



554

Claude CHAUNIER

Singularité
141 av. de Saxe
69003 Lyon
France

June 22th, 1993

M. Sloane,

I purchased the 1973 edition of your Handbook of integer sequences on last March, a few time before I read in the Mathematical Intelligencer that a new edition is going to be issued this year. In spite of this issue, could you send me any supplements to the 1973 edition as proposed page 4?

Sincerely yours,

The Number of Orders with Thirteen Elements

CLAUDE CHAUNIER and NIK LYGERÖS

Departement de Mathématiques, Université de Lyon-1, 43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France and Singularité, 141 avenue de Saxe, 69003 Lyon, France

Communicated by I. Rival

(Received: 7 August 1992; accepted: 10 August 1992)

Abstract. The number of non-isomorphic posets on 13 elements is $P_{13} = 33,823,827,452^*$. This extends our previous result P_{12} which constituted the greatest known value. A table enumerates the posets according to their number of relations.

Mathematics Subject Classifications (1991). Primary 06-04; secondary 06A07, 05C30.

Key words. Unlabeled, partial orders, computer, enumeration.

Introduction

In 1932, D. H. Lehmer [5] proved that $2^{257} - 1$ was composite – whereas Mersenne believed it was prime – using an ordinary calculating-machine 2 hours a day for a year. As for us, we used nine Apollo workstations – in particular one 400, one 3500 and seven 2500 – for 6 months in order to achieve our calculations, and a VAX for 2 months and a RISC System/6000 for 2 weeks in order to partially verify them, all of that with a background, low priority basis. And thus an exhaustive verification still has to be done. On January 30th, 1952, the electronic calculating-machine SWAC managed by R. M. Robinson gave Lehmer's result in 48 seconds. Soon, it may possibly be the same for us.

Here we consider only pairwise non-isomorphic posets and note P_n (resp. P_n^r) the number of those posets having n elements (and r relations).

$0 \leq n \leq 6, P_n = 1; 1; 2; 5; 16; 63; 318;$

$P_7 =$	2 045	(1972)	J. Wright
$P_8 =$	16 999	(1977)	S. K. Das
$P_9 =$	183 231	(1984)	R. H. Möhring
$P_{10} =$	2 567 284	(1990)	J. C. Culberson and G. J. E. Rawlins
$P_{11} =$	46 749 427	(1990)	J. C. Culberson and G. J. E. Rawlins
$P_{12} =$	1 104 891 746	(1991)	C. Chaunier and N. Lygerös
$P_{13} =$	33 823 827 452	(1992)	

* An announcement of this result was sent to the *Abstracts of the A.M.S.* on July 4th, 1992. This work was partially supported by the CNRS – projet Médicis.

Results

The last value follows [4] – origin of this work – and [1] – where our algorithm is described. The following table gives the precise results.

r	P'_{13}	r	P'_{13}	r	P'_{13}	r	P'_{13}
0	1	20	36 606 102	40	1 805 816 407	60	6 096 379
1	1	21	63 090 851	41	1 633 935 577	61	3 796 733
2	3	22	103 573 457	42	1 446 444 433	62	2 320 757
3	7	23	162 384 152	43	1 253 457 366	63	1 391 478
4	19	24	243 809 985	44	1 063 880 995	64	817 624
5	47	25	351 390 204	45	884 825 225	65	470 396
6	133	26	487 237 576	46	721 452 090	66	264 558
7	354	27	651 206 672	47	576 924 933	67	145 258
8	1 014	28	840 404 152	48	452 654 555	68	77 647
9	2 874	29	1 048 785 819	49	348 576 046	69	40 260
10	8 305	30	1 267 416 540	50	263 545 083	70	20 165
11	23 513	31	1 484 925 018	51	195 684 307	71	9 660
12	65 215	32	1 688 672 630	52	142 728 742	72	4 391
13	173 481	33	1 865 878 896	53	102 283 393	73	1 862
14	441 249	34	2 005 172 954	54	72 028 601	74	714
15	1 062 532	35	2 097 659 160	55	49 849 120	75	241
16	2 419 194	36	2 138 021 170	56	33 906 587	76	66
17	5 194 267	37	2 124 818 344	57	22 666 616	77	12
18	10 529 510	38	2 060 635 454	58	14 891 283	78	1
19	20 169 973	39	1 951 423 800	59	9 613 263		

These results confirm R. Fraïssé's conjecture on unimodality. The values for $0 \leq r \leq 7$ agree with J. C. Culberson and G. J. E. Rawlins's [2], and the values for $66 \leq r \leq 78$ are confirmed by M. Ern e's formulae [3].

