4 f

1333

Claude Soudieux

DE L'INFINI ARITHMÉTIQUE

ZÜRICH · SCHULTHESS & CO AG · 1960

Comme d'autre part

$$\frac{1}{\log[\infty]+C} > \frac{1}{[\infty]-\frac{1}{2}} > \frac{1}{[\infty]} > \frac{1}{\infty} ,$$

si $\frac{1}{\log[\infty]+C}$ se confond pratiquement avec 0, il en est de même de $\frac{1}{[\infty]-\frac{1}{2}}$

et l'on peut par conséquent poser

$$\lim_{n=\infty} M(n) \quad \text{ou} \quad M([\infty]) \sim 0 \quad .$$

ce qui vérifierait l'hypothèse de Riemann touchant les zéros complexes de la fonction Zeta, à savoir que

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = 0 \quad .$$

Il saute aux yeux que les inégalités qui précèdent n'ont de sens que si l'on admet la non-nullité de l'expression $(1-1)$ — et donc de celles qui lui sont liées — telle qu'elle résulte de l'application de la formule générale $(1-2^{1-n}) \cdot \zeta(n) = \zeta_1(n)$ au cas particulier de $n = 1$. Cela pourra heurter certains esprits conformistes, mais on voudra bien convenir qu'une hypothèse qui vérifie la validité d'une formule pour le cas qui en constitue l'unique dérogation s'apparente de très près à une preuve d'existence.

(3) Si l'on juge improbable la valeur

$$\sum_{s:1}^{\sim} \frac{1}{[\infty]^s} = 1 \quad .$$

on voudra bien considérer que la formule connue

$$\lim_{n=\infty} \sum_{s:0}^{n} \frac{1}{n+s} = \log 2$$

correspond dans notre notation à

$$\sum_{s:0}^{[\sim]} \frac{1}{[\infty]+s} = \log 2 \quad .$$

c.-à-d. à une valeur non nulle pour une somme de valeurs infimes toutes sauf une inférieures à $\frac{1}{[\infty]}$.

Il est d'ailleurs évident que

$$\sum_{s:0}^{[\sim]} \frac{1}{[\infty]+s} \sim \frac{1}{[\infty]} \sum_{s:1}^{[\sim]} \frac{1}{s} = (1-1) \cdot \zeta(1) = \zeta_1(1) = \log 2 \; .$$

CHAPITRE II

1. Suites fibonacciennes et proto-fibonacciennes

On connait la suite de Leonardo Pisano dit Fibonacci

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 21 \cdot 34 \cdot 55 \quad \ldots.$$

que Lucas, dans l'étude qu'il en fit, a complétée par les deux éléments initiaux 0 et 1, la transformant ainsi en

$$0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 21 \quad \ldots.$$

et posant, avec u_n comme élément de rang n.

$$u_0 = 0, \; u_1 = 1, \; u_2 = 1. \; u_3 = 2, \; u_4 = 3 \quad , \quad \ldots.$$

Nous noterons la suite Fibonacci-Lucas par $F(1)$ et ses éléments par $f_s(1)$ avec

$$f_0(1) = 0, \; f_1(1) = 1, \; f_2(1) = 1. \; f_3(1) = 2, \; \text{etc.} \quad \ldots.$$

Il est clair que la suite $F(1)$ est une des innombrables suites récurrentes que l'on peut former avec le paramètre n entier ou x réel ou même z complexe, suites $F(n, x, z)$ qui sont des fonctions de n, x ou z, et dont les éléments sont des polynomes en n. x ou z du même ordre moins un que leurs indices respectifs avec

$$\begin{aligned} f_0(n, x, z) &= 0 \\ f_1(n, x, z) &= n^0, x^0, z^0 = 1 \\ f_2(n, x, z) &= n^1, x^1, z^1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et avec la loi de formation

$$f_s(n, x, z) = (n, x, z) f_{s-1}(n, x, z) + f_{s-2}(n, x, z) \quad .$$

Nous limitant pour l'instant au cas de n entier et à titre d'exemples, nous voyons qu'à $F(1)$ correspond, pour $n = 2$,

$$F(2) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 29 \cdot 70 \cdot 169 \quad \ldots.$$

(c'est ce que Lucas appelle la suite de Pell), pour $n = 3$, new but dull

$$F(3) = 1 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 33 \cdot 109 \cdot 360 \quad \ldots\ldots$$

et en sens inverse, pour $n = 0$,

$$F(0) = 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \quad \ldots\ldots ,$$

pour $n = -1$,

$$F(-1) = 1 \cdot -1 \cdot 2 \cdot -3 \cdot 5 \cdot -8 \cdot 13 \cdot -21 \quad \ldots\ldots ,$$

pour $n = -2$,

$$F(-2) = 1 \cdot -2 \cdot 5 \cdot -12 \cdot 29 \cdot -70 \quad \ldots\ldots ,$$

$F(-n)$ reproduisant $F(n)$ avec les mêmes éléments, mais affectés alternativement des signes $+$ et $-$.

