第6章　數學附錄

一　隨機變數線性函數的平均數與變異數。

設 X 為一隨機變數，其平均數為 μ_X，變異數 σ_X^2，令 $Y=a\pm bX$，則 $E(Y)=\mu_Y=a\pm b\mu_X$，$V(Y)=\sigma_Y^2=b^2\sigma_X^2$，$\sigma^2=|b|\sigma_X$。

證明　Y 的期望值為：

$E(Y)=E(a\pm bX)=E(a)\pm E(bX)=a\pm bE(X)=a\pm b\mu_X$

變異數為：

$$V(Y)=E[a\pm bX-E(a\pm bX)]^2=E[a\pm bX-(a\pm bE(X))]^2$$
$$=E[bX-b\mu_X]^2=b^2E(X-\mu_X)^2=b^2\sigma_X^2$$

標準差為：$\sigma_Y=\sqrt{V(Y)}=|b|\sigma_X$

二　隨機變數 X 的變異數　$E(X-\mu)^2=E(X^2)-[E(X)]^2$

證明

$$E(X-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\mu+\mu^2)\cdot f(x_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2 f(x_i)-2\mu x_i f(x_i)+\mu^2 f(x_i)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 f(x_i)-2\mu^2+\mu^2=E(X^2)-\mu^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

三　隨機變數 X 的偏度與峰度

證明

$$\alpha_3=\frac{E(X-\mu)^3}{(\sqrt{E(X-\mu)^2})^3},\quad \alpha_4=\frac{E(X-\mu)^4}{[E(X-\mu)^2]^2}$$

式中：$E(X-\mu)^2=E(X^2)-[E(X)^2$，$E(X-\mu)^3=E(X^3)-3E(X)^2E(X)+2[E(X)]^3$

$E(X-\mu)^4=E(X^4)-4E(X^3)E(X)+6E(X)^2[E(X)]^2-3[E(X)]^4+2[E(X)]^3$ $E(X^r)$ 稱為隨機變數 r 級原動差，$E(X-\mu)^r$ 稱為 r 級平均數動差。

四　二項機率分配之期望值與變異數

設 X 為一二項隨機變數，其機率函數為：

$$f(x)=C_x^n p^x q^{n-x}\qquad x=0,1,2,\Lambda\ ,n$$

則其期望值為：

$$E(X)=np$$

變異數為：

$$V(X)=npq$$

證明　茲證明二項分配的期望值與變異數如下：

(1)期望值

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}xf(x)=\sum_{x=0}^{n}xC_x^n p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}x\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!}p^x q^{n-x}=np\sum_{y=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-y)!y!}p^y q^{n-1-y}$$

「式中 $(y=x-1)$」

$$=np(p+q)^{n-1}$$

(利用 $(n-1)$ 次方的二項展開式)

$$=np$$

(2)變異數

$$V(X)=\sum_{x=0}^{n}(x-\mu)^2 f(x)=\sum_{x=0}^{n}x^2 f(x)-\mu^2 \qquad ①$$

$$=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)f(x)+\sum_{x=0}^{n}xf(x)-\mu^2$$

其中

$$\sum_{x=0}^{n}x(x-1)f(x)=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)C_x^n p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x q^{n-x}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-2-x)!(x-2)!}p^{x-2}q^{n-x}=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}$$

(利用 $(n-2)$ 次方的二次展開式)

$$=n(n-1)p^2 \qquad ②$$

將②代入①可得：

$$V(X)=n(n-1)p^2+np-(np)^2=-np^2+np=np(1-p)=npq$$

五 超幾何機率分配之期望值與變異數

設 X 為一超幾何分配，則其期望值與變異數分別為：

$$E(X)=n\cdot\frac{K}{N}, \qquad V(X)=n\cdot\frac{K}{N}\cdot\frac{N-K}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

證明 分別證明如下：

(1)期望值

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}=\sum_{x=1}^{n}x\left(\frac{N!}{n!(N-n)!}\right)^{-1}\frac{K!}{x!(K-x)!}C_{n-x}^{N-K}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}\left(\frac{N(N-1)!}{n(n-1)!(N-n)!}\right)^{-1}\cdot\frac{K(K-1)!}{(x-1)!(K-x)!}\cdot C_{n-x}^{N-K}$$

$$=n\frac{K}{N}\sum_{x=1}^{n}\frac{\dfrac{(K-1)!}{(x-1)!(K-x)!}C_{n-x}^{N-K}}{\dfrac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}$$

$$= n\frac{K}{N}\sum_{x=1}^{n}\frac{C_{x-1}^{K-1}C_{n-x}^{N-K}}{C_{n-1}^{N-1}} = n\frac{K}{N}\sum_{y=0}^{n-1}\frac{C_{y}^{K-1}C_{n-1-y}^{N-K}}{C_{n-1}^{N-1}}$$

$(x-1=y)$

$$= n\frac{K}{N}\frac{C_{n-1}^{N-1}}{C_{n-1}^{N-1}} \qquad (\text{因為} \sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n})$$

$$= n\frac{K}{N}$$

(2)變異數

$V(X)$可表為： $V(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)^2]$ ①

其中

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}$$

$$= n(n-1)\frac{K(K-1)}{N(N-1)}\sum_{x=2}^{n}\frac{C_{x-2}^{K-2}C_{n-x}^{N-K}}{C_{n-2}^{N-2}}$$

$$= n(n-1)\frac{K(K-1)}{N(N-1)}\sum_{y=0}^{n-2}\frac{C_{y}^{K-2}C_{n-2-y}^{N-K}}{C_{n-2}^{N-2}}$$

