

Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari
e sulle corrispondenti reti correlative.

Memoria del dott. ANGELO ANDREINI

(presentata dal Socio L. BIANCHI ed approvata dal Socio U. DRVI).

PARTE PRIMA

Reti di poliedri regolari e semiregolari.

1. RETI PIANE. — Nella mia tesi per l'abilitazione all'insegnamento, presentata nel giugno 1886 alla R. Scuola Normale Superiore in Pisa, ebbi occasione di accennare, incidentalmente, alla presente questione. Ritornando ora sull'argomento mi propongo di trattarlo nel modo più completo che mi sia possibile. Prima però di entrare in materia dovrei, secondo le consuetudini, render conto di tutta la letteratura dell'argomento per informare il lettore intorno a quanto possa esservi di nuovo nel presente lavoro. Ma, sotto questo aspetto, il compito mio è molto semplice perchè secondo le indagini che, a lavoro compiuto, ho potuto fare, non mi risulterebbe che il tema da me svolto sia stato sin qui oggetto di speciale trattazione.

Stando così le cose, non mi resta che accennare brevemente ad alcuni lavori che presentano una qualche analogia con quello da me trattato (*).

Il russo mineralogista FEDOROW, in un suo esteso lavoro: *Dottrina delle Figure* (**), tratta (insieme a varie altre questioni di poliedrometria tendenti in complesso a stabilire le basi di una originale teoria sulla struttura cristallina) il problema

(*) Sono debitore di varie indicazioni bibliografiche al chiar. sigg. prof. A. SCHROENFLIES dell'Università di Königsberg, ed E. MINKOWSKI dell'Università di Göttingen, ai quali rinnovo qui i miei ringraziamenti.

(**) *Начала геометрии и минералогии* - Atti della Società imperiale dei mineralogisti, Pietroburgo, 1885, pp. 1-279. Come guida all'esame di questo lavoro mi ha servito una breve recensione di F. WELSPER inserita nel « *Zeitschrift für Kristallographie und Mineral.* », Leipzig, 1890, vol. XVII, pp. 610-611. Debbo alla squisita gentilezza del prof. SCHROENFLIES l'aver potuto tenere a mia disposizione per lungo tempo l'opera di FEDOROW. Sento poi il dovere di esternare i sensi della mia viva riconoscenza alla sig. contessa STRELA ZOUBOV di Roulantz e al sig. dott. ALBERTO BLOCH (medico chirurgo in Firenze) che gentilmente si prestarono per la traduzione dal russo di quelle parti dell'opera predetta che potevano maggiormente interessarmi.

relativo al modo di riempire con continuità ed uniformità lo spazio ordinario per mezzo di corpi tutti eguali ed associati fra di loro in disposizione parallela. A tali corpi dà il nome di *Paralleloedri* che appartengono alla specie di quelle figure che l'Autore chiama *Zonnedri*, ossia di quelle figure solide di cui le faccie sono associate fra di loro secondo zone. Suddividendo poi i *paralleloedri*, costituenti una delle reti dello spazio, in parti eguali o simmetriche per mezzo di piani, lo spazio stesso resta egualmente scomposto in parti continue ed uniformi, alle quali l'Autore dà il nome di *stereoedri*. Mette poi in rilievo la dipendenza fra le reti di stereoedri ed i *sistemi regolari di punti*, e il collegamento fra queste ricerche e quelle relative ai *gruppi di movimenti*.

Anche SCHOENFLIES si è proposto il problema della divisione regolare dello spazio in tante e fra loro congruenti regioni, fondando la risoluzione della questione sulla teoria dei gruppi di traslazioni⁽¹⁾. Lo stesso SCHOENFLIES al capitolo III (*Simmetrische Punktätze und Raungitter*) della sua opera sulla cristallografia⁽²⁾, si occupa ancora delle reti simmetriche dello spazio, delle quali determina i vari tipi in numero di 7 contenenti complessivamente 14 diverse specie.

Ma senza entrare qui in un minuto esame dei lavori citati, basterà osservare che essi hanno precipuamente lo scopo di servire di base a considerazioni di indole cristallografica con speciale riguardo alla questione sulla struttura dei cristalli. È quindi naturale che il problema della divisione dello spazio in poliedri si presenti sotto l'aspetto speciale della condizione di eguaglianza ed uniformità delle varie parti della rete in conformità della ipotesi, generalmente ammessa, della regolare disposizione delle molecole nei corpi cristallizzati.

Il presente lavoro è invece di indole puramente matematica e si differenzia dalle parti analoghe delle opere citate, per la circostanza che in queste, come abbiamo già detto, si risolve il problema della divisione dello spazio ordinario in poliedri eguali o simmetrici (regolari e semiregolari o no), mentre in questo mio lavoro si parte dalla supposizione di avere già a nostra disposizione dei corpi speciali (poliedri regolari e semiregolari) e si cerca come e con quali di questi elementi è possibile riempire con continuità in tutti i modi possibili il nostro spazio.

Si può solo osservare che i risultati ai quali giungono FEDEROW e SCHOENFLIES, relativamente alle reti dello spazio, si ritrovano almeno in parte e in una forma meno generale, fra quelli che si riferiscono alle reti correlative che noi dedurremo da quelle formate nel modo ora detto con poliedri regolari e semiregolari.

E dopo ciò affrettiamoci allo svolgimento del nostro tema.

Prendendo le mosse dall'analogo problema di geometria piana comincerò dal determinare in quali e quanti modi è possibile ricoprire il piano, indefinitamente esteso, con poligoni regolari di eguale lato e dello stesso ordine o no, giacchè con questa prima ricerca non solo potremo facilmente dedurre da quelle ottenute, una triplice serie di altrettante soluzioni relative alla questione proposta, ma, principal-

(1) *Ueber reguläre Gebietstheilungen des Raumes*, Nachrichten von der k. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1888.

(2) *Krystallesysteme und Krystalstructuren*, Leipzig, Teubner, 1891.

mente, perchè essa può suggerire le vie da seguirsi per la completa risoluzione del problema delle reti poledrali nello spazio ordinario.

La determinazione delle reti piano di poligoni regolari può farsi con due diversi metodi che esporremo qui appresso.

2. I. MATRÓN. *Trovare, fra i poligoni regolari, quelli nei quali la somma dei valori degli angoli al vertice di un certo numero di tali poligoni, eguaglia 4 angoli retti.* Per questa ricerca basta osservare che se in un punto possono concorrere s poligoni regolari in modo da formarvi un angolo giro, e più particolarmente $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ poligoni regolari rispettivamente di l_1, l_2, \dots, l_n lati, dovremo avere, prendendo per unità di misura degli angoli l'angolo retto,

$$(1) \quad \sum_{r=1}^n \mathfrak{g}_r \frac{l_r - 2}{l_r} = 2$$

ovvero riducendo

$$(2) \quad 2 \sum_{r=1}^n \frac{\mathfrak{g}_r}{l_r} = s - 2.$$

Il massimo di s corrisponderà al più piccolo valore delle l_r ; facendo quindi tutte le l eguali a 3, avremo $n = 1, \Sigma \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}_1 = 3$, per cui potrà essere al più $s = 6$. Dalla (1) si rileva poi che il massimo di n corrisponde al caso di tutte le \mathfrak{g} eguali ad uno, con $l_1 = 3; l_2 = 4; l_3 = 5, \dots$, e sotto questa ipotesi la relazione stessa ci mostra che può aversi al più $n = 3$.

Sicchè per le reti piano regolari o semiregolari non è possibile che in ciascun vertice concorrano più di 6 poligoni, e che questi appartengano a più di tre specie differenti; la (2) può quindi mettersi sotto la forma più determinata,

$$(3) \quad 2 \left\{ \frac{\mathfrak{g}_1}{l_1} + \frac{\mathfrak{g}_2}{l_2} + \frac{\mathfrak{g}_3}{l_3} \right\} = s - 2.$$

Facendo ora in questa successivamente $s = 3, 4, 5, 6$ e per ciascuna ipotesi dando ad s i valori compatibili colla relazione $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_3 = s$, ed infine per ciascuna tema dei valori di queste \mathfrak{g} prendendo i valori convenienti delle l che soddisfanno alla (3), otterremo tutte le reti regolari e semiregolari come apparisce dal seguente quadro:

Numero Facelle	s	\mathfrak{g}_1	\mathfrak{g}_2	\mathfrak{g}_3	l_1	l_2	l_3
1	3	3	—	—	6	—	—
2	3	2	1	—	8	4	—
3					12	3	—
4	4	1	1	1	4	6	12
5					4	—	—
6	4	2	2	—	3	6	—
7					2	1	1
8	5	4	1	—	3	6	—
9					3	2	—
10	6	6	—	—	3	—	—

3. Il Metodo. Fra tutti i poliedri regolari e semiregolari (di Archimede) determinare quelli che sono costituiti da un numero infinito di faccie (reti piane). Ogni poliedro di Archimede è formato, com'è noto, da faccie regolari di differenti ordine ed equilatero fra di loro, e da angoloidi non regolari, ma tutti però eguali fra di loro; indicando dunque con F e C le faccie o le costole di un poliedro semiregolare, con V gli angoloidi tutti di ordine s, con $f_1, f_2, \dots, f_r, \dots, f_n$ le faccie rispettivamente di $l_1, l_2, \dots, l_r, \dots, l_n$ lati concorrenti rispettivamente in numero di $g_1, g_2, \dots, g_r, \dots, g_n$ in ciascun angoloide, avremo le relazioni:

$$s = \sum_r g_r ; \quad 2C = V \sum_r g_r ; \quad f_r = \frac{Vg_r}{l_r}$$

$$F = \sum_r f_r = \sum_r \frac{Vg_r}{l_r} = V \sum_r \frac{g_r}{l_r}$$

i quali valori di C e di F sostituiti nella relazione di Eulero, $V - C + F = 2$, dopo averne moltiplicati per 2 amboi membri, danno:

$$V \left\{ 2 - \sum_r g_r \frac{l_r - 2}{l_r} \right\} = 4,$$

formula che può servire alla determinazione di tutti i poliedri regolari o semiregolari. Per ottenere da essa tutte le reti piane basta supporre $V = \infty$ il che porta a concludere che deve aversi

$$\sum_r g_r \frac{l_r - 2}{l_r} = 2$$

la quale è identica alla formula (1) già trovata coll'altro metodo, e quindi identico il procedimento per ottenere tutte le soluzioni.

4. Il quadro dato sopra mostra che fra regolari e semiregolari si hanno in tutto 10 reti piane. Delle tre regolari, quella composta di quadrati è *autocorrelativa*; le altre due, di triangoli o di esagoni, sono correlative fra di loro.

Diremo che una rete ammette delle *varietà*, quando gli stessi poligoni che la formano possono aggregarsi in più modi distinti intorno ai diversi vertici. Ora è chiaro che le reti regolari non possono ammettere varietà; fra quelle semiregolari, quando si richiegga che tutti gli angoloidi sieno formati dalle stesse faccie e nello stesso ordine di successione, solamente la rete 9 ammette una varietà a cui daremo il numero d'ordine 9.

Le figure 1-9, 9', 10 rappresentano nell'ordine secondo il quale sono state trovate, le 3 reti regolari, le 7 semiregolari e la varietà a cui abbiamo ora accennato. In ognuna di esse è disegnata a linee punteggiate la rete correlativa formata da faccie tutte eguali e da angoloidi di differenti specie. Si osservi che quando due reti sono in posizione *coniugata*, i vertici dell'uno sono i centri delle faccie dell'altro.

Si può osservare ancora che un piano che contiene una retta indefinita divisa in segmenti eguali, può considerarsi come una rete piana composta di due soli poli-

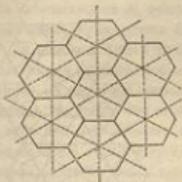


FIG. 1.



FIG. 2.

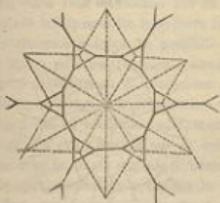


FIG. 3.

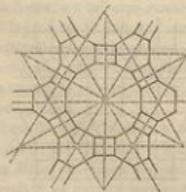


FIG. 4.

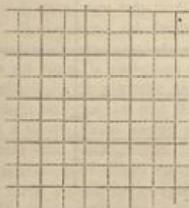


FIG. 5.

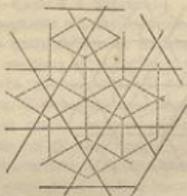


FIG. 6.

goni regolari di un numero infinito di lati. La rete correlativa corrispondente è rappresentata da un numero infinito di *striscie* i cui lati bisecano ad angolo rette quei

segmenti. Tali striscie debbono essere considerate come poligoni regolari di due lati di cui i due vertici coincidono in uno stesso punto all'infinito. La fig. 11 rappresenta le due reti ora accennate.

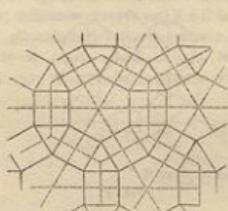


Fig. 7.

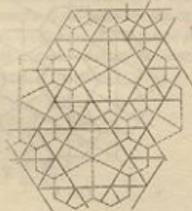


Fig. 8.

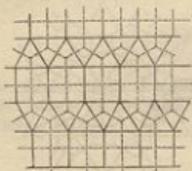


Fig. 9.



Fig. 10.

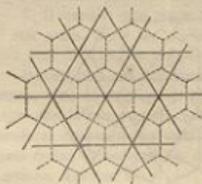


Fig. 11.



Fig. 12.

5. RETI DELLO SPAZIO. — Quando infiniti poliedri della stessa forma o di forma differente, possono aggregarsi in modo da riempire senza sovrapposizioni nè lacune, l'intero spazio ordinario in infinite cellule contigue, diremo che quell'aggregato di

corpi costituisce una *rete dello spazio* o una *rete poliedrale*. Possono immaginarsi infinite reti; noi ci occuperemo solamente di quelle che sono formate dai corpi regolari di Platone e dai semiregolari di Archimede.

Per la determinazione di queste reti poliedrali possiamo, tenendo di guida il procedimento usato per la ricerca delle reti piane, ricorrere alle due proprietà seguenti: 1°, la somma di tutti i diedri dei poliedri, che stanno intorno ad una stessa costola della rete, è eguale a 4 diedri retti; 2°, la somma di tutti gli angoli solidi formati intorno ad uno stesso vertice della rete, è eguale ad 8 piramidi trirettangolo.

Un legame fra queste due relazioni è poi stabilito dal seguente teorema:

« *In ogni poliedro convesso il numero degli angoli diedri retti contenuti nella somma degli angoli diedri, meno la metà del numero degli angoli triedri e trirettangoli contenuti nella somma degli angoli solidi, è eguale a tante volte due, quante sono le faccie del poliedro meno due* » (*).

Queste tre relazioni generali sono però comuni a tutte le reti di poliedri, perchè in esse non entra affatto la forma speciale dei poliedri che rappresentano gli elementi della rete medesima. Per la risoluzione del problema che ci siamo proposti, è quindi indispensabile introdurre in calcolo questa forma, e a tal uopo sarebbe necessario ricorrere a tutte le possibili relazioni che legano fra di loro gli elementi di uno stesso poliedro regolare e semiregolare. Si otterrebbe così, in ultimo, un certo numero di equazioni di condizione delle quali, prendendo tutte le soluzioni intere e positive, si vengono a determinare i vari aggruppamenti di poliedri regolari e semiregolari che ci conducono alla conoscenza delle reti cercate.