Nous donnerons à de telles suites le nom de suites récurrentes additives ou fibonacciennes, chacune d'elles constituant, nous l'avons dit, une succession de polynomes en n tels que

Indice:	1	2	3	4	5	6	....
Polynome:	n^0	n^1	n^2+1	n^3+2n	n^4+3n^2+1	n^5+4n^3+3n	....

dont les coefficients peuvent être ordonnés dans les tableaux suivants

1					1			
1					-1			
1	1				1	1		
1	2				$-(1$	$2)$		
1	3	1			1	3	1	
1	4	3			$-(1$	4	$3)$	
1	5	6	1		1	5	6	1
....					....			
pour $F(n)$					pour $F(-n)$,			

coefficients qui, comme l'a remarqué Lucas, reproduisent les éléments du triangle arithmétique de Pascal à cela près que chaque rangée commence deux rangées, et non une rangée, au-dessous de celle qui la précède dans ledit triangle.

Parallèlement à $F(n)$, nous appellerons suite récurrente soustractive ou proto-fibonaccienne (nous verrons pourquoi plus loin) et nous désignerons par $R(n)$ toute suite telle que pour chacun de ses éléments, avec $r_0(n) = 0$ et $r_1(n) = 1$, on a la loi de formation

$$r_s(n) = n \cdot r_{s-1}(n) - r_{s-2}(n) \quad .$$

On constitue ainsi une suite de polynomes en n

indice:	1	2	3	4	5	6	....
polynome:	n^0,	n^1.	$n^2 - 1$,	$n^3 - 2n$,	$n^4 - 3n + 1$,	$n^5 - 4n^3 + 3n$	....

dont les éléments peuvent être ordonnés dans les mêmes tableaux que les précédents, mais y figurent alternés

1				1			
1				—1			
1	—1			1	—1		
1	—2			—(1	—2)		
1	—3	1		1	—3	1	
1	—4	3		—(1	—4	3)	
1	—5	6	—1	1	—5	6	—1
....				....			
pour $R(n)$				pour $R(-n)$.			

Nous conviendrons d'appeler les suites $F(n)$ et $R(n)$ suites récurrentes canoniques (additives ou soustractives) pour les distinguer des suites issues d'elles et qui obéissent aux mêmes lois respectives de formation, mais dont l'un des deux éléments initiaux non nuls ou même les deux ensemble, c.-à-d. ceux de rangs 1 et 2, égaux respectivement à 1 et n, ont subi une altération qui se répercute et s'amplifie dans les éléments suivants.

2. Suites récurrentes non canoniques

A titre d'exemple considérons la suite canonique additive

$$F(2) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 29 \cdot 70 \cdot 169 \quad .... \quad ;$$

altérons-en l'élément de rang 2, c.-à-d., en le diminuant d'une unité, la loi de formation des éléments restant la même; on obtiendra la suite que nous désignerons par $F(2_{-1})$ et qui est telle que

$$F(2_{-1}) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 99 \quad ....$$ 1333

Si par contre on ajoute 1 à $f_2(2)$ au lieu de l'en soustraire, on obtient la suite

$$F(2_{+1}) = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 99 \quad \ldots.$$

(qui, dans ce cas particulier, reproduit $F(2_{-1})$ avec un rang d'avance, c.-à-d.

$$f_s(2_{+1}) = f_{s+1}(2_{-1}) \quad) .$$

Au lieu d'altérer l'élément $f_2(2)$, c.-à-d. 2, altérons l'élément $f_1(2)$, c.-à-d. 1, en l'augmentant de 1; on obtiendra ainsi une suite que nous noterons

$$F({}_{+1}2) = 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 34 \cdot 82 \cdot 198 \quad \ldots.$$

(qui, dans ce cas particulier, se trouve égaler $2\,F(2_{-1})$) .

Considérons maintenant la suite soustractive

$$R(3) = 1 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 55 \cdot 144 \quad \ldots. \;;$$

diminuant $r_2(3)$ de 1, on obtient la suite

$$R(3_{-1}) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 34 \cdot 89 \quad \ldots. ,$$

augmentant $r_2(3)$ de 1, on obtient la suite

$$R(3_{+1}) = 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 76 \cdot 199 \quad \ldots. ,$$

augmentant $r_1(3)$ de 1, on obtient la suite

$$R({}_{+1}3) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 18 \cdot 47 \cdot 123 \quad \ldots.$$