(註 $x-2=y$)

$$= n(n-1)\frac{K(K-1)}{N(N-1)}$$ ②

將②代入①可得

$$V(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$$

$$= n(n-1)\frac{K(k-1)}{N(N-1)} + n\frac{K}{N} - [n\frac{K}{N}]^2 = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

六 證明當$N \to \infty$，超幾何分配趨近於二項分配

$$\lim_{N\to\infty}\frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N} = C_x^n p^x q^{n-x}$$

式中：$\begin{cases} \lim_{N\to\infty}\frac{K}{N} = p \\ \lim_{N\to\infty}\frac{N-K}{N} = 1-p = q \end{cases}$

證明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}}\cdot\frac{K(K-1)\ldots(K-x+1)}{x!}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{(n-x)!}(N-K)(N-K-1)\ldots(N-K-n+x+1)\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot\frac{1}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}$$
$$\cdot\left[K\ldots(K-x+1)(N-K)\ldots(N-K-n+x+1)\right]$$

(分子分母同除以 N^n)

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot\frac{1}{1\cdot\frac{(N-1)}{N}\ldots\frac{N-n+1}{N}}$$
$$\cdot\left[\frac{K}{N}(\frac{K-1}{N})\ldots(\frac{K-x+1}{N})(\frac{N-K}{N})\ldots(\frac{N-K-n+x+1}{N})\right]$$

$$=\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot(\frac{K}{N})^x(\frac{N-K}{N})^{n-x}=C_x^n p^x q^{n-x}$$

因為

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1\cdot\frac{(N-1)}{N}\Lambda\frac{N-n+1}{N}}\cdot\frac{K}{N}(\frac{K-1}{N})\Lambda\ (\frac{K-x+1}{N})(\frac{N-K}{N})$$
$$\Lambda\ (\frac{N-K-n+x+1}{N})$$

$$=\frac{1}{1\cdot(1-\frac{1}{N})\ldots(1-\frac{n-1}{N})}\cdot\frac{K}{N}(\frac{K}{N}-\frac{1}{N})\Lambda\ (\frac{K}{N}-\frac{x-1}{N})(\frac{N}{N}-\frac{K}{N})$$
$$\Lambda\ (\frac{N-K}{N}-\frac{n-x-1}{N})$$

但 $\lim_{N\to\infty}\frac{P}{N}=0\qquad\forall P=1,2,\ldots,(n-1)$

$$=\frac{\frac{K}{N}\Lambda\frac{K}{N}\cdot\frac{N-K}{N}\Lambda\frac{N-K}{N}}{1\cdot 1\Lambda\ 1}$$

(因 $\frac{K}{N}$ 有 x 個, $\frac{N-K}{N}$ 有 $n-x$ 個)

$$=\left(\frac{K}{N}\right)^x\left(\frac{N-K}{N}\right)^{n-x}$$

七 證明泊松機率分配之期望值與變異數。

設 X 為一泊松分配，則其期望值與變異數為：

$$E(X)=\lambda\qquad V(X)=\lambda$$

證明 證明如下：

(1)期望值

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\lambda\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

(因 $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=e^{\lambda}$)

(2)變異數

$$V(X)=E\left[X(X-1)\right]+E(X)-\left[E(X)\right]^{2}$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}+\lambda-\lambda^{2}=\lambda^{2}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{(x-2)!}+\lambda-\lambda^{2}$$

(因 $\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}=e^{\lambda}$)

$$=\lambda^{2}+\lambda-\lambda^{2}=\lambda$$

八 證明當 $n\to\infty$， np 固定，二項分配趨近於泊松分配

$$\lim_{n\to\infty}C_{x}^{n}p^{x}q^{n-x}=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$$

式中： $\lambda=np$

證明 證明如下：

$$\lim_{n\to\infty}C_{x}^{n}p^{x}q^{n-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}(\frac{\lambda}{n})^{x}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}\cdot\frac{n(n-1)...(n-x+1)}{n^{x}}\cdot(1-\frac{\lambda}{n})^{n}(1-\frac{\lambda}{n})^{-x}=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}....(\lambda=np)$$

因為

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)...(n-x+1)}{n^{x}}=\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{x-1}{n})\right]=1$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{n}=e^{-\lambda} \qquad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{-x}=1$$

九 證明幾何分配的期望值與變異數

$$E(X)=\frac{1}{p}，\quad V(X)=\frac{1-p}{p^{2}}$$

(1)期望值

$$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}xq^{x-1}p=p\sum_{x=1}^{\infty}x\cdot q^{x-1} \qquad ①$$

令

$$T=\sum_{x=1}^{\infty}x\cdot q^{x-1}=1+2q+3q^{2}+\Lambda \qquad ②$$

②乘上 q 可得：

$$qT=\sum_{x=1}^{\infty}x\cdot q^{x}=q+2q^{2}+3q^{3}+\Lambda \qquad ③$$

②-③式可得：

$T - qT = T(1-q)$

$$= (1 + q + q^2 + \Lambda) = \frac{1}{1-q} \quad \text{(無窮項等比級數公式)} \qquad ④$$

由④可解得：

$$T = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad ⑤$$

⑤代入①可得

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

(2)變異數

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = E\left[X(X-1)\right] + E(X) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

因為 $\frac{dq^x}{dq^2} = x(x-1)q^{x-2}$

而 $E\left[X(X-1)\right] = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)q^{x-1}p$

$$= pq\sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)q^{x-2} = pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{x=0}^{\infty} q^x\right) = pq\frac{2}{(1-q)^2} = \frac{2}{p^2}$$

其中

$$\sum_{x=0}^{\infty} q^x = \frac{1}{1-q} \qquad \frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{2}{(1-q)^3}$$