6. Un altro metodo per la determinazione di queste reti è quello che scaturisce dalla considerazione seguente: Come nella ricerca dei poliedri regolari e semiregolari dello spazio ordinario è inclusa la determinazione delle reti piane regolari e semiregolari, non essendo queste che dei poliedri speciali di un numero infinito di faccie, così facendo la ricerca dei corpi regolari e semiregolari dello spazio a quattro dimensioni, si debbono trovare come casi particolari le reti poliedrali regolari e semiregolari del nostro spazio poichè tali reti, per analogia, dovrebbero considerarsi come poliedri di un numero infinito di elementi dello spazio a 4 dimensioni.

7. La risoluzione del problema proposto seguendo o l'una o l'altra delle vie precedentemente accennate, non è scevra di una qualche difficoltà. Riserbandomi di dare a suo tempo la risoluzione completa della questione coi due metodi in parola, mi limiterò per ora a seguire un terzo metodo che, pur non avendo il valore scientifico degli altri due, ha però il vantaggio, forse, di presentare una maggiore semplicità e brevità; senza contare poi che per esso non è necessario quel corredo di cognizioni sulla poliedrometria, che si richieggono per gli altri due.

Seguendo quest'ultima via si comincia a determinare il valore numerico degli angoli diedri e solidi dei vari poliedri regolari e semiregolari; indi si cercano quegli speciali aggruppamenti di tali poliedri nei quali la somma degli angoli diedri che stanno

(*) BRIANCHON, *Théorème nouveau sur les Polyèdres*, Journ. de l'éc. polyt. (1837), Cah. 25, t. XV, pag. 317. Dal vol. 5° del giorn. di Crelle (1830), pag. 37, si rileva che veramente il teorema enunciato era già stato dato da GRUNERT in una sua memoria dal titolo: *Einige stereometrische Sätze*.

intorno ad uno stesso spigolo è uguale a 4 diedri retti, oppure si cercano gli aggruppamenti nei quali la somma degli angoli solidi concorrenti in uno stesso punto eguaglia 8 triedri trirettangoli. La ricerca può quindi farsi in due modi distinti, e noi, seguendo tutti e due, potremo controllare i risultati dell'uno con quelli dell'altro. Vogliamo però osservare che in ciò che segue non ci limiteremo ad un puro lavoro di tentativo quale sarebbe quello di combinare in tutti i modi possibili i vari valori angolari in maniera da soddisfare alle condizioni volute, giacchè con opportune distinzioni e confronti fra questi valori angolari, potremo notevolmente abbreviare quel lungo cammino e determinare, con un lavoro abbastanza breve, tutte le soluzioni del problema. E dopo ciò entriamo senz'altro in argomento esponendo successivamente i due metodi sopra accennati.

I METODO. *Determinazione delle reti poliedrali per mezzo della considerazione degli angoli diedri dei poliedri.*

8. I corpi dei quali debbono risultare formati le reti che si cercano, non possono essere che i 5 regolari o cioè il tetraedro, l'esaedro, l'ottaedro, il dodecaedro, l'icosaedro; e i 13 semiregolari o cioè (secondo la nomenclatura di KEPLER) (1) il tetraedro, l'icosaedro, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro tronchi; il cubottaedro, e l'icosaedrodecadro; il rombicubottaedro e l'icosidodecadro; il cubottaedro tronco e l'icosidodecadro tronco; il cubo simo e il dodecaedro simo. Oltre questi si hanno da considerare ancora due classi indefinite di corpi semiregolari; la prima è quella costituita da prismi di cui la base è un poligono regolare di n lati ($n = 3, 4, \dots, \infty$) e le faccie laterali n quadrati; la seconda classe è pure costituita da una serie infinita di corpi speciali, che diremo prismi storti, dei quali la base è un poligono regolare di n lati ($n = 1, 2, 3, \dots, \infty$) e le faccie laterali sono $2n$ triangoli equilateri alternativamente colla base in alto ed in basso. Di queste ultime specie di poliedri semiregolari quella che ha per base un quadrato, fra i poliedri della prima classe, è identica all'esaedro regolare; quella che ha per base un triangolo, fra i poliedri della 2ª classe, non è altro che l'ottaedro regolare.

Parlando nel seguito di questo scritto di poliedri regolari e semiregolari, di prismi e di prismi storti, intenderemo sempre di significare rispettivamente i 5 poliedri regolari, i 13 semiregolari di Archimede, le serie di prismi e quella dei prismi storti ora accennati.

9. Per risolvere la questione che ci interessa, secondo il metodo indicato, dovremo intanto esaminare, salvo le ulteriori condizioni che a suo tempo stabiliremo, quali fra i poliedri considerati possono aggrupparsi intorno ad uno spigolo in modo che la somma dei diversi angoli diedri risulti eguale a 4 retti. È quindi necessario, prima di ogni altra cosa, di determinare il valore degli angoli diedri dei diversi poliedri sopra enumerati.

A tale scopo consideriamo in generale, come abbiamo già fatto al n. 3, il poliedro semiregolare pel quale le faccie di ordine $l_1, l_2, \dots, l_r, \dots, l_n$ concorrono rispettivamente in numero di $g_1, g_2, \dots, g_r, \dots, g_n$ in ciascuno angoloide.

(1) *Harmonices mundi*, lib. II, 28.

Immaginiamo tale poliedro proiettato sulla sfera circoscritta di raggio 1, per modo che ad esso venga a corrispondere sulla sfera una rete semiregolare di poligoni sferici. Indicando con λ la lunghezza comune dei lati di questa rete e in generale con x_i il valore dell'angolo del poligono sferico di l_i lati, è facile riconoscere che si avranno allora le $n+1$ relazioni seguenti:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i = 360^\circ \\ \cos \frac{1}{2} \lambda = \frac{\cos \frac{180^\circ}{l_1}}{\sin \frac{1}{2} x_1} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{l_2}}{\sin \frac{1}{2} x_2} = \dots = \frac{\cos \frac{180^\circ}{l_r}}{\sin \frac{1}{2} x_r} = \dots = \frac{\cos \frac{180^\circ}{l_n}}{\sin \frac{1}{2} x_n} \end{array} \right.$$

le quali astrazion fatta dalla lunghezza e difficoltà dei calcoli, permettono di determinare le x_i e quindi λ , quando sieno note tutte le l_i e le φ_i .

Chiamando ora \mathcal{A} il diedro del poliedro formato dalle facce di ordine l_m, l_n ; a_m e a_n le apoteme rispettive di queste facce; ϱ la lunghezza della congiungente il centro del poliedro col punto di mezzo dello spigolo comune alle facce suddette; α_m e α_n l'angolo che ϱ forma con queste stesse facce, si trova facilmente:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_m = \frac{a_m}{\varrho} = \frac{\sin \frac{1}{2} \lambda \cot \frac{180^\circ}{l_m}}{\cos \frac{1}{2} \lambda} = \cot \frac{180^\circ}{l_m} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda \\ \cos \alpha_n = \frac{a_n}{\varrho} = \frac{\sin \frac{1}{2} \lambda \cot \frac{180^\circ}{l_n}}{\cos \frac{1}{2} \lambda} = \cot \frac{180^\circ}{l_n} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda \end{array} \right.$$

e quindi

$$(6) \quad \mathcal{A} = \alpha_m + \alpha_n = \arccos \left(\cot \frac{180^\circ}{l_m} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda \right) + \arccos \left(\cot \frac{180^\circ}{l_n} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda \right).$$

10. Nel caso di un poliedro regolare, chiamando l ed s rispettivamente l'ordine delle facce e degli angoloidi, le (4) divengono

$$s x = 360^\circ, \quad \cos \frac{1}{2} \lambda = \frac{\cos \frac{180^\circ}{l}}{\sin \frac{1}{2} s}$$

e quindi dalle (5), tenendo conto dell'ultima delle precedenti, si deduce dopo alcune trasformazioni e riduzioni

$$(7) \quad \cos \alpha = \frac{\cos \frac{180^\circ}{s}}{\sin \frac{180^\circ}{l}}$$

spigoli di un poliedro regolare. Infatti per questi angoli, indicando con \mathcal{A} il diedro del poliedro regolare e con δ quello cercato, abbiamo la relazione semplicissima

$$(14) \quad \delta = 90^\circ + \frac{1}{2} \mathcal{A}.$$

12. Le precedenti relazioni sono sufficienti a determinare gli angoli diedri di tutti i poliedri regolari e di tutti i somiregolari, tranne quelli già ricordati al principio dell'articolo precedente. Per il *cubo simo* e *dodecaedro simo* non si può che ricorrere alle formule generali (4), (5), (6). L'uso delle quali importa un calcolo alquanto lungo. Per il *cubo simo* la prima delle (4) diviene $4x_3 + x_4 = 360^\circ$ dalla quale e per mezzo dell'altra relazione $\frac{\cos 45^\circ}{\sin \frac{1}{2} x_4} = \frac{\cos 60^\circ}{\sin \frac{1}{2} x_3}$ che si deduce dalle seconde della (4), si ottiene

$$(16) \quad \left(\frac{1}{\cos x_3}\right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\cos x_2}\right) - 4 = 0.$$

Risolviendo questa equazione del 3° grado riguardando come incognita $\left(\frac{1}{\cos x_2}\right)$, si viene a conoscere x_2 , e dopo ciò è facile determinare il valore di x_4 , e quindi quello di λ per mezzo della relazione $\cos \frac{1}{2} \lambda = \frac{\cos 45^\circ}{\sin \frac{1}{2} x_3}$.

Conosciuto λ , si determina poi δ_{22}^m e δ_{23}^m per mezzo della (6) facendovi successivamente $l_m = l_n = 3$, poscia $l_m = 3$; $l_n = 4$.

13. Per il *dodecaedro simo* si segue un procedimento analogo, solamente che l'equazione del 3° grado data sopra diviene ora

$$(17) \quad M^2 \left(\frac{1}{\cos x_2}\right)^2 - 8 \left(\frac{1}{\cos x_2}\right) - 8 = 0$$

ove $M = \frac{\cos 36^\circ}{\cos 60^\circ}$.
 si procede poi nello stesso modo per determinare x_3 e λ , e quindi δ_{22}^m e δ_{23}^m .

14. Per i *prismi* abbiamo in generale:

$$(18) \quad \delta_{2n}^m = 90^\circ, \quad \delta_{2n}^m = \frac{180(n-2)}{\pi}.$$

Per i *prismi storti* si potrebbe fare uso delle medesime formule generali (4), (5), (6), ma è più semplice servirsi del metodo speciale seguente: L'angolo diedro δ_{2n}^m è uguale al supplemento dell'angolo acuto di un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è altezza di un triangolo equilatero di lato l , e il cateto adiacente a quell'angolo, è la differenza fra i raggi dei circoli circoscritti ed inscritto al poligono regolare di n lati, e di lato eguale ad l . Abbiamo quindi in generale

$$(19) \quad \cos \delta_{2n}^m = -\frac{\operatorname{tg} \frac{90}{n}}{\sqrt{3}} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{90}{n}}{2 \cos 30^\circ}.$$

POLIEDRI		ELEMENTI DEL POLIEDRO		V.A.L.E.R.I.		BIFEDIMENTI	
simboli	NOME	Angoli	Facce	Coste			
<i>f</i>	Tetraedro	4,(2,2)	4,	6	ϕ_1 — 70° 31' 43" . 024	9 ⁹	
<i>g</i>	Chubo	8,(2,2)	8,	12	ϕ_1 — 100 28 16 . 376	7 ⁷ , $\phi = 8$, $f = 4$, (10)	
<i>h</i>	Octaedro	6,(2,2)	6,	12	ϕ_1 — 90 55 16 . 376	7 ⁷ , $\phi = 8$, $f = 6$, (10)	
<i>d</i>	Dodecaedro	20,(3,3)	20,	30	ϕ_1 — 130 11 32 . 860	7 ⁷ , $\phi = 5$, $f = 10$, (10)	
<i>e</i>	Icosaedro	12,(3,2)	20,	30	ϕ_1 — 70 31 43 . 024	10 ¹⁰ , 1*	
<i>ff</i>	Tetraedro tronco	12,(3,2)	4,, 4,	18	ϕ_1 — 100 28 16 . 376	10 ¹⁰ , 2*	
<i>ef</i>	Chubo tronco	24,(3,2)	8,, 8,	36	ϕ_1 — 90	10 ¹⁰ , 3*	
<i>of</i>	Octaedro tronco	24,(3,2)	6,, 6,	30	ϕ_1 — 135 15 51 . 813	10 ¹⁰ , 3*	
<i>df</i>	Dodecaedro tronco	60,(3,2)	20,, 12,,	90	ϕ_1 — 100 28 16 . 376	10 ¹⁰ , 3*	
<i>ff</i>	Icosaedro tronco	60,(3,2)	12,, 20,,	90	ϕ_1 — 110 30 54 . 164	11 ¹¹ , 3*	
<i>eo</i>	Chubotetraedro	12,(2,2)	8,, 6,	24	ϕ_1 — 143 37 31 . 475	10 ¹⁰ , 3*	
<i>ed</i>	Icosidodecaedro	30,(2,2)	20,, 12,,	60	ϕ_1 — 143 37 31 . 475	12 ¹²	
<i>epo</i>	Rombicubotetraedro	24,(2,2)	18,, 8,	48	ϕ_1 — 144 44 08 . 188	14 ¹⁴	
<i>edf</i>	Rombicubododecaedro	60,(2,2,2)	20,, 12,, 30,,	120	ϕ_1 — 186	14 ¹⁴	
<i>oef</i>	Chubotetraedro tronco	48,(2,2,2)	12,, 8,, 6,	72	ϕ_1 — 148 10 57 . 092	14 ¹⁴	
<i>edf</i>	Icosidodecaedro tronco	120,(2,2,2)	30,, 20,, 12,,	180	ϕ_1 — 150 05 41 . 430	14 ¹⁴	
<i>es</i>	Chubo simo	24,(4,1)	22,, 6,	60	ϕ_1 — 148 16 57 . 092	14 ¹⁴	
<i>de</i>	Dodecaedro simo	60,(4,1)	30,, 12,,	150	ϕ_1 — 142 57 21 . 476	16 ¹⁶	
<i>fs</i>	triangolo	0,(2,1)	2,, 2,	3	ϕ_1 — 150 14 04 . 840	10 ¹⁰	
<i>fs</i>	quadrangolo	8,(2,1)	2,, 4,	12	ϕ_1 — 142 59 09 . 090	17 ¹⁷	
<i>fs</i>	pentagonale	10,(2,1)	2,, 6,	15	ϕ_1 — 104 10 01 . 302	17 ¹⁷	
<i>fs</i>	esagonale	14,(2,1)	2,, 6,	18	ϕ_1 — 152 55 53 . 060	17 ¹⁷	
<i>fs</i>	ottagonale	16,(2,1)	2,, 8,	24	ϕ_1 — 90	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	decagonale	20,(2,1)	2,, 10,,	30	ϕ_1 — 100 38 16 . 376	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	triangolo	0,(3,1)	2,, 6,	3	ϕ_1 — 103 50 11 . 360	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	quadrangolo	8,(3,1)	2,, 8,	10	ϕ_1 — 137 33 05 . 760	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	pentagonale	10,(3,1)	2,, 10,,	15	ϕ_1 — 100 48 44 . 341	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	esagonale	12,(3,1)	2,, 12,,	24	ϕ_1 — 138 11 22 . 860	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	ottagonale	16,(3,1)	2,, 16,,	32	ϕ_1 — 98 54 57 . 944	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	decagonale	20,(3,1)	2,, 20,,	40	ϕ_1 — 145 13 18 . 060	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	triangolo	0,(3,1)	2,, 6,	3	ϕ_1 — 90 35 40 . 384	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	quadrangolo	8,(3,1)	2,, 8,	10	ϕ_1 — 153 57 47 . 572	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	pentagonale	10,(3,1)	2,, 10,,	15	ϕ_1 — 98 14 44 . 916	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	esagonale	12,(3,1)	2,, 12,,	24	ϕ_1 — 150 11 09 . 678	18 ¹⁸	
<i>fs</i>	ottagonale	16,(3,1)	2,, 16,,	32		18 ¹⁸	
<i>fs</i>	decagonale	20,(3,1)	2,, 20,,	40		18 ¹⁸	

Per la determinazione del d_{pa}^{pa} , si consideri il triedro di cui i 3 spigoli sono rappresentati da una costola comune alle due faccie triangolari, da un'altezza di una faccia triangolare e dall'altezza del prisma storto, partenti, tutte queste tre linee, da uno stesso vertice di una delle basi, per cadere sull'altra base. Il diedro di questo triedro che ha per spigolo l'altezza del triangolo equilatero è retto, e quello che ha per spigolo la costola del poliedro è un certo angolo β tale che

$$(20) \quad d_{pa}^{pa} = 180 - 2\beta$$

e quindi applicando a quel triedro rettangolo le note formule dei triangoli sferici rettangoli abbiamo

$$(21) \quad \cos \frac{1}{2} d_{pa}^{pa} = \sin \beta = \frac{\cos \frac{180(n-2)}{2n}}{\cos 30^\circ} = \frac{\sin \frac{90}{n}}{\cos 30^\circ} \quad (21)$$

15. In base a quanto precede diamo qui appresso la tabella dei corpi regolari e semiregolari (fra i quali debbono essere scelti gli elementi per costituire le diverse reti poliedrali) insieme ai valori degli angoli diedri corrispondenti.