On voit qu'on peut de la sorte former une multitude de suites récurrentes irrégulières en fonction d'une suite canonique additive ou soustractive, telles que

$$F(n_{\pm m}),\; R(n_{\pm m}),\; F({}_{\pm m}n),\; R({}_{\pm m}n) \;.$$

les plus intéressantes, au moins pour notre propos, étant

$$F(n_{-1}),\; R(n_{-1}),\; F({}_{+1}n),\; R({}_{+1}n) \;.$$

On a en en effet, pour les éléments de ces dernières suites, les relations suivantes

$$f_s(n_{-1}) = d \cdot f_s(n) \text{ ou } \acute{f}_s(n) \quad \text{et} \quad r_s(n_{-1}) = d \cdot r_s(n) \text{ ou } \acute{r}_s(n)$$

$$f_s(n_{+1}) = f_s(n) + f_{s-1}(n) \quad \text{et} \quad r_s(n_{+1}) = r_s(n) + r_{s-1}(n)$$

par exemple

$$F(2) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 29 \cdot 70 \cdot 169 \cdot 408 \quad \ldots .$$
$$F(2_{-1}) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 99 \cdot 239 \quad \ldots .$$
$$F(2_{+1}) = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 99 \cdot 239 \cdot 577 \quad \ldots .$$

$$R(3) = 1 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 55 \cdot 144 \cdot 377 \cdot 987 \quad \ldots .$$
$$R(3_{-1}) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 34 \cdot 89 \cdot 233 \cdot 610 \quad \ldots .$$
$$R(3_{+1}) = 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 76 \cdot 199 \cdot 521 \cdot 1364 \quad \ldots .$$

ainsi que

$$f_{s+1}({}_{+1}n) = \frac{f_{2s}(n)}{f_s(n)} \qquad \text{et} \qquad r_{s+1}({}_{+1}n) = \frac{r_{2s}(n)}{r_s(n)} \quad ,$$

par exemple

$$F({}_{+1}1) = 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 34 \quad \ldots .$$

c.-à-d. $$= \frac{2}{1} \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{70}{5} \cdot \frac{408}{12} \quad \ldots .$$

$$R({}_{+1}3) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 18 \cdot 47 \cdot 123 \quad \ldots .$$

$$= \frac{3}{1} \cdot \frac{21}{3} \cdot \frac{144}{8} \cdot \frac{987}{21} \cdot \frac{6755}{55} \quad \ldots .$$

3. Suites récurrentes primitives

Recherchons maintenant qui, du mode additif manifesté dans les suites $F(n)$ et du mode soustractif manifesté dans les suites $R(n)$, est le mode primitif.

Dans ce but reprenons la suite $F(1)$ et séparons-en les éléments de rang pair (0 comptant comme tel) des éléments de rang impair; on obtient deux suites, l'une formée des éléments pairs

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 34 \cdot 89 \quad \ldots . \quad ,$$

l'autre formée des éléments impairs

$$1 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 55 \cdot 55 \cdot 144 \quad \ldots .$$

Il est évident que la dernière suite est la suite canonique soustractive ou proto-fibonaccienne $R(3)$, et que la première est la suite irrégulière $R(3_{-1})$ ou $d \cdot R(3)$ ou $\acute{R}(3)$, de sorte que la suite additive $F(1)$ ou suite de Fibonacci-Lucas est constituée par l'entrelacement, un à un, des éléments de deux séries soustractives, soit

$$F(1) = R(3_{-1}) + R(3)$$

ou plus exactement $\quad = R(3_{-1}) + 1 \cdot R(3) \quad ,$

car

$$\begin{aligned} F(2) &= 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 29 \cdot 70 \cdot 169 \quad \ldots . \\ &= R(6_{-1}) + 2 \cdot R(6) = d \cdot R(6) + 2 \cdot R(6) \quad , \end{aligned}$$

et d'autres exemples établiraient que d'une façon générale on a

$$\begin{aligned} F(n) &= R(n^2 + 2_{-1}) + n \cdot R(n^2 + 2) \\ &= d \cdot R(n^2 + 2) + n\, R(n^2 + 2) \end{aligned}$$

avec

$$f_{2s+1}(n) = r_s(n^2 + 2_{-1}) \quad \text{et} \quad f_{2s}(n) = n \cdot r_s(n^2 + 2) \quad .$$

Considérons maintenant la suite

$$R(3) = 1 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 55 \cdot 144 \cdot 377 \quad \ldots .$$

et séparons-en les éléments de rang pair et ceux de rang impair: on constate que

$$R(3) = R(7_{+1}) + 3 \cdot R(7) \quad ,$$

et que d'une façon générale on a

$$R(n) = R(n^2 - 2_{+1}) + n \cdot R(n^2 - 2)$$

avec

$$r_{2s+1}(n) = r_s(n^2 - 2_{+1}) \quad \text{et} \quad r_{2s}(n) = n \cdot r_s(n^2 - 2) \quad .$$

