_1 = \int_L \nabla y \cdot d\mathbf{x} = \int_L \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3} dx_3 \right) \quad (7.10)$$

が成立します。但し ∇ は**ハミルトンの微分演算子** (nabla) であり、

$$\nabla y = \mathbf{e}_k \left(\partial y / \partial x_k \right)$$

は y に関して導かれた**勾配ベクトル**です。

これが難しい人は、もっと簡単な次の式(7.11)でどうでしょうか。

$$y = f(x) \tag{7.11}$$

が与えられて、その導関数 $dy/dx = f'(x)$ が存在するとき、

$$y_2 - y_1 = \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx \tag{7.12}$$

が成立します。これは1変数1関数の場合の定積分の公式です。

ある物理量 y の勾配関数(導関数) ∇y が与えられて、これを x の定義域 $[x_1, x_2]$ について積分した値は、親関数である y が境界点 x_1, x_2 においてわかっているならば、その差 $y_2 - y_1$ として計算できるという「**親関数の差分と子関数の積分との等価性**」が、ここで重要な意味を持ちます。

式(7.10)は、 $y(x)$ をポテンシャルとして、保存力 $\mathbf{F} = -\nabla y$ が与えられる場合に、仕事を積分している力学問題(ポテンシャルの落差 $y_2 - y_1$ が仕事量に等しい)を表しています。

7.3.2 経路に沿った線積分による誘導

ここで取り上げる積分変換が、単純な定積分の公式そのもので留まるならば、あえて Gauss の定理という名称を持つことにはならなかったでしょう。等価変換の意味は定積分の公式そのものですが、その考え方を物理量の**体積積分と面積積分との間で適用**できるように定式化したところをよく理解しておく必要があります。この誘導は、物体内の経路に沿った線積分からなされます。

ある物理量 $A(x_k)$ ($k=1,2,3$) に対して偏導関数 $F = \partial A / \partial x_k$ があるとき、全微分 dA を考えることができます。

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x_k} dx_k = \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial A}{\partial x_3} dx_3 \tag{7.13}$$

ここで、 x_2, x_3 を固定して x_1 だけに関する増分 dA_1 を考えて、区間 $L: [a, b]$ について積分を行えば、式(7.14)を得ます。

$$\int_{A_a}^{A_b} dA_1 = A_{1b} - A_{1a} = \int_a^b \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 \tag{7.14}$$

この式を図 7.2 に示すような物理空間にある物体 V の領域で、経路 L に沿った断面積が $dx_2 dx_3$ であるような細長い部材要素について適用することを考えます。式(7.14)の両辺に $dx_2 dx_3$ を掛けてやれば、

$$(A_{1b} - A_{1a}) dx_2 dx_3 = \left(\int_a^b \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \quad (7.15)$$

さらにこの式を物体の $x_2 x_3$ 平面への投影断面全域 ∂V について積分することを考えます。

$$\iint_{\partial V} (A_{1b} - A_{1a}) dx_2 dx_3 = \iint_{\partial V} \left(\int_a^b \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \quad (7.16)$$

この式の右辺は、細長い要素 L に関する積分を断面全域 ∂V にわたって寄せ集めた定積分です。これは、式 $(\partial A / \partial x_1) dx_1 dx_2 dx_3$ を領域 V について積分したことと同じです。これに対して左辺は、細長い要素 L の両端位置 $(x_1 = a, b)$ における親関数 A の差分に面積要素 $dx_2 dx_3$ について領域 ∂V で積分した量です。ここで被積分項に $A_{1b} - A_{1a}$ のように添え字 1 を付けていますが、積分経路 L に沿って x_1 のみ変化させているために記したことです。内容としては x_1 だけを変化

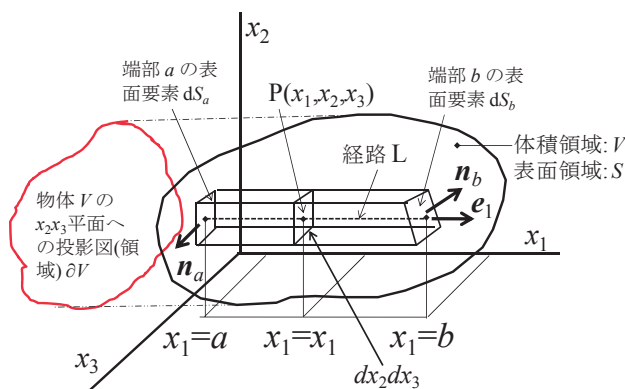


図 7.2 物体 V の経路 L に沿った両端部 a, b の様子

させたときの A の値です。 L に沿った積分であるときは、あえて添え字 1 を明記しなくても問題ありません。式(7.16) は式(7.17) のように表現しなおすことができます。

$$\iint_{\partial V} (A_b - A_a) dx_2 dx_3 = \iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (7.17)$$

図 7.2 で、経路 L の両端位置 a, b においては、細長い要素は境界面と交差しており、表面要素 dS_a, dS_b で表される面積ベクトルを考えることができます。 \vec{n}_a, \vec{n}_b は、面積要素の **外向き法線** (単位長さ) ベクトルです。 両端位置 a, b において、面積ベクトル \vec{dS} と座標基底 \vec{e}_1 との内積を作れば、次の関係を得ることができます。ここで添字 a, b を省略しました。 $n_1 = dx_2 dx_3 / dS$ は、面積要素の **方向余弦** です。

$$\vec{dS} \cdot \vec{e}_1 = dx_2 dx_3 = \vec{n} \cdot \vec{e}_1 dS = n_1 dS \quad (7.18)$$

なお、両端位置 a, b において面の法線ベクトル \vec{n} は、 x_1 軸に関してほぼ反対向きになっています^{1†}。 $x_1=b$ のとき $n_1 > 0$ ですが、 $x_1=a$ のとき $n_1 < 0$ となっています。添字 a, b を省略せずに式(7.17) 左辺の被積分項を書き出すと、

$$(A_b - A_a) dx_2 dx_3 = A_b n_{1b} dS_b + A_a n_{1a} dS_a \quad (7.19)$$

のようになります。そこで、両端位置 a, b に分けて射影領域 ∂V で積分した値：式(7.17) の左辺は、領域 V の立体表面 S において面積要素ベクトル \vec{dS} を考えて、 $A d\vec{S} \cdot \vec{e}_1 = A n_1 dS$ を **閉じた全領域 S** について積分した値と等しいことがわかります。従って式(7.17) は式(7.20) のように書きなおすことができます。

$$\iint_S A n_1 dS = \iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (7.20)$$

これでようやく物体 V の内部領域で与えられる物理量 A の面積積分と体積積分に関する変換定理を得ることができました。

^{1†} 厳密に言えば、基底 \vec{e}_1 と法線 \vec{n} との内積 n_1 を作ったとき、 n_1 の値の符号が反転する必要があります。領域 V が閉じた曲面 S で作られるために必要な条件です。

式(7.20)は、 x_1 軸に平行な細長い要素を考えて誘導しましたが、最終的に体積領域 V と表面 S で囲まれた物体の全域での積分形式になっています。ここで誘導は、座標軸 $k=1$ を $k=2,3$ とするときも同様に行うことができます。従って式(7.20)は、一般性を損なうことなく、 $k=1,2,3$ に対して式(7.21)のように書くことができます。ここで $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ です。

$$\iint_S A n_k dS = \iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_k} dV \quad (k=1,2,3) \quad (7.20)$$

また、積分記号を次のように表現することもあります。意味は同じです。

$$\int_S A n_k dS = \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial x_k} \right) dV \quad (k=1,2,3) \quad (7.21)$$

式(7.20), (7.21)を Gauss の定理^{2†}と呼びます。Gauss の定理は、一般に物理量 A に対して物理量 F が $F = \partial A / \partial x_k$ の関係にあるとき、連続体が持つ積分形式の物理量

$$J = \int_V F dV \quad (7.22)$$

に対してこの定積分公式を適用したものであると言えます。ここで積分量 J の具体例として、式(7.4)~(7.6)を挙げることができます。

7.3.3 Gauss 定理の応用

(a) 物理量 A が速度(u_j) の場合

物理量 A として、粒子の速度 $\mathbf{u} = (u_j)$ を想定すると、発散量が鮮明になります。式(7.21)において $A = u_j$ ($j=1,2,3$) を代入します。

$$\int_S u_j n_k dS = \int_V \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dV \quad (7.23)$$

さらに $j=k$ とおいて縮約を取って、式(7.24)を得ます。この式は、Gauss の発散

^{2†} 連続体の積分変換定理として Green の定理, Stokes 定理, Gauss の発散定理がよく知られていますが、一般的に式(7.21)が出発点になります。

定理と呼ばれています。

$$\int_S \mathbf{u}_k n_k dS = \int_V \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) dV$$

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dV \quad (7.24)$$

式(7.24)の左辺は、領域 V を包む閉じた面 S の上において速度と面積要素との内積を積分した量であり、流体の場合、面 S から領域 V の外へ向けて単位時間に流出する流体の体積に等しくなります。従って湧き出しがあれば、積分は正值になります。湧き出しがない場合は、積分値が0になります。このことから、右辺の被積分式 $\partial u_k / \partial x_k (= \text{div } \mathbf{u})$ を「**発散**」と呼びます。領域 V からの湧き出しがあれば、 $\text{div } \mathbf{u} > 0$ になります。「**発散**」の名称は、流体の流れにおける「**湧き出し**」や固体の応力場の釣り合いに関連しています。

(b) 物理量 A がポテンシャル関数 ψ の場合

$A = \psi$ とおき、さらに基底 \mathbf{e}_k を付記して総和をとれば、式(7.25)が得られます。

$$\int_S \psi \mathbf{e}_k n_k dS = \int_V \left(\mathbf{e}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) dV \quad (7.25)$$

右辺の被積分項は**勾配**(gradient)であり、一般に $\text{grad } \psi (= \nabla \psi)$ のように記されます。この式は、本来(7.10)と同じものですが、3次元ベクトルの成分として成り立っていることに注意してください。

(c) 物理量 A が速度(u_i)の場合(再び)

式(7.23)において、自由標 j, k を入れ換えて、 $\mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial u_k / \partial x_j$ を作ります。この式は、式(2.20)を使えば $\mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial u_k / \partial x_j = \nabla \times \mathbf{u} (= \text{rot } \mathbf{u})$ と記することができます。 $\text{rot } \mathbf{u}$ は、ベクトル \mathbf{u} に関する「**回転**」と呼ばれている量です。

$$\varepsilon_{ijk} \int_S \mathbf{e}_i u_k n_j dS = \int_V \left(\mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dV$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \mathbf{u} dS = - \int_S \mathbf{u} \times \mathbf{n} dS = \int_V (\nabla \times \mathbf{u}) dV \quad (7.26)$$

式(7.26)は、物体の境界面に対して接線方向を向く速度が作る回転量が物体内部における回転流れの強さ $\text{rot } \mathbf{u}$ を決めることを示しています。例えば、回転式電動洗濯機の筒容器の中に水や洗濯物(物体)が入っている状態を考えてみましょう。電動機によって筒容器が強制的に角速度 ω で回転を開始すると、最初静止していた水と洗濯物は、筒容器の回転に伴って回転運動を行うようになります。このときの水の速度 \mathbf{u} の分布は、平衡状態において $2\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ の関係で表されます。この関係は物体が何でもあっても成立しますが、要するに「剛体の回転状態」を意味しています。なお、回転を用いた積分公式は他にも知られています。

(d) 物理量 A が 2 階テンソル C_{ij} である場合

$$\int_S C_{ij} n_k dS = \int_V \left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} \right) dV \quad (7.27)$$

この式で $i=k$ とおいて縮約をとると、体積力が無いときの固体内部の応力に関する釣り合い方程式を求めることができます。

7.4 物質導関数

物質導関数について説明します。空間に固定した基準座標系 $O-X_1X_2X_3$ を選びます。ある一つの物質粒子の時刻 $t=t_0$ における位置 P を $X_1=a_1, X_2=a_2, X_3=a_3$ とし、座標 (a_1, a_2, a_3) でその粒子の位置 P を表します。時間の経過と共に粒子は運動するので、粒子の位置は同じ座標系に関して式(7.28) で表される運動履歴 P' を持ちます。

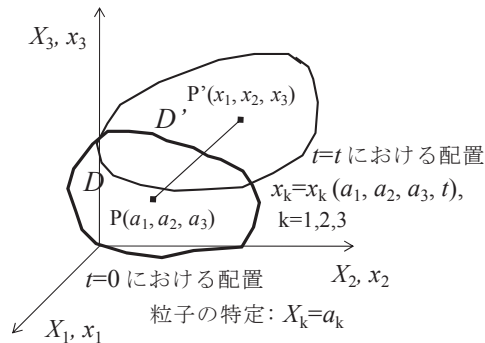


図 7.3 運動する物体を表す座標系

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7.28)$$

数学的に言うならば, 式(7.28)は物体領域 $D(a_1, a_2, a_3)$ から物体領域 $D'(x_1, x_2, x_3)$ への写像を定義しています. 写像は 1 対 1 でなければいけません. D における隣同士にある粒子の群が D' においても隣同士の群に写像されるならば, 関数 $x_i(a_1, a_2, a_3, t)$ は 1 価で連続かつ微分可能です. 言い換えると, ある微小要素の変形は, 時刻が $dt=t-t_0$ だけ経過した後, 潰れたりあるいはばらばらにならず 1 つのまとまった微小要素を形成していると仮定していることとなります (形状は変わってもよいが不連続な分布にならない). このとき, 領域 D における関数行列式 (Jacobian determinant) (7.29) は, 0 になりません.