Per questa tabella bastano poche spiegazioni. Nella prima colonna vi è la notazione simbolica dei vari poliedri; nella colonna intestata *angoloidi*, i primi numeri coll'indice esprimono rispettivamente il numero e l'ordine (comune a tutti) degli angoloidi che costituiscono il corpo; i numeri seguenti fra parentesi coi relativi indici, esprimono i numeri e l'ordine delle diverse faccie che costituiscono i singoli angoloidi. La colonna intestata *facce* contiene il numero e l'ordine corrispondente delle faccie che formano l'intero corpo.

Così, ad esempio, pel *Rombicosidodocaedro* (*rid*) si ricava che esso è costituito da 60 angoloidi tetraedrici, formati ciascuno dal concorso di una faccia triangolare, due quadrangolari e una pentagonale; lo stesso corpo contiene 20 faccie triangolari, 12 pentagonali, 30 quadrangolari; il numero delle costole è 120. L'ultima colonna contiene la indicazione delle formule da cui sono stati dedotti i valori degli angoli diedro del poliedro e i valori speciali che in alcune di quelle formule vi hanno preso le lettere.

Dei prismi e prismi storti abbiamo considerati solamente quelli che, come diremo al n. 24, non possono escludersi a priori come facenti parte di reti poliedrali.

δ_{ps}^{44}	60°	$= a = \frac{1}{2}$
$\delta_i = \delta_{ps}^{60}$	70° 31' 43"	$= b$
$\delta_e = \delta_{ps}^{90} = \delta_{ps}^{92}$	90	$= c = 1$
δ_{ps10}^{102}	95 14 47 , 915	$= d$
δ_{ps4}^{93}	96 35 40 , 284	$= e$
δ_{ps2}^{93}	98 54 57 , 944	$= f$
δ_{ps3}^{93}	100 48 44 , 341	$= g$
δ_{ps4}^{93}	-103 50 11 , 359	$= h$
δ_{ps}^{94}	108	$= i = \frac{2}{3}$
$\delta_g = \delta_{ps}^{93} = \delta_{ps}^{94} = \delta_{ps3}^{93}$	109 28 16 , 376	$= j = 2 - b$
$\delta_d = \delta_{ps}^{95-10}$	116 33 54 , 184	$= k$
δ_{ps}^{94}	120	$= l = \frac{1}{2}$
$\delta_{ps}^{93} = \delta_{ps}^{93} = \delta_{ps}^{94} = \delta_{ps}^{94}$	125 15 51 , 812	$= m = 1 + \frac{1}{2} b$
δ_{ps4}^{93}	127 33 05 , 760	$= n$
$\delta_{ps}^{94} = \delta_{ps}^{94} = \delta_{ps}^{94}$	135	$= o = \frac{1}{2}$
$\delta_i = \delta_{ps}^{94} = \delta_{ps}^{93}$	138 11 22 , 866	$= p$
$\delta_{ps}^{95} = \delta_{ps}^{95} = \delta_{ps}^{95} = \delta_{ps}^{95}$	142 37 21 , 475	$= q$
δ_{ps}^{94}	142 59 00 , 093	$= r$
δ_{ps10}^{94}	144	$= s = \frac{2}{3}$
$\delta_{ps}^{94} = \delta_{ps}^{94}$	144 44 08 , 188	$= t = 2 - \frac{1}{2} b$
δ_{ps}^{93}	145 13 18 , 986	$= u$
$\delta_{ps}^{95} = \delta_{ps}^{95}$	148 16 57 , 092	$= v = 1 + \frac{1}{2} k$
δ_{ps}^{95}	152 55 53 , 600	$= w$
δ_{ps}^{93}	153 14 04 , 340	$= A$
δ_{ps4}^{93}	153 57 44 , 572	$= B$
$\delta_{ps}^{94} = \delta_{ps}^{94}$	159 05 41 , 433	$= C = 1 + \frac{1}{2} p$
δ_{ps10}^{93}	159 11 09 , 678	$= D$
δ_{ps}^{92}	164 10 31 , 322	$= E$

16. Nel quadro qui a tergo sono raccolti tutti i differenti valori, ricavati dalla precedente tabella, degli angoli diedri appartenenti ai diversi poliedri regolari e semiregolari e ai prismi e prismi storti con basi di 3, 4, 5, 6, 8, 10 lati.

Tali valori sono disposti per ordine crescente di grandezza; ognuno di essi è poi indicato con una lettera speciale per potere più facilmente metterlo in evidenza le relazioni che passano fra di loro, e per rendere più semplice le ricerche che dovremo fare tra poco. Le espressioni numeriche di questa colonna rappresentano i valori degli angoli diedri in angoli retti.

17. Venendo ora alla determinazione delle reti poliedrali, in conformità di quanto è stato detto al n. 7, divideremo la ricerca in 5 casi distinti, determinando successivamente le reti che sono composte,

- 1°. Unicamente di prismi,
- 2°. " " prismi storti,
- 3°. " " prismi e di prismi storti.
- 4°. Di prismi e prismi storti insieme a poliedri regolari e semiregolari ordinari.
- 5°. Unicamente di poliedri regolari e semiregolari ordinari.

1°. RETI POLIEDRALI DI PRISMI.

18. È chiaro che i prismi semiregolari, essendo tutti della medesima altezza e formati lateralmente da faccie quadrate eguali, non possono che associarsi l'uno di seguito all'altro in modo da formare tanti strati sovrapposti ognuno dei quali ha un'altezza eguale alla costola del solido; i vari piani di separazione degli strati appariranno perciò divisi in poligoni e, in altre parole, essi piani porteranno la traccia di una stessa rete piana regolare o semiregolare. Conseguentemente quante saranno queste reti piane, tanti saranno i modi differenti di riempire lo spazio con prismi semiregolari.

Ricordando quindi tutte le soluzioni trovate (n. 2 e 3) per le reti del piano, possiamo dire che esistono 10 reti composte di prismi a base,

- 1° esagonali,
- 2° quadrangolari e ottagonali,
- 3° dodecagonali e triangolari,
- 4° quadrangolari, esagonali e dodecagonali,
- 5° quadrangolari,
- 6° triangolari ed esagonali,
- 7° triangolari, quadrangolari ed esagonali,
- 8° triangolari ed esagonali,
- 9° triangolari e quadrangolari,
- 9^a triangolari e quadrangolari (varietà della precedente),
- 10° triangolari.

19. Uno strato compreso fra due semipiani paralleli, di cui la *striscia* che lo termina è divisa in quadrati, può considerarsi come un prisma semiregolare colla

base di un numero infinito di lati. Con questi prismi, che noteremo con $p\alpha$, può formarsi una 11^a rete poliedrale che è la corrispondente di quella piana considerata alla fine del n. 4. Questa 11^a rete risulta perciò formata da due pile indefinite di tali prismi, le quali combaciano fra di loro per mezzo di una rete piana di quadrati.

20. I risultati del n. 18 suggeriscono altre forme speciali di reti. Infatti una superficie prismatica regolare indefinita di n faccie, che noteremo con P_n , può riguardarsi come un poliedro regolare di n faccie regolari (bilatere) e di due angoloidi regolari n spigoli posti a distanza infinita. Ora se le varie pile indefinite di prismi dello stesso ordine che costituiscono le reti considerate al n. 18 si riguardano come altrettanti prismi indefiniti, o, ciò che è lo stesso, se in corrispondenza dei poligoni delle reti piane date al n. 2, si costruisce un prisma indefinito, si vengono ad ottenere altrettante reti dello spazio costituito da queste forme speciali di corpi regolari.

Come caso speciale di questa classe di reti possiamo dire che da un piano diviso in strisce possiamo dedurre, per lo spazio, una rete costituita da due prismi indefiniti di un numero infinito di faccie. Tale rete può essere dedotta in modo analogo alle precedenti, dalla rete piana correlativa considerata alla fine del n. 4, o dalla rete poliedrale del n. 19. È poi chiaro che tutti questi prismi indefiniti non possono formare delle reti altro che fra di loro, vale a dire non possono entrare in combinazione con altri corpi regolari e semiregolari per formare delle reti poliedrali.

20^{bis}. Una terza serie di reti poliedrali si ottiene osservando che i reticolati piani del n. 2 possono considerarsi come corpi semiregolari di un numero infinito di faccie, per cui possiamo immaginare nello spazio altre 10 reti ed una varietà, composte ciascuna di una coppia di tali corpi, i quali combaciano fra loro per mezzo della stessa rete piana che li limita tutti e due. La rete piana 11^a dà luogo, in modo analogo, ad una rete dello spazio composto di due soli corpi aventi ciascuno due sole faccie di un numero infinito di lati.

2°. RETI DI PRISMI STORTI.

21. I prismi storti semiregolari di ordine differente, ma con spigoli di eguale lunghezza, non hanno la stessa altezza, perchè questa risulta tanto più grande, quanto più grande è il numero dei lati della base. Segue di qui che con prismi storti di differente ordine non è possibile alcuna rete formata di aggruppamenti a strati come per caso di prismi semiregolari. D'altra parte indipendentemente da questa considerazione, è chiaro che qualunque sieno i poliedri storti da aggregarsi fra di loro, deve sempre risultare, da tali aggruppamenti, il combaciamento di faccie triangolari dei diversi prismi. Ora mettendo in coincidenza due di tali facce, le due basi dei prismi storti vengono a formare tra di loro un angolo diedro convesso nel quale non è possibile incastrare nè uno nè due diedri di due altri solidi delle stesse specie. Infatti l'angolo alla base del prisma storto varia da un massimo di $109^{\circ}28'16''$, 376 (ottaedro regolare) ad un minimo di 90° che corrisponde al caso limite del prisma storto con base di un numero infinito di lati. Sicchè in generale tale angolo può essere espresso da $90 + \alpha$ con

$$0 \leq \alpha \leq 19^{\circ}28'16'',394.$$

Ora è chiaro che 3 qualunque di questi angoli diedri non arrivano a 360° , mentre 4 superano questo valore.

Sicchè si deve concludere che con soli prismi storti non è possibile alcuna rete poliedrale.

22. Possiamo però considerare il seguente caso speciale: Il prisma storto limite, al quale abbiamo or ora accennato, è analogo al prisma di cui abbiamo parlato al n. 19, colla differenza che la striscia che allora supponemmo divisa in quadrati, in questa è suddivisa invece in triangoli equilateri alternativamente colla base in alto ed in basso. Ora con questi prismi storti speciali, che noteremo con $ps\infty$, può formarsi una rete dello spazio, che difiorisce da quella del n. 19 pel solo fatto che la rete piana di combaciamento è di triangoli equilateri anzichè di quadrati.

3°. RETI POLIEDRALI DI PRISMI E PRISMI STORTI.

23. Le cose dette precedentemente sono sufficienti per poter concludere che non possono esistere reti dello spazio formate unicamente di prismi e di prismi storti. Infatti è facile riconoscere che le pile distinte di prismi e di prismi storti o le pile di queste due specie di prismi alternati fra di loro, non possono portarsi a combaciare perchè la somma dei diedri intorno agli spigoli orizzontali dei diversi strati supera 4 diedri retti. Anche qui però possiamo considerare un caso speciale di reti. Infatti le due pile indefinite formate alternativamente coi prismi $p\infty$ (n. 19) e $ps\infty$ (n. 22), possono venire in coincidenza, e la rete piana di combaciamento (formata di file di quadrati alternate con file di triangoli equilateri con base in alto e in basso alternativamente) non è altro che la varietà 9' delle reti piane date ai n. 2 e 3.

4°. RETI NON FORMATE DA SOLI PRISMI E PRISMI STORTI.

24. In questo caso è facile riconoscere che pile indefinite, alcune di prismi, altre di prismi storti non possono associarsi con poliedri regolari e semiregolari ordinari per formare una rete dello spazio. Infatti nel caso di pile di prismi, gli altri poliedri ordinari dovrebbero aggregarsi ai prismi per mezzo di faccie quadrangolari in modo che la somma degli angoli diedri di questi ultimi risulti eguale a due retti; ora escludendo il caso dei cubi e degli altri prismi, per non ricadere in reti già determinate, si verifica subito, consultando il quadro del n. 16, che i diedri non appartenenti a prismi, alla formazione dei quali prendono parte faccie quadrilateri e cioè gli angoli diedri A, m, o, r, t, v, C non possono essere aggruppati fra di loro in modo da formare un diedro piatto. Parimente nel caso di pile di prismi storti gli altri poliedri dovrebbero aggregarsi ad essi per le faccie triangolari, e quindi escludendo gli ottaedri e gli altri prismi storti per non ricadere nei casi già considerati, si rileva dal medesimo quadro, che i diedri formati da almeno una faccia triangolare i cui valori angolari sono notati con $j, m, q, r, t, w, A, C, E$ non possono essere aggregati fra di loro in modo da dare per somma $180 - 2\alpha$, ove α ha il significato già dichiarato al n. 21. Si può quindi concludere che se esistono reti di cui facciano parte, insieme ai poliedri ordinari, dei prismi e dei prismi storti, questi non

possono aggregarsi a quelli che per mezzo delle basi e per conseguenza tali basi non possono essere che triangoli pentagoni, esagoni, ottagoni e decagoni.

Esclusi così a priori i prismi e prismi storti che non possono prender parte alla formazione di reti, vediamo fra quelli rimasti, quali altri debbono essere esclusi.