Parallèlement à $F(n)$ et $R(n)$ on a, pour n entier négatif,

$$F(-n) = R(n^2 + 2_{-1}) - n \cdot R(n^2 + 2) \quad ,$$

par exemple

$$
\begin{aligned}
F(-3) &= 1 \cdot -3 \cdot 10 \cdot -33 \cdot 109 \cdot -360 \cdot 1189 \cdot -3927 \quad \ldots . \\
&= (1 \cdot 10 \cdot 109 \cdot 1189 \ldots .) - 3(1 \cdot 11 \cdot 120 \cdot 1309 \ldots .) \\
&= R(3^2 + 2_{-1}) - 3 \cdot R(3^2 + 2) = R(11_{-1}) - 3 \cdot R(11);
\end{aligned}
$$

et $R(-n) = R(n^2 - 2_{+1}) - n \cdot R(n^2 - 2)$,

par exemple

$$
\begin{aligned}
R(-4) &= 1 \cdot -4 \cdot 15 \cdot -56 \cdot 209 \cdot -780 \cdot 2911 \cdot -10\,864 \quad \ldots \\
&= (1 \cdot 15 \cdot 209 \cdot 2911 \ldots .) - 4(1 \cdot 14 \cdot 195 \cdot 2716 \ldots .) \\
&= R(4^2 - 2_{+1}) - 4\, R(4^2 - 2) = R(14_{+1}) - 4 \cdot R(14);
\end{aligned}
$$

et ces lois de formation s'appliquent même aux cas où n est imaginaire, par exemple, avec $n = i$,

$$
\begin{aligned}
F(i) &= R(i^2 + 2_{-1}) + iR(i^2 + 2) \\
F(-i) &= R(i^2 + 2_{-1}) - i \cdot R(i^2 + 2) \\
R(i) &= R(i^2 - 2_{+1}) + iR(i^2 - 2) \\
R(-i) &= R(i - 2_{+1}) - i \cdot R(i^2 - 2) \quad .
\end{aligned}
$$

Ce qui précède montre bien que ce sont des éléments $r_s(n)$ qui constituent non seulement les suites $R(\pm n)$, mais aussi les suites $F(\pm n)$, à savoir $r(n^2 - 2)$ et variante pour $R(\pm n)$, $r(n^2 + 2)$ et variante pour $F(\pm n)$. Il est ainsi établi que les suites soustractives sont primitives par rapport aux suites additives, et c'est dans ce sens qu'on peut appeler proto-fibonacciennes les suites $R(n)$ et leurs variantes.

4. Séries récurrentes

Les séries résultant des suites récurrentes canoniques, c.-à-d. $\overset{\sim}{\sum\limits_{s:1}} f_s(\pm n)$, $\overset{\sim}{\sum\limits_{s:1}} r_s(\pm n)$, ou non canoniques, c.-à-d. $\overset{\sim}{\sum\limits_{s:1}} f_s(\pm n_{\mp m})$, $\overset{\sim}{\sum\limits_{s:1}} f_s({}_{\pm m} \pm n)$, $\overset{\sim}{\sum\limits_{s:1}} r_s(\pm n_{\pm m})$, $\overset{\sim}{\sum\limits_{s:1}} r_s({}_{\pm m} \pm n)$, sont divergentes mais sommables (E, q) pour les séries $\overset{\sim}{\sum\limits_{s:1}} f_s(-n)$ et variantes, et pour les séries $\overset{\sim}{\sum\limits_{s:1}} r_s(\pm n)$ où $n < 2$;

pour $n > 0$ et 2 respectivement, elles sont pseudo-sommables (E, q) (on verra plus loin ce que nous entendons par là).

Etant donné que, comme nous venons de le montrer, l'élément d'une suite additive quelconque $f_s(n)$ se réduit à un élément de suite soustractive $r_{\frac{s}{2}}(n^2 + 2_{-1})$ ou $nr_{\frac{s+1}{2}}(n^2 + 2)$, ce sont essentiellement les séries formées d'éléments $r_s(n)$ qu'il importe d'étudier et de calculer.

Pour $n < 2$ on a les séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} r_s(\pm 0) = 1 \pm 0 - 1 \pm 0 + 1 \pm 0 - 1 \pm \quad \ldots.$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} - \frac{2}{16} - \frac{4}{32} - \frac{4}{64} + \frac{0}{128} + \frac{8}{256} + \frac{16}{512} - \frac{16}{1024} - \frac{0}{2048} - \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \quad (E, 1), \text{ c.-à-d. } \frac{1}{2 \pm 0},$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} r_s(1) = 1 + 1 + 0 - 1 - 1 - 0 + 1 + 1 + 0 - \quad \ldots.$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{0}{32} - \frac{9}{64} - \frac{27}{128} - \frac{54}{256} - \frac{81}{512} + \frac{0}{1024} + \frac{243}{2048} + \ldots$$

$$= 1 \quad (E, 1) \text{ . c.-à-d. } \frac{1}{2 - 1},$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} r_s(-1) = 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 - 0 + \quad \ldots.$$

$$= \frac{1}{3} \quad (E, 1) \text{ , c.-à-d. } \frac{1}{2 - (-1)} \quad \frac{1}{2 + 1}.$$

