

# Percorsi tra i numeri

Umberto Cerruti  
Università di Torino

## 1 Il Grafo $\mathcal{N}_\alpha$ e la sequenza dei suoi gradi

Ci muoveremo su un grafo che ha  $\mathbb{N}$  come insieme dei vertici, con una relazione di adiacenza diversa da quella che abbiamo utilizzato in [2]. Si veda [2] per tutte le definizioni non esplicitamente date nel seguito.

La nuova relazione è la seguente.

**Definizione 1.** Definiamo in  $\mathbb{N}$  una relazione di adiacenza, detta  $\alpha$

$$a\alpha b \text{ se e solo se } a - b \text{ divide } ab$$

equivalentemente

$$a\alpha b \text{ se e solo se } \frac{ab}{a-b} \in \mathbb{Z}$$

dove  $\mathbb{Z}$  è, come al solito, l'insieme dei numeri interi relativi.

Diciamo  $\mathcal{N}_\alpha$  il grafo (non orientato) che ha  $\mathbb{N}$  come insieme di vertici e  $\alpha$  come relazione di adiacenza.

Osserviamo che la definizione è perfettamente simmetrica in  $a$  e  $b$ , e quindi  $a\alpha b \iff b\alpha a$ .

Dato  $a \in \mathbb{N}$ , diciamo dintorno di  $a$ ,  $\mathcal{D}_\alpha(a)$ , l'insieme dei vertici adiacenti ad  $a$ , ovvero

$$\mathcal{D}_\alpha(a) = \{b \in \mathbb{N} : a\alpha b\}$$

Si noti che, ovviamente,  $a$  non fa parte del suo dintorno.

Per esempio

$$\mathcal{D}_\alpha(12) = \{3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 36, 48, 60, 84, 156\}$$

Il dintorno di 12 contiene quindi 22 elementi. L'ordine del dintorno di  $a$  è il grado del vertice  $a$

$$\deg_{\mathcal{N}_\alpha}(a) = |\mathcal{D}_\alpha(a)|$$

La sequenza dei gradi  $\deg_{\mathcal{N}_\alpha}(a)$ , con  $a = 1, 2, \dots$  inizia così (elenco dei primi 30 valori)

1, 4, 4, 7, 4, 13, 4, 10, 7, 13, 4, 22, 4, 13, 13, 13, 4, 22, 4, 22, 13, 13, 4, 31, 7, 13, 10, 22, 4, 40

Se inseriamo i dati in OEIS troviamo la sequenza [A146564](#). In effetti nel testo viene detto che  $A146564(n)$  è il numero dei  $k > 0$  tali che

$$\frac{kn}{k-n} \in \mathbb{Z}$$

Pertanto, vista la Definizione 1,  $A146564(n)$  è proprio il numero dei vertici adiacenti a  $n$ .

Esiste però un modo molto più semplice e diretto per calcolare  $\deg_{\mathcal{N}_\alpha}(a)$ , basato sulle seguente proprietà.

**Teorema 1.**

*Sono equivalenti:*

1.  $a - b$  divide  $ab$
2.  $a - b$  divide  $a^2$
3.  $a - b$  divide  $b^2$

*Dimostrazione.* Poniamo  $d = a - b$ .

Supponiamo che  $a - b$  divida  $ab$ . Esiste allora  $s \in \mathbb{Z}$  tale che  $ab = sd$ . Quindi

$$a = b + d \Rightarrow a^2 = ab + ad \Rightarrow a^2 = sd + ad \Rightarrow d \mid a^2$$

Supponiamo viceversa che  $d \mid a^2$ . Allora esiste  $z \in \mathbb{Z}$  tale che  $a^2 = zd$ . Quindi

$$\frac{ab}{a-b} = \frac{a^2}{a-b} - a = \frac{a^2}{d} - a = z - a \in \mathbb{Z}$$

e segue che  $a - b$  divide  $ab$ .

Pertanto la 1. e la 2. sono equivalenti.

Vediamo ora che sono equivalenti la 2. e la 3.

Supponiamo che  $d \mid a^2$  e  $a^2 = zd$ . Allora

$$b^2 = (a - d)^2 = a^2 - 2ad + d^2 = zd - 2ad + d^2$$

e pertanto  $d \mid b^2$ .

Allo stesso modo si vede che  $d \mid b^2 \Rightarrow d \mid a^2$ .

□

A questo punto è chiaro come ci si muove nel grafo  $\mathcal{N}_\alpha$ . Se siamo in  $a \in \mathbb{N}$ , i nostri movimenti sono determinati dai divisori di  $a^2$ , ovvero dall'insieme  $\text{Div}(a^2)$ . I vertici adiacenti ad  $a$ , quelli che possiamo raggiungere in un passo, sono esattamente i numeri

$$b = a - d, \quad \text{dove } d = \pm\delta \quad \text{e } \delta \in \text{Div}(a^2) \quad \text{e } b > 0$$

Possiamo dividere il dintorno di  $a$  in due parti, quella formata dagli elementi  $< a$  (i predecessori) e quella formata dagli elementi  $> a$ , detti *successori*. Poniamo

$$\text{pred}(a) = \{b \in \mathcal{D}_\alpha(a) : b < a\}, \quad \text{succ}(a) = \{b \in \mathcal{D}_\alpha(a) : b > a\}$$

Vediamo quanti sono i predecessori e i successori di  $a$ .

**Teorema 2.**

1.

$$|\text{pred}(a)| = \frac{\tau(a^2) - 1}{2}$$

2.

$$|\text{succ}(a)| = \tau(a^2)$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $d = a - b$ .

Dimostriamo la 1.

In questo caso  $d > 0$ ,  $d \in \text{Div}(a^2)$  e  $b = a - d$ . Poiché  $b > 0$ , si deve avere  $d < a$ . Pertanto il numero dei predecessori è uguale al numero dei divisori di  $a^2$  minori di  $a$ . Se  $a$  è il prodotto dei  $p_i^{e_i}$ , sappiamo che  $\tau(a) = \prod (e_i + 1)$ . Quindi  $\tau(a^2) = \prod (2e_i + 1)$  è sempre dispari. Il motivo per cui l'ordine di  $\text{Div}(a^2)$  è dispari è evidente, esiste una biezione tra l'insieme degli elementi di  $\text{Div}(a^2)$  minori di  $a$  e l'insieme di quelli maggiori di  $a$ . La biezione manda semplicemente  $d$  in  $\frac{a^2}{d}$ . Infine abbiamo che il numero dei divisori di  $a^2$  minori di  $a$  è proprio  $\frac{\tau(a^2)-1}{2}$ .

Dimostriamo la 2.

In questo caso  $d < 0$  e  $d = -\delta$ , dove  $\delta \in \text{Div}(a^2)$ . Tutte le scelte sono possibili. Pertanto ci sono esattamente  $\tau(a^2)$  successori.