25. Cominciando dai prismi si consideri in generale il $p\pi$, ove π può prendere i valori 3, 5, 6, 8, 10, e portiamo poi la base a combaciare con quella delle faccie degli angoli diedri d , registrati nel quadro del n. 16, che è formato da n lati escludendo, s'intende, quegli angoli diedri che appartengono ai soli prismi e prismi storti; dopo ciò l'angolo diedro $360^\circ - (90^\circ + d) = 270^\circ - d$ che rimane scoperto, deve potersi completare con uno o due triedri di altri solidi semiregolari. Facendo ora tutte le necessarie prove (il numero delle quali viene del resto ridotto coll'osservare che in questi ultimi poliedri vi devono comparire faccie o quadrilatero od n -latere) si trova che solamente il prisma a base ottagonale ($p=8$) può prender parte alla costituzione di reti. Per questo solido si trova infatti che esso può aggrupparsi con altri regolari e semiregolari in modo da completare un giro; tali aggruppamenti sono:

- | | |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1 $(d_{p8}^{36} d_{p8}^{36} d_{p8}^{36} d_{p8}^{36})$ | 2 $(d_{p8}^{36} d_{p8}^{36} d_{p8}^{36} d_{p8}^{36})$ |
| 3 $(d_{p8}^{36} d_{p8}^{36} d_{p8}^{36})$ | 4 $(d_{p8}^{36} d_{p8}^{36} d_{p8}^{36})$ |
| 5 $(d_{p8}^{36} d_{p8}^{36} d_{p8}^{36})$ | 6 $(d_{p8}^{36} d_{p8}^{36} d_{p8}^{36})$ |
| 7 $(d_{p8}^{36} d_{p8}^{36} d_{p8}^{36})$ | |

Si hanno così complessivamente sette aggruppamenti possibili fra i diedri del prisma ottagonale e i poliedri regolari e semiregolari in modo da formare 4 angoli diedri retti.

26. Ora è necessario vedere a quante reti di poliedri possono effettivamente dar luogo questi aggruppamenti. A tale scopo si osservi che i due estremi dell'asse (spigolo della rete) di ognuno dei giri trovati, per es. di un giro che chiameremo G , è vertice V di una stella S della rete, nel quale vertice concorrono altri giri che contengono due diedri appartenenti a due determinati solidi che prendono parte alla formazione di G ; dovremo quindi cercare fra gli altri aggruppamenti, se esistono, quelli in cui due diedri sono gli stessi di quelli di G . Si ripete la stessa operazione per tutti gli altri giri che concorrono in V , e quando per ciascuno siamo sicuri dell'esistenza del giro di diedri, potremo asserire che esiste la rete di poliedri formata di stelle identiche ad S . Ripetendo la stessa cosa per gli aggruppamenti rimanenti si vengono a determinare tutte le reti possibili.

27. Tenuto conto della considerazione precedente è facile riconoscere che le soluzioni ottenute danno luogo alle due reti seguenti:

- 1^a (1-3-6) 2^a (5-7);

in questa notazione i numeri fra parentesi si riferiscono al numero d'ordine dei giri di diedri trovati al n. 25. Si osservi che i giri 2 e 4 debbono essere esclusi, perchè ad ognuno di essi non sono associabili altri giri secondo la condizione espressa nel numero precedente.

28. Per la ricerca delle reti contenenti prismi storti nei quali la base π (escludendo il caso di $\pi=3$ che corrisponde all'ottaedro regolare) può assumere il valore

4, 5, 6, 8, 10, si procede nel modo stesso indicato al n. 25, e si trova l'unico giro di diedri ($\theta_{25}^3 \theta_{25}^2 \theta_{25}$) il quale, peraltro, non corrisponde ad alcuna rete di quelle cercate, perchè per essa non sono soddisfatte le condizioni espresse al n. 26.

5°. RETI DI POLIEDRI REGOLARI E SEMIREGOLARI.

29. Ci rimangono ora da trovare le reti di poliedri regolari e semiregolari che non sono prismi nè prismi storti. Per la determinazione di tutti i giri di diedri, scelti in modo convenientemente fra i valori $b, c, f, k, m, o, p, q, r, t, v, w, A, C, E$ del quadro dato al n. 16, dovremo risolvere in numeri interi e positivi l'equazione:

$$bx_0 + cx_1 + jx_2 + \dots + Ax_n + Cx_o + Ex_s = 360^\circ.$$

Ma prendendo per unità l'angolo retto e tenendo conto delle espressioni che per alcuni diedri si hanno nell'ultima colonna del quadro predetto, la equazione precedente può essere ridotta all'altra:

$$\begin{aligned} & [k(2x_0 - 2x_2 + x_m - x_i) + k(2x_k + x_s) + p(2x_p + x_c) + \\ & \quad + 2qx_q + 2rx_r + 2wx_w + 2Ax_n + 2Cx_o] + \\ & \quad + [2x_0 + 3x_1 + 4x_2 + 2x_m + 4x_i + 2x_r + 2x_c] = 8. \end{aligned}$$

Ora poichè la parte racchiusa nella 2ª parentesi [] dà sempre luogo ad un numero intero, altrettanto deve accadere della prima; ma formando la tabella di tutti i multipli inferiori ad 8, ossia a 720° , degli angoli $b, k, p, 2q, 2r, 2w, 2A, 2E$ e combinandoli poi fra di loro in tutti i modi possibili, sempre però colla condizione di avere una somma non superiore a 720° , si verifica facilmente che niuno di questi aggruppamenti risulta eguale ad un numero intero di angoli retti; ciò porta a concludere che le espressioni in x che moltiplicano b, k, p ecc. che compariscono nella prima parentesi [] della equazione, debbono essere identicamente nulli, e quindi poichè le x debbono essere intere e positive l'equazione stessa dà luogo al seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_0 - 2x_2 + x_m - x_i = 0 \\ 2x_p + x_c = 0 \\ 2x_0 + 3x_1 + 4x_2 + 2x_m + 4x_i + 2x_r + 2x_c = 8. \end{cases}$$

L'ultima equazione si può anche mettere sotto la forma

$$x_0 + 3y_0 + 2x_2 + x_m + 2x_i + x_r + x_c = 4$$

dopo aver posto $x_0 = 2y_0$. La presenza di x_0, x_c sta a denotare che in qualche giro di diedri può comparire il *rombicoidodecaedro* o l'*iccosidodecaedro tronco*; ora questi due corpi, contenendo rispettivamente facce pentagone e decagone, non possono che rispettivamente venire a combaciare fra di loro perchè il sistema precedente mostra che non vi sono altri poliedri con facce di 5 e 10 lati. D'altra parte essendo $180 - 2x$ e $180 - 2C$ minore di b che è il più piccolo (n. 16) dei diedri

dei corpi che possono entrare in combinazione, si conclude che non è possibile completare un giro quando di esso fanno parte i due corpi ricordati sopra. Sicchè sopprimendo dalla 2ª equazione e dall'ultima, i termini in x_e ed x_o e aggiungendovi primo membro della prima, il sistema dato sopra si riduce finalmente all'altro assai poi il più semplice:

$$(22) \quad \begin{cases} 2x_b - 2x_f + x_m - x_e = 0 \\ (x_e + x_i) + 2(x_b + x_m) + 3y_o = 4. \end{cases}$$

Considerando le espressioni $(x_e + x_i)$, $(x_b + x_m)$ e $y_o = \frac{1}{3}x_o$ come incognite, si hanno le seguenti soluzioni per la 2ª equazione:

	$(x_e + x_i)$	$(x_b + x_m)$	y_o
I	4	0	0
II	2	1	0
III	1	0	1
IV	0	2	0

Dalle quali si deducono per x_e, x_i, x_b, x_m e x_o i seguenti sistemi di valori:

Incognito	I					II			III			IV		
	1	2	3	4	5	1'	2'	3'	1	2	3	1	2	3
x_e	4	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0	0	0	0
x_i	0	1	2	3	4	0	1	2	0	1	0	0	0	0
x_b	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2	1	0
x_m	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
x_o	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	2	0

che sostituiti successivamente nella prima delle (22) danno il mezzo di determinare i valori corrispondenti di x_f .

Dopo ciò si trova che le soluzioni accettabili pel sistema (22) e cioè quelle che corrispondono a valori interi e positivi per tutte le x sono indicate dal quadro seguente:

	x_e	x_i	x_f	x_m	x_b	x_o
(I.)	0	4	0	0	0	0
(II.)	1	2	1	0	0	0
(II ₁)	0	1	0	1	0	1
(II ₂)	1	0	0	0	0	2
(III.)	0	1	0	0	2	0
(IV.)	2	0	2	0	0	0
(IV ₁)	0	0	1	2	0	0

30. Questi sistemi di valori rappresentano i coefficienti degli angoli $\delta, \sigma, \gamma, m, \sigma, t$ i quali possono essere sostituiti dalle varie δ che vi corrispondono nel quadro del n. 16 escluse, s'intenda, le δ dei prismi per non ricadere in casi già considerati. Si può quindi formare la tabella seguente:

(I ₁)	I	4c	4	$\delta_c \delta_{cc}^{24}$	—	—	—	—
(II ₁)	II	2c 1b 1j	2	$\delta_c \delta_{cc}^{24}$	1	$\delta_t \delta_{tt}^{24}$	1	$\delta_\sigma \delta_{\sigma\sigma}^{24} \delta_{\sigma\sigma}^{24}$
(III ₁)	III	1c 2o	1	$\delta_c \delta_{cc}^{24}$	2	$\delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24}$	—	—
(II ₂)	IV	1c 1m 1t	1	$\delta_c \delta_{cc}^{24}$	1	$\delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24}$	1	$\delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24}$
(IV ₁)	V	2b 2j	2	$\delta_t \delta_{tt}^{24}$	2	$\delta_\sigma \delta_{\sigma\sigma}^{24} \delta_{\sigma\sigma}^{24}$	—	—
(II ₃)	VI	1b 2t	1	$\delta_t \delta_{tt}^{24}$	2	$\delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24}$	—	—
(IV ₂)	VII	1j 2m	1	$\delta_\sigma \delta_{\sigma\sigma}^{24} \delta_{\sigma\sigma}^{24}$	2	$\delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24}$	—	—

La prima parte di questo quadro contiene tutte le soluzioni trovate; le colonne successive portano i diedri dei poliedri regolari e semiregolari da prendersi in numero eguale ai coefficienti scritti nelle piccole colonne.

Dal quadro precedente si rileva quali sieno i diedri che debbono essere associati tra di loro per poter formare un angolo. Ma siccome per ogni valore si hanno più diedri appartenenti ai poliedri differenti, così dovremmo fare le combinazioni in tutti i modi possibili di questi diedri. Bisogna però osservare che non tutti gli aggruppamenti così ottenuti corrispondono a delle reti, giacchè i diedri da associarsi debbono essere formati da facce tali da rendere possibile il combaciamento fra di loro.

Così per esempio, se tre angoli diedri dei poliedri formano un giro succedendosi nell'ordine $(\widehat{\alpha\beta}), (\widehat{\gamma\delta}), (\widehat{\sigma\gamma})$ è necessario che le facce siano due a due eguali e cioè $\beta = \gamma, \delta = \sigma, \sigma = \alpha$. Parimente per caso di quattro diedri si deve avere $(\widehat{\alpha\beta}), (\widehat{\beta\gamma}), (\widehat{\gamma\delta}), (\widehat{\delta\alpha})$.

Si deve notare inoltre che per ogni giro, debbono anche considerarsi tutte le possibili varietà che risultano dal differente ordine di aggregazione dei diedri medesimi. Tali varietà saranno distinte coll'apporre un apice al numero d'ordine progressivo dei diversi giri ottenuti.

31. Tenendo presenti le osservazioni ora fatte ecco qui appresso tutti gli aggruppamenti possibili fra i quali non è stato considerato quello di 4 δ , corrispondente alla rete già trovata di cubi (n. 18, 5^a)

$$I$$

$$1 (\delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24} \delta_{cc}^{24})$$

II

Nessuno aggruppamento possibile.

III

- 1 $(\delta_i \delta_{ccc}^{III} \delta_{ccc}^{III})$ 2 $(\delta_i \delta_{cc}^{III} \delta_{cc}^{III})$ 3 $(\delta_{cc}^{III} \delta_{cc}^{III} \delta_{cc}^{III})$

IV

- 1 $(\delta_i \delta_{cc}^{IV} \delta_{cc}^{IV})$ 2 $(\delta_i \delta_{cc}^{IV} \delta_{cc}^{IV})$

V

- 1 $(\delta_i \delta_c \delta_c \delta_c)$ 1' $(\delta_i \delta_c \delta_c \delta_c)$ 2 $(\delta_i \delta_c \delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II})$
 3 $(\delta_i \delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II})$ 4 $(\delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II})$ 4' $(\delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II})$
 5 $(\delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II} \delta_{cc}^{II})$

VI

- 1 $(\delta_i \delta_{ccc}^{VI} \delta_{ccc}^{VI})$ 2 $(\delta_{cc}^{VI} \delta_{cc}^{VI} \delta_{cc}^{VI})$

VII

- 1 $(\delta_c \delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII})$ 2 $(\delta_c \delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII})$ 3 $(\delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII})$
 4 $(\delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII})$ 5 $(\delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII})$ 6 $(\delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII} \delta_{cc}^{VII})$

32. Tenendo ora presente quanto è stato detto al n. 26, abbiamo le seguenti 11 notazioni simboliche corrispondenti ad altrettante reti di poliedri regolari e semi-regolari:

- | | | | |
|----|----------|-------|----------------------------------------------------------------|
| 1 | S_6 | | (2 III ₂ — 4 IV ₁) |
| 2 | S_4 | | (1 III ₁ — 1 VII ₁ — 2 IV ₁) |
| 3 | S_4 | | (1 III ₂ — 1 VI ₁ — 2 VII ₁) |
| 4 | S_{12} | | (12 V ₁) |
| 4' | S_{12} | | (6 V ₁ — 6 V _{1'}) |
| 5 | S_8 | | (6 V ₁) |
| 5' | S_8 | | (2 V ₁ — 2 V ₁ — 2 V ₁) |
| 6 | S_8 | | (1 V ₁ — 4 VII ₁) |
| 7 | S_8 | | (3 VI ₁ — 3 III ₁) |
| 8 | S_8 | | (8 VII ₁) |
| 9 | S_8 | | (4 VII ₁ — 1 I ₁) |
| 10 | S^* | | (4 VII ₁) |

Nel quadro precedente si è dato un numero d'ordine a ciascuna rete; le S sono il simbolo di *stella* e l'indice corrispondente esprime l'ordine (rappresentato dal numero di spigoli concorrenti in ogni vertice) delle stelle stesse; le espressioni fra parentesi stanno ad indicare la specie ed il numero corrispondente dei vari giri di diedri che formano ciascuna stella; così ad esempio: la rete 2 è formata di stelle del 4° ordine; dei 4 spigoli che concorrono in ciascun vertice, uno è asse del giro di diedri III₁, uno del giro di diedri VII₁, e due del giro di diedri IV₁ (n. 31).

Si può osservare che il giro di diedri V_r della tabella del n. 31, non può appartenere ad alcuna rete di poliedri, per la ragione che (n. 26) gli altri giri di diedri, che insieme al V_r dovrebbero concorrere in uno stesso vertice della rete, non rientrano in quelli rimanenti della tabella stessa.

33. Raccogliendo tutti i risultati sin qui ottenuti, si può asserire che si hanno le seguenti classi di reti poliedrali:

1°. 10 reti di prismi regolari con una varietà (n. 18) ed una rete speciale di due serie di prismi le cui basi hanno un numero infinito di lati (n. 19);

1°. 10 reti di solidi prismatici regolari indefiniti con una varietà, ed una rete speciale di due solidi prismatici di un numero infinito di faccie (n. 20);

1°. 10 reti ed una varietà, composte ciascuna di due poliedri semiregolari di un numero infinito di faccie, ed una rete speciale di due corpi limitati ciascuno da due faccie di un numero infinito di lati (n. 20^{bis});

2°. Una rete di due pile di prismi storti aventi le basi di un numero infinito di lati (n. 22);

3°. Una rete di due serie di corpi formate ciascuna da prismi e prismi storti alternati aventi tutti le basi di un numero infinito di lati (n. 23);

4°. Due reti non formate da soli prismi (n. 27);

5°. 10 reti e due varietà costituite da poliedri regolari e semiregolari.