De très simples calculs portant sur des séries analogues

$$\sum_{s=1}^{\infty} r_s(-2) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots. = \frac{1}{4} \quad (E, 1),$$

$$\text{c.-à-d. } \frac{1}{2 + 2},$$

$$\overset{\sim}{\sum_{s:1}} r_s(-3) = 1 - 3 + 8 - 21 + 55 - 144 + \ldots = \frac{1}{5} \quad (E, 1),$$

$$\text{c.-à-d.} \quad \frac{1}{2+3},$$

$$\overset{\sim}{\sum_{s:1}} r_s(-4) = 1 - 4 + 15 - 56 + 209 - 780 + \ldots = \frac{1}{6} \quad (E, 1),$$

$$\text{c.-à-d.} \quad \frac{1}{2+4},$$

font pressentir une valeur

$$\overset{\sim}{\sum_{s:1}} r_s(\pm n) = \frac{1}{2-(\pm n)} \quad (E, q) \qquad \text{(a)}$$

pour $n<2$, ce qui revient à $\frac{1}{2+n}$ (E, 1) pour n négatif.

Il est d'ailleurs évident que pour x quelconque tel que $0<x<1$, si la formule (a) est correcte, on doit avoir

$$\overset{\sim}{\sum_{s:1}} r_s(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1+(1-x)} = \overset{\sim}{\sum_{s:1}} (-1)^{s+1}(1-x)^s \qquad \text{(a')},$$

c.-à-d. une équivalence de la série géométrique alternée, comme le montre l'exemple suivant:

faisant $x = 0{,}01$, on a par les differences

$$\overset{\sim}{\sum_{s:1}} r_s(0{,}01) = 1 + 0{,}01 - 0{,}9999\ldots - 0{,}019999\ldots + 0{,}999700\ldots$$
$$+ 0{,}029996\ldots - 0{,}99910003\ldots - 0{,}3999819\ldots + 0{,}99900001\ldots$$
$$+ 0{,}049982\ldots\ ,$$

soit, en bloquant en un seul les deux éléments, successifs de même signe,

$$= 1{,}01 - 1{,}019899\ldots + 1{,}029696\ldots - 1{,}0393920\ldots + 0{,}049982\ldots$$

$$= \frac{1{,}01}{2} - \frac{0{,}009899\ldots}{4} - \frac{0{,}000102}{8} - \frac{0{,}000001}{16} \ldots \quad (E, 1)$$

$$= 0{,}502512\ldots \quad (E, 1)\ ,$$

Soit

$$F(2) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 29 \cdot 70 \cdot 169 \cdot 408 \quad \ldots.$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} F(2_{-1}) &= d \cdot F(2) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 99 \quad \ldots. \\ &= 1 \cdot (2 - 1) \cdot (5 - 2) \cdot (12 - 5) \cdot (29 - 12) \quad \ldots. \\ &= (1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 12 \quad \ldots.) \quad - \quad (1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 12 \quad \ldots.) \\ &= F(2) - F(2) = 0 \quad , \end{aligned}$$

ce qui se traduit dans la série correspondante par

$$\sum_{s:1}^{\infty} f_s(2_{-1}) = \frac{1-1}{0-2} = \frac{0}{-2} = 0 \quad (\text{ps E}, 1) \quad .$$

Soit

$$R(5) = 1 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 115 \cdot 551 \cdot 2610 \cdot 12\,649 \quad \ldots..$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} R(5_{-1}) &= dR(5) = 1 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 91 \cdot 436 \cdot 2089 \cdot 10\,009 \quad \ldots. \\ &= 1 \cdot (5 - 1) \cdot (24 - 5) \cdot (115 - 24) \cdot (551 - 115) \quad \ldots. \\ &= (1 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 115 \quad \ldots.) - (1 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 115 \quad \ldots.) \\ &= R(5) - R(5) = 0 \quad . \end{aligned}$$

ce qui se traduit dans la série correspondante par

$$\sum_{s:1}^{\infty} r_s(5_{-1}) = \frac{1-1}{2-5} = \frac{0}{-3} = 0 \quad (\text{ps E}, 1) \quad .$$

En d'autres termes et plus généralement, de

$$F(n_{\pm m}),\ R(n_{\pm m}) = F(n),\ R(n) \pm m \cdot F(n),\ m \cdot R(n)$$

résulte

$$\sum_{s:1}^{\infty} f_s(n_{\pm m}),\ \sum_{s:1}^{\infty} r_s(n_{\pm m}) = \sum_{s:1}^{\infty} f_s(n),\ \sum_{s:1}^{\infty} r_s(n) \pm m \cdot \sum_{s:1}^{\infty} f_s(n),\ m \cdot \sum_{s:1}^{\infty} r_s(n) \quad ,$$

de même que

$$F({}_{+1} \pm n),\ R({}_{+1} \pm n) = -1$$

entraine

$$\sum_{s:1}^{\sim} f_s({}_{+1} \pm n),\ \sum_{s:1}^{\sim} r_s({}_{+1} \pm n) = -1 \quad (E, 1 \text{ ou ps } E, 1)\ .$$

6. Séries dérivées et intégrales

Seules concernent notre sujet les dérivées et intégrales premières; c'est donc essentiellement elles que nous étudierons.