□

Possiamo ora calcolare i gradi dei vertici di  $\mathcal{N}_\alpha$ .

**Corollario 3.**

$$\text{deg}_{\mathcal{N}_\alpha}(a) = \frac{\tau(a^2) - 1}{2} + \tau(a^2) = \frac{3\tau(a^2) - 1}{2}$$

Scriviamo la sequenza dei primi 30 valori di  $|\text{succ}(a)|$ , con  $1 \leq a \leq 30$

1, 3, 3, 5, 3, 9, 3, 7, 5, 9, 3, 15, 3, 9, 9, 9, 3, 15, 3, 15, 9, 9, 3, 21, 5, 9, 7, 15, 3, 27

Trattandosi della successione  $\{\tau(n^2)\}$ , ci aspettiamo di trovarla in OEIS. Infatti è la [A048691](#).

Scriviamo anche la sequenza dei primi 30 valori di  $|\text{pred}(a)|$

0, 1, 1, 2, 1, 4, 1, 3, 2, 4, 1, 7, 1, 4, 4, 4, 1, 7, 1, 7, 4, 4, 1, 10, 2, 4, 3, 7, 1, 13

Cercando in OEIS, ci viene proposta la [A063647](#). Leggendo il testo, si vede che è proprio la nostra successione, infatti è descritta anche come numero dei divisori di  $n^2$  minori di  $n$ .

Pertanto il corollario 3, e quanto visto prima, conduce al seguente risultato

**Corollario 4.**

$$\forall n > 0 \quad A146564(n) = A048691(n) + A063647(n)$$

Questo risolve una congettura posta da R. J. Mathar il 21 Novembre 2008 (si veda il testo che accompagna la [A146564](#)).

Adesso, se siamo in  $a \in \mathcal{N}_\alpha$ , sappiamo esattamente quanti e quali vertici sono adiacenti alla nostra posizione. E' l'ora di muoverci, e di cominciare a percorrere il nostro grafo!

## 2 Percorsi in $\mathcal{N}_\alpha$

Il grafo  $\mathcal{N}_\alpha$  dà luogo, in modo naturale, a infiniti sistemi dinamici, che possiamo vedere come *linee ferroviarie*.

**Definizione 2.** Dato  $(x_1, S)$ , la linea  $\mathcal{L}(x_1, S)$  è la sequenza

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

dove

$$\forall n > 1 \quad x_n = T_S(x_{n-1}) = x_{n-1} + S(x_{n-1})$$

La funzione  $S$  è una funzione di scelta, che soddisfa la condizione:

$$\forall x, \quad S(x) \in \text{Div}(x^2)$$

Gli  $x_n$  sono le stazioni dove il treno  $T_S$  ferma.

Se  $V = \mathcal{L}(x_1, S)$ , poniamo  $V(n) = x_n$ .

Partiamo dall'inizio, con  $x_1 = 1$ .

Naturalmente c'è a disposizione, per chi non ha fretta, la linea locale  $L = \mathcal{L}(1, U)$ , che fa tutte le fermate.

La funzione di scelta è  $U(k) = 1$ , per ogni  $k$ . E' una scelta lecita perché 1 appartiene sempre a  $\text{Div}(k^2)$ .

La funzione di transizione  $T_U$  è definita da  $T_U(n) = n + 1$

Il percorso in questo caso è la sequenza fondamentale, la più importante di tutte, quella dei numeri interi  $\mathbb{N}$ .

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

Nella linea L si ha sempre  $L(n) = n$ .

Se, al contrario, abbiamo molta, molta fretta possiamo prendere la linea ad alta velocità.

1, 2, 6, 42, 1806, 3263442, 10650056950806, 113423713055421844361000442, ...

Nel nostro universo questo è il modo più veloce di spostarsi. Tra i divisori di  $n^2$  prendiamo il più grande, passiamo da  $n$  a  $n + n^2$ .

La linea ad alta velocità è  $AV = \mathcal{L}(1, V)$ , dove la funzione di scelta è  $V(n) = n^2$ .

La funzione di transizione  $T_V$  è definita da  $T_V(n) = n + n^2$ .

Pertanto la linea ad alta velocità  $AV(n)$  è generata da

$$AV(1) = 1 \quad \text{e} \quad AV(n) = AV(n-1) + (AV(n-1))^2$$

In OEIS è la successione [A007018](#). Una notevole proprietà della AV (riportata in OEIS) è la seguente

**Teorema 5.**

*Siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  interi positivi non necessariamente diversi. Se*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$$

*allora il massimo degli  $x_i$  è  $\leq AV(n)$*

Questo risultato è stato provato da Curtiss nel 1922 [4]. La dimostrazione è tutt'altro che facile.

Curtiss fa notare, nel suo lavoro, che il Teorema 5 implica una interessante limitazione nella grandezza di un numero perfetto  $z$ , legata al numero dei divisori di  $z$ . Ricordiamo che un numero perfetto  $z$  è somma dei suoi divisori  $< z$ . Supponiamo  $\tau(z) = n + 1$ . Poniamo  $z_n = z$  e siano  $1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  i divisori di  $z$  diversi da  $z$ . Allora

$$(o) \quad z = z_n = 1 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}$$

Osserviamo che l'insieme  $\{\frac{z}{1}, \frac{z}{z_1}, \dots, \frac{z}{z_{n-1}}\}$  è esattamente  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , a parte l'ordine. Dividendo la (o) per  $z$  e riordinando si ottiene quindi

$$(oo) \quad 1 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n}$$

Segue allora da 5 che  $z \leq AV(n)$ . Se esplicitiamo questo fatto si ha

**Corollario 6.**

*Per ogni numero perfetto  $z$  è vero che*

$$z \leq AV(\tau(z) - 1)$$

La linea AV è passa appena sotto alla sequenza di Sylvester A000058.

La sequenza di Sylvester è detta anche *successione di Euclide*, perché richiama il metodo di Euclide per provare che esistono infiniti numeri primi. Questo metodo si basa sul fatto che dati  $k$  interi  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , il numero  $n_{k+1} = n_1 n_2 \cdots n_k + 1$  è coprimo con i precedenti, e contiene quindi, come fattore, un numero primo nuovo, diverso da tutti i primi che dividono un  $n_j$  con  $j \leq k$ .

Sylv(n) è definita così

$$\text{Sylv}(1) = 2, \quad \text{Sylv}(n) = \prod_{k=1}^{n-1} \text{Sylv}(k) + 1$$

La Syln(n) è determinata, come la AV(n), da una relazione quadratica.

**Teorema 7.**

$$\forall n \geq 1, \quad \text{Sylv}(n+1) = (\text{Sylv}(n))^2 - \text{Sylv}(n) + 1$$

*Dimostrazione.* Infatti:

$$\begin{aligned} \text{Sylv}(n+1) &= \text{Sylv}(1)\text{Sylv}(2) \cdots \text{Sylv}(n) + 1 = (\text{Sylv}(1)\text{Sylv}(2) \cdots \text{Sylv}(n-1))\text{Sylv}(n) + 1 = \\ &= (\text{Sylv}(n) - 1)\text{Sylv}(n) + 1 = (\text{Sylv}(n))^2 - \text{Sylv}(n) + 1 \end{aligned}$$

□

La successione di Sylvester è adiacente alla nostra linea ad alta velocità AV!