Dopo aver fatta nuovamente la determinazione di queste reti col 2° metodo che ora esporremo, daremo una classificazione più dettagliata delle reti stesse (n. 45).

II. METODO. Determinazione delle reti per mezzo della considerazione degli angoli solidi dei poliedri.

34. Per questa ricerca è necessario anzitutto determinare il valore σ dell'angolo solido di ognuno dei poliedri regolari, per mezzo della formula

$$\sigma = D - 2(s - 2)$$

nella quale s rappresenta l'ordine dell'angoloide e D la somma degli angoli diedri che li formano, la quale somma si ottiene, per ogni corpo, addizionando gli angoli diedri corrispondenti forniti dal quadro del n. 16.

Il quadro che segue dà il valore di σ per ogni poliedro regolare e semiregolare. La 2° colonna contiene la indicazione dell'ordine dell'angoloide e quello delle singole faccie del poliedro che lo costituiscono. L'ultima colonna infine contiene, sotto forma letterale o numerica, l'espressione degli angoli solidi dei vari corpi; le s di questa colonna hanno i valori dati alla tabella del n. 20 ed i numeri fra parentesi esprimono, al solito, il valore dell'angolo solido in triedri trirettangoli.

Simbolo	N o m e	Ordine dell'angolo solido e delle facce che lo formano	VALORE DELL'ANGOLO SOLIDO	
			Espressione numerica	Espress. letterale
<i>t</i>	Tetraedro	(333)	$\sigma_t = 31\ 35\ 10''$, 872	$3\delta_1 - 2$
<i>c</i>	Cubo	(444)	$\sigma_c = 90$	$R = (1)$
<i>o</i>	Ottaedro	(3333)	$\sigma_o = 77\ 53\ 05$, 604	$4 - 4\delta_1$
<i>d</i>	Dodicaedro	(555)	$\sigma_d = 169\ 41\ 42$, 552	$3\delta_4 - 2$
<i>i</i>	Icosaedro	(33333)	$\sigma_i = 150\ 56\ 54$, 300	$5\delta_1 - 6$
<i>tt</i>	Tetraedro tronco	(366)	$\sigma_{tt} = 109\ 28\ 16$, 376	$2 - \delta_1$
<i>ct</i>	Cubo *	(388)	$\sigma_{ct} = 160\ 31\ 43$, 624	$1 + \delta_1$
<i>ot</i>	Ottaedro *	(466)	$\sigma_{ot} = 180$	$2R = (2)$
<i>dt</i>	Dodicaedro *	(31010)	$\sigma_{dt} = 221\ 48\ 37$, 134	$2\delta_{10}^{35} + \delta_4 - 2$
<i>it</i>	Icosaedro *	(566)	$\sigma_{it} = 243\ 26\ 05$, 816	$2\delta_{10}^{35} + \delta_1 - 2$
<i>co</i>	Cubottaedro	(3434)	$\sigma_{co} = 141\ 03\ 27$, 248	$2\delta_1$
<i>id</i>	Icosidodicaedro	(3535)	$\sigma_{id} = 210\ 29\ 25$, 900	$4\delta_{10}^{35} - 4$
<i>cco</i>	Rombicubottaedro	(3444)	$\sigma_{cco} = 199\ 28\ 16$, 376	$3 - \delta_1$
<i>rid</i>	Rombicosidodicaedro	(3454)	$\sigma_{rid} = 254\ 45\ 17$, 050	$6 - 2\delta_{10}^{35}$
<i>cot</i>	Cubottaedro tronco	(468)	$\sigma_{cot} = 225$	$\frac{2}{3}R = (\frac{2}{3})$
<i>idt</i>	Icosidodicaedro tronco	(4610)	$\sigma_{idt} = 270$	$3R = (3)$
<i>cs</i>	Cubo simo	(33334)	$\sigma_{cs} = 145\ 40\ 13$, 206	—
<i>ds</i>	Dodicaedro simo	(33335)	$\sigma_{ds} = 198\ 23\ 21$, 166	—
<i>p₃</i>	Prismi a base triangolare quadrangolare pentagonale esagonale ottagonale decagonale dodecagonale	(44 n)	$\sigma_{p_3} = 60$	$\frac{2}{3}R = (\frac{2}{3})$
<i>p₄</i>			$\sigma_{p_4} = 90$	$1R = (1)$
<i>p₅</i>			$\sigma_{p_5} = 108$	$\frac{4}{3}R = (\frac{4}{3})$
<i>p₆</i>			$\sigma_{p_6} = 120$	$\frac{2}{3}R = (\frac{2}{3})$
<i>p₈</i>			$\sigma_{p_8} = 135$	$\frac{3}{2}R = (\frac{3}{2})$
<i>p₁₀</i>			$\sigma_{p_{10}} = 144$	$\frac{4}{3}R = (\frac{4}{3})$
<i>p₁₂</i>			$\sigma_{p_{12}} = 150$	$\frac{5}{3}R = (\frac{5}{3})$
<i>p₃'</i>	Prismi storti a base triangolare quadrangolare pentagonale esagonale ottagonale decagonale dodecagonale	(333 n)	$\sigma_{p_3'} = 77\ 53\ 05$, 576	—
<i>p₄'</i>			$\sigma_{p_4'} = 94\ 43\ 40$, 180	—
<i>p₅'</i>			$\sigma_{p_5'} = 118\ 00\ 14$, 414	—
<i>p₆'</i>			$\sigma_{p_6'} = 128\ 16\ 33$, 960	—
<i>p₈'</i>			$\sigma_{p_8'} = 141\ 06\ 49$, 712	—
<i>p₁₀'</i>			$\sigma_{p_{10}'} = 148\ 51\ 55$, 186	—
<i>p₁₂'</i>			$\sigma_{p_{12}'} = 154\ 01\ 06$, 688	—

35. Per la risoluzione del problema proposto dovremo cercare le soluzioni dell'equazione

$$(23)$$

$$\sum x, \sigma = 8,$$

dove le x sono numeri incogniti interi e positivi che indicano quante volte il poliedro corrispondente all'angolo solido σ prende parte alla formazione di una stessa stella. Osserveremo subito che fra le condizioni necessarie perchè sia accettabile una soluzione vi è quella che sia sempre pari il numero delle faccie di uno stesso ordine che prendono parte alla costituzione dei vari angoli solidi, separatamente considerati, e che concorrono in una stessa stella.

Questa osservazione ci permetterà, in qualche caso, di escludere subito alcuni corpi che non possono prendere parte alla costituzione di reti poliedrali. È poi sottinteso che nella formazione delle stelle una faccia di un dato ordine deve venire a combaciare con una faccia dello stesso ordine di un altro angolo solido, e che in generale questo aggruppamento può farsi in tanti modi diversi; quante sono le maniere differenti secondo le quali possono associarsi le faccie di un determinato ordine appartenenti a poliedri diversi.

Dopo ciò, venendo alla determinazione di tutte le reti possibili, divideremo la ricerca nel modo già detto al n. 17 per il I metodo.

36. 1° *Reti di soli prismi.* — Per le osservazioni fatte nel n. precedente, i prismi dello stesso ordine debbono tutti combaciare fra di loro per le basi in modo da formare tante pile a prismi regolari indefiniti. Segue di qui che riempire lo spazio di soli prismi semiregolari equivale a riempirlo di quelle pile. Ora è chiaro che ognuna di queste prende parte alla formazione di infinite stelle con un angolo solido che ha un valore doppio di quello dei prismi semiregolari che compongono la pila.

L'equazione (23) diviene dunque per queste pile, $\sum \frac{x_i(l_i-2)}{l_i} = 2$, ove l_i rappresenta

il numero delle faccie laterali dei prismi semiregolari; ma questa equazione è identica alla (1) (n. 2) quindi otterremo per essa tante soluzioni quante sono quelle che corrispondono alle reti piane. Si ritrovano così le reti poliedrali dei nn. 18 e 19, e, quando le pile si considerino come poliedri regolari indefiniti, quelle già determinate al n. 20.

37. 2° *Reti di soli prismi storti.* — Come nel caso precedente, anche nei prismi storti non possono considerarsi che le varie pile indefinite che risultano formate di prismi con base eguale; e quindi anche in questo caso l'angolo solido in ogni vertice assume un valore 2σ , e cioè doppio di quello dei prismi storti componenti la pila. Bisognerà ora vedere con quale di queste si può riempire lo spazio. Intanto per la osservazione già fatta al n. 21 i prismi storti avendo altezze differenti, quando sono di ordine differente, è chiaro che per una stessa rete non possono prendersi in considerazione altro che pile formate tutte da elementi dello stesso ordine e perciò, per la (23), dovremo avere in generale $2m\sigma_{pm} = 720^\circ$, ovvero $m\sigma_{pm} = 360^\circ$. Ora si vede subito che i valori di σ nei prismi storti dati dal quadro del n. 33 non possono soddisfare alla relazione precedente altro che per il prisma storto con base di un numero infinito di lati, nel qual caso si ottiene la rete speciale già trovata al n. 22.

38. 3° Reti di prismi e prismi storti. — Con ragionamenti analoghi ai precedenti si trova che in questo caso non possono prendersi in considerazione che pile formate tutte egualmente di prismi e prismi storti dello stesso ordine, e che alla relazione $m(\sigma_{pm} + \sigma_{psm}) = 720$, a cui si riduce la (23) non è possibile soddisfare altro che nel caso di prismi il cui ordine è infinitamente grande, sotto la quale condizione si trova la rete già ottenuta al n. 23.

39. 4° Reti non formate da soli prismi e prismi storti. — Per le ricerche relative a questo caso si segue una via perfettamente analoga a quella tenuta al n. 24, ossia si deve riscontrare in quali casi combinando in tutte le maniere possibili i valori delle σ corrispondenti a prismi e prismi storti, con quelle dei vari poliedri ordinari coi quali è compatibile per la forma delle facce l'aggruppamento, si ottiene per la somma degli angoli solidi il valore di 720°.

Si trova che le soluzioni possibili non sono che le due seguenti:

$$\begin{aligned} \sigma_c + \sigma_a + 2\sigma_{ps} + \sigma_{rcs} &= 8 \\ 2\sigma_{cst} + 2\sigma_{ps} &= 8 \end{aligned}$$

le quali corrispondono appunto alle reti già ottenute coll'altro metodo ai nn. 27 e 28.

40. 5° Reti di poliedri regolari e semiregolari ordinari. — Dal quadro del n. 34 si rileva che i valori degli angoli solidi dei vari poliedri regolari e semiregolari possono distinguersi in 4 classi, e cioè:

I. Angoli espressi per un numero intero o per un certo numero di parti all'quote di triedri trirettangoli;

II. Angoli nella espressione dei quali entra il δ_i ;

III. Angoli in cui entra il $\delta_i \delta_j \delta_k^2$;

IV. Angoli solidi distinti dai precedenti.

Bisognerà ora determinare, al solito, tutti i possibili aggruppamenti di questi angoli solidi in modo da soddisfare alla equazione (23) $\Sigma \sigma_i \sigma_r = 8$, e per una tale risoluzione esamineremo successivamente i seguenti casi di reti formate di poliedri i cui angoli solidi appartengono:

1° in tutto o in parte a quelli della classe IV;

2° in tutto o in parte a quelli della classe III senza che ve ne siano di quelli appartenenti alla classe IV;

3° solamente alle due classi I, II.

41. 1° Caso. Questo caso si riferisce a quello in cui fra i poliedri della rete entrano fra gli altri il cubo siso o il dodecaedro siso, oppure tutti e due questi corpi.

Ora il valore dell'angolo solido di questi poliedri è tale che essi o i loro multipli associati in tutti i modi possibili fra di loro o coi valori semplici o multipli di tutti gli angoli solidi dei rimanenti poliedri coi quali è possibile l'associazione, non conducono mai, come è necessario, ad un valore esatto di 8 angoli retti. Si può quindi concludere che non esistono reti corrispondenti a questo caso.

42. 2° Caso. Per ciascuna stella della rete la somma di tutti gli angoli solidi delle classi I, II e III moltiplicati ciascuno per un conveniente coefficiente x intero o nullo, è data dalla somma delle tre espressioni:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I} \dots [x_e + 2x_d + \frac{1}{2}x_{cd} + 3x_{id}] \\ \text{II} \dots [\delta_1(3x_1 - 4x_2 - x_{11} + x_{12} + 2x_{c1} - x_{r1}) + \\ \quad + (-2x_1 + 4x_2 + 2x_{11} + x_{12} + 3x_{r1})] \\ \text{III} \dots \left\{ \begin{array}{l} [\delta_2(3x_d + x_{11}) + \delta_1(5x_1 + x_{11}) + \\ \quad + \delta_{11}^2(2x_{11} + 2x_{12} + 4x_{1d} - 2x_{r11})] + \\ \quad + [-2x_d - 6x_1 - 2x_{11} - 2x_{12} - 4x_{1d} + 6x_{r11}] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

somma che deve essere eguale ad 8 (720°). Eliminando il determinante 2, e ricordando che le x hanno valori interi, l'espressione precedente può mettersi sotto la forma

$$X_1 \delta_1 + X_2 \delta_2 + X_3 \delta_1 + X_{11} \delta_{11}^2 = Y$$

ove tutte le X e la Y hanno solamente valori interi e positivi non escluso per la X_1 il valore zero.

Ora riesce facile verificare che i valori di queste J forniti dal quadro dato al n. 16, sono tali che la somma di essi e dei loro multipli presa in tutti modi possibili non risulta mai eguale ad un multiplo di 90°. Possiamo quindi concludere che anche nel caso ora esaminato non possono esistere reti.

43. 3° Caso. Veniamo infine ad occuparci delle reti che non contengono che corpi i cui angoli solidi appartengono alla classe I e II. Per questa ricerca dovremo trovare tutte le soluzioni intere e positive della equazione che risulta dall'eguagliare ad 8 la somma delle prime due espressioni (I e II) date al numero precedente. Ora poichè la forma del 1° membro di questa equazione si riduce ad un multiplo di δ_1 , più un numero intero, e poichè, d'altra parte, non esiste un multiplo di δ_1 (compatibili colle soluzioni del problema) che sia eguale ad un numero intero di volte 90° così, per ciò che riguarda la espressione II, dovremo avere:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 - x_{11} + x_{12} + 2x_{c1} - x_{r1} = 0 \\ (-2x_1 + 4x_2 + 2x_{11} + x_{12} + 3x_{r1}) = M \quad (\text{numero intero}) \end{array} \right.$$

alla quale ultima possiamo anche sostituire l'altra equazione

$$x_1 + 0x_2 + x_{11} + 2x_{12} + 2x_{c1} + 2x_{r1} = M$$

che si ottiene dall'addizione delle due precedenti. La parte (I) rimanente dell'equazione ossia

$$x_e + 2x_d + \frac{1}{2}x_{cd} + 3x_{id} \text{ o l'altra } 2x_e + 4x_d + 5x_{cd} + 6x_{id}$$

deve essere eguale ad un tal numero intero N per cui si abbia $\frac{N}{2} + M = 8$.

44. Dopo ciò per trovare tutte le reti corrispondenti a questo caso basterà risolvere il sistema

$$(25) \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_{11} + x_{12} + 2x_{10} - x_{100} = 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_{11} + 2x_{12} + 2x_{10} + 2x_{100} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 2x_2 + 4x_{11} + 5x_{100} + 6x_{102} = 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0 \end{cases}$$

ove i secondi membri delle equazioni 2^a e 3^a prendono successivamente i valori corrispondenti di una medesima colonna.