Nous avons déjà vu que

$$\sum_{s:1}^{\mu} r_s(n_{-1}) = r_\mu(n)$$

$$\sum_{s:1}^{\mu} f_s(n_{-1}) = f_\mu(n) \quad ,$$

c.-à-d. — en notant la dérivée soit par le d classique, soit de préférence par un accent aigu qui coiffe la lettre significative —

$$\acute{r}_\mu(n) = r_\mu(n_{-1})$$

$$\acute{f}_\mu(n) = f_\mu(n_{-1}) \quad ,$$

par les exemples déjà cités

$$r(3) = 1 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 55 \cdot 144 \cdot 377 \cdot 987 \quad \ldots .$$

$$\acute{r}(3) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 34 \cdot 89 \cdot 233 \cdot 610 \quad \ldots .$$

$$f(2) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 29 \cdot 70 \cdot 169 \cdot 408 \quad \ldots .$$

$$\acute{f}(2) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 99 \cdot 239 \quad \ldots .$$

L'intégrale de $r_\mu(n)$ est évidemment $\sum_{s=1}^{\mu} r_s(n)$, et celle de $f_\mu(n)$, $\sum_{s=1}^{\mu} f_s(n)$ que nous noterons pour simplifier par $Ir_\mu(n)$ ou $If_\mu(n)$ ou, de préférence, par un trait horizontal coiffant la lettre caractéristique $\bar{r}$ ou $\bar{f}$.

Il n'est pas inutile de relever, bien que ce soit évident, que $r_\mu(n_{+1})$ ne se confond pas avec $\bar{r}_\mu(n)$ ni $f_\mu(n_{+1})$ avec $\bar{f}_\mu(n)$, puisqu'on a

$$\begin{aligned} r_\mu(n_{+1}) &= r_\mu(n) + r_{\mu-1}(n) = \bar{r}_\mu(n) - \bar{r}_{\mu-2}(n) \\ f_\mu(n_{+1}) &= f_\mu(n) + f_{\mu-1}(n) = \bar{f}_\mu(n) - \bar{f}_{\mu-2}(n) \quad ; \end{aligned}$$

les formules les plus suggestives sont toutefois les suivantes

$$\bar{r}_\mu(n) = \frac{1}{n-2} \cdot (r_{\mu+1}(n) - 1) = \frac{1}{n-2} \cdot (r_{\mu+1}(n_{-1}) - 1) \quad ,$$

$$\bar{f}_\mu(n) = \frac{1}{n} \cdot (f_{\mu+1}(n_{+1}) - 1)$$

pour $n > 2$ dans $r(n)$ et $n > 0$ dans $f(n)$.

Soit par exemple

μ :	1	2	3	4	5	6	....
$r_\mu(4)$:	1	4	15	56	209	789	....
$\acute{r}_\mu(4)$:	1	3	11	41	153	571	....
$\bar{r}_\mu(4)$:	1	5	20	76	285	1065	....
$r_\mu(4_{+1})$:	1	5	19	71	265	989	.... ,

on a bien

$$\bar{r}_1(4) = 285 = \frac{571-1}{4} = \frac{1}{4-2} \cdot (r_5(4) - 1)$$

$$r_6(4_{+1}) = 989 = 1065 - 76 = \bar{r}_6(4) - \bar{r}_4(4) \quad ;$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
\mu : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\
f_\mu(4) : & 1 & 4 & 17 & 72 & 305 & 1292 & \ldots \\
f_\mu(4_{+1}) : & 1 & 5 & 21 & 89 & 377 & 1597 & \ldots \\
f_\mu(4) : & 1 & 5 & 22 & 94 & 399 & 1691 & \ldots
\end{array} ,$$

on a bien

$$f_4(4) = 94 = \frac{377 - 1}{4} = \frac{1}{4}\,(f_5(4_{+1}) - 1) \quad ,$$

$$f_5(4_{+1}) = 1597 = 1691 - 94 = f_6(4) - f_4(4) \quad .$$

Parmi les séries non canoniques à citer ici et bien qu'elles ne soient pas, à proprement parler, des séries dérivées, figurent les séries $\overset{\smile}{\sum\limits_{s:1}} r_s({}_{+1} \pm n)$ et $\overset{\smile}{\sum\limits_{s:1}} f_s({}_{+1} \pm n)$.