Acknowledgement

We thank S. Boukelmoune, D. Dore, F. Ducloux, T. Dumont, C. Harbine, J. Marchand, B. Morlaye, M. Pouzet, and O. Rozier.

References

1. C. Chaunier and N. Lyger s (1992) Progrès dans l'énumération des posets, *C. R. Acad. Sci. Paris* **314**, série I, 691–694.
2. J. C. Culberson and G. J. E. Rawlins (1991) New results from an algorithm for counting posets, *Order* **7**, 361–374.
3. M. Ern e, The number of partially ordered sets with more points than unrelated pairs, *Discrete Math.* (preprint).
4. R. Fraïssé and N. Lyger s (1991) Petits posets: dénombrement, représentabilité par cercles et «compenseurs», *C. R. Acad. Sci. Paris* **313**, série I, 417–420.
5. F. Le Lionnais (1983) *Les nombres remarquables*, Hermann.

Progrès dans l'énumération des posets

Claude CHAUNIER et Nik LYGERÖS

Résumé — On décrit l'algorithme qui a permis de calculer le nombre de posets à isomorphie près ayant 12 éléments : $P_{12} = 1\,104\,891\,746$ (¹), qui constitue actuellement la plus grande valeur connue dans cette énumération.

Progress in the enumeration of posets

Abstract — We describe what algorithm has enabled to compute the number of nonisomorphic posets on 12 elements: $P_{12} = 1,104,891,746$ (¹), which currently constitutes the greatest known value of this enumeration.

INTRODUCTION. — Dans cette Note, qui fait suite à [1], nous ne considérons que des posets non isomorphes 2 à 2. On note P_n le nombre de posets à n éléments. Le calcul exact de P_n est un problème très difficile et donc actuellement ouvert (voir [2]). Ainsi l'utilisation des ordinateurs est rendue nécessaire. Les recherches dans ce domaine ont commencé il y a une vingtaine d'années par l'obtention à la « main » de la première valeur non triviale P_7 par J. Wright [3]. Le premier calcul sur ordinateur, effectué par S. K. Das [4], donne P_8 . Pour calculer P_9 , R. H. Möhring [5] s'appuie sur l'identification des graphes de comparabilité en exploitant les données de R. C. Read et N. C. Wormald [6] sur les graphes. Enfin pour parvenir à P_{10} et P_{11} J. C. Culberson et G. J. E. Rawlins [7] élaborent le premier algorithme spécifique aux posets en s'appuyant sur la structure du poset des posets à n éléments. Quant à notre algorithme pour obtenir P_{12} , il est (entre autres) fondé sur une idée qui tire son origine heuristique de la théorie des fractals [8].

On a le tableau I :

TABLEAU I

$$0 \leq n \leq 6, \quad P_n = 1; 1; 2; 5; 16; 63; 318;$$

$P_7 =$	2 045	(1972)	J. Wright
$P_8 =$	16 999	(1977)	S. K. Das
$P_9 =$	183 231	(1984)	R. H. Möhring
$P_{10} =$	2 567 284	(1990)	J. C. Culberson et G. J. E. Rawlins
$P_{11} =$	46 749 427	(1990)	J. C. Culberson et G. J. E. Rawlins
$P_{12} =$	1 104 891 746	(1991)	

STRUCTURE DE L'ALGORITHME. — L'algorithme énumère les posets à n sommets en les générant tous. Pour cela on représente un poset $P = (\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, <)$ par sa matrice d'incidence $(a_{ij}) \in \{0, 1\}^{n^2}$ avec $a_{ij} = 1$ si et seulement si $x_i < x_j$. On améliore alors l'algorithme naïf consistant à générer toutes les matrices transitives et à éliminer celles qu'une permutation simultanée $(a_{\sigma(i)\sigma(j)})$ des lignes et colonnes rendrait égale à une matrice déjà produite. On privilégie un premier ordre sur les lignes et colonnes qui réduit considérablement l'ensemble des permutations à vérifier ainsi que la redondance parmi les matrices générées, en exigeant la

Note présentée par Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER.