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} \quad (7.29)$$

式(7.28)を運動する物体の物質表示 (material description) または Lagrange 的表示と呼びます. 物質表示において, 選定された 1 つの粒子 (a_1, a_2, a_3) の速度 v_i と加速度 α_i は, 式(7.30), (7.31) のように記されます.

$$v_i(a_1, a_2, a_3, t) = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{(a_1, a_2, a_3)} \quad (7.30)$$

$$\alpha_i(a_1, a_2, a_3, t) = \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{(a_1, a_2, a_3)} = \left. \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right|_{(a_1, a_2, a_3)} \quad (7.31)$$

流体力学では, 位置 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ と時刻 t を独立に扱う空間表示 (spatial description) [Euler 的表示] が伝統的に使われてきました. 空間表示では, 連続体のある瞬間の運動は, 時刻 t で位置 \mathbf{x} にある粒子の速度を表す速度ベクトル場 $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ によって記述されます. 空間表示の座標系で計測された速度を使って, 物質粒子の加速度を表せば, 式(7.32) のようになります.

$$\alpha_i(\mathbf{x}, t) = \frac{dv_i}{dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t) \quad (7.32)$$

この式は、時刻 t に座標 $\mathbf{x}=(x_i)$ にある粒子は、時刻 $t+dt$ で $x_i+v_i dt$ の点に移動することから説明できます。ここで座標 $\mathbf{x}=(x_k)$ は、流体の速度 v_k に乗って $d\mathbf{x}_k=v_k dt$ だけ移動します。Taylor の定理により、時刻 $t+dt$ における速度の変化(全微分)は、次の式で表されます。

$$\begin{aligned} dv_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{dv_i(\mathbf{x}, t)}{dt} dt = v_i(x_k + v_k dt, t + dt) - v_i(x_k, t) \\ &= v_i(x_k, t) + \frac{\partial v_i(x_k, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial v_i(x_k, t)}{\partial x_k} (v_k dt) - v_i(x_k, t) \end{aligned} \quad (7.33)$$

式(7.33)から式(7.32)が得られます。式(7.32)の第一項は速度場の時間依存性から生じ(その場所に関する)、第二項は速度場中の物質粒子の運動(質点の移動)によるものです。

式(7.32)を導く際に用いた考え方は、運動する質点に付随する任意の物理量 $f(x_1, x_2, x_3, t)$ にも適用できます。空間表示で計測される物理量を流体の速度に乗って評価するならば、同一の粒子の時間的な変化を追跡することになります。そこで、このような制約下での時刻 t に関する $f(\mathbf{x}, t)$ の導関数を**物質導関数**(Material derivative)と呼び、演算記号 Df/Dt で表すことにします。式(7.32)と式(7.33)において用いた演算記号 $d(\)/dt$ は、 $D(\)/Dt$ の意味になります。

空間表示における $f(\mathbf{x}, t)$ の物質導関数は、式(7.34)のように表されます。

$$\begin{aligned} \frac{Df(x_1, x_2, x_3, t)}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x=\text{fixed}} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x=\text{fixed}} + \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} v_3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x=\text{fixed}} + \frac{\partial f}{\partial x_k} v_k \end{aligned} \quad (7.34)$$

以上の簡易な紹介で、物質導関数の意味について納得できない人がいるかもしれません。以下では物質表示と空間表示との接続を考えて、物質導関数を説明します。

式(7.28)によって与えられる位置 x_k に関して、時刻 t における時間微分: $v_k = dx_k/dt = da_k/dt$ は、時刻 t_0 において選んだ特定粒子 a_k の速度です。

Euler 的表示では、ある物理量 f の値は、測定位置 x_k と時刻 t の関数です。すなわち、 f は x_k と t の多変数関数です。 f の全微分 Δf を考えると、全微分の公式に従って記述できます。

$$\Delta f = (\partial f / \partial t) \Delta t + (\partial f / \partial x_k) \Delta x_k \quad (7.35)$$

この式の Δx_k は、測定位置を x_k から $x_k + \Delta x_k$ に移動させたということです。これが経過時間 Δt の間に起きているならば、 $\Delta x_k / \Delta t$ は、測定位置の移動速度という意味になります。この式から $\Delta f / \Delta t$ という微分 ($\Delta t \rightarrow +0$) を考えることができます。この全微分導関数 $\Delta f / \Delta t$ において、測定位置の移動速度 $\Delta x_k / \Delta t$ を位置 x_k で測定した流体粒子の速度 v_k に等しくなるように設定したら、どうなるでしょうか。

$$\Delta f = (\partial f / \partial t) \Delta t + (\partial f / \partial x_k) v_k \Delta t \quad (7.36)$$

時刻 t , 位置 x_k にあった粒子は、 $t \rightarrow t + \Delta t$ の経過において、物体の流れに乗って $v_k \Delta t$ だけ進んだ位置に移動しています。ところが測定位置の移動速度を $\Delta x_k / \Delta t = v_k$ とするよう設定したので、時間が Δt だけ経過後に観測すると、そのときの位置 $x_k + v_k \Delta t$ には、時間 Δt だけ前の時刻 t において存在した流体粒子が来ています。そうしてみると、Euler 的表現において観測する座標系の移動速度を流体の流れ速度に等しくとってやりさえすれば、結果として同一粒子を観測していることと同等です。つまり $\Delta x_k / \Delta t = v_k$ とすれば Lagrange 的表示と同じ結果をもたらします。

そこで Euler 的表現において、 $\Delta x_k / \Delta t = v_k$ となるように特殊な座標系を使ってやるとき、全微分導関数 $\Delta f / \Delta t$ は、同一粒子を測定対象とした時間の微分係数を意味することになります。この微分は、同一粒子を測定対象とした演算であるので「物質微分」と呼ばれています。物質微分は Lagrange 微分 (同一粒子に注目した時間微分) とも呼ばれています。これを演算記号で $D() / Dt$ のように記します。

$$Df / Dt = (\partial f / \partial t) + v_k (\partial f / \partial x_k) \quad (7.37)_1$$

$$Df / Dt = (\partial f / \partial t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (7.37)_2$$

なぜ「物質微分」を必要とするのか? という点、「質点系の力学的法則を適用できるようにするため」です。観測する粒子が同一であるからこそ、質点系の

力学を出発点として運動量の保存則や質量保存則を導くことができます。

微小要素 dV の運動力学を直接理解することは難しくても、ある物理量 A に関して領域 V 全体について体積積分した量：

$$J(t) = \int_V A dV$$

は、剛体や多質点系と同様に、系全体で保存される値であることが多いのです。そのような系全体の (積分形式で得られた) 力学的保存則から出発して、面積積分で表現される境界面の作用量を体積積分形式に変換することで、微小体積要素に関する釣り合い式を誘導することができます。

このような微分形式の方程式が得られると、有限要素法(FEM) や差分法(FDM) 等の数値計算法を使ってプログラムを作ることが可能となります。

7.5 体積積分の物質導関数

次式のような物理量 A に関する体積積分 $J(t)$ が時間的にどの程度変化するかを考えてみます。すなわち、 $J(t)$ の物質導関数を考えます。

$$J(t) = \iiint_V A(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_V A(\mathbf{x}, t) dV \quad (7.38)$$

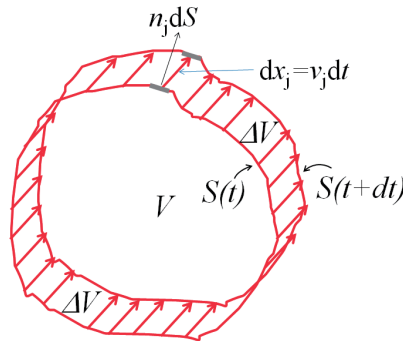
但し $A(x_1, x_2, x_3, t) : x_k, t$ について連続微分可能な関数 ($k=1,2,3$)

時刻 t と微小時間 dt 経過した時刻 $t+dt$ における $J(t)$ の変化率を計算します。時刻 t のとき、物体の領域 V であり、時刻 $t+dt$ のとき領域 $V+\Delta V$ になるとします。物体の体積 [積分範囲] が経過時間 dt とともに変化するので、物質導関数は式(7.39)のように表現できます。

$$\frac{DJ}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow +0} \frac{d}{dt} \left[\int_{V+\Delta V} A(\mathbf{x}, t+dt) dV - \int_V A(\mathbf{x}, t) dV \right] \quad (7.39)$$

このときの領域 V の境界の様子を図7.4 に示します。この式を展開するため、第一項の積分を V と ΔV の積分に分けると、式(7.40) を得ます。式(7.40) 右辺の第一項目の微分を積分式の中に入れて、積分領域 V を固定したまま A の偏微分を行った項になります。式(7.40)右辺の第二項目は、図7.4 に示すように細長い領域 ΔV の積分です。

$$\begin{aligned} \frac{DJ}{Dt} &= \lim_{dt \rightarrow +0} \frac{d}{dt} \left[\int_V A(\mathbf{x}, t+dt) dV + \int_{\Delta V} A(\mathbf{x}, t+dt) dV - \int_V A(\mathbf{x}, t) dV \right] \\ &= \lim_{dt \rightarrow +0} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int_V A(\mathbf{x}, t+dt) dV - \int_V A(\mathbf{x}, t) dV \right] + \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} A(\mathbf{x}, t+dt) dV \right\} \quad (7.40) \end{aligned}$$



$$\Delta V = \iint_S n_j dS dx_j = \iint_S v_j n_j dS dt$$

図 7.4 速度 v_j で連続的に移動する物体領域 V の境界

式(7.40)の第二項において

$$dV = v_j n_j dS dt \quad (i=1,2,3) \quad (7.41)$$

とおくことができます。 $dx_i = v_i dt$ は面素 dS の移動距離です。これに法線ベクトル n_j をかけることにより、面素 dS の速度 v_j 方向への射影面積 \times 移動距離となり、これが体積増分となります。式(7.40)において以上の置き換えを行うと式(7.42)を導くことができます。

$$\begin{aligned} \frac{DJ}{Dt} &= \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \lim_{dt \rightarrow +0} \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} A(\mathbf{x}, t) v_j n_j dS dt \\ &= \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_S A(\mathbf{x}, t) v_j n_j dS \end{aligned} \quad (7.42)_{1,2}$$

式(7.42)は、Leibniz の積分公式^{3†}と呼ばれています。

式(7.42)の右辺第二項は面積積分です。この式で Av_j の項に Gauss の定理を適用して体積積分の形式に変換すると、式(7.43)を誘導できます。

$$\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (Av_i) dV \quad (7.43)$$

この式の右辺第二項を展開し、積分をまとめると式(7.44), (7.45) のようになります。

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_j} v_j + A \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV \quad (7.44)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \left(\frac{DA}{Dt} + A \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV = \int_V \left(\frac{DA}{Dt} + A \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV \quad (7.45)$$

式(7.45)が、物理量 A に関する体積積分 J の物質導関数です。時間に関する導関数を計算するために、流体の速度場 \mathbf{v} を使う必要があります。

7.6 補足, Leibniz の積分公式

Gauss の定理は、定積分の公式を基本原理としていることを 7.3.1 節で紹介しました。Leibniz の積分公式についても、同様の基本的で分かりやすい事例があります。式(7.42)は体積積分(3次元空間)を想定していましたが、一般問題として積分規則を考えてみるためには、1次元空間の積分式で取り扱っても一般性を失いません。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dx + \left[\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx \right]_{a(t)}^{b(t)} \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dx + F(b(t), t) \frac{\partial b}{\partial t} - F(a(t), t) \frac{\partial a}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.46)$$

^{3†} 例えば http://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule で詳細を閲覧できます。

式(7.46)は、 x と t の関数である被積分関数 $F(x,t)$ を $x=[a,b]$ について積分した形式を時刻 t で微分する場合の Leibniz の積分公式です。ここで積分区間 a, b は時刻 t の関数になっています。式(7.46)と式(7.42)との関係は、

$$F \Leftrightarrow \int_S An_j dS \quad (7.47)$$

と置き換えれば、物理的に同等の積分であることがわかります。位置 a, b における F の値の差分をとることは、流れの速度 v_j に沿った ΔV 領域で、式(7.47)の面積分を計算していることに他なりません。流れに沿った ΔV 領域は、図 7.4 のように先端領域と後端領域の薄い三日月状の領域ですから、 $dt \rightarrow +0$ の極限では面積領域の積分計算になります。

以上から、(7.46)と(7.42)は、考えている空間の次元が違っても同等の積分公式であるとわかります。

式(7.46)を更に抽象化すると、式(7.48)のように表現できます。ここで Σ は、積分演算子であり、積分区間 $x=[a(t),b(t)]$ を持っているので、 t の関数になっています。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Sigma * F) &= \frac{\partial}{\partial t} \Sigma * F + \Sigma * \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \Sigma * F + \Sigma * \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial x}{\partial t} * F + \Sigma * \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.48)$$

式(7.48)をみると、関数の積を微分したときの「Leibnizの規則」(部分微分をした和)になっています。以上のことから、式(7.42)は関数の積の微分式を展開するという単純な意味を持っていて、一般的に成り立つ性質から誘導されたものであるとわかります。式(7.42)は、決して特殊な制約から派生したものではなく、積の部分微分を展開しただけの普遍的な式です。

7.7 連続と運動の方程式

前節までのところで、空間表示における物質導関数を積分形式の物理量に適

用する数学的な知識をみてきました。本節ではこの手法を使って、空間表示の「質量保存則」と「線形運動量保存則」を紹介します。運動量保存則は、運動の方程式と同等であり、質量保存則は、連続の式と同等です。

7.7.1 質量保存則と連続の方程式

時刻 t の時に占める領域 V の質量 m は、質量密度 ρ を領域 V で積分したものです。これを式(7.49)で表します。

$$m = \int_V \rho dV \quad (7.49)$$

ここで質量密度 $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ は、時刻 t と位置 \mathbf{x} の関数で与えられます。

質量保存則：質量 m の物質導関数の値が 0 すなわち

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad (7.50)$$

この式に式(7.42)を適用すると

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_i n_i dS = 0 \quad (7.51)$$

さらに、式(7.43)より次式が得られます。

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (7.52)$$

この式が任意の V に対して恒等的に成立するためには、被積分項は 0 でなければなりません。これより次の関係を得ます。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (7.53)$$

積分形式(7.51)と微分形式(7.53)は、連続の方程式 (equations of continuity) と呼ばれています。

7.7.2 運動量保存則と運動方程式

Newtonの運動法則によれば、「慣性系の運動量の変化率は、外から作用する力の合計(合力)に等しい」または「運動量の変化は、外から作用する力積に等しい」が成立します。

すなわち、運動量 P_i と外力 F_i の関係は式(7.54)で与えられます。

$$\frac{DP_i}{Dt} = F_i \quad (i=1,2,3) \quad (7.54)$$

$$\text{ここで運動量は, } P_i = \int_V \rho v_i dV \quad (7.55)$$

$$\text{外力は, } F_i = \int_S T_i dS + \int_V X_i dV \quad (7.56)$$

で与えられます。式中の ρ は質量密度、 v_i は物質粒子の速度、 X_i は重力や電磁気力等の体積力です。物体表面に作用する応力ベクトルの成分 T_i は、面 dS の法線ベクトルを n_j 、応力テンソル成分を τ_{ji} とするとき、Cauchy の関係式^{4†}により物体内部の応力と次式の関係があります。

$$T_i = \tau_{ji} n_j \quad (j=1,2,3: \text{擬標}, i=1,2,3: \text{自由標}) \quad (7.57)$$

式(7.54)に式(7.55),(7.56)を代入すると

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV = \int_S T_i dS + \int_V X_i dV \quad (i=1,2,3) \quad (7.58)$$

左辺の ρv_i に関する体積積分の物質導関数に式(7.45)を適用します。さらに右辺第一項に式(7.57)を代入し、式(7.27)を適用すると

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) \right] dV = \int_V \left(\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i \right) dV \quad (7.59)$$

両辺の体積積分をまとめると、式(7.60)が得られます。式(7.60)の積分が恒等的に0になるためには、被積分項の式が0であることが必要です。これより、式

^{4†} 式(3.17)を3次元で表した関係を使います。

(7.61) が成立します ($j=1,2,3$: 擬標, $i=1,2,3$: 自由標).

$$\int_V \left(\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) - \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} - X_i \right) dV = 0 \quad (7.60)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i \quad (7.61)$$

式(7.61)を展開すると

$$v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i \quad (7.62)$$

式(7.62)の第一項目は, 連続の方程式 (7.53) を考慮すると 0 です. 従って, 次の **Euler の運動方程式** (Eulerian equation of motion) (7.63) が得られます.