Escludendo, al solito, le soluzioni che non soddisfano alle osservazioni del n. 35 si ottengono tutte le soluzioni che si trovano riassunte nel quadro seguente:

Numero d'ordine	x_2	x_{11}	x_{100}	x_1	x_2	x_{11}	x_{12}	x_{10}	x_{100}
1	2	-	-	-	-	-	-	1	2
2	1	1	2	-	-	-	-	-	-
3	-	-	2	-	-	1	1	-	-
4	-	-	-	8	6	-	-	-	-
4'	-	-	-	8	6	-	-	-	-
5	-	-	-	2	-	6	-	-	-
5'	-	-	-	2	-	6	-	-	-
6	-	2	-	-	-	2	-	1	-
7	1	-	-	1	-	-	-	-	3
8	-	-	-	-	2	-	-	4	-
9	-	-	-	-	1	-	4	-	-
10	-	4	-	-	-	-	-	-	-

Le varietà 4' e 5' differiscono rispettivamente dalle 4 e 5 pel solo fatto che nelle prime i tetraedri sono associati in coppie con una faccia in comune, mentre in quest'ultime tali tetraedri si associano in coppie di corpi opposti al vertice.

Anche in questo caso si hanno quindi le stesse 10 soluzioni e le due varietà già ottenute al n. 32, e così complessivamente, abbiamo ritrovato con questo secondo metodo tutte le classi di reti raccolte al n. 33.

45. Si può osservare che i due metodi, considerati l'uno indipendentemente dall'altro, sono sufficienti a determinare completamente le varie reti; tutti e due insieme poi si completano nel senso che il primo fornisce i poliedri che concorrono in ogni costola e il secondo quelli che concorrono in ogni vertice.

Ed ora, prima di passare allo studio delle reti, correlative a quelle determinate fin qui, daremo, raccolte in un quadro, tutte le opportune indicazioni relative al modo secondo il quale sono formate le reti trovate, che distingueremo nelle quattro classi seguenti:

- I. *Reti regolari*, formate da poliedri regolari di una sola specie;
- II. *Reti semiregolari*, formate da poliedri regolari di più specie;
- III. *Reti uniformi*, formate da poliedri semiregolari di una sola specie;
- IV. *Reti semiuniformi*, formate da poliedri regolari e semiregolari di più specie.

Avvertiamo poi che diremo *ordine* di un ente geometrico rispetto ad un determinato elemento, il numero totale di tali elementi che prendono parte alla costituzione di quell'ente.

Reti poliedrali

N. d'ordine	Ordine delle stelle rispetto			Richiami o figure
	agli angeloidi	ai fasci	alle facce	
I. Reti regolari				
1	$8\sigma_6$	$6_4(4\delta_6)$	$12f_4$	n. 18 fig. 5*
II. Reti semiregolari				
2	$14 \begin{cases} 8\sigma_7 \\ 6\sigma_6 \end{cases}$	$12_4(\delta_7, \delta_6, \delta_7, \delta_6)$	$24f_3$	• 29-32 • 12
2'	$14 \begin{cases} 8\sigma_7 \\ 6\sigma_6 \end{cases}$	$12_4 \begin{cases} 6_4(\delta_7, \delta_6, \delta_7, \delta_6) \\ 6_4(2\delta_7, 2\delta_6) \end{cases}$	$24f_3$	• 29-32 • 13
III. Reti uniformi				
3	$4\sigma_{24}$	$4_2(2\delta_{24}^{12} 1\delta_{24}^{12})$	$6 \begin{cases} 4f_4 \\ 2f_6 \end{cases}$	• 29-32 • 14
4	$12\sigma_{24}$	$8 \begin{cases} 6_4(4\delta_{24}^{12}) \\ 2_4(6\delta_{24}^{12}) \end{cases}$	$18 \begin{cases} 6f_3 \\ 12f_4 \end{cases}$	• 18 • 10*
5	$6\sigma_{24}$	$5 \begin{cases} 3_4(4\delta_{24}^{12}) \\ 2_2(3\delta_{24}^{12}) \end{cases}$	$9 \begin{cases} 6f_4 \\ 3f_6 \end{cases}$	• 18 • 1*
IV. Reti semiuniformi				
6	$6 \begin{cases} 2\sigma_6 \\ 4\sigma_{24} \end{cases}$	$5 \begin{cases} 2_4(2\delta_6, 2\delta_{24}^{12}) \\ 1_4(4\delta_{24}^{12}) \\ 2_2(1\delta_6, 4\delta_{24}^{12}) \end{cases}$	$9 \begin{cases} 7f_4 \\ 2f_6 \end{cases}$	• 18 • 2*
7	$6 \begin{cases} 2\sigma_{24} \\ 4\sigma_{24} \end{cases}$	$5 \begin{cases} 2_4(\delta_{24}^{12}, 2\delta_{24}^{12}) \\ 1_4(4\delta_{24}^{12}) \\ 2_2(\delta_{24}^{12}, 2\delta_{24}^{12}) \end{cases}$	$9 \begin{cases} 1f_3 \\ 6f_4 \\ 2f_{12} \end{cases}$	• 18 • 3*
8	$8 \begin{cases} 4\sigma_{24} \\ 4\sigma_{24} \end{cases}$	$6 \begin{cases} 4_4(2\delta_{24}^{12}, 2\delta_{24}^{12}) \\ 2_4(2\delta_{24}^{12}, \delta_{24}^{12}, \delta_{24}^{12}, \delta_{24}^{12}) \end{cases}$	$12 \begin{cases} 2f_3 \\ 3f_4 \\ 2f_6 \end{cases}$	• 18 • 8*

N.ordine	Ordine delle stelle rispetto			Richiami e figure
	agli angolidi	ai fasci	alle faccie	
<i>IV. Reti semianiformi</i>				
9	$\begin{cases} 2\sigma_{p3} \\ 4\sigma_{p4} \\ 2\sigma_{p0} \end{cases}$	$\begin{cases} 2_4 (d_{p3}^{24} 2d_{p4}^{44}) \\ 2_4 (2d_{p3}^{44} 2d_{p4}^{44}) \\ 2_4 (d_{p3}^{44} d_{p4}^{44} d_{p3}^{44} d_{p4}^{44}) \end{cases}$	$\begin{cases} 12 \left\{ \begin{matrix} 10f_4 \\ 1f_6 \\ 1f_8 \end{matrix} \right.$	n. 18 fig. 7*
10	$\begin{cases} 2\sigma_{p4} \\ 2\sigma_{p6} \\ 2\sigma_{p12} \end{cases}$	$\begin{cases} 1_4 (2d_{p4}^{44} 2d_{p6}^{46}) \\ 1_4 (2d_{p6}^{46} 2d_{p12}^{412}) \\ 1_4 (2d_{p4}^{44} 2d_{p12}^{412}) \\ 2_3 (d_{p4}^{44} d_{p6}^{46} d_{p12}^{412}) \end{cases}$	$\begin{cases} 9 \left\{ \begin{matrix} 7f_4 \\ 1f_6 \\ 1f_{12} \end{matrix} \right.$	• 18 • 4*
11	$\begin{cases} 6\sigma_{p3} \\ 4\sigma_{p4} \end{cases}$	$\begin{cases} 4_4 (2d_{p3}^{24} 2d_{p4}^{44}) \\ 1_4 (4d_{p3}^{24}) \\ 2_3 (2d_{p3}^{44} d_{p4}^{44} d_{p3}^{44} d_{p4}^{44}) \end{cases}$	$\begin{cases} 15 \left\{ \begin{matrix} 12f_4 \\ 3f_6 \end{matrix} \right.$	• 18 • 9*
11'	$\begin{cases} 6\sigma_{p3} \\ 4\sigma_{p4} \end{cases}$	$\begin{cases} 2_4 (4d_{p3}^{24}) \\ 1_4 (4d_{p4}^{44}) \\ 2_4 (2d_{p4}^{44} 2d_{p3}^{24}) \\ 2_3 (2d_{p4}^{44} 3d_{p3}^{24}) \end{cases}$	$\begin{cases} 15 \left\{ \begin{matrix} 12f_4 \\ 3f_6 \end{matrix} \right.$	• 18 • 9*
12	$\begin{cases} 8\sigma_{p3} \\ 2\sigma_{p6} \end{cases}$	$\begin{cases} 3_4 (4d_{p3}^{24}) \\ 2_4 (2d_{p3}^{44} d_{p6}^{46}) \\ 2_3 (4d_{p3}^{44} d_{p6}^{46}) \end{cases}$	$\begin{cases} 15 \left\{ \begin{matrix} 4f_6 \\ 10f_4 \\ 1f_6 \end{matrix} \right.$	• 18 • 6*
13	$\begin{cases} 2\sigma_{p1} \\ 6\sigma_{p2} \end{cases}$	$6_4 (d_{p1}^{22} d_{p2}^{33} d_{p2}^{33})$	$\begin{cases} 12 \left\{ \begin{matrix} 6f_6 \\ 6f_6 \end{matrix} \right.$	• 29-32 • 15
13'	$\begin{cases} 2\sigma_{p1} \\ 2\sigma_{p2} \end{cases}$	$\begin{cases} 2_4 (2d_{p1}^{22} 2d_{p2}^{33}) \\ 6_4 \left\{ \begin{matrix} 2_4 (d_{p1}^{22} d_{p2}^{33} d_{p2}^{33}) \\ 2_3 (2d_{p1}^{22} 2d_{p2}^{33}) \end{matrix} \right.$	$\begin{cases} 12 \left\{ \begin{matrix} 6f_6 \\ 6f_6 \end{matrix} \right.$	• 29-32 • 16

N. d'ordine	Ordine delle stelle rispetto			Richiami e figure
	agli angoloidi	ai fasci	alle facce	
<i>IV. Reti semicuiformi</i>				
14	5 $\left\{ \begin{array}{l} 1\sigma_o \\ 4\sigma_{ot} \end{array} \right.$	5 $\left\{ \begin{array}{l} 4_3 (\delta_c 2\delta_{ot}^{32}) \\ 1_4 (4\delta_{ot}^{32}) \end{array} \right.$	8 $\left\{ \begin{array}{l} 4/f_3 \\ 4/f_4 \end{array} \right.$	n. 29-32 fig. 17
15	6 $\left\{ \begin{array}{l} 2\sigma_o \\ 4\sigma_{oo} \end{array} \right.$	8 ₂ (2 δ_{oo}^{24} 1 δ_o)	12 $\left\{ \begin{array}{l} 4/f_4 \\ 5/f_5 \end{array} \right.$	• 29-32 • 18
16	5 $\left\{ \begin{array}{l} 1\sigma_t \\ 1\sigma_e \\ 3\sigma_{roo} \end{array} \right.$	6 $\left\{ \begin{array}{l} 3_3 (\delta_c 2\delta_{roo}^{24}) \\ 3_3 (\delta_c 2\delta_{roo}^{14}) \end{array} \right.$	9 $\left\{ \begin{array}{l} 3/f_5 \\ 6/f_4 \end{array} \right.$	• 29-32 • 19
17	5 $\left\{ \begin{array}{l} 2\sigma_e \\ 1\sigma_{oo} \\ 2\sigma_{roo} \end{array} \right.$	6 $\left\{ \begin{array}{l} 2_1 (\delta_c 2\delta_{roo}^{24}) \\ 4_1 (\delta_c \delta_{oo}^{13} \delta_{roo}^{24}) \end{array} \right.$	9 $\left\{ \begin{array}{l} 2/f_5 \\ 7/f_4 \end{array} \right.$	• 29-32 • 20
18	4 $\left\{ \begin{array}{l} 1\sigma_e \\ 1\sigma_{ot} \\ 2\sigma_{oot} \end{array} \right.$	4 $\left\{ \begin{array}{l} 1_3 (\delta_c 2\delta_{oot}^{14}) \\ 2_3 (\delta_c \delta_{ot}^{14} \delta_{oot}^{14}) \\ 1_3 (\delta_{ot}^{24} 2\delta_{oot}^{14}) \end{array} \right.$	6 $\left\{ \begin{array}{l} 3/f_4 \\ 2/f_5 \\ 1/f_4 \end{array} \right.$	• 29-32 • 21
19	5 $\left\{ \begin{array}{l} 1\sigma_e \\ 2\sigma_{po} \\ 1\sigma_{ot} \\ 1\sigma_{roo} \end{array} \right.$	5 $\left\{ \begin{array}{l} 1_1 (\delta_c \delta_{po}^{14} \delta_{ot}^{24} \delta_{roo}^{24}) \\ 2_1 (\delta_c \delta_{roo}^{14} \delta_{po}^{24}) \\ 2_3 (\delta_{po}^{24} \delta_{ot}^{24} \delta_{roo}^{24}) \end{array} \right.$	8 $\left\{ \begin{array}{l} 1/f_5 \\ 5/f_4 \\ 2/f_4 \end{array} \right.$	• 24-27 • 22
20	4 $\left\{ \begin{array}{l} 1\sigma_{it} \\ 1\sigma_{ot} \\ 2\sigma_{oot} \end{array} \right.$	4 $\left\{ \begin{array}{l} 1_3 (\delta_{it}^{24} 2\delta_{oot}^{14}) \\ 1_3 (\delta_{it}^{24} 2\delta_{oot}^{14}) \\ 2_3 (\delta_{it}^{24} \delta_{ot}^{24} \delta_{oot}^{24}) \end{array} \right.$	6 $\left\{ \begin{array}{l} 1/f_5 \\ 1/f_4 \\ 2/f_5 \\ 2/f_4 \end{array} \right.$	• 29-32 • 23
21	5 $\left\{ \begin{array}{l} 2\sigma_{it} \\ 1\sigma_{oo} \\ 2\sigma_{ot} \end{array} \right.$	5 $\left\{ \begin{array}{l} 1_1 (\delta_{it}^{24} \delta_{oo}^{24} \delta_{ot}^{24} \delta_{oo}^{24}) \\ 4_3 (\delta_{it}^{24} \delta_{oo}^{24} \delta_{ot}^{24}) \end{array} \right.$	8 $\left\{ \begin{array}{l} 2/f_5 \\ 2/f_4 \\ 4/f_4 \end{array} \right.$	• 29-32 • 24
22	4 $\left\{ \begin{array}{l} 2\sigma_{po} \\ 2\sigma_{oot} \end{array} \right.$	4 $\left\{ \begin{array}{l} 2_1 (\delta_{po}^{24} \delta_{oot}^{24} \delta_{oot}^{24}) \\ 2_3 (\delta_{po}^{24} \delta_{oot}^{24} \delta_{oot}^{24}) \end{array} \right.$	6 $\left\{ \begin{array}{l} 3/f_4 \\ 1/f_5 \\ 2/f_4 \end{array} \right.$	• 29-32 • 24 ¹

In questo quadro non compariscono tutte le reti trovate, perchè sono state omesse quelle per le quali è facile comprendere immediatamente il loro modo di costituzione. Riferendoci alla classificazione stabilita al n. 83, si ha che non figurano nel quadro, la rete speciale della classe 1^a; e tutte quelle delle classi 1^a, 1^a, 2^a e 3^a.

Quanto alle notazioni adoperate nel quadro precedente osserveremo che i primi numeri dell'ultima colonna richiamano gli articoli del testo ove si tratta delle singole reti. I numeri della stessa colonna che si riferiscono alle figure e che portano un asterisco (*) indicano le reti piane da cui si deducono le corrispondenti dello spazio, secondo quanto è stato detto al n. 18.

46. Nel quadro precedente si è tenuto conto solamente del modo secondo il quale risultano formate le stelle delle diverse reti. Gli elementi di tali reti geometriche sono gli *angoli solidi*, i *fasci* o le *facce*, e fra questi elementi sussiste la stessa relazione (di Eulero) che ha luogo nei poliedri, vale a dire il numero degli angoli, aumentato di quello dei fasci, eguaglia sempre il numero delle facce aumentato di due.