A0112



posets
 labeled 1035
 unlabeled 112
 Topologies
 labeled 798
 unlabeled 1930

CONDITION 1. — La suite $(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ est décroissante, où $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$,

condition qui implique une proposition à rapprocher sans doute du lemme d'anticircularité de G. Birkhoff [9] :

PROPOSITION 1. — (a_{ij}) est plus que triangulaire supérieure, i.e. $\forall k, l/d_k = d_{k+l-1}$, les $l(l+1)/2$ coefficients a_{ij} , $k \leq i \leq j < k+l$, sur la diagonale et au-dessus, sont nuls.

La condition suivante permet d'identifier les permutations aux seuls automorphismes, suivant une méthode introduite par R. C. Read [10] :

CONDITION 2. — $(a_{1,n}, a_{1,n-1}, \dots, a_{1,1}, a_{2,n}, \dots, a_{n,1})$ est maximal pour l'ordre lexicographique de $\{0, 1\}^{n^2}$ en attribuant le plus grand poids à $a_{1,n}$.

Elle rend inutile la comparaison de chaque matrice produite avec les précédentes, et donc leur mémorisation : Il suffit d'éprouver sur la matrice qu'aucune permutation n'augmente le vecteur ci-dessus pour la compter. L'utilisation d'un backtracking pour ce test permet de gagner du temps, notamment sur les permutations diminuant le vecteur. Lorsque le vecteur est effectivement maximal, le test donne au passage tous les automorphismes du poset, ce qui s'avère utile dans une étude de la structure des posets plutôt que de leur seule quantité.

La conjonction des deux conditions permet de réduire encore la redondance de la génération. Elle entraîne ainsi la proposition suivante qui doit sa genèse à une notion appartenant à la théorie des fractals, l'autosimilarité :

PROPOSITION 2. — Pour tout i , soit A_i la partition des indices $\{1, 2, \dots, n\}$ réunissant j et j' dans une même classe si et seulement si $d_j = d_{j'}$ et $\forall k < i, a_{kj} = a_{kj'}$. Alors $\forall j < j'$ dans une même classe de A_i , on a $a_{ij} \leq a_{ij'}$.

Pour avoir connaissance des partitions A_i et limiter les valeurs possibles des lignes i correspondantes, il est donc avantageux de se donner la suite (d_i) avant de générer, par ordre croissant des lignes, les matrices qui possèdent cette suite de degrés. Par ailleurs l'ordre croissant des lignes simplifie la condition de transitivité, qui devient pour chaque ligne i :

$$(i < j < k, a_{ij} = 1 \text{ et } a_{ik} = 0) \Rightarrow a_{jk} = 0.$$

Connaissant d_j , on peut également éprouver que le nombre de coefficients nuls d'une ligne j ne dépasse pas $n - d_j$. Le fait que la génération d'une ligne dépende des précédentes justifie l'usage d'un backtracking d'indice i également dans la partie génératrice de l'algorithme.

Quand la dernière ligne est atteinte, les conditions 1 et 2 améliorent aussi le test validant la matrice obtenue :

PROPOSITION 3. — Pour éprouver la condition 2, l'indice i peut n'être permuté qu'avec les indices de sa classe dans A_i , $\forall i$.

L'efficacité est due au fait que la plupart des classes considérées ne contiennent qu'un sommet, à rapprocher de la rigidité de presque tous les posets [11]. Pour réduire les autres on utilise :

PROPOSITION 3 bis. — Il est inutile de permuter l'indice i avec les indices k de sa classe dans A_i qui ont des lignes identiques $(a_{ij})_{1 \leq j \leq n} = (a_{kj})_{1 \leq j \leq n}$.