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i \quad (7.63)$$

これを $O-x_1, x_2, x_3$ 座標系で展開すれば式(7.64) になります.

$$\begin{cases} \rho \frac{Dv_1}{Dt} = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + X_1 \\ \rho \frac{Dv_2}{Dt} = \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + X_2 \\ \rho \frac{Dv_3}{Dt} = \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} + X_3 \end{cases} \quad (7.64)$$

式(7.64)の左辺が 0 の場合, 静的な平衡方程式になります. なお, (7.59)~(7.64) において, 応力テンソルの対称性: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ によって添字 i, j を交換した表記を使ってもよいです.

固体弾性論では, 式(7.64)を与えられた弾性体の構成方程式と所定の境界条件を満足するように解きます.

7.8 エネルギー保存則の展開

7.2 節で紹介したエネルギー保存則 (7.7) は、空間に分布する濃度としての物理量を積分した形式を物質微分した式となっています。本節では、熱流束ベクトルを導入するとともに物質微分をさらに展開してみることにします。

* 物体への熱の流入

図 7.1 に示す境界面において熱流速ベクトル $\mathbf{h}=(h_i)$ を定義します。法線ベクトル n_i の方向を向く表面要素 dS を通して単位時間に伝わる熱量は、 $n_i h_i dS$ です。そこで系全体でみた熱の流入率は、式(7.65)で表されます。

$$\dot{Q} = -\int_S h_i n_i dS = -\int_V \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dV \quad (7.65)$$

図7.1において物体になされる外力による仕事率は、積分点における粒子の速度を v_i として、式(7.66)で表されます。

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_V F_i v_i dV + \int_S T_i v_i dS = \int_V F_i v_i dV + \int_S \tau_{ji} n_j v_i dS \\ &= \int_V F_i v_i dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i) dV \end{aligned} \quad (7.66)$$

ここで F_i : 単位体積あたりの体積力(重力を除く), T_i : 法線ベクトル n_i を持つ表面要素 dS に働く応力ベクトル, 上付きドット (.) は時間率を意味します。

式(7.4)~(7.6)ならびに式(7.66)を式(7.7)に代入すれば,

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_V \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i + \rho \phi + \rho \psi \right) dV \right) = -\int_V \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dV + \int_V F_i v_i dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i) dV$$

さらに各項目を積分の中に入れてまとめると式(7.67)を得ます。

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_V \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i + \rho \phi + \rho \psi \right) dV \right) = \int_V \left(-\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + F_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i) \right) dV \quad (7.67)$$

左辺について物質導関数を展開します。式が長くなるので、それぞれの項目

K, G, E について拾い出して示します.

$$\begin{aligned}\frac{DK}{Dt} &= \int_V \left(\frac{1}{2} \frac{D\rho}{Dt} v_i v_i + \frac{1}{2} \rho \frac{D(v_i v_i)}{Dt} + \frac{1}{2} (\rho v_i v_i) \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right) dV \\ &= \int_V \left(\left(\left(\frac{D\rho}{Dt} \right) + \rho \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right) \frac{1}{2} v_i v_i + \frac{1}{2} \rho \frac{D(v_i v_i)}{Dt} \right) dV \\ \frac{DG}{Dt} &= \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} \phi + \rho \frac{D\phi}{Dt} + \rho \phi \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right) dV \\ &= \int_V \left(\left(\left(\frac{D\rho}{Dt} \right) + \rho \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right) \phi + \rho \frac{D\phi}{Dt} \right) dV \\ \frac{DE}{Dt} &= \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} \psi + \rho \frac{D\psi}{Dt} + \rho \psi \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right) dV \\ &= \int_V \left(\left(\left(\frac{D\rho}{Dt} \right) + \rho \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right) \psi + \rho \frac{D\psi}{Dt} \right) dV\end{aligned}$$

式(7.53)から、これらの式の中で0とおける箇所がありますから、式(7.67)は次のように変形できます.

$$\int_V \left(\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (v_i v_i) + \rho \frac{D\phi}{Dt} + \rho \frac{D\psi}{Dt} \right) dV = \int_V \left(-\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + F_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i) \right) dV \quad (7.68)$$

積分の中を取り出し、左辺と右辺を等しいとおきます. その結果,

$$\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (v_i v_i) + \rho \frac{D\phi}{Dt} + \rho \frac{D\psi}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + F_i v_i + v_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (7.69)$$

運動方程式(7.63)を用いてさらに変形すれば,

$$\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (v_i v_i) + \rho \frac{D\phi}{Dt} + \rho \frac{D\psi}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + v_i \left(\rho \frac{Dv_i}{Dt} - X_i + F_i \right) + \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (7.70)$$

ここで、 X_i : 単位体積当たりの物体力であり、重力とそれ以外の体積力の合力です. そこで式(7.71)を考慮して式(7.72)が得られます.

$$X_i = F_i - \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (7.71)$$

式を整理すると

$$\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (v_i v_i) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{D\psi}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \rho \frac{Dv_i}{Dt} v_i + \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (7.72)$$

ここで $\frac{1}{2} \rho \frac{Dv_i^2}{Dt} = \rho \frac{Dv_i}{Dt} v_i$, $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ですから,

$$\rho \frac{D\psi}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (7.73)$$

応力テンソル τ_{ij} は対称性があるので, i, j に関する総和をとる場合, 次のひずみ速度テンソル V_{ij} を使って, 式(7.73)を導くことができます.

$$V_{ij} = V_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.74)$$

$$\rho \frac{D\psi}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \tau_{ji} V_{ji} \quad (7.75)$$

式(7.75)は, 物体系の内部エネルギーの変化は, 熱量の出入りと応力がなす仕事量に等しいことを示しています.

式(7.7)から長らく展開して変形しましたが, エネルギー保存則を整理してみると, 運動(速度)エネルギーは, 体積力による仕事との組み合わせで独立して釣り合っているので, 物体の内部エネルギーの保存則と切り離してもよいことがわかります.

練習問題

- (1) 保存則が適用される例をあげて説明しなさい。
 (2) ガウスの定理をベクトルに適用したとき得られる式(発散定理)を説明しなさい。
 (3) 体積積分式 $J = \int_V A(x, t) dV$ の物質導関数 $\frac{DJ}{Dt}$ について説明しなさい。

3.1 Leibniz の積分公式を使って、被積分項 A を時間 t で偏微分したものと積分範囲 V を t で微分したものに展開しなさい。

3.2 Gauss の発散定理から面積積分を体積積分に変換することで、体積積分の形式で DJ/Dt の内容を説明しなさい。

- (4) 連続体の質量保存則について、3.1, 3.2 に対応する式を書きなさい。
 (5) 関数 $F = (2x_1)\mathbf{e}_1 + (3x_1x_2 + x_3x_2^2)\mathbf{e}_3$ に対して、領域 V を囲む閉面 S について次の面積分 J を考えます。

領域 V : 点 $P(0,0,0)$ と点 $Q(1,1,1)$ を対角点とする一辺の長さが 1 の立方体
 境界面 S : 立方体領域 V の表面を囲む 6 つの平面で構成される

$$\text{積分式 } J = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (F_1 dx_2 dx_3 + F_2 dx_3 dx_1 + F_3 dx_1 dx_2) \quad (\text{E.7.1})$$

このとき、積分式 J を直接求めなさい。

- (6) 前問 (5) において、Gauss の発散定理を使って積分式 J を求めなさい。
 (7) 任意の積分領域 V とその境界 S に対して、次の式を求めなさい。

$$J = \int_S \mathbf{x} \cdot d\mathbf{S} = \int_S x_k n_k dS \quad (\text{E.7.2})$$

ここで $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ は位置ベクトルであり、 n_k は面要素 dS の法線ベクトルの成分を表します。

- (8) 質量保存則を表す式(7.52) と次の式が同等であることを説明しなさい。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{E.7.3})$$

- (9) 式(7.63) において左辺が 0 であるとき、静的な釣り合い状態になります。このときの運動方程式は、「平衡方程式」と呼ばれています。この式は、本書で

紹介したような Gauss の定理と Cauchy の公式を使わなくても, 微小な平行六面体(直方体)に作用する応力の直接的な釣り合いだけから誘導できます. これについて説明をしてください. 問題を簡単にするため, 平面応力状態(2次元)を考えるものとします.

8. 固体の弾性理論と応力関数

8.1 変位場解法の序

本章では、等方性弾性体に外力や強制変位が与えられる場合に、どのようにして変位場を求めるかを説明します。一般に「応力の解析を行う」ということは、**物体中の変位場を求める**ことです。応力の状態を調べて変位を明らかにするという事です。ここでは、理論的な取り扱いを容易にするため、変位 u_j と速度 v_j ($j=1,2,3$) が微小であるという制約の下で考えることにします。

まず、解きたい**変位に関する微分方程式**を導きます。このためには、**変位とひずみの関係式**、**Eulerの運動方程式**、**Hookeの法則**が必要です。これまで説明してきた中からそれらを列挙します。さらに、ひずみが微小であるという条件を付けることにより、問題の式を簡単化します。

Almansiのひずみ(Eulerのひずみ)は、次式で与えられます。これは、式(4.17)₂と同じです。

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad (8.1)$$

この式から変位勾配の2次の微小項を省略すると

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (8.2)$$

となります。速度 v_i は変位 u_i の物質導関数ですから、

$$v_i = \frac{Du_i(t, x_j)}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (8.3)$$

この式で v_j が小さく変位勾配 $\partial u_i / \partial x_j$ も大きくないとき、右辺第2項は無視でき

おうりよくかんすう
応力関数
へんいば
変位場
きょうせいへんい
強制変位

ようい
容易
せいやく
制約

みちび
導く
びしょう
微小

こうばい しゅうりやく
勾配, 省略
びしょう
微小項

ぶつしつどうかんすう
物質導関数

るので、簡単化すると式(8.4)となります。

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (8.4)$$

加速度 α_i は速度 v_i の物質導関数です。これより、

$$\alpha_i = \frac{Dv_i(t, x_j)}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (8.5)$$

この式で v_j が小さく速度勾配 $\partial v_i / \partial x_j$ も大きくないとき、右辺第2項は無視できるので、簡単化すると式(8.6)となります。

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (8.6)$$

Euler の運動方程式：

$$\rho \alpha_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad (8.7)$$

に Hooke の法則の式：

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2G e_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8.8)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \rho \alpha_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + X_i \\ &= \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j} \delta_{ij} + G \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + X_i \\ &= (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + X_i \end{aligned} \quad (8.9)$$

体積ひずみ $e = \partial u_k / \partial x_k$ を用いて

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x_i} + G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + X_i \quad (8.10)$$

が得られます。この式は **Navier の方程式** と呼ばれています。式(8.10)を **ハミルトンの演算子(nabula)** ∇ を用いて表すと式(8.11) のようになります。

$$G \left(\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x_i} \right) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i=1,2,3) \quad (8.11)$$

但し、式(E.6.3) からポアソン比 ν を用いて係数 $(\lambda+G)$ を書き変えました。

式(8.11)は変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ に対する連立2階の微分方程式です。変位に関するこの方程式を与えられた境界条件の下で解くことで、応力を解析することになります。変位 u_i が場所 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ と時間 t の関数である場合、初期条件と境界条件が必要です。境界条件には通常次の2つがあります。

- * **第一種境界条件**: 境界上で変位が与えられる場合。(例) 境界線上で変位が固定(変位=0) される時、または強制的に変位を指定する時があります。
- * **第二種境界条件**: 境界上で表面力すなわち外力が与えられる場合。(例) 材料部材に力を加えて引張る、圧縮する、あるいは捻る場合が該当します。

これら2つの境界条件が同時に与えられる場合、**混合境界値問題** と呼びます。多くの興味ある工学問題は、混合境界型問題であることが一般的です。

式(8.11)を直接解くことは非常に難しい場合が多いです。そこで問題をさらに簡単化して次のような場合を考えます。

1. 均質性と等方性(弾性係数が定数になり、独立な定数が減ります)。
2. 慣性力がない、体積力がない。
3. **平面応力**(第3軸方向の応力成分=0)、または**平面ひずみ**(第3軸方向のひずみ成分=0)。2次元または1次元的な変形になれば、独立変数が少なく解きやすくなります。
4. 時間依存性を無視できる(静的な平衡状態)。

8.2 平面応力状態

応力テンソル成分は $\tau_{33} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$ となります。この場合、物理的に非常に薄い板に面内荷重あるいは面内変位が与えられている状態に相当します。薄い板面に垂直な方向を x_3 軸、薄い板の面内に x_1 - x_2 座標をとっています。