**Teorema 8.**

$$\forall n \geq 1, \quad \text{Sylv}(n) = \text{AV}(n) + 1$$

*Dimostrazione.* Proviamo la proposizione per induzione. Per  $n = 1$  è vera. Supponiamola vera per  $n$  (ipotesi induttiva).

Per definizione

$$\text{AV}(n+1) = (\text{AV}(n))^2 + \text{AV}(n) = \text{AV}(n)(\text{AV}(n) + 1) =$$

per ipotesi induttiva,

$$(\text{Sylv}(n) - 1)\text{Sylv}(n) =$$

per il Teorema 7 appena visto

$$\text{Sylv}(n+1) - 1$$

□

Osserviamo, di passaggio, che un'altra famosissima sequenza è definibile da una relazione quadratica: quella dei numeri di Fermat  $\mathbf{F}_n$  ([3]).

$$\mathbf{F}_n = 2^{2^n} + 1$$

E' facile dimostrare che

**Osservazione 9.**

$$\mathbf{F}_{n+1} = (\mathbf{F}_n - 1)^2 + 1$$

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_0 \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \cdots \mathbf{F}_n + 1$$

Invece della AV potremmo, con un bel risparmio, accontentarci del rapido Raddoppia. Il rapido non somma ad  $n$  il suo quadrato, ma soltanto  $n$  stesso. Il percorso di Raddoppia, partendo sempre dalla stazione iniziale 1 è, ovviamente,

$$1, 2, 4, 8, \dots, 2^m, \dots$$

Per vedere qualche città che non sia sempre una potenza di 2 potremmo salire sulla linea B. La linea B è conveniente. Non si paga il supplemento, necessario per il rapido, ma si va velocissimi. La B aggiunge a  $n$  il massimo possibile  $< n$ . L'unica eccezione ammessa è per la stazione 1, dalla quale si passa decisamente in 2, come fanno del resto tutti i treni.  $B = \mathcal{L}(1, W)$ , dove la funzione di scelta  $W$  è  $W(1) = 1$  e

$$\forall n > 1, \quad W(n) = \text{MaxDiv}(n)$$

La funzione MaxDiv è così definita:

**Definizione 3.**

MaxDiv( $n$ ) è il divisore più grande di  $n$ , diverso da  $n$

Conseguentemente la funzione di transizione  $T_W$  è  $T_W(1) = 2$  e

$$\forall n > 1, \quad T_W(n) = n + \text{MaxDiv}(n)$$

Poniamo  $B = \mathcal{L}(1, W)$ . Ecco la parte iniziale della linea B:

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 243, 324, 486, 729, 972, 1458, 2187, 2916, 4374, 6561, ...

Esaminiamo il comportamento di  $T_W$  rispetto ai numeri di tre particolari forme, che sono poi quelle che appaiono in B.

- Se  $n = 2 \times 3^k$ ,  $W(n) = 3^k$ , e  $T_W(n) = 2 \times 3^k + 3^k = 3^{k+1}$ .
- Se  $n = 3^{k+1}$ ,  $W(n) = 3^k$ , e  $T_W(n) = 3^{k+1} + 3^k = 3^k(3 + 1) = 4 \times 3^k$ .
- Se  $n = 4 \times 3^k$ ,  $W(n) = 2 \times 3^k$ , e  $T_W(n) = 4 \times 3^k + 2 \times 3^k = 6 \times 3^k = 2 \times 3^{k+1}$ .

Questo è dunque il percorso B:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \times 3^k \rightarrow 3^{k+1} \rightarrow 4 \times 3^k \rightarrow 2 \times 3^{k+1} \rightarrow 3^{k+2} \rightarrow 4 \times 3^{k+1} \rightarrow \dots$$

E' chiaro, da quanto dimostrato, che si ha

**Teorema 10.**

$$\forall n > 4 \quad B(n) = 3B(n - 3)$$

In particolare:

$$B(3n) = 3^n$$

Niente male per una linea senza supplemento rapido!

Inserendo i primi termini della B in Oeis troviamo la [A000792](#), che è descritta in un modo che, apparentemente, non ha nulla a che fare con la B. Se però guardiamo nel settore Formula troviamo esattamente la ricorsione del Teorema 10.

E' stupefacente vedere quante e quali siano le descrizioni della B! Per esempio si prova che, se consideriamo l'insieme  $\mathcal{P}(n)$  di tutte le partizioni di un intero  $n$ , e, per ogni  $p \in \mathcal{P}(n)$  facciamo il prodotto degli elementi di  $p$ , allora  $B(n)$  è il massimo di questi prodotti.

Facciamo un esempio. Per  $n = 7$  ci sono 15 partizioni di 7:

$$R(7) = \{\{7\}, \{6, 1\}, \{5, 2\}, \{5, 1, 1\}, \{4, 3\}, \{4, 2, 1\}, \{4, 1, 1, 1\}, \{3, 3, 1\}, \{3, 2, 2\}, \{3, 2, 1, 1\}, \{3, 1, 1, 1, 1\}, \{2, 2, 2, 1\}, \{2, 2, 1, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}\}$$

Eseguito i 15 prodotti troviamo, nell'ordine,

$$\{7, 6, 10, 5, 12, 8, 4, 9, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1\}$$

Il massimo prodotto è proprio  $B(7) = 12$ , che compare per le partizioni  $\{4, 3\}$  e  $\{3, 2, 2\}$ .

Naturalmente non è obbligatorio partire dalla stazione 1. Da  $a$  si diramano tutte le linee  $\mathcal{L}(a, S)$ . Insomma, si prende in  $a$  il treno  $T_S$ , determinato dalla funzione di scelta  $S$ . Per esempio consideriamo la linea  $P = \mathcal{L}(2, W_2)$ , dove  $W_2(1) = 1$  e

$$\forall n > 1, \quad W_2(n) = \text{MaxDiv}(n^2)$$

Quando  $n$  è pari,  $\text{MaxDiv}(n^2) = \frac{n^2}{2}$ . Poiché partiamo da 2, è facile capire che la funzione di trasferimento è

$$T_{W_2}(n) = n + \frac{n^2}{2}$$

Questa è la parte iniziale della linea  $P$ :

$$2, 4, 12, 84, 3612, 6526884, 21300113901612, 226847426110843688722000884, \dots$$

La linea P procede, per così dire, a mezza forza massima, in quanto l'incremento è  $\frac{n^2}{2}$  invece di  $n^2$ . E' facile dimostrare che, sorprendentemente, si ha

$$P(n) = 2AV(n)$$

Ricordiamo che  $AV = \mathcal{L}(1, V)$ , e la funzione di scelta è  $V(n) = n^2$ . Riportiamo l'inizio di AV:

1, 2, 6, 42, 1806, 3263442, 10650056950806, 113423713055421844361000442, ...