Les deux conditions impliquent aussi une proposition déjà énoncée par C. J. Colbourn [12] et qui infiltre la génération des posets de la même façon que les propositions 1 et 2 :

PROPOSITION 4. — $\forall i < k$ dans la même classe de A_i , leur ligne vérifie pour l'ordre lexicographique :

$$(a_{i,n}, a_{i,n-1}, \dots, a_{i,1}) \geq (a_{k,n}, a_{k,n-1}, \dots, a_{k,1}).$$

Comparaison. — L'algorithme se présente donc ainsi :

— On décide de générer tous les posets dans un ordre quelconque, avec une génération superflue globale, élaguée ponctuellement par le test de canonicité (condition 2).

— On améliore cet élagage par la réduction du nombre des permutations à considérer (condition 1, propositions 3 et 3 bis).

— On déduit la génération superflue globale par une infiltration globale du test de canonicité dans la génération (propositions 1, 2 et 4).

Par comparaison, pour l'algorithme de Culberson et Rawlins :

— On décide de parcourir en profondeur d'abord, le poset des posets non étiquetés, avec une génération superflue locale, mais élaguée non localement.

— On améliore cet élagage par l'affaiblissement du test d'isomorphie qui devient un test d'abritement, ce qui implique une réduction de l'ensemble des posets à comparer au poset nouvellement produit.

— On déduit la génération superflue locale par une infiltration globale du test d'abritement dans la génération.

RÉSULTATS. — On obtient le tableau suivant, énumérant les posets à 12 éléments suivant la relation r (tableau II).

TABLEAU II

r	P'_{12}	r	P'_{12}	r	P'_{12}
0	1				
1	1	23	25 468 042	45	6 370 240
2	3	24	33 157 695	46	4 491 015
3	7	25	41 495 336	47	3 100 063
4	19	26	50 008 606	48	2 094 942
5	47	27	58 130 096	49	1 386 092
6	133	28	65 270 723	50	897 535
7	352	29	70 888 253	51	568 627
8	997	30	74 562 234	52	352 196
9	2 753	31	76 042 383	53	213 115
10	7 558	32	75 275 671	54	125 818
11	19 801	33	72 402 491	55	72 382
12	49 795	34	67 726 046	56	40 515
13	117 875	35	61 666 534	57	21 985
14	263 019	36	54 699 028	58	11 545
15	550 013	37	47 302 979	59	5 808
16	1 080 422	38	39 908 316	60	2 779
17	1 993 865	39	32 869 931	61	1 249
18	3 469 819	40	26 443 898	62	509
19	5 707 944	41	20 792 175	63	184
20	8 909 624	42	15 984 309	64	55
21	13 234 277	43	12 020 498	65	11
22	18 766 663	44	8 844 848	66	1

Remarques. -- Les valeurs pour $0 \leq r \leq 7$ coïncident avec celles obtenues par Culberson et Rawlins.

Les valeurs pour $55 \leq r \leq 66$ sont confirmées par les formules de M. Ern  [13].

– La multiplicité des machines utilisées ne permet de donner qu’une estimation du temps mis par notre implémentation de l’algorithme : 14 jours si on l’effectuait sur un microprocesseur 80486   25 MHz.

– La mémoire utilisée est asymptotiquement de n^3 bits, nécessitées seulement par l’empilement des conditions de transitivité lors du backtracking.

– Un gain de temps de 10 % est réalisé avec le langage C si l’on donne une puissance de 2 comme taille aux seconds indices des tableaux.

– Le fait que l’algorithme commence par définir la suite (d_i) permet un partitionnement fin des calculs.

Nous remercions R. Chaunier pour son aide constante, R. Frai ss  qui a été l’initiateur de ce projet, et surtout M. Pouzet sans qui P_{12} n’aurait jamais été obtenu.

Ce travail a été financé par le P.R.C. Math. et Info. C.N.R.S.

(¹) Une annonce de ce résultat a été envoyée aux « Abstracts de l’A.M.S. » le 3.10.1991.