Nous avons vu précédemment que

$$\overset{\smile}{\sum_{s:1}} r_s({}_{+1}0{,}01) = \overset{\smile}{\sum_{s:1}} r_s({}_{+1} - 0{,}01) = +1 \quad (E, 1) \quad :$$

on a de même

$$\overset{\smile}{\sum_{s:1}} r_s({}_{+1} \pm n) = +1 \quad (E, q \quad \text{ou} \quad \text{ps } E, q) \quad ,$$

par exemple

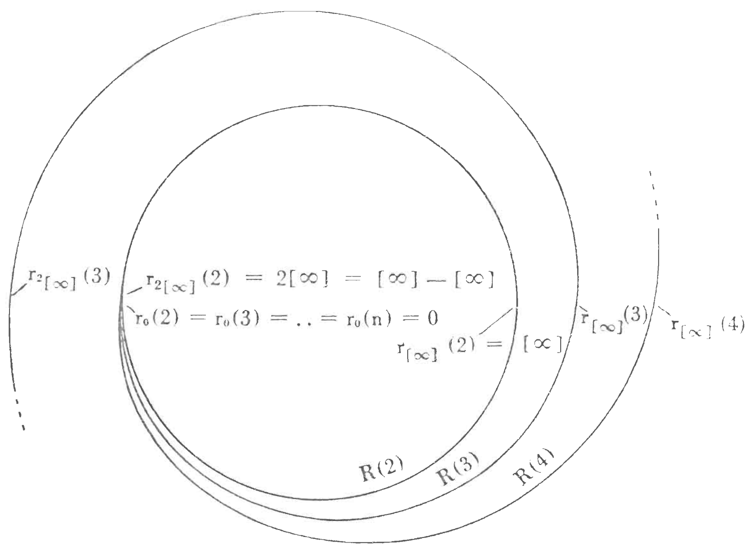
$$\begin{aligned}
\overset{\smile}{\sum_{s:1}} r_s({}_{+1}3) &= 2 + 3 + 7 + 18 + 47 + 123 + 322 - \ldots \\
&= 1 + 1 + 3 + 8 - 1 + 21 - 3 + 55 - 8 + 144 - 21 - \ldots \\
&= 1 + (1 + 3 + 8 + 21 + ..) - (1 + 3 + 8 + 21 + ..) \\
&= 1 + \overset{\smile}{\sum_{s:1}} r_s(3) - \overset{\smile}{\sum_{s:1}} r_s(3) \\
&= 1
\end{aligned}$$

définissent essentiellement des ordinations d'ensembles et constituent par là des projections de structures, des comprimés de formes sans matière numérique palpable.

Quant aux transfinis cardinaux, les aleph de Cantor, il est clair que la dénombrabilité incomplète des ensembles d'entiers $R(2+k)$ devrait déterminer un réajustement de leur ordre et par là même susciter un nouvel examen critique des fondements de la Théorie des Ensembles, qui n'en est pas d'ailleurs à ses premières contradictions.

.2. Image géométrique des $R(2+k)$

Nous avons assimilé la suite $R(2)$ à un cercle dont une moitié contient comme points le nombre 0 et les entiers naturels et dont l'autre moitié est constituée par des nombres imaginaires que nous avons qualifiés d'anti-entiers et qui sont, grosso modo, la contrepartie négative des premiers. La véritable infinitude d'une suite quelconque $R(2+k)$ et le pas de progression de ses éléments, différent pour chacun de celui qui le suit alors qu'il est le même pour tous dans $R(2)$, suggère une courbe ouverte et qui s'éloigne régulièrement de la courbe fermée $R(2)$ selon une loi propre à chaque suite $R(2+k)$. La courbe la plus adéquate semble être une spirale logarithmique, comme le montre — grossièrement — la figure suivante:



On y voit que les $R(2+k)$, partant des mêmes éléments 0 et 1 que $R(2)$, développent autour du cercle figuré par $R(2)$ une spirale qui comporte un écart croissant d'autant plus vite que k est plus grand, tous les $r_{[\infty]}(2+k)$ se trouvant sur le même axe que $r_{[\infty]}(2)$ c.-à-d. $[\infty]$, de même que tous les $r_{2[\infty]}(2+k)$ par rapport à $r_{2[\infty]}(2)$, c.-à-d. $2[\infty]$ ou 0, et plus généralement tous les $r_{s[\infty]}(2+k)$ par rapport à $r_{s[\infty]}(2)$ ou $s[\infty]$.

On ne sera pas surpris que la spirale convienne à l'image qu'on peut se faire des suites $R(2+k)$ si l'on se rappelle que les séries des inverses des éléments $r_s(2+k)$ affectent dans le quadrant trigonométrique ou dans son voisinage la forme de séries loxodromiques.