平面応力に対する Hooke の法則を導くために、3次元の Hooke の式を変形します。

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{1}{E}(\tau_{11} - \nu\tau_{22} - \nu\tau_{33}), & e_{12} = \frac{1}{2G}\tau_{12} \\ e_{22} = \frac{1}{E}(\tau_{22} - \nu\tau_{33} - \nu\tau_{11}), & e_{23} = \frac{1}{2G}\tau_{23} \\ e_{33} = \frac{1}{E}(\tau_{33} - \nu\tau_{11} - \nu\tau_{22}), & e_{31} = \frac{1}{2G}\tau_{31} \end{cases} \quad (8.12)_{1-6}$$

これらの式に $\tau_{33} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$ を代入すれば、式(8.13)を得ます。

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{1}{E}(\tau_{11} - \nu\tau_{22}), & e_{12} = \frac{1}{2G}\tau_{12} \\ e_{22} = \frac{1}{E}(\tau_{22} - \nu\tau_{11}), & e_{23} = 0 \\ e_{33} = -\frac{\nu}{E}(\tau_{11} + \tau_{22}), & e_{31} = 0 \end{cases} \quad (8.13)_{1-6}$$

式(8.13)を変形して、応力に関して陽な表現を求めます。

$$\begin{cases} \tau_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{11} + \nu e_{22}) \\ \tau_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{22} + \nu e_{11}) \\ \tau_{12} = \frac{E}{1+\nu}e_{12} \end{cases} \quad (8.14)_{1-3}$$

この式を次の2次元の Euler の運動方程式(8.15) に代入します。さらにひずみと変位の関係式(8.16) を代入します。

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + X_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + X_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{cases} \quad (8.15)_{1,2}$$

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (8.16)$$

その結果、変位 u_1, u_2 に関する Navier の微分方程式(8.17) [変位で表現した弾性体の運動方程式] が導かれます。

$$\begin{cases} G \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + G \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + X_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ G \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + G \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + X_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{cases} \quad (8.17)$$

8.3 平面ひずみ状態

平面ひずみ状態は、第3軸方向に伸縮が無い場合なので

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0, \quad u_3 = 0 \quad (8.18)$$

であり、変位 u_1, u_2 が x_1, x_2 だけの関数です。これより

$$e_{33} = e_{31} = e_{32} = 0 \quad (8.19)$$

となります。第3軸方向の変形拘束が強く、第3軸方向にはひずまないという状態です。物理的な特徴としては、第3軸方向に一様で長い柱状の物体を想定すればよく、第3軸に垂直な任意断面(x_1, x_2 面)における応力状態を表します。

平面ひずみ状態に対する Hooke の法則および変位方程式を求めます。式(8.12)において、式(8.19)を代入すれば、 $e_{33} = 0$ の式から

$$\tau_{33} = \nu(\tau_{11} + \tau_{22}) \quad (8.20)$$

が得られます。この式を他の式に代入すると

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E}(\tau_{11} - \nu\tau_{22} - \nu^2(\tau_{11} + \tau_{22})) = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\tau_{11} - \nu\tau_{22}) \\ e_{22} &= \frac{1}{E}(\tau_{22} - \nu\tau_{11} - \nu^2(\tau_{11} + \tau_{22})) = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\tau_{22} - \nu\tau_{11}) \end{aligned} \quad (8.21)$$

式(8.21)から応力を求めると

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}((1-\nu)e_{11} + \nu e_{22}) \\ \tau_{22} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}(\nu e_{11} + (1-\nu)e_{22}) \end{aligned} \quad (8.22)$$

が得られます。2次元の Euler の運動方程式(8.15) に式(8.22) 代入し、さらに式(8.16)を使うことで次の弾性体の変位 u_1, u_2 に関する Navier の運動方程式(8.23) が得られます。

$$\begin{aligned} G\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + G\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + X_1 &= \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ G\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + G\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + X_2 &= \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8.23)$$

式(8.23) と平面応力の式(8.17) を見比べると、左辺第 2 項の式において係数が少し異なっていることがわかります。つまり、平面応力と平面ひずみの問題は、変形を支配する微分方程式は同じなのですが、剛性を決める特性係数が少し違うのです。このことから、どちらか一方について解を関数として得ることができれば、他方の解についても比較的容易に知ることができます。

8.4 Airy の応力関数

2次元弾性問題の解析をするには、前述の変位の微分方程式(8.17), (8.23) の一般解(未定係数を含む) を求めた後、境界条件を満足する解を求めることが必要です。しかしその解析は、連立微分方程式を解く問題であり、一般に難しいです。

古典的な研究ではこれに対して、変位を直接求める代わりに、応力の解を満足するポテンシャルのような関数を見つけて、これを使って構成方程式(8.14),(8.21) からひずみを関数解として求めます。さらにそれらを直接積分することで変位解を求めるという手法が使われます。

応力解を表現するポテンシャルのような関数のことを「**応力関数**」(stress function) 等と呼びます。このような応力関数を見つけることは、すべての工学問題に使えるわけではありませんが、過去の研究によって、幾つかの有用な基本問題に対して応力関数が見出されています。本節では、2次元平面(応力、ひずみ)問題に対してよく知られている Airy の応力関数を使った解析手法について紹介します。

変位の微分方程式の起源をみると、運動方程式(8.15) です。ここで静的に釣り合っており慣性項は 0 です。物体力が無い場合を考えると、応力の平衡方程式は、(8.24) のようになります。

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (8.24)$$

すべての成分を展開すれば次のように表現されます。なお、2次元問題でするので、以下では慣習的に $x_1=x, x_2=y$ とおいて表現することにします。これにあわせて、変位成分を $u_1=u, u_2=v$ と書きます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (8.25)'$$

今、任意の関数 $\Phi(x,y)$ の導関数を考えて、式(8.26) によって応力を与えると仮定します。変数 x と y の順番ならびに符号に注意してください。

$$\tau_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (8.26)$$

この式を，式(8.25)'に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (8.27)_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad (8.27)_2$$

となり，自動的に平衡方程式を満足します．式(8.26)で導入された関数 Φ の x, y に関する微分の順序が変則的になっているのは，じつは，このように平衡方程式を自動的に満足するような都合のよい関数 Φ を探しやすいようにするためです．

関数 Φ を使った式(8.26)による応力分布は，平衡条件を自動的に満たしますが，これだけでは十分ではありません．式(8.13)，または式(8.21)によって決定されるひずみは，「変位とひずみの関係式」から制約条件^{1*}を満足する必要があります．**独立なひずみは3つありますが，独立な変位は2つしかありませんから，両者は自由度が違います．**従ってひずみが満足すべき制約条件：「ひずみの適合条件」が必要になります．

ひずみの適合条件は，変位とひずみの関係式から変位を消去して得られます．式(8.16)を u, v を使って書きなおせば，式(8.28)のようになります．この式から u, v の導関数を消去して，ひずみ同士が満たすべき関係式(8.29)「ひずみの適合条件」を求めることができます．

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \right) \quad (8.29)$$

^{1*} 式(E.4.5)に3次元の適合条件に関する練習問題を紹介しています．

式(8.29)に平面応力の Hooke の式(8.13)を代入します。

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\tau_{xy}}{2G} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\tau_{xx} - \nu \tau_{yy}}{E} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\tau_{yy} - \nu \tau_{xx}}{E} \right)$$

ここで $2G = E/(1+\nu)$ なので、

$$\begin{aligned} 2(1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\tau_{xy}) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\tau_{xx} - \nu \tau_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\tau_{yy} - \nu \tau_{xx}) \\ 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (8.30)$$

が得られます。さらに式を整理すると、式(8.25)'から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \\ &= \nu \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right) \\ &= \nu(0+0) = 0 \end{aligned} \quad (8.31)$$

最終的に式(8.32)が得られます。

$$\frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (8.32)$$

この式に前述の Φ の関係式(8.26)を代入すると、

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (8.33)$$

ここでラプラシアン Δ という演算子を使うことにすると、式(8.33)は、式(8.34)のように表現できます。

$$\Delta^2 \Phi = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (8.34)$$

このような微分方程式(8.34) を満たす関数 Φ を **重調和関数**(bi-harmonic function) と呼びます. 重調和関数で作られた Φ は, 式(8.26) によって応力を計算するために使われるので, Airy の応力関数と呼ばれています. このとき, 構成方程式によってひずみを求めて, 更にひずみを直接積分することで変位 u, v を得ることができます. Φ が重調和関数であれば「ひずみの適合条件」を自動的に満たしているのです. 得られる変形は空間でくい違ふことは無く, 連続で一意に決まります.

ところで, 重調和関数に対して **調和関数** (harmonic function) というものがあります. これは, 演算子 Δ を 1 個だけ使って表現した微分方程式(8.35) を満たす関数のことです.

$$\Delta\phi = 0 \tag{8.35}$$

調和関数を求めることができれば, 以下の例題 8.1 からわかるように重調和関数を容易に作ることができます.

例題 8.1

調和関数 $\phi(x,y)$ が与えられた時, 次の関数は重調和関数であることを示して下さい.

$$x\phi - y\phi$$

解答例

ラプラシアン Δ を $x\phi$ に 1 回作用させると, 式(8.36) のようになります.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (x\phi) \\ &= \frac{\partial^2 (x\phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x\phi)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (x\phi)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial (x\phi)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi + x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\ &= 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{8.36}$$

この式にもう一度 Δ を作用させて展開します.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\
&= 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + x \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial^3 \phi}{\partial y \partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) \\
&= 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + x \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + x \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \\
&\quad + x \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial x^2} + x \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \\
&= 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) + 2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi + x \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi \\
&= 4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi + x \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) \\
&= 4 \frac{\partial}{\partial x} (0) + x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (0) = 0 \quad (8.37)
\end{aligned}$$

以上のように、調和関数の性質を満たす項が括り出せるので、この式は 0 に等しくなります。これより、 $x\phi$ が重調和関数であることがわかります。同様にして $y\phi$ が重調和であることを説明できます。

例題 8.2 次の多項式

$$\Phi = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \quad (8.38)$$

が Airy の応力関数であることを示しなさい。また、このときの変位場を求めなさい。なお、原点で変位は 0 です。

解答例

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2\right) \\ &= a_2 + c_2\end{aligned}$$

これより、もう一度 Δ を作用させると、 $\Delta^2\Phi=0$ を満たしていることがわかります。よって Φ は明らかに重調和関数であり、応力関数になっています。

与式(8.38)を式(8.26)に代入すると、

$$\tau_{xx} = c_2, \quad \tau_{yy} = a_2, \quad \tau_{xy} = -b_2 \quad (8.39)$$

これは一様な応力場です。この応力場に対する変位場を求めてみます。そのために、構成方程式を使ってひずみを求めます。

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(\tau_{xx} - \nu\tau_{yy}) = \frac{1}{E}(c_2 - \nu a_2) \quad (8.40)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\tau_{yy} - \nu\tau_{xx}) = \frac{1}{E}(a_2 - \nu c_2) \quad (8.41)$$

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = -\frac{\nu}{E}(a_2 + c_2) \quad (8.42)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\tau_{xy}}{2G} = -\frac{b_2}{2G} \quad (8.43)$$

変位 u を求めるため、式(8.40)を x で積分します。

$$u(x, y) = \frac{x}{E}(c_2 - \nu a_2) + c_1(y) \quad (8.44)$$

同様に変位 v を求めるため、式(8.41)を y で積分すると

$$v(x, y) = \frac{y}{E}(a_2 - \nu c_2) + c_3(x) \quad (8.45)$$

積分未定係数 $c_1(y)$, $c_3(x)$ を決める必要があります。そこで、式(8.44), (8.45)を式(8.43)に代入すると、式(8.46)を得ます。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dc_1}{dy} + \frac{dc_3}{dx} \right) = -\frac{b_2}{2G} \quad (8.46)$$

式(8.46)から1回微分して定数になるのですから、 $c_1(y)$ は y の1次式、 $c_3(x)$ は x の1次式であることがわかります。従って次のように仮定できます。

$$\begin{aligned} c_1 &= c_4 y + c_5 \\ c_3 &= c_6 x + c_7 \end{aligned} \quad (8.47)$$

但し $c_4 \sim c_7$ は未定係数です。すると、式(8.46)は次のようになります。

$$c_4 + c_6 = -\frac{b_2}{G} \quad (8.48)$$

剛体変位(並進運動)は、応力に影響を与えないので0とします。その結果、

$$c_5 = c_7 = 0 \quad (8.49)$$

となります。式(8.48)を考慮して、変位場は

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x}{E} (c_2 - \nu a_2) + c_4 y \\ v(x, y) &= \frac{y}{E} (a_2 - \nu c_2) - \left(c_4 + \frac{b_2}{G} \right) x \end{aligned} \quad (8.50)$$

さらに**剛体回転**も応力に影響しないので、2次元の剛体回転を0にします。剛体回転は、式(8.51)で与えられます。

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (8.51)$$

式(8.51)に式(8.50)を代入すると

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = - \left(c_4 + \frac{b_2}{G} \right) - c_4 = 0 \quad (8.52)$$

これより、係数 c_4 が決定されます。

$$c_4 = -\frac{b_2}{2G} \quad (8.53)$$

以上から、求める変位 u, v は式(8.54)のように決定されます。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x}{E}(c_2 - \nu a_2) - \frac{b_2}{2G}y \\ v(x, y) &= \frac{y}{E}(a_2 - \nu c_2) - \frac{b_2}{2G}x \end{aligned} \quad (8.54)$$

例題 8.3

体積力がない場合、つぎの応力状態は、2次元弾性体の平衡方程式の厳密解であるか調べなさい。厳密解である場合、境界条件を $x=y=0$ で $u=v=0$ として変位場を求めなさい。

$$\begin{aligned} (a) \quad \tau_{xx} &= A\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right), \tau_{yy} = \frac{A}{3}y^3, \tau_{xy} = -Axy^2 \\ (b) \quad \tau_{xx} &= Ax^2, \tau_{yy} = -Ay^2, \tau_{xy} = 2Axy \end{aligned} \quad (8.55)_{1,2}$$

解答例

問題の応力場が平衡方程式を満足しているかを判定する必要があります。これは、応力場の式を式(8.25)'に代入することで分かります。

(a) の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 &\Rightarrow A \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2y - \frac{2}{3}y^3 \right) - A \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) = 2Axy - 2Axy = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 &\Rightarrow -A \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) + A \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^3}{3} \right) = -Ay^2 + Ay^2 = 0 \end{aligned}$$