Note remise le 2 novembre 1991, acceptée après révision le 11 mars 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. FRAI SS  et N. LYGERÖS, Petits posets : dénombrement, représentabilité par cercles et « compenseurs », *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, 1991, p. 417-420.
- [2] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, I, Wadsworth et Brooks col. math. ser., California, 1986.
- [3] J. WRIGHT, Cycle indicators of certain classes of types of quasi-orders or topologies, *Ph. Dissertation*, U. of Rochester, 1972.
- [4] S. K. DAS, A machine representation of finite T_0 topologies, *J. Assoc. Comp. Machinery*, 24, n  4, 1977, p. 676-692.
- [5] R. H. MÖHRING, Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs, in *Graph and Order*, I, RIVAL  d., Reidel, Dordrecht, 1985, p. 41-101.
- [6] R. C. READ et N. C. WORMALD, Catalogues of graphs and digraphs (announcement), *Discrete Math.*, 31, 1980, p. 224.
- [7] J. C. CULBERSON et G. J. E. RAWLINS, New results from an algorithm for counting posets, *Order*, 7, 1991, p. 361-374.
- [8] B. MANDELBROT, *Les objets fractals*, Flammarion, 1^{re}  dition, 1975.
- [9] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, A.M.S. colloque publ., 25, 3^e  dition, 1967.
- [10] R. C. READ, Every one a winner, *Ann. Discrete Math.*, 2, 1978, p. 107-120.
- [11] H. J. PR MEL, Counting unlabeled structures, *J. Comb. Theory*, s ries A 44, 1987, p. 83-93.
- [12] C. J. COLBOURN, *Graph generation*, Research Report CS-77-37, U. of Waterloo, 1977 (voir p. 100).
- [13] M. ERN , The number of partially ordered sets with more points than incomparable pairs, *Discrete Math.* (preprint).

O.L.N. et Laboratoire d’Analyse harmonique,
Universit  de Lyon-I, 43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 Villeurbanne Cedex.

The abstracts printed in this section were accepted by the American Mathematical Society for written presentation. An individual may present only one abstract by title in any one issue of the **Abstracts**, but joint authors are treated as a separate category. Thus, in addition to abstracts from two individual authors, one joint abstract by them may also be accepted for the same issue.

03 ► Mathematical Logic and Foundations

*92T-03-181

Gregory L. McColm, Department of Mathematics, University of South Florida, Tampa, FL 33620.
The dimension of the negation of transitive closure.

The "dimension" of a least fixed point (LFP) query is the least number of recursion variables required for any induction computing the query. This notion appeared in [CH], and is related to the arity of the relation variables required for a 2nd order definition of the query (note: monadic 2nd order = defined by a 2nd order formula containing only unary relation variables). (s,t) -reachability on digraphs is easily 1-dimensional LFP and hence monadic Π_1^1 ; nonreachability is not Π_1^1 on finite digraphs but is monadic Π_1^1 on finite graphs [AF]. In this paper, we prove that nonreachability is not 1-dimensional LFP on finite graphs, using the surgical techniques of [M].

References

- [AF] M. Ajtai & R. Fagin, "Reachability is harder for directed than for undirected graphs," *J. S. L. 55* (1990), 113-150.
 [CH] A. Chandra & D. Harel, "Structure and complexity of relational queries," *J. C. S. S. 25* (1982), 99-128.
 [M] G. McColm, "Eventual Periodicity and 'One-Dimensional' Queries," *Notre Dame J. Formal Logic 33* (1992), 273-290.
 (Received July 31, 1992)

06 ► Order, Lattices, Ordered Algebraic Structures

*92T-06-178

CLAUDE CHAUNIER and NIK LYGERÖS, Département de Mathématiques,
 Université Lyon-1, 43 bd. du 11 nov., 69622 Villeurbanne Cedex, France
The number of unlabeled posets with 13 elements.