La linea P (vedi [A053631](#)) è detta anche linea Pitagorica, per via di questo fatto:

**Teorema 11.**

*Per ogni  $n \geq 1$   $P(n) + 1$ ,  $P(n + 1)$ ,  $P(n + 1) + 1$  formano una terna pitagorica primitiva.*

*Dimostrazione.* E' una semplice verifica. Per ogni  $m$  infatti si ha:

$$(m + 1)^2 + (m + \frac{m^2}{2})^2 = (m + \frac{m^2}{2} + 1)^2$$

□

La P ci dà, in successione, le terne pitagoriche (3, 4, 5), (5, 12, 13), (13, 84, 85), (85, 3612, 3613), ...

Concludiamo questa parte rispondendo a una domanda che sorge spontanea: possibile che i numeri di Fibonacci non compaiano in questo meraviglioso universo aritmetico?

Ebbene s. Ricordiamo che i Fibonacci generalizzati  $f_n^{a,b}$  sono definiti da:

$$f_1^{a,b} = a, \quad f_2^{a,b} = b \quad \text{e} \quad \forall n > 2 \quad f_n^{a,b} = f_{n-1}^{a,b} + f_{n-2}^{a,b}$$

I Fibonacci classici sono la sequenza  $f_n^{1,1}$ , data da

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Ogni successione  $f_n^{a,b}$  genera un percorso!

**Teorema 12.**

*La sequenza*

$$g_n^{a,b} = f_n^{a,b} f_{n+1}^{a,b}$$

*è sempre un percorso in  $\mathcal{G}_\alpha$ .*

*Dimostrazione.* Inizialmente si ha  $g_1^{a,b} = ab$  e  $g_2^{a,b} = a(a + b) = ab + a^2$ . Quindi  $g_1^{a,b}$  e  $g_2^{a,b}$  sono adiacenti.

Dobbiamo far vedere che questo vale sempre, ovvero che  $g_{n+1}^{a,b}$  è adiacente a  $g_n^{a,b}$ . Ora

$$g_{n+1}^{a,b} = f_{n+1}^{a,b} f_{n+2}^{a,b} = f_{n+1}^{a,b} (f_n^{a,b} + f_{n+1}^{a,b}) = f_n^{a,b} f_{n+1}^{a,b} + (f_{n+1}^{a,b})^2 = g_n^{a,b} + (f_{n+1}^{a,b})^2$$

Poichè  $(f_{n+1}^{a,b})^2$  divide  $(g_n^{a,b})^2$ , i vertici sono adiacenti. □

Quindi i numeri di Fibonacci generano il percorso

$$1, 2, 6, 15, 40, 104, 273, 714, 1870, 4895, 12816, 33552, \dots$$

che è la [A001654](#) in OEIS.

Le sequenze  $g_n^{a,b}$  definite nel Teorema 12 sono esse stesse successioni ricorrenti lineari di grado 3. Infatti si dimostra il

**Teorema 13.**

*La sequenza*

$$g_n^{a,b} = f_n^{a,b} f_{n+1}^{a,b}$$

*ricorre con polinomio  $1 - 2x - 2x^2 + x^3$ , Ovvero*

$$\forall n > 3 \quad g_n^{a,b} = 2g_{n-1}^{a,b} + 2g_{n-2}^{a,b} - g_{n-3}^{a,b}$$

Sorge allora un quesito assai interessante:

**Problema 1.**

Quali percorsi in  $\mathcal{N}_\alpha$  sono successioni ricorrenti lineari?

Ci sono infiniti percorsi affascinanti, e non tutti serviti da un treno!

Ricordiamo che un percorso è una successione di vertici adiacenti.

Dati  $a$  e  $b$ , con  $a < b$ , c'è sempre un percorso che li unisce:  $a, a + 1, \dots, b - 1, b$ . Da  $a$  a  $b$  si può sempre andare in treno, se si vuole, basta prendere la linea locale che parte da  $a$ :  $\mathcal{L}(a, L)$ . In questo modo occorrono  $b - a$  passi. Ma qual è il percorso più breve che unisce  $a$  con  $b$ ?

### 3 La distanza, gli alberi e le metriche in $\mathcal{N}_\alpha$

Cominciamo con la definizione di *distanza* nel grafo  $\mathcal{N}_\alpha$

**Definizione 4.** Dati due interi positivi  $a, b$  diciamo  $d_\alpha(a, b)$  la minima lunghezza di un percorso in  $\mathcal{N}_\alpha$  che parte da  $a$  e finisce in  $b$ .

La  $d_\alpha$  è una *metrica*, soddisfa cioè le tre condizioni:

1.  $d_\alpha(a, a) = 0$
2.  $d_\alpha(a, b) = d_\alpha(b, a)$
3.  $d_\alpha(a, b) + d_\alpha(b, c) \leq d_\alpha(a, c)$

Per andare da  $a$  a  $b$  si può, a volte, usare un treno, cioè usare una linea  $h = \mathcal{L}(a, H)$ , che parte da  $a$ , ed ha funzione di scelta  $H$  tale che il corrispondente treno  $T_H$  ferma in  $b$ . Per esempio se dobbiamo andare da 14 a 183708, si può salire su  $\mathcal{L}(14, W)$ , dove  $W$  è la funzione di scelta definita poco sopra:  $W(n) = \text{MaxDiv}(n)$ . Questo sarà il percorso:

14, 21, 28, 42, 63, 84, 126, . . . , 45927, 61236, 91854, 137781, 183708

Saliamo in 14. la prima fermata è 21, la seconda 28, . . . , la ventiseiesima è 183708. Arriviamo alla meta in 26 passi. Quindi è certo che:

$$d_\alpha(14, 183708) \leq 26$$

Ma qual è la distanza reale  $d_\alpha(14, 183708)$ ?

Se siamo in  $a$  e vogliamo recarci in  $b$  accade raramente di sapere la distanza esatta tra  $a$  e  $b$ , e ancora più di rado si conosce una linea adatta allo scopo, credetemi.

Però ci sono i Taxi!

Supponiamo di trovarci in  $a$ . I taxi funzionano così : si sale e si dice al taxista l'itinerario, oppure ci si affida a lui e si dice *mi porti in b, per cortesia*. I taxisti ufficiali (prendete solo quelli, mi raccomando!) sono riuniti in un grande e potente sindacato. Agiscono tutti allo stesso modo. Se dite l'itinerario lo seguono a puntino. Se vi affidate a loro utilizzano tutti lo stesso algoritmo, detto *greedy*.