.3. Nombres impairs et pairs des suites R(n)

Dans $R(2)$ le nombre impair correspond aussi bien aux éléments de $R(2_{+1})$ qu'à ceux de $R(2^2-2_{+1})$, la première forme, plus simple, semblant plus naturelle que la seconde, mais de l'examen de la forme générale

$$R(n) = R(n^2-2_{+1}) + n \cdot R(n^2-2)$$

il ressort que c'est pourtant la seconde qui est valable. Ainsi, prenant comme exemple $R(3)$, si l'on forme une suite $R(3^2-2_{+1})$ avec les éléments de rang impair et qu'on en tire l'intégrale $R(3^2-2_{+1})$, on retrouve les carrés des éléments de la série orginelle $R(3)$ tout comme il advient pour $R(2)$;

μ:	1	2	3	4	5	....
$r_\mu(3)$:	1	3	8	21	55	....
$r_\mu(7_{+1})$:	1	8	55	377	2584	....
$r(7_{+1})$:	1	9	64	441	3025	....
—	1^2	3^2	8^2	21^2	55^2	....

alors que si l'on adopte $R(3_{+1})$ — et plus généralement $R(n_{+1})$ — comme la forme impaire, il vient par le même procédé

μ:	1	2	3	4	5	6	7	....
$r_\mu(3)$:	1	3	8	21	55	144	377	....
$r_\mu(3_{+1})$:	1	4	11	29	76	199	521	....
$\bar{r}_\mu(3_{+1})$:	1	5	16	45	121	320	841	....
—	1^2	$5 \cdot 1^2$	4^2	$5 \cdot 3^2$	11^2	$5 \cdot 8^2$	29^2	.... .

c.-à-d. une forme générale

$$\sum_{s:1}^{\mu} r_s(n_{+1}) = \bar{r}_\mu(n_{+1}) = (r_\mu(\sqrt{n+2}))^2 = r^2_\mu(\sqrt{n+2})$$

$$= r_{\frac{\mu+1}{2}}(n_{+1}) \quad \text{pour } \mu \text{ impair}$$

$$= (n+2) \cdot r_{\frac{\mu}{2}}(n) \quad \text{pour } \mu \text{ pair} \quad .$$

La suite $\bar{R}(n)$ n'est donc pas celle qui produit les impairs des suites $R(n)$, mais elle engendre ce qu'on peut appeler des pseudo-carrés, car on a

$$\frac{1}{2}\left(\bar{r}_\mu(n_{+1}) + r_\mu(n)\right) = \bar{r}_\mu(n)$$

comme par exemple

$$\bar{r}_2(3) = \frac{5+3}{2} = 4, \quad \frac{16+8}{2} = 12 = \bar{r}_3(3), \quad \frac{45+21}{2}$$

$$= 33 = \bar{r}_4(3) \ ,$$

c.-à-d. l'équivalent des nombres triangulaires $\frac{n^2+n}{2}$ dans $R(2.)$

En bref, la suite $R(2)$ peut former les carrés de ses éléments par deux mécanismes et les suites $R(2+k)$ par un seul, le mécanisme qui manque à ces dernières produisant des pseudo-carrés et des pseudo-triangles, qui se trouvent pour $R(2)$ coïncider avec les vrais.

Les éléments d'indices pairs dans R(2 + k) correspondent aux nombres pairs dans R(2) et à la partie n · R(n² — 2) de R(n), les éléments 2 r(2), 3 r(7), 4 r(14), 5 r(23), etc. . . . constituent donc les nombres pairs dans les suites R(2), R(3), R(4), R(5), etc. . . .

.4. Nombres premiers des suites R(n)

Il est évident que la définition du nombre premier doit être étendue à toutes les suites analogue à R(2) et qu'en conséquence un nombre premier dans une suite quelconque R(n) est un élément qui n'est divisible que par deux éléments de cette suite, à savoir l'élément unité et soi-même. Or, si l'on compare les premiers éléments des suites R(2), R(3), R(4), R(5):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 . .
1	3	8	21	55	144	377	987	2 584	6 765	17 711 . .
1	4	15	51	209	780	2 911	10 864	40 545	151 316	564 719 . .
1	5	24	115	551	2640	12 649	61 605	295 376	1 115 875	6 783 999 . .

on constate que

1) les éléments de R(3), R(4), R(5) dont l'indice correspond à un nombre premier dans R(2) sont premiers dans leur suite respective, c.-à-d. divisibles par nul autre élément que soi-même et l'unité.

2) dans ces suites et plus généralement dans toute suite canonique R(2 + k), aucun élément n'est absolument premier — autrement dit premier dans R(2) —, sauf le nombre-mère r_2 (2 + k) s'il se trouve être premier dans R(2) et qui, si tel est le cas, est le seul premier de rang pair de sa suite comme est 2 dans R(2). Ce fait est du, comme on l'a vu dans la section précédente, à ce que tous les éléments impairs d'une suite quelconque, à la classe générale desquels appartient la sous-classe des nombres premiers, sont les produits de deux éléments $r_{\frac{2\sigma+1}{2}}(n_{-1})$ et $r_{\frac{2\sigma+1}{2}}(n_{+1})$, les impairs de R(2) et donc les premiers de R(2) étant eux-mêmes de tels produits mais avec un facteur, $r_{\frac{2\sigma+1}{2}}(2_{-1})$, toujours égal à l'unité et laissant par conséquent inchangé l'autre facteur. Il en résulte que les nombres premiers d'une suite quelconque R(2 + k) sont aussi absolus dans leur suite que les premiers de R(2) dans la leur.