(b) の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 &\Rightarrow A \frac{\partial}{\partial x} (x^2) + A \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = 2Ax + 2Ax = 4Ax \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 &\Rightarrow A \frac{\partial}{\partial x} (2xy) - A \frac{\partial}{\partial y} (y^2) = 2Ay - 2Ay = 0 \end{aligned}$$

これらの結果から、(a) の応力場は釣合いを満足していますが、(b) の応力場は釣合い条件を満足していないことがわかります。

(a) の応力場に対する変位場を求めてみます。2次元平面応力の Hooke の法則に (a) の応力を代入すると、

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(\tau_{xx} - \nu\tau_{yy}) = \frac{A}{E}\left(\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) - \nu\left(\frac{1}{3}y^3\right)\right) \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\tau_{yy} - \nu\tau_{xx}) = \frac{A}{E}\left(\left(\frac{1}{3}y^3\right) - \nu\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right)\right) \\ e_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{1+\nu}{E}(-Axy^2) \end{aligned} \quad (8.56)_{1-3}$$

が得られます。変位 u を求めるために式(8.56)₁ を x で積分します。

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{A}{E} \int \left(\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3 \right) - \frac{\nu}{3}y^3 \right) dx \\ &= \frac{A}{E} \left(\left(\frac{1}{3}x^3y - \frac{2}{3}xy^3 \right) - \frac{\nu}{3}xy^3 \right) + c_1(y) \end{aligned} \quad (8.57)$$

さらに変位 v を求めるために式(8.56)₂ を y で積分します。

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{A}{E} \int \left(\left(\frac{1}{3}y^3 \right) - \nu \left(x^2y - \frac{2}{3}y^3 \right) \right) dy \\ &= \frac{A}{E} \left(\left(\frac{1}{12}y^4 \right) - \nu \left(x^2 \frac{y^2}{2} - \frac{2}{12}y^4 \right) \right) + c_2(x) \end{aligned} \quad (8.58)$$

式(8.57)と(8.58) の積分未定係数 c_1 と c_2 を決定する必要があります。これには、式(8.56)₃ と剛体変位が 0 であることと剛体回転が 0 であることを用います。

式(8.56)₃に(8.57), (8.58) を代入すれば、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{A}{E} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{3}x^3y - \frac{2}{3}xy^3 - \frac{\nu}{3}xy^3 \right) + \frac{d}{dy} c_1(y) \\ &\quad + \frac{A}{E} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{12}y^4 - \nu x^2 \frac{y^2}{2} + \nu \frac{2}{12}y^4 \right) + \frac{d}{dx} c_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{A}{E} \left(\frac{1}{3} x^3 - 2(1+\nu)xy^2 \right) + \frac{d}{dy} c_1(y) + \frac{d}{dx} c_2(x) \\ &= -\frac{2(1+\nu)}{E} Axy^2 \end{aligned}$$

さらに整理して

$$\frac{d}{dy} c_1(y) + \frac{d}{dx} c_2(x) = -\frac{A}{E} \frac{x^3}{3} \quad (8.59)$$

剛体回転の式は、式(8.60) で与えられます。

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8.60)$$

剛体回転が 0 であるためには、 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ であればよく、次式が成立します。

$$\frac{A}{E} \left(\frac{1}{3} x^3 - 2xy^2 - \nu xy^2 \right) + \frac{d}{dy} c_1(y) = \frac{A}{E} (-\nu xy^2) + \frac{d}{dx} c_2(x)$$

これを整理して

$$\frac{d}{dy} c_1(y) - \frac{d}{dx} c_2(x) = \frac{A}{E} \left(-\frac{1}{3} x^3 + 2xy^2 \right) \quad (8.61)$$

式(8.59), (8.61) を連立することで、 c_1, c_2 の導関数に関する式を陽に求めることができます。

$$\frac{d}{dy} c_1(y) = \frac{A}{E} \left(-\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right) \quad (8.62)$$

この式を積分して式(8.63) を得ます。 c_3 は積分定数です。

$$c_1 = \frac{A}{3E} (-x^3 y + xy^3) + c_3 \quad (8.63)$$

同様に c_2 について

$$\frac{d}{dx}c_2(x) = -\frac{A}{E}xy^2 \quad (8.64)$$

この式を x について積分すれば、式(8.65)を得ます。ここで c_4 は積分定数です。

$$c_2 = -\frac{A}{2E}x^2y^2 + c_4 \quad (8.65)$$

変位 u, v を与える式(8.57), (8.58) にこれらの係数 c_1, c_2 を代入します。

$$\begin{aligned} u &= \frac{A}{3E} \left((x^3y - 2xy^3) - \nu xy^3 \right) + \frac{A}{3E} (-x^3y + xy^3) + c_3 \\ &= -\frac{A}{3E} (1 + \nu) xy^3 + c_3 \end{aligned} \quad (8.66)$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{A}{2E} \left(\frac{1}{6}y^4 - \nu \left(x^2y^2 - \frac{2}{6}y^4 \right) \right) - \frac{A}{2E} x^2y^2 + c_4 \\ &= \frac{A}{2E} \left((1 + 2\nu) \frac{y^4}{6} - (1 + \nu) x^2y^2 \right) + c_4 \end{aligned} \quad (8.67)$$

未定係数として c_3, c_4 がまだ残っています。これらを決定するため、問題で与えられた変位の境界条件: $x=y=0$ で $u=v=0$ となることを考慮すると、 $c_3=c_4=0$ となります。以上から u, v が確定しました。

例題 8.4 3次元丸棒の変形

長さ L 、半径 a の丸棒が $z=0 \sim L$ に置かれています。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 次の変位場 (u, v, w) に対する応力場を求めなさい。ただし c は定数です。

$$u = -czy, \quad v = czx, \quad w = 0 \quad (8.68)$$

(2) この変位場が平衡方程式を満たすことを示しなさい。

(3) 端面に作用する応力ベクトルを求めなさい。

(4) $z=L$ においてトルク(回転力)を求めなさい。

解答例

1) 式(8.68) から, ひずみを求めると次のようになります。

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-czy) = 0, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(czx) = 0,$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2}(-cz + cz) = 0,$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(cx + 0) = \frac{cx}{2}, \quad e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{2}(0 - cy) = -\frac{cy}{2}$$

この関係を Hooke の法則(8.12) に代入すると, 垂直応力成分は全て 0 です。せん断応力 τ_{yz} , τ_{zx} の成分だけが非零となります。

$$\begin{aligned} \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0, \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} = 2Ge_{yz} = Gcx, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -Gcy \end{aligned}$$

2) 平衡方程式 (7.64) において体積力が無い場合の左辺式は次の通りです。

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(-Gcy) = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(Gcx) = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(-Gcy) + \frac{\partial}{\partial y}(Gcx) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0$$

従って, 平衡方程式を厳密に満足しています。

3) 丸棒の端面: $z=L$ における法線ベクトル \vec{n} は, $(0,0,1)$ です。また, $z=0$ では反対向きなので $(0,0,-1)$ となります。このときの端面における応力ベクトルは, Cauchy の公式によって

$$z=L \text{ において: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Gcy \\ 0 & 0 & Gcx \\ -Gcy & Gcx & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Gcy & Gcx & 0 \end{pmatrix}$$

なお, $z=0$ においては, 符号が反転します。このベクトルは, $z=L$ 平面上でみたとき, 位置 $\vec{r}=(x, y)$ に対してちょうど 90° の方向を向いているので, 左回転のね

じれ方向に作用しています。

次に棒の円筒表面 ($r=a$) における法線ベクトル \vec{n} を考えると、半径方向を向いているので、次式(8.69) で与えられます。

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, 0 \right) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (8.69)$$

但し半径 a の円筒上ですから、座標軸 x に対して角度位置を θ とおいて、 $x=a \cos \theta, y=a \sin \theta$ の関係にあります。Cauchy の公式によって

$$\begin{aligned} (\cos \theta \quad \sin \theta \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Gcy \\ 0 & 0 & Gcx \\ -Gcy & Gax & 0 \end{pmatrix} &= (0 \quad 0 \quad t_z), \\ t_z &= Gc(-y \cos \theta + x \sin \theta) \\ &= Gca(-\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) = 0 \end{aligned} \quad (8.70)$$

すなわち、円筒表面では外力の働かない自由状態なので応力が 0 になります。

4) 端面 $z=L$ に作用する合力および合モーメントを計算します。

合力は、応力ベクトル成分 $\vec{t} = (-Gcy, Gcx, 0)$ を $dS=dx dy$ で面積積分したものですから、次のようになります。

$$\begin{aligned} \iint_A \tau_{zz} dx dy &= \iint_A 0 dx dy = 0, \\ \iint_A \tau_{zx} dx dy &= \iint_A (-Gcy) dx dy = -Gc \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy = 0 \\ \iint_A \tau_{zy} dx dy &= \iint_A (Gcx) dx dy = Gc \int_{-a}^a x dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = 0 \end{aligned} \quad (8.71)_{1-3}$$

位置 (x, y, L) において、微小面積要素 dS に作用する力のモーメント $d\mathbf{M}$ は、半径ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ とおいて

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & 0 \\ -Gcy & Gcx & 0 \end{vmatrix} dS = \mathbf{e}_3 (Gcx^2 + Gcy^2) dS = Gc(x^2 + y^2) dS \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (8.72)$$

この dS に対する力のモーメント $d\mathbf{M}$ を面積積分すれば、回転力 $\mathbf{M}=(0, 0, M_z)$ を得ることができます。

$$\begin{aligned} M_z &= \int_A dM_z = \iint_A Gc(x^2 + y^2) dx dy \\ &= Gc \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{Gc}{4} 2\pi a^4 = \frac{Gc}{2} \pi a^4 \end{aligned} \quad (8.73)$$

例題 8.5

次の応力場が平衡方程式と適合条件を満足するか、調べなさい。この応力は、なんらかの問題の正しい解となるのかを考察しなさい。

$$\tau_{xx} = y^2, \quad \tau_{yy} = x^2, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = \tau_{zz} = 0$$

解答例

まず、平衡方程式を調べます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0 \end{aligned}$$

これより、静的な釣合いは成立しています。構成方程式からひずみを求めると、式(8.74)のようになります。

$$\begin{cases} e_{xx} = \frac{1}{E}(\tau_{xx} - \nu\tau_{yy} - \nu\tau_{zz}) = \frac{1}{E}(y^2 - \nu x^2), & e_{12} = \frac{1}{2G}\tau_{12} = 0 \\ e_{yy} = \frac{1}{E}(\tau_{yy} - \nu\tau_{zz} - \nu\tau_{xx}) = \frac{1}{E}(x^2 - \nu y^2), & e_{23} = \frac{1}{2G}\tau_{23} = 0 \\ e_{zz} = \frac{1}{E}(\tau_{zz} - \nu\tau_{xx} - \nu\tau_{yy}) = -\frac{\nu}{E}(y^2 + x^2), & e_{31} = \frac{1}{2G}\tau_{31} = 0 \end{cases} \quad (8.74)_{1-6}$$

式(8.74)に対して、ひずみの適合条件 (E.4.5) を調べてみます。
まず前半の式について、

$$\frac{\partial e_{xx}}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (0) = 0 \Rightarrow \text{左辺} = \text{右辺}$$

$$\frac{\partial e_{yy}}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (0) = 0 \Rightarrow \text{左辺} = \text{右辺}$$

$$\frac{\partial e_{zz}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (0) = 0 \Rightarrow \text{左辺} = \text{右辺}$$

となっており、満足しています。しかし後半の式については、

$$2 \frac{\partial e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{2}{E} + \frac{2}{E} = \frac{4}{E} \Rightarrow \text{左辺} \neq \text{右辺}$$

$$2 \frac{\partial e_{yz}}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 0 - \frac{2\nu}{E} = -\frac{2\nu}{E} \Rightarrow \text{左辺} \neq \text{右辺}$$

$$2 \frac{\partial e_{zx}}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = -\frac{2\nu}{E} + 0 = -\frac{2\nu}{E} \Rightarrow \text{左辺} \neq \text{右辺}$$

となります。与えられたひずみは、適合条件を満足しません。従ってこのときの応力場は、正解ではありません。

ひずみの適合条件を無視して適当に設定した応力場は、多くの場合、弾性体の変形を表す解となりません。

8.5 サンブナンの原理 (Principle of Saint-Venant)

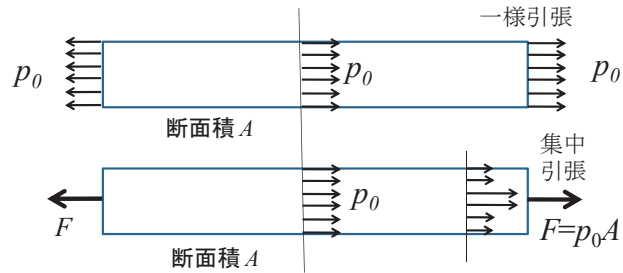
弾性体の一部に作用している荷重条件 A を、これと静力学的に同等な合力と合モーメントの組み合わせ条件 A' に置き換えれば、荷重条件 A と荷重条件 A' の両形式によって弾性体に生ずる応力状態は、荷重点近傍では異なります。しかし、荷重点から十分に遠く離れた領域で、応力状態ほとんど同じになります。このように局所では荷重分布が異なる 2 つの条件を **遠隔での荷重状態が同等** とみなせるような等価性を「サンブナンの原理」と呼びます。

この原理は、現実の問題を単純化して別の問題に置き換えるときに大変有用です。表現を変えて別の命題を説明することもできます。

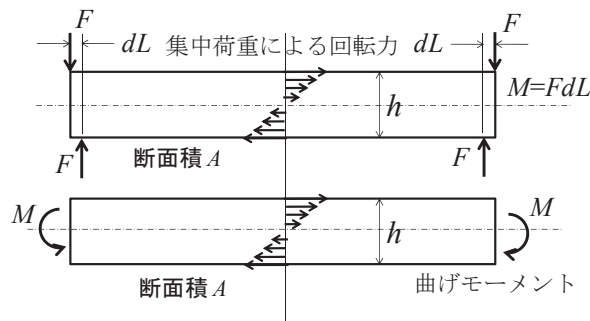
サンブナンの原理は、次のように言い換えることができます。局部で作用する集中荷重の合計が釣り合っているとき、十分離れた領域ではその集中荷重の