Non preoccupatevi, non sono avidi del vostro denaro, ma soltanto di fare il più in fretta possibile, senza pretendere però di conoscere la via più breve. Qual è allora l'algoritmo greedy? Semplice. Supponiamo  $a < b$ . Possiamo cercare di andare da  $a$  a  $b$  nel modo più veloce possibile, come con la linea AV: aggiungiamo ogni volta il massimo, ovvero il quadrato del numero. Per esempio, per andare da 14 a 183708 aggiungiamo 196 a 14, arrivando in 210, poi sommiamo  $210^2 = 44100$  e arriviamo in 44310. A questo punto la AV supererebbe la nostra meta, quindi dobbiamo rallentare. L'idea è questa: se siamo in  $x$  aggiungiamo a  $x$  il più grande divisore  $e$  di  $x^2$  tale che  $x + e \leq b$ . In questo modo arriveremo certamente a  $b$ . Chiamiamo l'algoritmo illustrato *upgreedy*, perché va verso interi più grandi. Nel caso di 14 e 183708, il percorso che genera *upgreedy* è questo:

14, 210, 44310, 177873, 180402, 182931, 183582, 183708

Abbiamo ottenuto un nuovo limite superiore della distanza tra 14 e 183708:

$$d_\alpha(14, 183708) \leq 7$$

Dobbiamo però tenere presente che il grafo è perfettamente simmetrico, si può scendere da  $a$  a  $b$ , e poi utilizzare il percorso al contrario. Per scendere in modo automatico e greedy, utilizziamo l'algoritmo *downgreedy*. Se siamo in  $x > a$ , e abbiamo  $a$  come meta, togliamo da  $x$  quanto più possiamo, ovvero il massimo divisore  $e$  di  $x$  tale che  $x - e \geq a$ .

Nel caso presente *downgreedy* dà il percorso:

183708, 91854, 45927, 30618, 15309, 10206, 5103, 3402, 1701, 1134, 567, 378, 189, 126, 63, 42, 21, 14

di lunghezza 17.

Ma non è sempre così . Supponiamo di volere andare da 7078 a 7876. Con upgreedy

7078, 7082, 7086, 7122, 7158, 7194, 7848, 7875, 7876

abbiamo un percorso di lunghezza 8.

Con downgreedy

7876, 7160, 7120, 7080, 7078

la lunghezza è appena 4, la metà. Si noti che il percorso della discesa si può fare al contrario, per la simmetria della relazione  $\alpha$ :

7078, 7080, 7120, 7160, 7876

Concludendo, il taxista inserisce i dati nel navigatore, e quello restituisce il percorso più breve tra upgreedy(a,b) e downgreedy(b,a). Naturalmente, se è downgreedy(b,a) quello più corto, si parte da  $a$  e lo si fa al contrario. Infine, questo è l'algoritmo greedy:

### Definizione 5.

Algoritmo greedy(a,b), con  $a < b$ :

Calcolo la lunghezza  $lup$  di  $pu=upgreedy(a,b)$ .

Calcolo la lunghezza  $ldo$  di  $pd=downgreedy(b,a)$ .

Se  $lup \leq lod$  restituisco  $pu$ .

Altrimenti restituisco  $pd$  scritto al contrario.

Diciamo  $d_g(a,b)$  la lunghezza del percorso greedy(a,b).

Si vede subito che  $d_g$ , al contrario di  $d_\alpha$ , *non* è una metrica, perché non è sempre valida la disuguaglianza triangolare, la terza delle 3.

Il navigatore dei taxi che circolano in  $\mathcal{N}_\alpha$  trova subito il percorso, anche per numeri grandissimi.

Per noi invece calcolo di  $d_g$  presenta difficoltà apparentemente insormontabili. Nella fase di avvicinamento veloce a  $b$ , fase durante la quale si utilizza la AV, non ci sono problemi: da  $x$  si passa a  $x+x^2$ . I problemi cominciano quando si deve rallentare. Supponiamo di essere in  $y$  con  $y+y^2 > b$ . L'algoritmo greedy deve allora prendere il più grande divisore  $d$  di  $y^2$  tale che  $y+d \leq b$ . Per fare questo è necessario, tranne che in casi particolari, fattorizzare  $y$ , cosa che è sovente impraticabile. Se si parte da 1 e si usa la AV, AV(1)=1, . . . , AV(7)=10650056950806, . . . , non ho avuto difficoltà (grazie ad apposito software) a fattorizzare AV( $n$ ) fino a  $n = 10$ . Però AV(11) ha resistito ad ogni tentativo. Si riesce a fattorizzare parzialmente AV(11) (che ha 209 cifre), trovando che

$$AV(11) = 2 \times 3 \times 7 \times 13 \times 43 \times 139 \times 181 \times 547 \times 607 \times 1033 \times 1987 \times 29881 \times C$$

dove  $C$  è un numero, certamente composto, di 184 cifre. Se poi anche si riuscisse a fattorizzare  $C$ , è chiaro che basta prendere un  $n$  poco più grande per dovere arrendersi.

La incomputabilità (pratica, beninteso) di  $d_g$  non è l'unico problema. E' chiaro che in generale greedy non trova un percorso di minima lunghezza. Però a volte va bene.

Per esempio, nel caso della coppia (45, 67) greedy trova:

$$45, 60, 66, 67$$

che è un percorso minimo.

L'algoritmo greedy cerca il percorso soltanto nell'intervallo di interi compresi tra  $a$  e  $b$ . Questo è uno dei motivi per cui, in certi casi, *non potrà* in alcun modo determinare il percorso di lunghezza minima.

Facciamo un esempio.

Se prendiamo la coppia di numeri non adiacenti (110, 539), greedy trova un percorso di lunghezza 5:

$$110, 132, 154, 231, 462, 539$$

(Che è downgreedy(539,110) scritta al contrario)

Come vedere se è un percorso minimo? C'è un metodo di forza bruta, calcolare le sfere di centro 110 e raggi successivi  $r = 1, 2, 3, \dots$ , fino a che si include 539. Che cosa è una sfera?

**Definizione 6.**

In  $\mathcal{N}_\alpha$  si dice sfera di centro  $a$  e raggio  $r$  l'insieme di tutti gli interi  $b$  tali che  $d_\alpha(a, b) \leq r$ . Denotiamo questa sfera con  $S(a, r)$ .