The following list enumerates the non-isomorphic partial ordered sets on $n=13$ vertices, according to their increasing number r of edges, $0 \leq r \leq 78$:

$0 \leq r \leq 14$: 1; 1; 3; 7; 19; 47; 133; 354; 1014; 2874; 8305; 23513; 65215; 173481; 441249;
 $15 \leq r \leq 21$: 1062532; 2419194; 5194267; 10529510; 20169973; 36606102; 63090851;
 $22 \leq r \leq 27$: 103573457; 162384152; 243809985; 351390204; 487237576; 651206672;
 $28 \leq r \leq 33$: 840404152; 1048785819; 1267416540; 1484925018; 1688672630; 1865878896;
 $34 \leq r \leq 39$: 2005172954; 2097659160; 2138021170; 2124818344; 2060635454; 1951423800;
 $40 \leq r \leq 45$: 1805816407; 1633935577; 1446444433; 1253457366; 1063880995; 884825225;
 $46 \leq r \leq 51$: 721452090; 576924933; 452654555; 348576046; 263545083; 195684307;
 $52 \leq r \leq 57$: 142728742; 102283393; 72028601; 49849120; 33906587; 22666616;
 $58 \leq r \leq 65$: 14891283; 9613263; 6096379; 3796733; 2320757; 1391478; 817624; 470396;
 $66 \leq r \leq 78$: 264558; 145258; 77647; 40260; 20165; 9660; 4391; 1862; 714; 241; 66; 12; 1.

TOTAL : 33823827452. Although this has been obtained with care and an efficient method, some computers were running on a background job during six months so that an independent verification is desirable. (Received July 20, 1992) (Sponsored by Maurice Pouzet)

08 ► General Mathematical Systems

*92T-08-170

ARTHUR KNOEBEL, University of Tennessee, Knoxville, TN, 37996.
The Equivalence of Some Categories of Algebras and Sheaves.

The investigation into representing algebras (*AMS Abstracts*, 1992, 'The Categories of Algebras, Complexes and Sheaves') is concluded by taking full subcategories of $\mathbf{AlgBoole}$ and $\mathbf{SheafBoole}$ sufficiently restricted so that the previous adjoint situation $\langle \Phi, \Gamma, \eta, \epsilon \rangle$ becomes a categorical equivalence. An algebra of Davey [*Math. Z.* 134 (1973), pp. 275-290] is an algebra with a selected Boolean sublattice B of factor congruences. It is orthodox if the supremum of any proper ideal of B is proper. Let $\mathbf{AlgDavey}$ be the category of all orthodox algebras of Davey. **Proposition.** The image of $\mathbf{SheafBoole}$ under Φ is $\mathbf{AlgDavey}$. **Theorem.** The categories $\mathbf{AlgDavey}$ and $\mathbf{SheafBoole}$ are equivalent. Let $\mathbf{AlgComer}$ be the category of algebras of

PAPERS PRESENTED AT MEETINGS

THIS CALENDAR lists meetings of the Society which have been approved by the Council, at which papers may be presented. Programs of the meetings appear in *Notices*.

MEETING #	DATE	PLACE	ABSTRACT DEADLINE	ABSTRACT ISSUE
878	January 13-16, 1993 (99th Annual Meeting)	San Antonio, Texas	Expired	January
879	March 26-27, 1993	Knoxville, Tennessee	January 5	March
880	April 9-10, 1993	Salt Lake City, Utah	January 29	April
881	April 17-18, 1993	Washington, D.C.	January 29	April
882	May 21-22, 1993	DeKalb, Illinois	February 26	June
883	August 15-19, 1993 (96th Summer Meeting) (Joint Meeting with the Canadian Mathematical Society)	Vancouver, British Columbia	May 18	August
884	September 18-19, 1993	Syracuse, New York	May 18	August
885	October 1-3, 1993 (Joint Meeting with the Deutsche Mathematiker- Vereinigung e.V.)	Heidelberg, Germany	May 18	August
	October 22-23, 1993	College Station, Texas		
	January 12-15, 1994 (100th Annual Meeting)	Cincinnati, Ohio	August 4	October
	March 18-19, 1994	Lexington, Kentucky		
	March 25-26, 1994	Manhattan, Kansas		
	June 16-18, 1994	Eugene, Oregon		
	October 28-29, 1994	Stillwater, Oklahoma		
	January 25-28, 1995 (101st Annual Meeting)	Denver, Colorado		
	March 24-25, 1995	Chicago, Illinois		
	January 10-13, 1996 (102nd Annual Meeting)	Orlando, Florida		
	March 22-23, 1996	Iowa City, Iowa		