影響はなく，無応力状態とみなせます。

図 8.1 は，細長い棒または梁材の (a)単純引張りによる断面内応力分布と (b) 曲げモーメントによる断面内の応力分布を例示しています。



(a) 単純引張りによる断面内の応力分布



(b) 曲げモーメントによる断面内の応力分布

図 8.1 負荷方法の違いと作用点から離れた応力場の関係

(a)の一軸引張りに関する 2 つの状態では，両端の負荷条件が異なっており，一様分布での引っ張り(上)と集中荷重による引っ張り(下)となっています。端部近傍において応力分布は両者で異なりますが，十分離れた中央の断面内応力をみれば，ほぼ一様になります。

この置き換えは，**数値計算の入力データ**を作るときに有用な知識になります。部材の内部の応力状態を議論したいのであれば，**境界端面については，簡単な集中荷重で設定してもいい**ので，問題を簡単にできます。

(b)の曲げに関する 2 つの状態でも，両端の負荷条件が違っています。集中

荷重を2つ組み合わせた回転力を与える上の例と、端面に曲げモーメントの値を設定する下の例では、数理モデルが少し異なりますが、離れた中央位置では、ほぼ同じ曲げ応力状態を呈します。

練習問題

- (1) 次の Airy 応力関数 $\Phi(x,y)$ を使って、応力成分 τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} を求めなさい。
 1. $\Phi = Ay^2 + Bx^2$
 2. $\Phi = e^x \sin(y)$
 3. $\Phi = x e^x \cos(y)$
- (2) 関数 $\Phi = Ay^3 + Cx^3$ は Airy 応力関数であることを示しなさい。
 応力成分 τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} を求めなさい。
 平面応力状態として ひずみ成分 e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} を示しなさい。
- (3) 応力場が Airy 応力関数 Φ から得られ、変位場を決定する際に用いる4つの条件は何ですか。
- (4) サンプナン(Saint-Venant)の原理について述べなさい。
- (5) 次のひずみエネルギーの式(E.8.1)をひずみだけで表しなさい。材料は、等方性弾性体とします。

$$E = \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij} e_{ij} dV \quad (\text{E.8.1})$$

等方弾性体の構成方程式は、式(6.18), (6.19)で与えられます。

- (6) 次の変位場 \mathbf{u} に発生しているひずみおよび応力（等方弾性体）を求めなさい。 a, b, c は定数であり、ヤング率を E , ポアソン比を ν とします。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1, u_2, u_3) \\ &= \{ax - by, by - cz, cz - ax\} \end{aligned} \quad (\text{E.8.2})$$

- (7) 次式は Airy の応力関数であることを示しなさい。

$$\Phi = \sin(kx) \cosh(ky) \quad (\text{E.8.3})$$

但し, $\cosh(ky) = \frac{e^{ky} + e^{-ky}}{2}$ は双曲線関数であり, k は正の定数です.

(8) 無限弾性体の原点 $O(0,0,0)$ に x_3 軸方向の単位集中荷重が作用する場合の変位場は以下の式で与えられます. その変位場に発生しているひずみ (微小線形近似) を求めなさい.

$$\text{変位場 } (u_1, u_2, u_3) = \left[A \frac{x_1 x_3}{R^3}, A \frac{x_2 x_3}{R^3}, A \left(\frac{x_3^2}{R^3} + \frac{(3-4\nu)}{R} \right) \right], \quad (\text{E.8.4})$$

但し A は定数, $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

$$\text{ヒント: } \frac{\partial R}{\partial x_k} = \frac{x_k}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (R^{-n}) = -nR^{-n-1} \frac{\partial R}{\partial x_k} = \frac{-nx_k}{R^{n+2}} \quad (n: \text{整数}, k=1,2,3),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1 x_2}{R^3} \right) = x_2 R^{-3} + x_1 x_2 (-3x_1 R^{-5}) = x_2 R^{-3} - 3x_1^2 x_2 R^{-5}$$

(9) つぎの Airy の応力関数 Φ で与えられる応力場 $(\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12})$, 変位場 (u_1, u_2) を求めなさい.

$$\Phi = \frac{P_1}{2} x_2^2 + \frac{P_2}{2} x_1^2 \quad (\text{E.8.5})$$

原点 $(x_1, x_2) = (0,0)$ で変位 $(u_1, u_2) = (0,0)$ であるとします. なお, 変数記号を $x_1 = x$, $x_2 = y$ のように書き変えてよいです.

9. 流体の場の方程式と境界条件

9.1 Navier-Stokes 方程式

第6章で固体と流体の構成方程式について説明しました。その章で固体の場合は応力とひずみの関係、流体の場合は**応力および圧力とひずみ速度の関係**について説明しました。ここでは、固体において運動方程式を導いたように **Newton 流体**の流れを支配する基礎方程式を導きます。Newton 流体の構成方程式は次のように表されます^{1*}。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda V_{kk}\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.1)$$

この式を **Euler の運動方程式**(7.63) に代入することにより

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (9.2)$$

が得られます。ここで、 X_i は単位質量当たりの物体力です。

簡単のため、流体は非圧縮(ρ :一定)であると考えますと連続の方程式(7.53)は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (9.3)$$

となります。その結果、式(9.2)は簡単になり

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (9.4)$$

が得られます。ここで、両辺を ρ で割りますと右辺の3項目の係数が μ/ρ になります。この係数 μ/ρ を**動粘性係数**と呼びます。右辺の3項目の微分は Laplace 演

^{1*} 応力テンソルを σ_{ij} と記しました。式(6.6)と同じ内容です。 μ は粘性係数です。

固体、流体
構成方程式
応力、圧力
速度、関係
運動方程式
支配する
導きます
基礎方程式
得られ
単位質量あたり
簡単のため
物体力、非圧縮
連続の方程式
簡単、両辺、
割ります、右辺
3項目、係数、

動粘度係数
微分、演算子

非圧縮性流体
 4個, 変数, 一般,
 初期条件,
 境界条件,
 微分方程式

固体壁, 接触
 ながれている場合,
 多孔質体,
 浸透性, 壁,
 除いて, 入り込む
 条件, 必要
 自身, 垂直速度
 対する,
 意味します,
 静止, 滑り,
 離れた, 場所,
 連続的, 変化
 領域, 境界層
 呼んで, 接する
 薄い流れ, 急激
 越える, 実際上
 非粘性, 混じり
 合わない,
 流体境界, 成分
 既知,

算子*2と同じです。非圧縮性流体の運動方程式は、速度と圧力 $v_i (i=1,2,3), p$ の4個の変数から成り、一般に流体の問題は、式(9.3)と(9.4)の4個の微分方程式を用いて解くこととなります。微分方程式を解くためには、初期条件および境界条件が必要になってきます。つぎに境界条件について説明します。

9.2 境界条件について

流体と固体壁とが接触して流れている場合、多孔質体などの浸透性の壁を除いて、流体は固体に入り込むことはできないという条件を少なくとも満たす必要があります。すなわち、固体壁のそれ自身に対する垂直速度を $v_n|_s$ 、流体の壁に対する垂直速度を $v_n|_f$ とすると、 $v_n|_f - v_n|_s = 0$ であることを意味します。また、固体壁が静止しているとき、壁で滑りが無い条件では、流体の速度は固体壁表面における値の0から、壁から少し離れた場所の流速の値まで連続的に変化する必要があります。この領域を境界層と呼んでいます。境界に接するきわめて薄い流れの領域に生じている境界層内では、急激に流速が変化しています。この境界層を越えると流れは実際上非粘性になります。

さらに、混じり合わない二つの流体境界では、境界面に垂直な速度の成分と圧力が、二つの流体で等しいことが条件となります。そして、これらの速度成分は、その境界面に対応する速度成分に等しくなければなりません。以上が流速に対する境界条件です。他に応力に関する境界条件があります。これは固体の境界条件と同じです。すなわち、境界の作用力ベクトルが既知の値 \hat{t}_i で与えられるとしますと

$$t_i (= \sigma_{ij} v_j) = \hat{t}_i \quad (9.5)$$

です。例えば、Newton 流体の場合には式(9.1)を式(9.5)に代入すると

*2 Laplace 演算子は、 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$

$$\begin{aligned} \hat{t}_i &= -p\delta_{ij}n_j + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}n_j + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \\ &= -pn_i + \sigma'_{ij}n_j \end{aligned} \quad (9.6)$$

が得られます. ここで, σ'_{ij} は粘性応力 (流体の運動で生じるせん断応力など) です. 理想流体の場合には粘性応力は 0 であるため, $\hat{t}_i = -pn_i$ となります.

ねんせいおうりよく
粘性応力

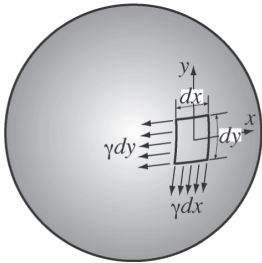


図 9.1(a) 水滴

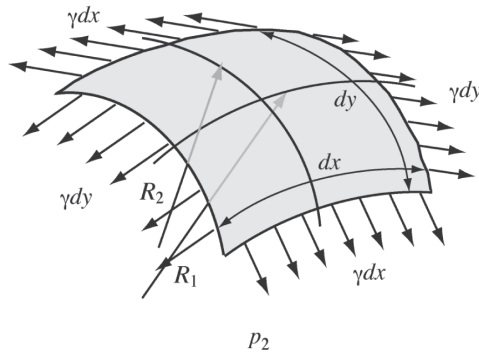


図 9.1(b)

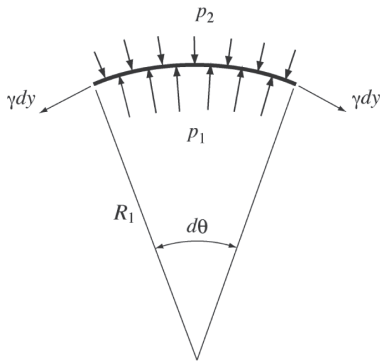


図 9.1(c)

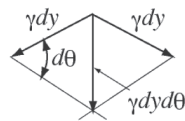


図 9.1(d)

次のような場合には, どのような境界条件を考えたらいいでしょう. いま, 簡単のため静止したシャボン玉を考えます. シャボン玉を作るためにはストロ

くうき, たいきあつ
空気, 大気圧

せつ まく
石けん膜,
ちようりよく
張力
ひようめんちようりよく
表面張力
ひようめん じげん
表面, 次元
ぬ
濡れにくい
すいてき まる
水滴, 丸く
わざ すいてきない
技, 水滴内
がいぶ
外部
びしよう しかくけい
微小, 四角形
へん きよう
辺, 作用
おうだんめん だんめん
横断面, 断面
せつせんほうこう
接線方向
きよくりつはんけい
曲率半径
ほうせんほうこう
法線方向
びしようめんせき
微小面積

きよくりつ せいふ
曲率, 正負
とつ
凸

きようかいめん
境界面
ねんせい だんおうりよく
粘性せん断応力

一の先に石けん水を付けて空気を吹いてふくらませます。すなわち、シャボン玉の中の圧力を大気圧より高くします。その圧力は石けん膜の張力と釣り合っていないならばなりません。この張力は表面張力と呼ばれ、単位面積の表面をつくるために必要なエネルギーとなっています。その次元は

$$[\text{力} \cdot \text{長さ} / (\text{長さ})^2] = [\text{力} / \text{長さ}]$$

です。

つぎに、濡れにくい表面に水滴を垂らしたときに水滴が丸くなる場合を考えます。これも表面張力のなせる技です。水滴内の圧力を p_1 、外部の圧力を p_2 とします。いま、図 9.1(a) に示すように水滴の表面に描いた辺 dx と dy の微小な曲線からなる四角形を考えます。図 9.1(b) は辺に作用する張力を示します。この張力と釣り合うのに必要な圧力を求めるため、二つの横断面、 x - z 断面と y - z 断面を考えます。 x - z 断面を図 9.1(c) に示します。張力 γdy は面の接線方向に作用するため、面に垂直な合力として図 9.1(d) に示すように $\gamma dy d\theta$ が生じます。いま、水滴の曲率半径を R_1 とすると、 dx は $R_1 d\theta$ で表され、 $d\theta$ は dx/R_1 となり、面の法線方向の力は $\gamma dy d\theta = \gamma dy dx/R_1$ となります。同様に y - z 断面についても考えると $\gamma dy dx/R_2$ がえられます。水滴の微小面積 $dxdy$ に働く面に垂直な力は、 $\gamma dy dx/R_1 + \gamma dy dx/R_2$ になり、この力が $dxdy$ の面に作用する圧力と釣り合います。その釣り合い関係から次式が得られます。

$$\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = p_1 - p_2 \quad (9.7)$$

これが Laplace の式と呼ばれている式です。実は曲率には正負があり、表面が凸であると正とします。したがって、 R_1 および R_2 が正の場合、 $p_1 - p_2 > 0$ となります。面が平面である場合、すなわち $R_1 = R_2 = \infty$ 、 $p_1 = p_2$ となります。

つぎに、表面張力を考慮に入れて、二つの流体が運動している場合に、この境界面で満たされる境界条件について考えてみます。表面張力が無視できる場合には、境界面では $n_k (\sigma_{ik}^2 - \sigma_{ik}^1) = 0$ となります。この式はおのおのの流体の表面で粘性せん断応力が等しいことを指しています。表面張力が加わる場合、右辺に力の項を加えなければなりません。その力は Laplace の式から求まり、方向は法線方向です。

$$n_k (\sigma_{ik}^2 - \sigma_{ik}^1) = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i \quad (9.8)$$

この式は次のように書くこともできます。

$$(p_1 - p_2) n_i = (\sigma_{ik}^2 - \sigma_{ik}^1) n_k + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i \quad (9.9)$$

二つの流体が理想流体である場合、粘性応力 σ_{ij}' は 0 であるため、式(9.7)になります。

理想流体
粘性応力

9.3 Reynolds 数と相似則

粘性流体の運動を論ずる場合、物理量の簡単な次元解析を行うことによって、数々の重要な結果を得ることができます。ある特定の運動を考えます。例えば、平均流速 V で直径 L の円管内の流れであるとか、直径 L の球が速度 V で落下する場合を考えます。これらの特性値を用いて式 (9.4) の変数および物理量を無次元変数

論ずる、物理量
次元解析、特定
平均流速、直径
円管内、球、
落下、特性値、
変数、無次元変数

$$x_i' = x_i / L, u_i' = v_i / V, p' = p / (\rho V^2), t' = Vt / L \quad (9.10)$$

に置き換えてみます。すると、次式を得ることができます。

$$\frac{Du_i'}{Dt'} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \frac{\mu}{VL\rho} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k' \partial x_k'} \quad (9.11)$$

この式の右辺第 2 項目の係数は、この方程式で唯一の物理量からなる無次元パラメータです。このパラメータの逆数が **Reynolds 数** と呼ばれており、 Re と書くことが多くあります。すなわち、 $Re = VL\rho/\mu = VL/\nu$ です。ここで ν は **動粘性係数** です^{3*}。

右辺、第2項目
係数、唯一
逆数
動粘性係数
連続、無次元形

連続の式も無次元形にすることができます。

^{3*} 速度の変数記号 v_i (ぶい) と動粘性 ν (にゅー) が紛らわしいので注意してください。

ひあつしゆくせいりゆうたい
非圧縮性流体

きかがくてき そうじ
幾何学的, 相似

ぶつたいまわ
物体周り
どうりきがくてきそうじせい
動力学的相似性
かんせいりよく ひ
慣性力, 比
りゆうし いどう
粒子, 移動
かそくど
加速度

しはいてき
支配的

ちよつけい もうさいけつかん
直径, 毛細血管
けつしやう
血漿, 体温
ねんど
粘度

えんとつ がんじよう かぜ
煙突, 頑丈, 風
ゆ ふうそく
揺れる, 風速
ちよつけい
直径

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i'} = 0 \quad (9.12)$$

式(9.11)と(9.12)は, 非圧縮性流体の場の方程式の完全な系を構成しており, Reynolds数が流れの方程式で表される流れ場の重要なパラメータであることは明らかです.