Diciamo volume della sfera, il numero dei suoi elementi

$$Vol(S(a, r)) = |S(a, r)|$$

La sfera  $S(a, 1)$  di centro  $a$  e raggio 1 viene anche detta *intorno* di  $a$ . L'intorno di  $a$  è quindi quello che abbiamo chiamato dintorno di  $a$  con l'aggiunta di  $a$  stesso. Pertanto il suo volume ci è noto (3).

$$Vol(S(a, 1)) = \deg_{c\mathcal{N}_\alpha}(a) + 1 = \frac{3\tau(a^2) + 1}{2} \tag{1}$$

Anche soltanto per  $r = 2$  si incontrano gravi difficoltà a calcolare il volume di una sfera. Il motivo è che non sono assolutamente prevedibili i vertici adiacenti ad un vertice adiacente ad  $a$ . Per esempio  $a + 1$  è adiacente ad  $a$ , ma non c'è alcun legame tra i divisori di  $a$  e quelli di  $a + 1$ . Per  $r > 1$  la sfera di raggio  $S(a, r)$  si ottiene da quella di raggio  $r - 1$ , facendo la unione di tutti gli intorni degli elementi di  $S(a, r - 1)$ :

$$S(a, r) = \bigcup_{b \in S(a, r-1)} S(b, 1) \tag{2}$$

Pertanto:

$$Vol(S(a, r)) \leq \sum_{b \in S(a, r-1)} \frac{3\tau(b^2) + 1}{2} \tag{3}$$

Naturalmente il volume effettivo della sfera sarà in generale assai inferiore a questo limite.

L'intorno di 110 possiede 41 elementi, e 539, come sappiamo, non è tra questi. Se calcoliamo  $S(110, 2)$  troviamo che questa sfera possiede 1630 elementi, tra i quali compare il nostro numero. La distanza è quindi esattamente 2. Per trovare un percorso minimo intersechiamo gli intorni di 110 e 539: troviamo un solo numero: 660. Esiste dunque un unico percorso minimo che unisce 110 e 539:

$$110 - 660 - 539$$

Come già osservato, greedy non potrebbe mai trovare questo percorso, perché sceglie sempre vertici appartenenti all'intervallo compreso tra i due estremi.

Esistono metodi assai veloci per calcolare il cammino minimo tra due vertici di un grafo, metodi che ovviamente funzionano anche in  $\mathcal{N}_\alpha$ . Qual è allora il problema della distanza? Teoricamente non esiste, ma nei fatti è insormontabile.

Per utilizzare un algoritmo che lavora sui grafi occorre passargli il grafo. Naturalmente parliamo di parti finite del grafo  $\mathcal{N}_\alpha$ . Per esempio il sottografo che  $\mathcal{N}_\alpha$  induce sull'intorno  $A = S(a, 1)$  di un intero  $a$ . Ora, anche se può sembrare strano, vedere se  $b \in A$  richiede un attimo, infatti si tratta di fare una divisione e di controllare se il resto è nullo. Però determinare  $A$  è computazionalmente impossibile. Supponiamo che  $a$  sia un numero di quelli che si usano nella crittografia a chiave pubblica,  $a = p \times q$  dove  $p$  e  $q$  sono due primi grandi. Nell'intorno  $A$  di  $a$  c'è anche  $a + p$ . Se conosciamo  $a + p$  ricaviamo subito  $p$  e fattorizziamo  $a$ . Questo è proprio quello che *nessuno* oggi sa fare. Su questa impotenza si basa infatti buona parte della sicurezza mondiale. Pertanto, se non vi saranno notevoli nuove scoperte, è certo che *non* riusciremo a sapere quali sono i lati di un sottografo finito di  $\mathcal{N}_\alpha$ , dopo averne assegnato i vertici!

Ecco sorgere un problema, che considero difficilissimo:

### Problema 2.

Trovare un algoritmo efficace per il calcolo della distanza nel grafo  $\mathcal{N}_\alpha$ .

Si noti che qui si intende la *distanza* propria del grafo  $d_\alpha$ , ovvero, come si è detto sopra,  $d_\alpha(a, b)$  è la lunghezza del percorso più breve, sui lati del grafo, che congiunge  $a$  e  $b$ .

Esistono in realtà infinite metriche definite sul grafo, facilmente computabili.

Cosideriamo, come esempio, gli alberi p-adici  $\mathcal{A}_p$ , sottografi di  $\mathcal{N}_\alpha$ .

L'insieme dei vertici di  $\mathcal{A}_p$  è lo stesso di  $\mathcal{N}_\alpha$ , ovvero l'insieme dei naturali  $\mathbb{N}$ .

Definiamo la relazione di adiacenza. Presi due naturali diversi  $a < b$  diciamo che  $a$  è adiacente a  $b$  se siamo in uno di questi due casi:

1.  $b = p^k$ , con  $k > 0$  e  $a = b - p^{k-1} = \frac{b}{p}(p - 1)$
2.  $b = t \times p^k$ , dove  $t$  è coprimo con  $p$ , e  $a = b - p^k = p^k(t - 1)$

Diciamo *valutazione p-adica* di  $a$  il massimo esponente  $e$  tale che  $p^e$  divide  $a$ . Denotiamo la valutazione p-adica di  $a$  con  $\nu_p(a)$ . Per esempio  $\nu_2(48) = 3$ ,  $\nu_2(15) = 0$ ,  $\nu_5(15) = 1$ , ... Dato un vertice  $a \in \mathbb{N}$  diciamo *figli* di  $a$  gli interi maggiori di  $a$  a lui stesso adiacenti.

L'albero p-adico si genera a partire da 1, il capostipite. Le generazioni successive sono i piani dell'albero.

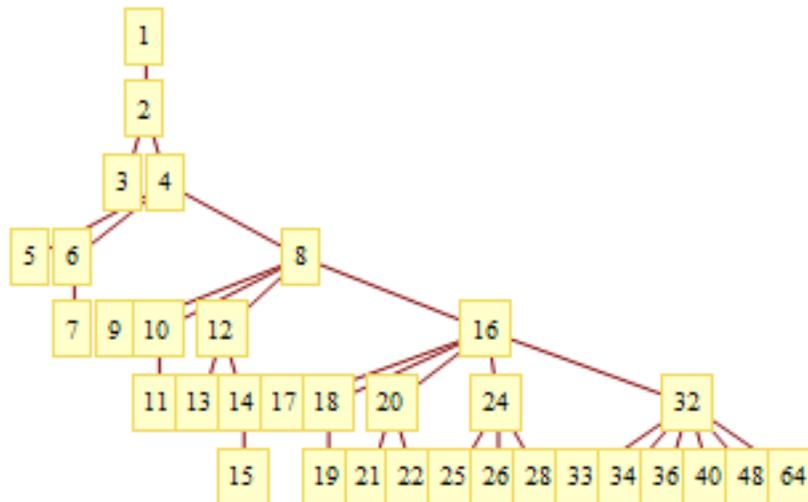
Vediamo un poco più in dettaglio il caso dell'albero 2-adico,  $\mathcal{A}_2$ . In questo caso accade che:

- 1 ha un figlio, che è 2.
- I numeri dispari diversi da 1 non hanno figli.
- Un numero pari  $a$  non potenza di 2 ha  $\nu_2(a)$  figli, che sono  $a + 1, a + 2, a + 4, \dots, a + 2^{k-1}$ , dove  $k = \nu_2(a)$ .
- Se  $a = 2^k$ , allora  $a$  possiede  $k + 1$  figli, che sono  $a + 1, a + 2, a + 4, \dots, a + 2^{k-1}, 2a$ , dove  $k = \nu_2(a)$ .