Gli angoli solidi sono quelli stessi che appartengono ai vari poliedri che formano le reti; i fasci sono formati dal concorso dei vari diedri dei poliedri che hanno una costola in comune, e le facce sono comuni a due poliedri adiacenti. La colonna intestata *angoli solidi* contiene la indicazione del numero e delle varie specie di angoli dei poliedri che concorrono in ogni stella delle singole reti.

La colonna intestata *fasci* contiene la indicazione del numero degli spigoli di ciascuna stella e il numero e la specie dei diedri appartenenti ai vari poliedri, che formano un giro intorno ad ognuno di questi spigoli.

Infine la colonna segnata *facce* porta la indicazione del numero e dell'ordine delle varie facce che concorrono in ciascuna stella. Così per esempio la notazione simbolica relativa alla rete 14^a ci dice che essa è *semiforme*; che ciascuna stella è formata dal concorso di 5 poliedri, e cioè di un ottaedro e di 4 cubi tronchi; che vi concorrono 5 spigoli di cui 4, sono assi di fasci del 3^o ordine formati da un diedro dell'ottaedro e 2 dal diedro compreso tra facce triangolari e ottagonali del cubo tronco e uno è asse di un fascio del 4^o ordine formato da 4 diedri del cubo tronco; infine che, sempre in ciascuna vertice, concorrono 8 facce di cui 4 sono triangolari e 4 ottagonali.

Per quanto riguarda gli elementi che costituiscono i vari poliedri che prendono parte alla formazione delle reti e per la interpretazione della notazione relativa ai vari poliedri ed ai corrispondenti diedri, si può ricorrere al quadro dato al n. 14.

Termineremo questa I Parte riportando qui appresso le immagini stereoscopiche di tutte le reti poliedrali cercate (12 fondamentali e 2 *varianti*), escluse quelle appartenenti alle serie riassunte nelle prime 5 classi enumerate al n° 83, le quali si deducono facilmente dalle reti piane di cui abbiamo già date le figure in principio.

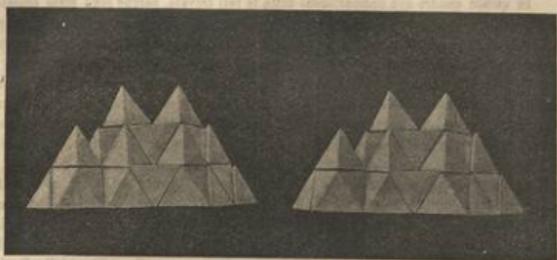


FIG. 12.

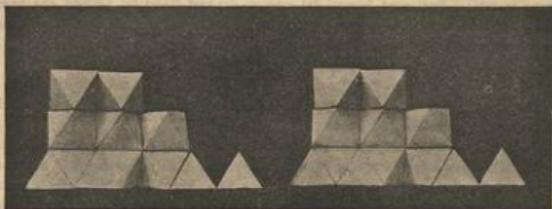


FIG. 13.

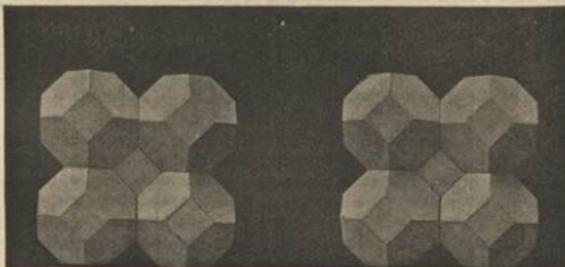


FIG. 14.

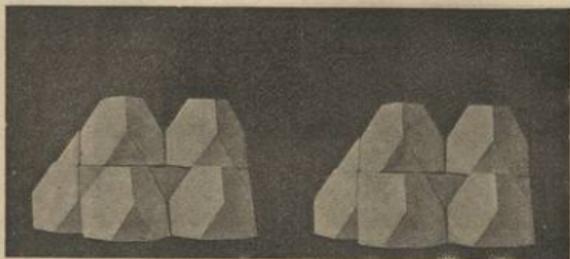


FIG. 15.

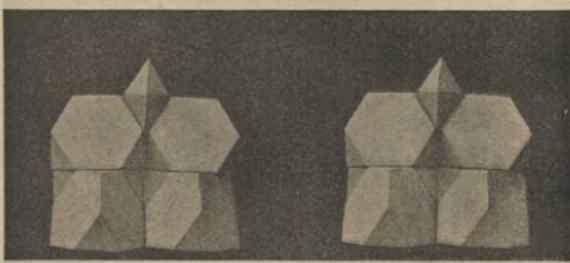


FIG. 16.

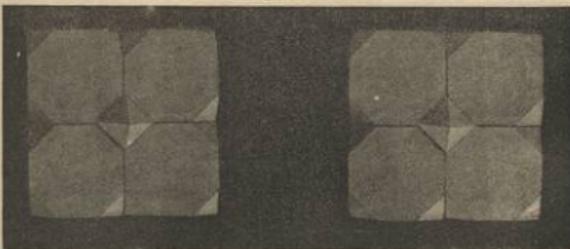


FIG. 17.

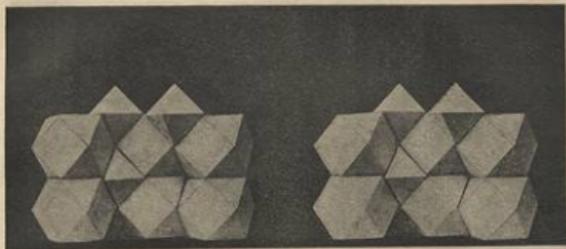


FIG. 18.

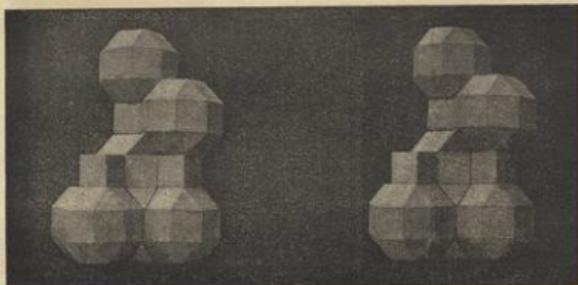


FIG. 19.

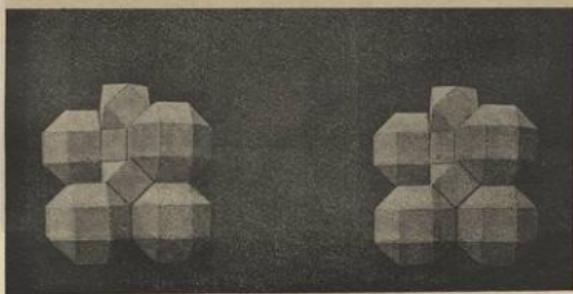


FIG. 20.

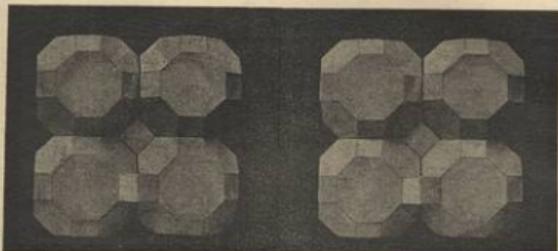


FIG. 21.

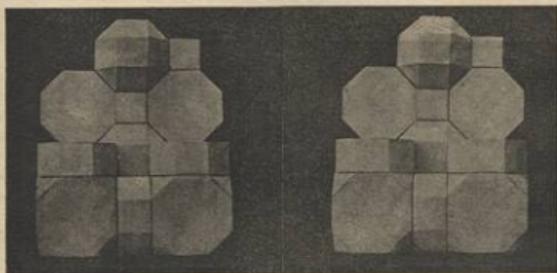


FIG. 22.

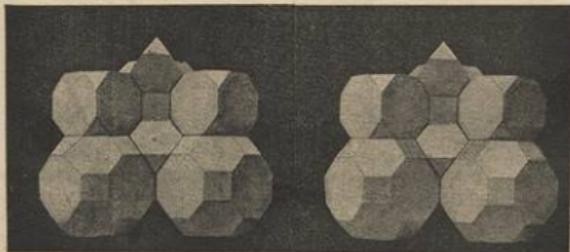


FIG. 23.

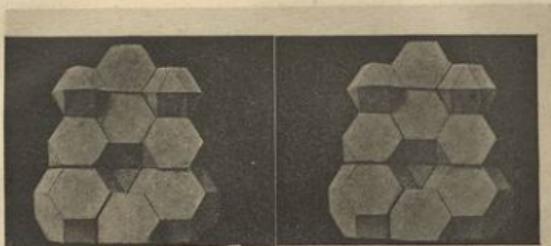


FIG. 21.

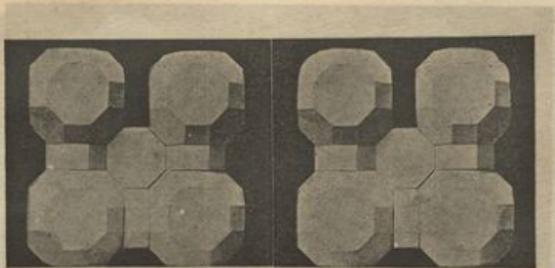


FIG. 22.



PARTE SECONDA

Reti correlative a quelle di poliedri regolari e semiregolari.

47. Come le reti piane possono considerarsi quali corpi di un numero infinito di facce nello spazio a tre dimensioni, così le reti dello spazio ordinario possono riguardarsi come corpi di un numero infinito di poliedri dello spazio a 4 dimensioni; quindi per introdurre il concetto di correlatività nelle reti poliedrali si potrebbe osservare che come da una rete piana si passa alla sua correlatività mediante il principio di correlatività fra i poliedri dello spazio ordinario, così da una rete poliedrale si passa alla sua correlativa per mezzo del principio di correlativa tra i corpi dello spazio a 4 dimensioni.

Noi però riserbando tale modo di derivazione quando faremo la ricerca delle reti poliedrali come caso particolare dei corpi dello spazio a 4 dimensioni, secondo quanto abbiamo già detto al n. 7, ci contenteremo, per ora, di accennare alla corrispondenza che si può stabilire fra i vari elementi che compongono una rete di poliedri, per poterne dedurre le reti correlative.

48. A tale scopo osserviamo che in una rete dello spazio ordinario possiamo considerare come elementi primari i *poliedri* che compongono la rete e le *stelle* nei vertici delle quali si aggruppano quei poliedri.

Questi elementi principali sono costituiti da elementi secondari, e questi alla lor volta da altri elementi come apparisce dal seguente prospetto:

Reti	1. Stelle	{	2. Angoli solidi	{	4. Angoli diedri
			3. Fasci	{	5. " piani
	1'. Poliedri	{	2'. Angoli solidi	{	4'. Angoli piani
			3' Facce	{	5'. " diedri
					6. " diedri
					7. Diedroidri
					6'. " piani
					7'. Lati

Quanto al significato dell'elemento *diedroide* osserviamo che come due rette in un piano e due piani nello spazio si incontrano rispettivamente in un punto e secondo una retta, determinando le prime un angolo piano e i secondi un angolo diedro, così, per analogia, si può ritenere che due spazi ordinari nello spazio a 4 dimensioni s'incontrano secondo un piano, determinando una regione di detto spazio indefinito in tre sensi, al quale si può dare il nome di *diedroide*.

I *diedroidi* delle reti sopra considerate sono però un caso specialissimo di quelli ora definiti, perchè le regioni di spazio, che stanno dalle due bande del piano, appartengono allo stesso spazio ordinario, sicchè tali diedroidi speciali sarebbero i corrispondenti degli angoli piatti e dei diedri piatti dello spazio a due e tre dimensioni.

49. I due elementi principali, stelle e poliedri, sono correlativi; agli elementi secondari e terziari dell'uno corrispondono gli elementi secondari e terziari dell'altro; cosicchè riferendoci al prospetto dato precedentemente si può dire che per la correlatività ha luogo la corrispondenza fra gli elementi che abbiamo distinti collo stesso numero d'ordine. Dopo ciò possiamo dire che la corrispondenza fra due reti correlative dello spazio risulta stabilita dalle seguenti relazioni:

1°. Ad ogni *poliedro* regolare o semiregolare si può far corrispondere una *stella* avente il centro in quello del poliedro ed i *raggi* corrispondenti, perpendicolari alle facce del poliedro medesimo nei punti centrali.

2°. Agli *angoli solidi* del poliedro corrispondono gli *angoli solidi* dello stesso ordine nelle stelle. Tali angoli sono supplementari.

3°. Alle *facce* del poliedro corrispondono nella stella *fasci* dello stesso ordine. Gli angoli diedri del fascio sono complementari agli angoli piani della faccia.

4°. Agli *angoli diedri* del poliedro corrispondono le *facce* o *angoli piani* della stella, il valore angolare dei quali è il supplemento di quello degli angoli diedri corrispondenti.

50. Per le stelle suddette adotteremo una notazione identica a quella già usata nella Prima Parte per corrispondenti poliedri, colla sola differenza che le lettere latine saranno sostituite dalle greche. Così la notazione $(x\alpha r)$ starà ad indicare la stella corrispondente al cubottaedro tronco (cof) , la quale stella risulta formata, per ciò che precede, da $6g_2$, $8g_3$, $12g_4$, ossia da 6 fasci regolari del 4° ordine, 8 regolari del 3°, e 12 pure regolari del 4°. La notazione degli angoli piani A della stella sarà fatta cogli stessi criteri adottati per la notazione degli angoli diedri δ dei poliedri (n. 11), e quindi ogni A sarà accompagnata dalle lettere che indicano la stella speciale a cui appartiene e dai numeri, a guisa di esponenti, che esprimono l'ordine dei fasci i cui assi (raggi della stella) determinano quell'angolo. Cosicchè riferendoci alla stella sopra considerata si trova che essa contiene 72 angoli piani i cui lati sono:

per 24, gli assi di fasci regolari di 8° e 6° ordine
 * 24 * * * * * 8° e 4° *
 * 24 * * * * * 6° e 4° *

Ora, secondo le convenzioni precedenti, tutto ciò può essere indicato simbolicamente colla notazione

$$72 \left\{ \begin{array}{l} 24 \dots A_{x\alpha r}^{86} \\ 24 \dots A_{x\alpha r}^{64} \\ 24 \dots A_{x\alpha r}^{66} \end{array} \right.$$

51. Ogni rete ammette una correlativa. Se tutti i poliedri dell'una hanno un centro e i vertici delle stelle dell'altra coincidono con questi centri, ogni raggio comune a due stelle risulta perpendicolare nel centro della faccia comune ai due poliedri che contengono i vertici di queste due stelle. Due reti che si trovano in queste condizioni le diremo *coniugate*. Alle reti di poliedri regolari e semiregolari, con stelle eguali, corrispondono delle reti di stelle regolari e semiregolari le quali danno luogo alla formazione di poliedri eguali fra di loro.

Noi dobbiamo ora occuparci della determinazione di quest'ultimo reti; però piuttosto che considerarle come aggregati di stelle, le riguarderemo ancora come insieme di poliedri tutti eguali fra di loro, e che coi loro aggruppamenti danno origine a stelle regolari e semiregolari con fasci regolari. Per brevità di linguaggio le reti trovate nella Prima Parte le chiameremo *reti fondamentali* o quelle che dobbiamo ora determinare le diremo *reti correlative*.