運動している流体中にある幾何学的に相似な物体を考えます. これらの物体の境界条件も同じであるとする. 二つの物体に対する流れ場の Reynolds数が同一であれば, それらの物体周りの流れ場は式(9.11)から相似となります. このように Reynolds数は**動力学的相似性**を支配すると言われています.

また, Reynolds数は**せん断応力に対する慣性力の比**を表しています. 流れにおいて, 粒子の移動を考慮した加速度による慣性力は ρu^2 であり, せん断応力は $\mu \partial u / \partial y$ から生じる. これらの項の大きさはそれぞれ慣性力に対しては ρV^2 , せん断応力に対しては $\mu V/L$ です. これらの比は

$$\frac{\text{慣性力}}{\text{せん断応力}} = \frac{\rho V^2}{\mu V/L} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (9.13)$$

となります. Reynolds数が小さければせん断応力が大きい流れであり, 大きければ慣性力が支配的な流れとなります.

演習問題

- (1) 直径10ミクロンの毛細血管中を2mm/secの速度で流れる血漿について, Reynolds数はいくらになるか. 体温に対する血漿の粘度 m は1.4センチポアズ ($1.4 \times 10^{-2} \text{ g/cm} \cdot \text{sec}$)であるとしなさい.
- (2) 煙突が十分頑丈でないとき, 煙突が風に揺れることが知られている. 風の力は流れの Reynolds数に依存する. 風速を50km/h, 煙突の直径を6mとする. 流れの Reynolds数を求めなさい. 20°C における空気の粘性係数は, $\mu = 1.808 \times 10^{-4}$ ポアズ ($\text{g/cm} \cdot \text{sec}$), 動粘性係数 $\nu = 0.150 \text{ st (cm}^2/\text{sec)}$ である.

9.4 水平な水路あるいは管内の流れ

通常 Navier-Stokes の方程式を解くことは容易ではありません。しかし、Reynolds 数が小さいときには、非常に簡単になる。非圧縮流体の定常流の場合、慣性項は非常に小さくなるため、Navier-Stokes の方程式は次式のように線形となります。

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0 \quad (9.14)$$

ここでは、とくに簡単な問題を考えます。二つの平行な平面の間の幅 $2h$ の水平な水路を流れる非圧縮流体の定常流の問題です。

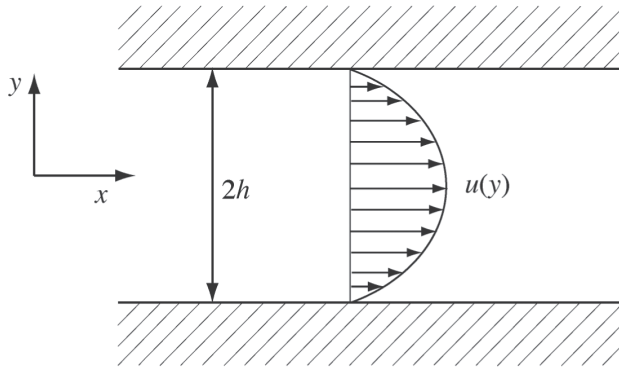


図 9.2 平行な水路

流速成分として x 方向にのみ考えれば十分です。さらに境界壁上の速度は 0 です。すなわち、 $v_1=v(x_2)$, $v_2=v_3=0$, $v_1(h)=0$, $v_1(-h)=0$ です。この速度分布は連続の式を満足し、Navier-Stokes 方程式を次式のように簡単な式にします。

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = 0 \quad (9.15)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad (9.16)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad (9.17)$$

すいへい すいろ
水平, 水路
かんない
管内
ようい
容易
かんせいこう
慣性項
せんけい
線形

かんたん へいこう へいめん
簡単, 平行, 平面
はば ていじょうなが
幅, 定常流れ

そくどせいぶん
速度成分
きょうかいへきじょう
境界壁上

導関数
微分, 定数

式 (9.16) と (9.17) より, p は x_1 だけの関数であることは明らかです. また, 式 (9.15) を x_1 で微分すると $\partial^2 p / \partial x_1^2 = 0$ となることから, $\partial p / \partial x_1$ は定数となります. すると, 式 (9.15) は次式のように書くことができます.

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx_1} = \text{const} \quad (9.18)$$

この式を x_2 について積分すると次式が得られます.

$$v_1 = A + Bx_2 + \frac{x_2^2}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} \quad (9.19)$$

積分定数の A と B は境界条件から, $A = -\left(h^2/2\mu\right)\left(dp/dx_1\right)$, $B = 0$ のように決定できます. これより, 速度分布は

$$v_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} \left(h^2 - x_2^2\right) \quad (9.20)$$

となります.

例題 9.1

円柱座標系における, 非圧縮性流体の Navier-Stokes の方程式を導きなさい.

解答例

運動方程式は次式のように書くことができます.

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho X_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (E9.1)$$

はじめに, 円柱座標系 r, θ, z と直交座標系 x, y, z の関係から始めます.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases} \quad (E9.2)$$

これらの関係より, x, y の偏微分演算子は, r, θ によって次のように表現できます.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \quad (\text{E9.3})$$

速度成分には以下の関係があります.

$$\begin{cases} v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\ v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \\ v_z = v_z \end{cases} \quad (\text{E9.4})$$

ひずみ速度は直交座標系から円柱座標系に次式のように変換されます. これは, 固体のひずみと同じです. すなわち,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{yy} \cos^2 \theta - \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \varepsilon_{r\theta} &= (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_{xy} \cos 2\theta \\ \varepsilon_{zr} &= \varepsilon_{zx} \cos \theta + \varepsilon_{zy} \sin \theta \\ \varepsilon_{z\theta} &= -\varepsilon_{zx} \sin \theta + \varepsilon_{zy} \cos \theta \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz} \end{aligned} \quad (\text{E9.5})$$

一方, 直交座標系のひずみ速度と流速の関係は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{E9.6})$$

で与えられます. 式(E9.3)および(E9.4)を式(E9.6)に代入すると, 次式が得られます.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta) \\
 &= \cos^2\theta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sin^2\theta \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) - \cos\theta \sin\theta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\
 \varepsilon_{yy} &= \sin^2\theta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos^2\theta \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \cos\theta \sin\theta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r} \right) + \frac{\cos 2\theta}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)
 \end{aligned}
 \tag{E9.7}$$

これらの結果と ε_{zz} , ε_{zy} , ε_{zx} に対する同様な結果を式(5)に代入することにより次式が得られます.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\
 \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{E9.8}$$

つぎに加速度 $\frac{Dv_i}{Dt} = a_i$ について考えます. 直交座標系の x 方向の加速度成分は

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}
 \tag{E9.9}$$

です. 式(E9.4)と(E9.5)を式(E9.9)に代入すると

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial}{\partial t}(v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \\
&+ (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \\
&+ (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \\
&+ v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \\
&= \cos \theta \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\
&- \sin \theta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{E9.10}$$

が得られます。この式を次式と比較すると

$$a_x = a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta \tag{E9.11}$$

加速度の成分は

$$\begin{aligned}
a_r &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \\
a_\theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}
\end{aligned} \tag{E9.12}$$

となります。同様にして

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{E9.13}$$

つぎに、平衡方程式の $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ の部分を円柱座標系に変換します。式(E9.3) と(E9.5)

をもちいて $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$ を円柱座標系に変換します。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \right) \cos \theta \\ & - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{E9.14})$$

がえられます. 式(11)と同様な考え方をして

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= \rho X_r + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) &= \rho X_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho X_z + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{aligned} \quad (\text{E9.15})$$

を得ることができます. 非圧縮性流体の応力は

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\mu e_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu e_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu e_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu e_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ \sigma_{\theta z} &= 2\mu e_{\theta z} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zr} &= 2\mu e_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (\text{E9.16})$$

これを式(E9.15) に代入することにより, Navier-Stokes の方程式を求めることができます.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= \rho X_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) &= \rho X_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho X_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \end{aligned} \quad (\text{E9.17})$$

ここで,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{E9.18})$$

例題 9.2

半径 R の二つの円板が重なり合っている状態を考えます。ただし、両者の間には隙間があって、そこを流体が満たしています。円板は流体を押しつけて、一定速度 U で近づいているとすると、この運動に対する抵抗力を求めなさい。

解答例

下の円板の中心を原点とする円柱座標系をここでは用います。いま、下の円板が静止しているものとします。流体層は薄いため、流れは半径方向成分が支配的で、軸対称であるとします。すなわち、 $v_z = v_r$, $\partial v_r / \partial r = \partial v_r / \partial z$ です。したがって、運動方程式は

$$\mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (\text{E9.21})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{E9.22})$$

となります。境界条件は、

$$\begin{aligned} z=0 \quad &\text{で} \quad v_r = v_z = 0, \\ z=h \quad &\text{で} \quad v_r = 0, v_z = -U, \\ r=R \quad &\text{で} \quad p = p_0 \end{aligned} \quad (\text{E9.23})$$

はんけい えんばん
半径, 円板,
かさ あ
重なり合って,
りょうしや すきま
両者, 隙間,
お いっていそくど
押し, 一定速度,
ていこうりよく ちゅうしん
抵抗力, 中心,
げんでん りゅうたいそう
原点, 流体層,
うす
薄い,
はんけいほうこうせいぶん
半径方向成分,
しはいてき じくたいしやう
支配的, 軸対称

きやうかいじやうけん
境界条件

きょり がいあつ
距離, 外圧

です. ここで, h は円板の間の距離, p_0 は外圧です. 式(1)より

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-h) \quad (\text{E9.24})$$

となり, 式(2)を z に関して積分すれば

$$U = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r dz = -\frac{h^3}{12\mu r} \frac{d}{dr} \left(d \frac{dp}{dr} \right) \quad (\text{E9.25})$$

が得られます. これより

$$p = p_0 + \frac{3\mu U}{h^3} (R^2 - r^2) \quad (\text{E9.26})$$

はたら ていこうりよく
働く, 抵抗力

となり, 円板に働く抵抗力は

$$F = \frac{3\pi\mu UR^4}{2h^3} \quad (\text{E9.27})$$

すいへいめん かくど
水平面, 角度

かたむ あつ
傾いて, 厚さ

りゅうたいそう じょうめん
流体層, 上面

じゆうひょうめん
自由表面,

じゅうりよく
重力

例題 9.3

水平面に対し, 角度 α で傾いている板の上に厚さ h の流体層がある. 上面は自由表面とする. 重力によりどのような流れが生じるか求めなさい.

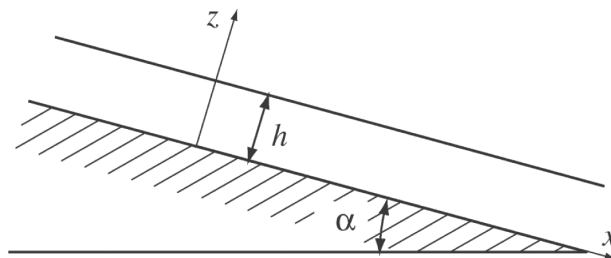


図 9.3 傾斜面の流れ

けいしやめん
傾斜面

解答例

x - y 面を板の面にとり, x 方向に流れが生じるものとします. 解は z のみの関数となり

かんすう
関数

ます. $v_x=v(z)$ とすると, 重力場中の Navier-Stokes 方程式は

$$\mu \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho g \sin \alpha = 0, \quad \frac{dp}{dz} + \rho g \cos \alpha = 0 \quad (E9.31)$$

のようになります. 自由表面では, 粘性応力 $\sigma_{zx}=\mu dv/dz=0$, $\sigma_{zz}=-p=-p_0$ (p_0 は大気圧) です. また, $z=0$ で $v=0$ です. これらの境界条件を満たす解は

$$p = p_0 + \rho g(h-z)\cos \alpha, \quad v = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} z(2h-z) \quad (E9.32)$$

となります. y 方向の単位長さ当たりの流量は

$$Q = \rho \int_0^h v dz = \frac{\rho g h^2 \sin \alpha}{3\nu} \quad (E9.33)$$

となります.

練習問題

(3) Couette 流れ 二つの共軸円筒の間の空間が, 流体で満たされている (図 9.4).

内側の円筒は静止し, 外側の円筒が角速度 ω rad/sec で回転している. 例題 1 で導いた方程式を用いて, 円筒間の流体の速度場を求めなさい. また, 内側の円筒で測ったトルクが T を求めなさい. なお, 内側の円筒半径を R_1 , 外側の円筒半径を R_2 とします.

(4) Navier-Stokes の方程式を用いて, 長方形断面の長く真直ぐな管内の流れの速度場を求めなさい. 長方形断面の縦と横を a と b で表すものとします.

