数値計算のための予備知識

記号

任意の〜, ある〜が存在する

$\forall x$ 「任意の x」

$\exists x$ 「ある x が存在する」

代入, 近似値

$a := b$ 「a に b の値を代入」

$a \approx b$ 「a と b は近似値」

総和，総積

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \textstyle\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n \quad \text{総和}$$

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = \textstyle\prod_{i=k}^{n} a_i = a_k \times a_{k+1} \times \cdots \times a_n \quad \text{総積}$$

数の集合

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 自然数の集合

$\mathbb{Z}$ 整数の集合

$\mathbb{Q}$ 有理数の集合

$\mathbb{R}$ 実数の集合

$\mathbb{C}$ 複素数の集合

複素数の実数部 (実部)，虚数部 (虚部), 共役複素数

$c = Re(c) + Im(c)\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$

実数部 $Re(c) \in \mathbb{R}$

虚数部 $Im(c) \in \mathbb{R}$

共役複素数 $\bar{c} = Re(c) - Im(c)\sqrt{-1}$

x

床関数, 天井関数, 符号関数

床関数 $\lfloor 2.75 \rfloor = 2$ ··· 引数を超えない最大の整数を返す

天井関数 $\lceil 2.75 \rceil = 3$ ··· 引数より大きい最小の整数

符号関数 $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$

自然対数の底, 指数関数, 円周率

自然対数の底 $e = 2.718281\cdots$

指数関数 $\exp(x) = e^x, e = \exp(1)$

円周率 $\pi = 3.141592\cdots$

開区間, 閉区間

$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \subset \mathbb{R}$ 開区間

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$ 閉区間

導関数, 原始関数, 定積分

一変数関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{dx}$

多変数関数 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ の x_i に関する導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

一変数関数 $f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$

一変数関数 $f(x)$ の原始関数 $\int f(x)dx$

一変数関数 $f(x)$ の $[a, b]$ における定積分 $\int_a^b f(x)dx$

ベクトル, 行列

$\mathbb{R}^n$ n 次元実ユークリッド空間

$\mathbb{C}^n$ n 次元複素ユークリッド空間

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ n 次元実ベクトル

$\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ n 次元複素ベクトル

$\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n \ni \mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ベクトルの転置

$M_n(\mathbb{R})$ $n \times n$ 実行列 (n 次正方行列) の集合

$M_n(\mathbb{C})$　$n \times n$ 複素行列 (n 次正方行列) の集合

$$M_n(\mathbb{R}) \text{ or } M_n(\mathbb{C}) \ni A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^T$$ 行列の転置

$\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$　$A \in M_n(\mathbb{C})$ の共役

$A^* = \overline{A^T}$

$A \in M_n(\mathbb{C})$ が Hermite(行列) $\Leftrightarrow A^* = A$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ が対称 (行列) $\Leftrightarrow A^T = A$

$|A| = det(A)$　$A \in M_n(\mathbb{C})$ の行列式

$\lambda(A), \lambda_1(A), ..., \lambda_n(A)$　$A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値

数学の予備知識

以下の問いに答えよ。また，回答不能の場合はその理由 (「用語が分からない」「習っていない」「習ったけど忘れた」等) を書け。解答は [→ 各章] を参照せよ。

1. 自然数 ($\mathbb{N}$), 整数 ($\mathbb{Z}$), 有理数 ($\mathbb{Q}$), 実数 ($\mathbb{R}$), 複素数 ($\mathbb{C}$) とは何か？　説明せよ。[→ 第 2 章]
2. $a = 2.3456 \times 10^2$, $b = 3.1415$ とする。この時，$a + b$, ab, a/b の値を求めよ。[→ 第 2, 3 章]
3. 実係数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を，四則演算 ($\times, +, -, /$) と平方根 ($\sqrt{\ }$) しか計算できない電卓を使って求めたい。その手順を書け。[→ 第 3 章]
4. 数列 $a_n = ar^n$ $(n = 0, 1, 2, ...)(r, a$ は実定数) の部分和 $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_n$ の極限値 $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ が収束する条件を述べよ。また，収束する時の極限値 S を書け。[→ 第 2 章]
5. 一変数の実係数多項式 $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ について，以下の問いに答えよ。[→ 第 13 章]
   (a) 代数方程式 $p(x) = 0$ の解 (複素数解も含む) は最大幾つ存在するか？
   (b) 導関数 $p'(x)(= \frac{d}{dx}p(x))$ 及び不定積分 $\int p(x)dx$ を書け。
6. 一変数関数 $y = f(x)$ が，$x = a$ を含むある区間で n 回連続微分可能であるとする。この時，$x = a$ におけるこの関数の Taylor 展開式を書け。[→ 第 6 章]
7. $n \times n$ 実行列 $A = [a_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ と n 次元実ベクトル $\mathbf{b} = [b_1\ b_2\ ...\ b_n]^T$ に対して，以下の問いに答えよ。
   (a) $\mathbf{b}$ の「長さ」を表わす式を書け。[→ 第 8 章]
   (b) A の「逆行列」とはどんなものか，説明せよ。[→ 第 7 章]
   (c) 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満足する n 次元実ベクトル $\mathbf{x}$ が一意に定まる条件を述べよ。[→ 第 7 章]

8. 2 変数関数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ の Jacobi 行列を求めよ。[→ 第 12 章]
9. 常微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ において，初期値 $y(x_0) = y_0$ が与えられているとき，解 $y(x)$ が一意に定まる条件を述べよ。[→ 第 16 章]
10. 偏微分方程式の具体例を一つ以上挙げよ。[→ 第 19 章]