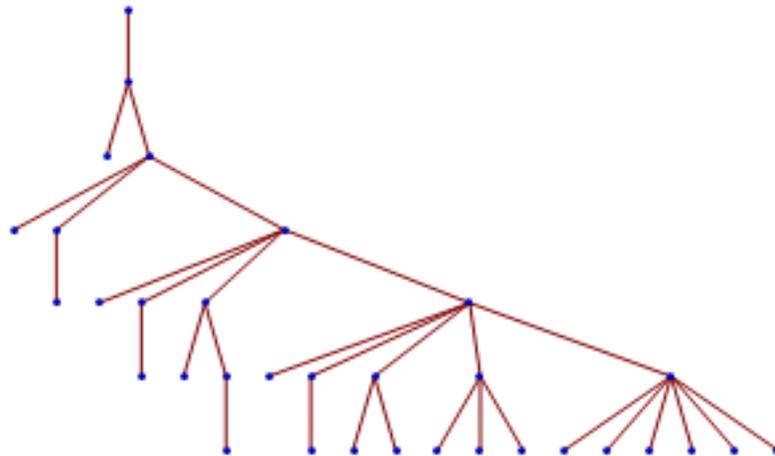
Elenco i primi 7 piani:

- 1
- 2
- 3, 4
- 5, 6, 8
- 7, 9, 10, 12, 16
- 11, 13, 14, 17, 18, 20, 24, 32
- 15, 19, 21, 22, 25, 26, 28, 33, 34, 36, 40, 48, 64

Qui sotto si vede l'albero con le connessioni:



E questo è l'albero senza le etichette dei vertici, per vederne meglio la struttura:



Si osservi che se contiamo gli elementi in ogni piano otteniamo la sequenza 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... dei numeri di Fibonacci!

Questo può essere dimostrato rigorosamente. E' interessante perché si tratta di un processo generativo completamente diverso da quello dei coniglietti di Fibonacci, che dà però, ad ogni generazione, lo stesso numero di individui!

L'osservazione fondamentale che lega gli alberi  $\mathcal{A}_p$  al grafo  $\mathcal{N}_\alpha$  è questa:

Se i vertici  $a < b$  sono adiacenti nell'albero  $\mathcal{A}_p$ , allora essi sono adiacenti nel grafo  $\mathcal{N}_\alpha$ , per il semplice fatto che  $a$  si ottiene da  $b$  sottraendo a  $b$  un suo divisore.

Quindi ogni percorso in  $\mathcal{A}_p$  è un percorso in  $\mathcal{N}_\alpha$ . Calcolare la distanza tra due vertici in  $\mathcal{A}_p$  equivale a calcolare la lunghezza di un percorso minimo in  $\mathcal{N}_\alpha$ , dove ci si costringe a viaggiare soltanto su alcuni lati. Equivale a trovare la strada più breve in una città con tanti divieti di transito!

Denotiamo con  $d_p(a, b)$  la distanza sull'albero  $\mathcal{A}_p$ . Si noti che mentre in un grafo generico, come  $\mathcal{N}_\alpha$ , possono esistere diversi percorsi di lunghezza minima tra  $a$  e  $b$ , in un albero, come  $\mathcal{A}_p$ , c'è un unico percorso di distanza minima.

Da quanto osservato si avrà sempre:

$$\forall p \quad d_p(a, b) \geq d_\alpha(a, b)$$

Facciamo un esempio.

Consideriamo tre punti: 10, 120, 200

In  $\mathcal{N}_\alpha$  i percorsi minimi sono (tra gli altri):

- 10, 20, 120
- 10, 8, 40, 200

- 120, 200

Pertanto le distanze sono  $d_\alpha(10, 120) = 2$ ,  $d_\alpha(10, 200) = 3$ ,  $d_\alpha(120, 200) = 2$ .

Si noti che, per esempio, un altro percorso minimo tra 10 e 120 è 10, 60, 120.

Se passiamo a  $\mathcal{A}_2$  i percorsi minimi sono (unicamente):

- 10, 8, 16, 32, 64, 96, 112, 120
- 10, 8, 16, 32, 64, 128, 192, 200
- 120, 112, 96, 64, 128, 192, 200

Pertanto le distanze sono  $d_2(10, 120) = 7$ ,  $d_2(10, 200) = 7$ ,  $d_2(120, 200) = 6$ .

La distanza  $d_p(a, b)$  può essere calcolata assai velocemente scrivendo i numeri  $a, b$  in base  $p$ , senza bisogno di sapere nulla dei divisori di questi numeri. Questo però fornisce soltanto dei confini superiori a  $d_\alpha(a, b)$ .

L'albero diadico (come gli altri alberi p-adici) possiede proprietà affascinanti.

Introduciamo alcune definizioni. Ci limitiamo al caso diadico: ogni intero si pensa scritto in binario. Dicendo cifre si intende dire *cifre binarie*.

Diciamo *peso* di  $a$  la somma delle cifre di  $a$ . Per esempio 10 in binario è 1010, e il peso di 10 è 2.

Diciamo *lunghezza* di  $a$  il numero delle cifre di  $a$ . Per esempio la lunghezza di 10 è 4.

Diciamo *altezza* di  $a$  la distanza di  $a$  da 1, ovviamente nell'albero  $\mathcal{A}_2$ . Nell'albero c'è un unico percorso che porta da  $a$  ad 1, la distanza è la lunghezza di questo percorso (il numero dei vertici, compresi gli estremi, meno uno). Per esempio il percorso che porta 10 in 1 è 10, 8, 4, 2, 1. Quindi l'altezza di 10 è 4, Quella di 1 è zero.

Diciamo *piano*  $n$  l'insieme degli interi che hanno altezza  $n - 1$ . Questa definizione è la stessa data poco sopra. Abbiamo visto, per esempio, che il piano 5 è formato dai numeri 7, 9, 10, 12, 16, che sono gli interi di altezza 4.

L'equazione fondamentale che regge tutta la struttura dell'albero diadico è la *equazione digitale*:

$$\text{Il piano } n \text{ è formato esattamente dagli interi } a \text{ tali che}$$

$$\mathbf{lunghezza \ di \ a \ + \ peso \ di \ a \ = \ n \ + \ 1}$$

Denotiamo con  $w(a)$  e  $\lambda(a)$  rispettivamente il peso di  $a$  e la lunghezza di  $a$ . Denotiamo con  $\pi(a)$  il piano di  $a$ . Allora l'equazione digitale diventa:

$$\lambda(a) + w(a) - \pi(a) = 1$$

Una equazione analoga vale per gli alberi p-adici, con  $p$  diverso da 2.

Abbiamo osservato precedentemente che il piano  $n$  contiene  $F_n$  elementi, dove  $F_n$  è l' $n$ -esimo numero di Fibonacci (che avevamo indicato con  $f_n^{1,1}$ ). Questo segue facilmente dalla equazione digitale.