9.5 完全流体

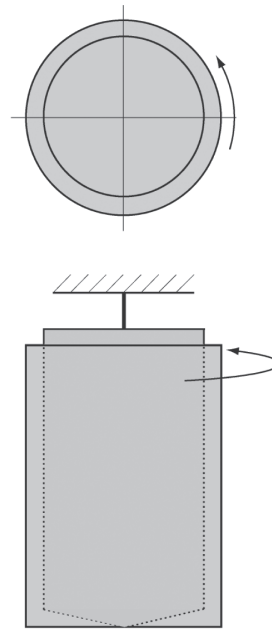


図 9.4 Couette の流れ計

じゆうりよくぼちゆう
重力場中

ねんせいおうりよく
粘性応力
たいきあつ
大気圧

きようじくえんとう くうかん
共軸円筒, 空間

うちがわ せいし
内側, 静止,
そとがわ
外側
えんとう かくそくど
円筒, 角速度
そくとぼ
速度場

えんとうはんけい
円筒半径

ちようほうけい
長方形,
まっす かんない
真直ぐな, 管内,
たて よこ
縦, 横

完全流体とは粘性係数が 0 となる流体であることから、応力テンソルは等方となります。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (9.21)$$

運動方程式は簡単化され

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (9.22)$$

となります。ここで、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 v_i は速度ベクトルの成分、 X_i は単位質量当たりの物体力です。

さらに、流体が非圧縮であれば、密度は一定となり、連続の方程式は次式のように表されます。

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9.23)$$

式(9.23)を満足するベクトル場をソレノイド場と呼んでいます。一般ポテンシャル論から、ソレノイド場は別のベクトル場から誘導できることが示されています。例えば、二次元のベクトル場を考えます。すなわち、 $v_3=0$ で、 v_1 と v_2 は x_1 と x_2 のみの関数であるとします。すると、式(9.23)は次式のようになります。

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad (9.24)$$

ここで、任意の関数 $\psi(x_1, x_2)$ を考えます。この関数によって v_1, v_2 を次式のように表すとします。

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (9.25)$$

すると、式(9.24)を自動的に満足することは明らかです。このような関数 $\psi(x_1, x_2)$ を流れ関数と呼んでいます。式(9.25)を式(9.22)に代入すると、流れ関数が満たすべき方程式が得られます。

かんたんか
簡単化

りゅうたい みつど
流体の密度
あつりょく ぶつたいりょく
圧力, 物体力

ゆうどう にじげん
誘導, 二次元

じどうてき
自動的
なが かんすう
流れ関数, 満たす

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} &= X_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} &= X_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (9.26)$$

物体力が 0 であれば, この式から p を消去して

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \quad (9.27)$$

を得ることができます. ここで,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (9.28)$$

です.

流れ関数を知れば, 定常流の流線の形は直接知ることができます. 流線とは, その線上の任意の点の接線がその点の速度の方向を与えるような線のことです. すなわち, それらは以下の微分方程式によって決められます.

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \quad (9.29)$$

この式から $v_2 dx_1 - v_1 dx_2 = 0$ を得ることができます. この式に式(9.25)の定義式を代入すると,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = d\psi = 0 \quad (9.30)$$

を得ることができます. すなわち, 流線は流れ関数 $\psi(x_1, x_2)$ をある定数に等しいとおくことによって得られる曲線の集合であると言えます.

9.6 渦度と循環

渦度と循環は流体の流れの解析を簡単化する上で重要な役割をしています.

しょうきょ
消去

ていじょうりゅう りゅうせん
定常流, 流線
かたち ちよくせつ せつせん
形, 直接, 接線

ていぎしき
定義式

ていすう
定数
きよくせん しゅうごう
曲線, 集合

うずど じゆんかん
渦度, 循環
じゅうよう やくわり
重要, 役割

にんい へいきよくせん
任意, 閉曲線
せつせんほうこう ていり
接線方向, 定理
たんれんけつりょういき
単連結領域
かこ
囲む,
せんせきぶん めんせきぶん
線積分, 面積分,
へんかん
変換,

きよくせん
曲線
そくどば
速度場

かいろ かいろじょう
回路, 回路上
りゅうたいりゅうし じかん
流体粒子, 時間
た じかんびぶん
経つ, 時間微分

せきぶん びぶん
積分, 微分
こうかん
交換

ぞうか わりあい
増加, 割合

循環は次式で定義されます.

$$I(C) = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_C v_i dx_i \quad (9.31)$$

ここで, C は流体内における任意の閉曲線, \mathbf{v} は速度ベクトル, $d\mathbf{l}$ は閉曲線の接線方向のベクトルです. Stokes の定理により, C が単連結領域を囲むとき, 線積分は面積分に変換できます. すなわち,

$$I(C) = \int_S (\nabla \times \mathbf{v})_n dS = \int_S (\text{curl } \mathbf{v})_i n_i dS \quad (9.32)$$

ここで, S は曲線 C に囲まれた流体中の任意の面であり, n_i はその面の単位法線ベクトル, $(\text{curl } \mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk} v_{j,k}$ であります. $\text{curl } \mathbf{v}$ を速度場の渦度と言います.

回路 C が回路上の流体粒子から成り立っている「流体の曲線」であるとします. 時間が経つにつれて, これらの流体粒子は動いていく, そしてこの回路も流体粒子と共に動きます. その時, 循環はどのようになるか調べたいと思います. その時間微分

$$\frac{D}{Dt} \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.33)$$

において, 回路 C は同一の流体粒子から成っている流体線であることから, 積分と微分の順序を次式のように交換することができます.

$$\frac{D}{Dt} \int_C v_i dx_i = \int_C \frac{D}{Dt} (v_i dx_i) = \int_C \left(\frac{Dv_i}{Dt} dx_i + v_i \frac{Ddx_i}{Dt} \right) \quad (9.34)$$

ここで, Ddx_i/Dt は dx_i の増加する割合で, dv_i になります. 完全流体の運動方程式(9.22)から Dv_i/Dt を式(9.34)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_C v_i dx_i &= \int_C \left[\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + X_i \right) dx_i + v_i dv_i \right] \\ &= -\int_C \frac{dp}{\rho} + \int_C X_i dx_i + \frac{1}{2} \int_C dv^2 \end{aligned} \quad (9.35)$$

しかし、右辺第3項目の v^2 は流れの場では一価であることから閉曲線で積分すると0になります。また、第2項目は物体力が保存力であれば0になります。したがって、流体が完全流体で物体力が保存力であれば

$$\frac{D}{Dt} \int_C v_i dx_i = - \int_C \frac{dp}{\rho} \quad (9.36)$$

となります。さらに、密度 ρ が圧力の一価関数であると、この流体は **順圧** (barotropic) 流体と呼ばれます。その場合、式 (9.36) の右辺は0となり

$$\frac{D}{Dt} \int_C v_i dx_i = 0 \quad (9.37)$$

が得られます。これを **Helmholtz の定理** と呼んでいます。すなわち、理想流体では流体粒子の作る閉曲線についての循環は時間に対して一定となることを意味しています。したがって、ある瞬間に循環が0になると、循環は常に0となります。流れの場における流線のつくる閉曲線について循環が0であると、式 (9.32) により、場全体においてうず度は0になります。このことは流れを極めて簡単にし、次節の渦無し流れにつながります。密度 ρ が圧力以外の変数に依存するときは、流体線周りの循環が一定に保たれるとは限りません。地球物理学の問題、多層流れの問題がその場合です。

9.7 渦無し流れ

いたるところ **渦度** が0のとき、流れは **渦無し** であるといえます。すなわち、

$$\nabla \times \mathbf{v} = \text{curl } \mathbf{v} = 0 \quad (9.38)$$

あるいは、

$$e_{ijk} v_{j,k} = 0 \quad (9.39)$$

2次元渦無し流れに対しては

うへん だい こうめ
右辺, 第3項目
いっか ほぞんりよく
一価, 保存力

みつど あつりよく
密度, 圧力
いっかかんすう じゅんあつ
一価関数, 順圧

いつてい
一定
しゅんかん つね
瞬間, 常に

きわ じせつ うず
極めて, 次節, 渦
なし いぜん
無し, 依存,
りゅうたいせんまわ
流体線周り,
たも かし
保たれる, 限り
ちきゅうぶつりがく
地球物理学,
たそうなが
多層流れ

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0 \quad (9.40)$$

ひあつしゆく
非圧縮

となります。流体が非圧縮で、式(9.25)で定義した流れ関数を用いると、式(9.40)は、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \Delta \psi = 0 \quad (9.41)$$

ちようわかんすう
調和関数

この式は Laplace の方程式で、この解は調和関数で表すことができます。また、渦無しの定義により、つぎの3個の方程式

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0 \quad (9.42)$$

じどうてき
自動的

が成り立ちます。これらの式で速度ベクトルを $\mathbf{v} = \text{grad}\Phi$ とおくと、自動的に Φ は式(9.42)を満足します。そして、流体が非圧縮であれば、この速度ベクトルを連続の式に代入することにより次式が得られます。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (9.43)$$

関数 Φ はポテンシャル関数となります。したがって、この方程式をポテンシャル方程式とも言います。

あつりよくこうばい
圧力勾配

非圧縮ポテンシャル流れは Laplace 方程式に支配されます。全ての境界条件を満足する解を見つけることができれば、Euler の運動方程式から圧力勾配を求めることができ、問題を解くことができます。流体のいずれか一部の運動が、ある瞬間に渦度無しであれば、物体力が保存力であり、流体が順圧（密度が圧力だけの関数）であるかぎり、全ての瞬間において渦無しに保たれます。

これらの条件はたいていの問題に現れ、固体が流体中で急に動き始めるとき、完全流体に生じる運動は渦無しとなります。このようにして、工学上重要な問題は渦無しとなります。

例題9.4

非圧縮性流体の定常流では最大圧力は速度が0の点で生じる。このような点は、ふつうは流体中におかれた物体の表面上にあります。その点をよどみ点といいます。図9.4のO点がよどみ点となります。よどみ点近傍の流れを求めなさい。

解答例

よどみ点の極近傍では、物体の表面は平面と見なすことができます。その平面を xy 面とします。 Φ を微小量 x, y, z で展開して2次の項までとるものとします。

$$\Phi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$$

ここで、 Φ の定数項は重要ではないので省略する。 Φ が方程式 $\Delta\Phi=0$ と境界条件($z=0$ で $v_z = \partial\Phi/\partial z = 0$ およびよどみ点 $x = y = z = 0$ で $\partial\Phi/\partial x = \partial\Phi/\partial y = 0$)を満たすように定数係数を決定します。すると、 $a = b = c = 0, C = -A - B, E = F = 0$ が得られます。 Dxy の項は、 x 軸と y 軸を適当に回転することにより、除くことができます。その結果、次式が得られます。

$$\Phi = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2$$

流れが z 軸に対して軸対称の場合には、 $A=B$ となります。その結果、

$$\Phi = A(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

が得られます。速度成分は $v_x = 2Ax, v_y = 2Ay, v_z = -4Az$ となります。流線は、

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \Rightarrow \frac{dx}{2Ax} = \frac{dy}{2Ay} = \frac{dz}{-4Az}$$

で与えられます。この微分方程式を解くと $x^2z=c_1, y^2z=c_2$ となります。これは3次の双曲線です。

流れが、 y 軸方向に一様であるならば、 $B=0$ となります。その結果、

$$\Phi = A(x^2 - y^2)$$

となります。これは、流線が $xz=\text{const}$ という双曲線になります。

さいだいあつりよく
最大圧力

ごくきんぼう へいめん
極近傍, 平面
びしょうりょう
微小量

ていすうこう しょうりやく
定数項, 省略

ていすうけいすう
定数係数

かいてん
回転

じくたいしょう
軸対称

そくどせいぶん
速度成分

そうきよくせん
双曲線

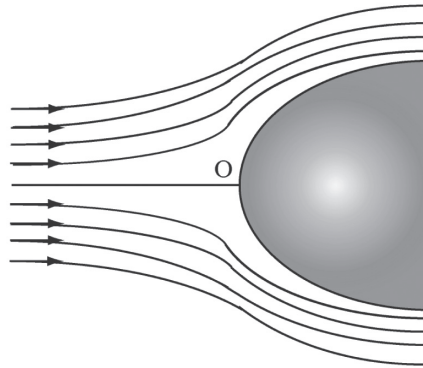


図 9.4 よどみ点

練習問題

(5) 二次元のポテンシャル流を考えます. z 方向の流れはありません. つぎのポテンシャルに対する速度場を図示下さい.

(a) $\Phi = \frac{1}{4\pi} \log(x^2 + y^2) = \frac{1}{2\pi} \log r \quad (r^2 = x^2 + y^2)$

(b) $\Phi = x$

(c) $\Phi = Ar^n \cos n\theta \quad \left(\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}\right)$

(d) $\Phi = \frac{\cos \theta}{r}$

ヒント：円柱座標系における速度成分は,

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

で表されます.

(6) 2次元での非圧縮性流体の運動は, 流れ関数 ψ から

$$v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_3 = 0$$

えんちゆうぎひょうけい
円柱座標系
そくどせいぶん
速度成分

のように導かれます。つぎの流れ関数について $\psi = \text{一定}$ の線を描きなさい。

(a) $\psi = c\theta$

(b) $\psi = y$

(c) $\psi = Ar^n \sin n\theta$

(d) $\psi = -\frac{\sin \theta}{r}$

(7) 問題(5) のポテンシャルであらわされる流れについて

(a) いずれの場合も、うず度は0となることを示しなさい。

(b) 変形速度テンソルを導きなさい。

へんけいそくど
変形速度

本書は 2011 年 4 月 1 日、長岡技術科学大学より UD Project の一冊として刊行されたものの復刊です。

連続体力学の基礎

れんぞくたいりきがくのきそ

Fundamentals of Continuum Mechanics

2015 年 6 月 19 日 初版発行©

著 者 古 口 日出男

永 澤 茂

発行者 福 田 雅 夫

発行所 GIGAKU Press

(長岡技術科学大学出版会)

〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1

長岡技術科学大学内

電話 0258-47-9266

Joho-kiban@jcom.nagaokaut.ac.jp

Printed in Japan

ISBN978-4-907996-09-3



長岡技術科学大学
Nagaoka University of Technology

ISBN:978-4-907996-3