Prendiamo  $a$ , scriviamolo in binario e cancelliamo il bit iniziale (a sinistra) che è sempre 1. Consideriamo ora gli 1 come mattoncini di lunghezza 2 e gli 0 come blocchetti di lunghezza 1. Il peso è il numero degli 1 presenti tra le cifre di  $a$ . Quindi  $w(a) - 1$  è il numero dei mattoncini e  $\lambda(a) - w(a)$  è il numero dei blocchetti. La lunghezza complessiva della fila di pezzi che abbiamo ottenuto sostituendo i bit è

$$2(w(a) - 1) + (\lambda(a) - w(a)) = w(a) + \lambda(a) - 2 = n - 1$$

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo usato l'equazione digitale. Dunque:

*il numero degli interi che stanno al piano  $n$  è uguale al numero dei modi (ordinati) di scrivere  $n - 1$  come somma degli interi 1 o 2.*

E' ben noto che questo numero è  $F_n$ , vedi [1]. Ci sono, per esempio 5 tassellazioni di 4:

$$1 + 1 + 1 + 1 \quad 1 + 1 + 2 \quad 1 + 2 + 1 \quad 2 + 1 + 1 \quad 2 + 2$$

Passando ora dai mattoncini ai bit, e antepoendo il bit 1, otteniamo:

$$10000, 1001, 1010, 1100, 111$$

ovvero gli interi 16, 9, 10, 12, 7, che costituiscono il piano 5.

Diciamo *discendenza* di  $n$  l'insieme sormato da  $n$  stesso, dai suoi figli, dai figli dei figli, etc...

Denotiamo questo insieme con  $\delta(n)$ . I due casi estremi sono:

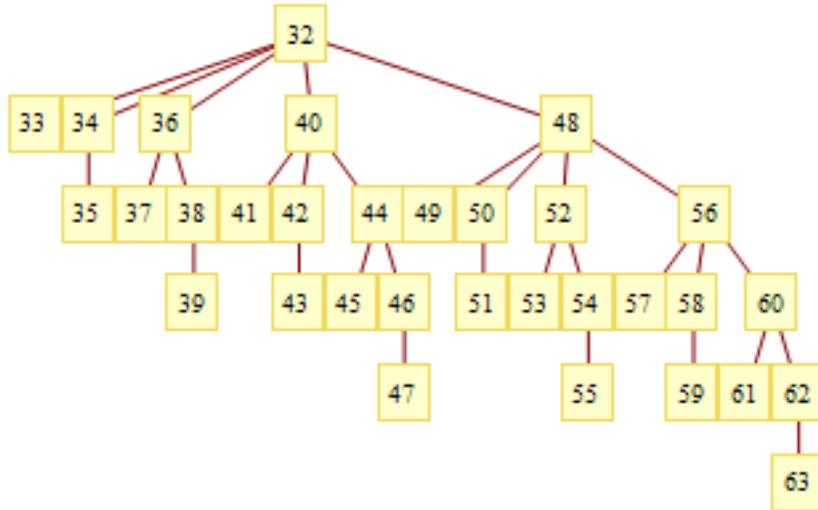
- $\delta(1) = \mathcal{A}_2$ .
- $\delta(n) = \{n\}$ , se  $n > 1$  è dispari.

Diciamo *potenze perfette* gli interi  $2^k$ , con  $k \geq 0$ . Si vede subito che:

### **Soltanto le potenze perfette hanno discendenza infinita**

Come sappiamo la potenza  $2^k$  genera  $k+1$  figli. Tra questi genera ua sola potenza perfetta:  $2^{k+1}$ . Se leviamo da  $\delta(2^k)$  il figlio  $2^{k+1}$  e tutti i suoi discendenti, ovvero se sottraiamo l'insieme  $\delta(2^{k+1})$  dall'insieme  $\delta(2^k)$  otteniamo un insieme finito che contiene esattamente  $2^k$  elementi. Essi si dispongono graziosamente in una struttura che chiamiamo *alberello  $k$* . L' alberello  $k$  ha come radice la potenza perfetta  $2^k$  e contiene tutti e soli i numeri compresi tra  $2^k$  e  $2^{k+1} - 1$ . Tutti gli elementi dell' alberello  $k$  hanno la medesima lunghezza, che è  $k + 1$ .

Vediamo sotto l'alberello 5:



L' alberello  $k$  ha  $k + 1$  piani, numerati da 0 a  $k$ . Il piano  $h$  contiene esattamente  $\binom{k}{h}$  elementi. Essi sono gli interi di  $k + 1$  bit che contengono  $h + 1$  bit 1. Pertanto se  $a$  sta al piano  $h$  dell'alberello  $k$  la sua equazione digitale è:

$$1 = \lambda(a) + w(a) - \pi(a) = k + 1 + h + 1 - \pi(a)$$

E questo implica che:

$$\pi(a) = h + k + 1$$

Questa relazione dice come i piani degli alberelli (chiamiamoli pianelli) si distribuiscono tra i piani dell'albero  $\mathcal{A}_2$ . Ogni piano è unione disgiunta di pianelli.

Per formare il piano  $n$  di  $\mathcal{A}_2$  bisogna mettere insieme il pianello 0 dell'alberello  $n - 1$ , il pianello 1, dell'alberello  $k - 2$ , e così via.

Poichè ci sono noti gli ordini dei piani e dei pianelli otteniamo la seguente proprietà:

$$F_n = \sum_{h=0}^{h=\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-1-h}{h}$$

In questa formula  $F_n$  è l'ordine del piano  $n$  e  $\binom{n-h-1}{h}$  è l'ordine del pianello  $h$  dell'alberello  $n-1-h$ . Questa formula è ben nota, vedi [1], e usualmente si ricava dal sommare le diagonali del triangolo di Tartaglia. E' comunque interessante come emerga dall'albero  $\mathcal{A}_2$ , e quindi, non dimentichiamolo, dal grafo  $\mathcal{N}_\alpha$ , del quale alberi e alberelli sono sottografi.

Camminando lungo le infinite strade di  $\mathcal{N}_\alpha$  si scoprono moltissimi teoremi, identità, cose vecchie e nuove e molto belle.

Buona passeggiata!

## Riferimenti bibliografici

- [1] Arthur Benjamin, Arthur T. Benjamin, Jennifer J. Quinn - Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof - *Dolciani Mathematical Expositions*), **MAA**, 2003.
- [2] Umberto Cerruti - Grafi di divisori, cicli Hamiltoniani, Codici di Gray e le Torri di Hanoi - *Blog Matematico* - 9 Agosto 2011
- [3] Umberto Cerruti - Somme di Interi Consecutivi, Numeri di Mersenne e Numeri di Fermat - *Blog Matematico* - 18 Dicembre 2008
- [4] D. R. Curtiss - On Kellogg's Diophantine Problem - *The American Mathematical Monthly*, **29**, 1922, pp. 380-387.