52. Le faccie che formano i corpi delle reti correlative sono in numero ed in ordine eguali a quelle dei fasci che compongono le stelle delle corrispondenti reti fondamentali; gli angoli di quelle faccie sono, come abbiamo già osservato, i supplementi di vari angoli che costituiscono questi fasci. Ai fasci di 3° ordine (di diedri noti) corrispondono delle faccie triangolari delle quali essendo conosciuti gli angoli sono completamente determinate di forma. Eccezzuate quelle formate da soli prismi, nessuna fra le *reti fondamentali* contiene dei fasci di ordine superiore al 4°, cosicchè le faccie dei solidi cercati sono trilatero o al più quadrilatero. Anche per le faccie quadrilatero potremo, come abbiamo già osservato, determinare subito gli angoli. Per avere i lati di dette faccie basta osservare che ognuna delle costole del solido cercato è sempre data dalla somma delle apoteme dei due poliedri di cui la faccia comune è perpendicolare allo spigolo considerato. I poliedri regolari e semiregolari che costituiscono le reti fondamentali hanno tutti gli spigoli di eguale lunghezza l , quindi potremo esprimere tutte le apoteme relative alle diverse faccie dei vari poliedri in funzione di questa lettera.

53. Indicando in generale con a_n l'apotema relativa alla faccia di ordine n , del poliedro k il prospetto che segue dà la espressione delle varie apoteme dei poliedri regolari e semiregolari che entrano nella costituzione delle reti fondamentali:

$$\text{Tetraedro} \dots \dots \dots a_c = \frac{l\sqrt{6}}{12} ; \quad \text{Cubo} \dots a_c = \frac{l}{2}$$

$$\text{Ottaedro} a_o = \frac{l\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Tetraedro tronco} \dots \dots \dots a_n^* = \frac{l\sqrt{6}}{4} ; \quad a_n^* = \frac{5l\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{Cubo tronco} \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} a_n^* = \frac{1}{2} l (1 + \sqrt{2}) ; \\ a_n^* = \frac{l\sqrt{2}}{6} (3 + 2\sqrt{2}) = \frac{l\sqrt{6}}{12} (3\sqrt{2} + 4) \end{array} \right.$$

Ottaedro tronco $a_{ot}^* = \frac{l\sqrt{6}}{2}$; $a_{ot}^* = l\sqrt{2}$

Cubottaedro $a_{co}^* = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; $a_{co}^* = \frac{l\sqrt{6}}{3}$

Rombocubottaedro $\left\{ \begin{array}{l} a_{rco}^* = \frac{l}{2}(1 + \sqrt{2}) ; \\ a_{rco}^* = \frac{l}{6}(3\sqrt{3} + \sqrt{6}) = l\sqrt{6} \frac{3\sqrt{2} + 2}{12} \end{array} \right.$

Cubottaedro tronco $\left\{ \begin{array}{l} a_{cot}^* = \frac{l}{2}(3 + \sqrt{2}) ; \quad a_{cot}^* = \frac{l}{2}(1 + 2\sqrt{2}) \\ a_{cot}^* = \frac{l}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) = \frac{l\sqrt{6}}{4}(2 + \sqrt{2}) \end{array} \right.$

Prisma a base ottagonata $a_{pa}^* = \frac{l}{2}(1 + \sqrt{2})$; $a_{pa}^* = \frac{l}{2}$

54. Veniamo ora alla determinazione delle reti correlative che ricaveremo da quelle fondamentali nell'ordine stesso secondo cui sono state trovate nella Prima Parte (n. 33).

1^a. Per le 10 reti di prismi e per la *varietà* (nn. 18 e 19) si vede subito che le correlative risultano pure formate da prismi di cui le basi sono rappresentate dai poligoni delle reti piane correlative (reti punteggiate, figg. 1-11) e le facce laterali da rettangoli di cui l'altezza è uguale allo spigolo delle reti fondamentali.

Si osservi che la rete di cubi è autocorrelativa, e che quelle di prismi a base esagonale e di prismi a base triangolare sono l'una correlativa dell'altra. La rete 11^a, costituita da una pila indefinita di prismi aventi le basi di un numero infinito di lati e quindi limitati, lateralmente, da una striscia indefinita di quadrati (n. 19), ammette per correlativo la rete formata da infiniti strati di prismi di cui le basi sono due bilateri (striscie indefinite) e le facce laterali debbono riguardarsi come rettangoli infinitamente allungati.

55. 1^a. Le correlative delle 10 reti e della *varietà*, di solidi prismatici regolari estesi indefinitamente, sono rappresentate dalle reti piane correlative a quelle fornite da una sezione retta delle reti di prismi predetti. Tali sezioni, rappresentate dalle reti punteggiate delle figg. 1 e 10, debbono però essere considerate come le reti di combaciamento di due poliedri di un numero infinito di faccie.

La rete 11^a (n. 20) di questa classe è costituita da due prismi indefiniti formati da un numero infinito di striscie, ossia da due *corpi biangoloidi* con un numero infinito di faccie e di spigoli; ora è facile riconoscere che la rete correlativa è identica alla precedente; possiamo quindi dire che anche la rete 11^a è *autocorrelativa*.

56. 1^a. Alle 10 reti ed alla *varietà*, costituite da due solidi di un numero infinito di faccie (n. 20^{ba}, figg. 1-11) corrispondono come correlative, le 11 reti di solidi prismatici indefiniti e delle quali le sezioni rette sono le reti piane rappresentate dalle reti punteggiate delle figg. 1-11.

La correlativa alla 11ª rete di questa classe è formata da infiniti piani che bisecano ortogonalmente gli spigoli della rete fondamentale; questi piani costituiscono nel loro insieme tanti diedri (strati) con due fasci regolari di un numero infinito di diedri, e due stelle regolari di un numero infinito di faccie.

57. 2ª. La rete formata da due pile indefinite di prismi storti di cui le basi hanno un numero infinito di lati, ha per correlativa un insieme di solidi prismatici indefiniti di cui la sezione, normale alla direzione degli spigoli, fornisce una rete di esagoni. Tali solidi sono analoghi a quelli della rete correlativa 11ª di cui si parla al n. 54, colla differenza che ognuno delle basi bilatere di quella è sostituita da due bilateri o striscie.

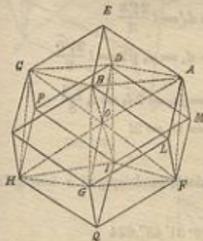


Fig. 25.

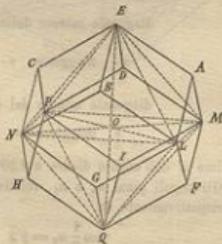


Fig. 26.

58. 3ª. La rete (n. 23) di prismi e prismi storti alternati, con base di un numero infinito di lati e quindi limitati lateralmente da striscie di quadrati e di triangoli rispettivamente, ha per correlativa quella formata di solidi le cui sezioni rette sono dei pentagoni rappresentati dalla rete piana punteggiata della fig. 9ª. Le faccie di tali solidi, che corrispondono agli spigoli, comuni ai triangoli e ai quadrati, sono da considerarsi come rettangoli infinitamente allungati, le altre faccie sono bilaterali (striscie).

59. Le correlative alle classi 4ª e 5ª (n. 33) di reti fondamentali possono essere determinate contemporaneamente, tenendo presenti le osservazioni fatte e il prospetto dei valori delle apoteme dati al n. 53.

Prima però di venire a questa determinazione ci occuperemo di alcuni poliedri speciali e cioè del *dodecaedro romboidale* e dei vari solidi geometrici in cui questo può essere decomposto, perchè, come vedremo fra poco, sono appunto questi corpi che costituiscono gli elementi poliedrici delle reti correlative a quelle che non si deducono dalle reti piane. Passeremo ora in rassegna questi poliedri speciali.

60. *Dodecaedro romboidale* (A). Se sopra le 6 faccie di un cubo, assunte come basi (fig. 25), si costruiscono altrettante piramidi regolari coll'angolo diedro alla base di 45° e se immaginiamo poi soppresse le 12 costole del cubo stesso, si ottiene un corpo costituito da 12 losanghe che rappresenta il dodecaedro romboidale. Tale

corpo si può anche ottenere costruendo opportune piramidi triangolari sulle faccie dell'ottaedro regolare come mostra la fig. 26.

Il *dodecaedro romboidale* contiene 6 angoloidi regolari quadrispigoli situati alle estremità di 3 assi ortogonali (fig. 26) e 8 angoloidi regolari trispigoli posti agli estremi delle diagonali di un eubo (fig. 25). Il numero delle costole è di 24, e tutti gli angoli diedri sono eguali tra loro.

Chiamando l il lato della losanga, D_1 e D_2 gli assi del corpo che congiungono rispettivamente una coppia di angoloidi quadrispigoli e trispigoli; d_1 e d_2 le diagonali delle losanghe, che riuniscono rispettivamente due vertici di angoloidi quadrispigoli e trispigoli, si deduce subito, per ciò che precede, che la

$$\begin{aligned} \text{diagonale minore della losanga} &= d_2 = l \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \text{• maggiore • • •} &= d_1 = d_2 \sqrt{2} = l \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ \text{diagonale minore del dodecaedro} &= D_1 = 2d_2 = l \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \text{• maggiore • • •} &= D_2 = 2l \end{aligned}$$

Il valore \mathcal{A} dell'angolo diedro è 120° .

Gli angoli piani α_1 e α_2 , relativi agli angoloidi quadrispigoli e trispigoli, sono dati rispettivamente da

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad \alpha_2 = 70^\circ 31' 43'', 624 \\ \alpha_1 &= 180 - \alpha_2 = 109^\circ 28' 16'', 376 \end{aligned}$$

ossia sono rispettivamente gli angoli diedri del tetraedro e dell'ottaedro regolare (n. 15).

La figura 25 mostra che il dodecaedro romboidale può scomporsi in 4 *romboedri* o in 6 *ottaedri* e la 26, in 8 *bipiramidi triangolari* su base triangolare equilatera. Una di ciascuna specie di questi corpi è rappresentata in forma, posizione notazione, ma in dimensioni maggiori, dalle tre figure 27, 28, 29.

61. Il *romboedro* (B) fig. 27 ha 6 faccie eguali a quella del dodecaedro romboidale, e due degli angoli solidi triedri opposti A e O, sono pure eguali a quelli del dodecaedro stesso; gli altri 6 sono costituiti dal concorso di un angolo ottuso e di due acuti della losanga che rappresenta la faccia del dodecaedro romboidale; la grandezza delle sue varie parti è la seguente: Costola = l

$$\begin{aligned} \text{diagonale maggiore della faccia} &= d_1 = l \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ \text{• minore • • •} &= d_2 = l \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \text{diagonali del corpo, AO} &= l \\ \text{• • • AB = LD = EF} &= l \frac{\sqrt{33}}{3} \end{aligned}$$

62. L'ottaedro (C) fig. 28, è la sesta parte del dodecaedro romboidale. È costituito da 8 triangoli isosceli che si ottengono dimezzando, colla diagonale minore, la losanga del dodecaedro romboidale. Gli angoloidi sono quadrispigoli e regolari; due

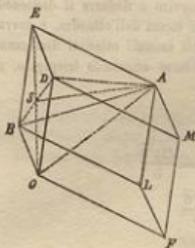


FIG. 27.

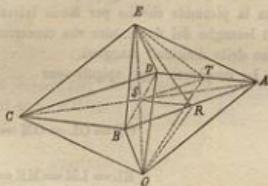


FIG. 28.

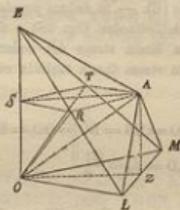


FIG. 29.

di essi E ed O sono eguali a quelli del dodecaedro romboidale; gli altri 4 sono eguali fra loro. Le lunghezze delle diagonali e dei lati sono le seguenti:

$$AB = BC = CD = AD = d_3 = l \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$EA = EB = EC = ED = OA = OB = OC = OD = l$$

$$AC = BD = d_4 \sqrt{2} = d_4 = l \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$OE = d_3 = l \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Si osservi che la sezione ADCB dell'ottaedro è un quadrato, e le altre due AECO = BCDO sono losanghe eguali alla faccia del dodecaedro.

63. La *bipiramide* OELMA (D), fig. 29, è l'ottava parte del dodecaedro ed è formata da due piramidi triangolari regolari colla base in comune. Può riguardarsi come risultante dall'ottava parte dell'ottaedro che ha servito a dedurre il dodecaedro romboidale (n. 60) alla quale parte, e sopra la faccia stessa dell'ottaedro, è sovrapposta la piramide che ha per faccie laterali i triangoli isosceli ottenuti dimezzando le 3 losanghe del dodecaedro che concorrono in uno stesso angoloide trispigolo, per mezzo delle diagonali maggiori.

Le lunghezze degli spigoli sono

$$OE = OL = OM = \frac{1}{2} D_1 = d_3 = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

$$EL = LM = ME = d_4 = l \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$AE = AL = AM = l$$

64. Vediamo ora gli altri corpi che possono dedursi dai tre precedenti.

Piramide su base losanga (E). — Si deduce prendendo rispettivamente la metà e la terza parte, ABEDO, dell'ottaedro (fig. 28) e del romboedro (fig. 27). La losanga che serve di base è la faccia stessa del dodecaedro romboidale; le faccie laterali sono la metà di questa stessa faccia tagliata colla diagonale minore.

Lunghezza degli spigoli:

$$AE = AO = EB = BO = OD = DE = l$$

$$AB = AD = d_3 = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

65. *Piramide regolare a base quadrata* (F). — Si deduce solamente dall'ottaedro prendendone la metà ABCDE (fig. 28).

Gli spigoli sono:

$$AB = BC = CD = DA = d_3 = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

$$EA = EB = EC = ED = l$$

66. *Bipiramide trirettangola su base triangolare isoscelo* (G). — Si deduce dall'ottaedro (fig. 28) prendendone la 4^a parte OERAT per mezzo di due piani che bisecano ortogonalmente i lati opposti del quadrato ABCD. Si ottiene anche prendendo una delle tre parti, per esempio OERAT, (fig. 29) in cui viene divisa la bipiramide (D) per mezzo dei piani passanti per AO perpendicolarmente ai tre spigoli EL, LH, ME della base equilatera. Per la lunghezza degli spigoli si trova:

$$OE = d_3 = l \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$AE = AO = l$$

$$RE = RO = TE = TO = \frac{1}{2} d_4 = l \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$AR = AT = \frac{1}{2} d_3 = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

67. *Tetraedro di triangoli uguali ed isosceli (H).* — Si ottiene prendendo la metà EOBA del corpo E, n. 64, ossia del corpo ABEDO (figg. 27 e 28).
La lunghezza degli spigoli è data da:

$$EO = AB = d_3 = l \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$EA = EB = BO = OA = l$$

68. *Tetraedro (I) di cui le faccie sono una mezza quadrato, una mezza losanga determinata dalla diagonale maggiore e due mezze losanghe sulla diagonale minore.* — Si deduce prendendo la metà ABDE del corpo (E) ossia di ABEDO (figg. 27 e 28), o la metà di (F) ossia ABCDE (fig. 28).
Gli spigoli sono:

$$BE = ED = EA = l$$

$$AB = AD = d_3 = \frac{l2\sqrt{3}}{3} ; \quad BD = d_4 = l \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

69. *Piramidi triangolari (J) di cui la base è mezza losanga sulla diagonale minore.* — Si ottiene prendendo la metà ABDS dei corpi (H) = EOBA, ed (I) = ABDE (figg. 27 e 28).

Per la lunghezza degli spigoli si trova:

$$EA = EB = l$$

$$AB = d_3 = l \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$ES = \frac{1}{2} d_3 = l \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$AS = BS = \frac{1}{2} d_4 = l \frac{\sqrt{6}}{3}$$

70. *Piramidi a base quadrata con faccie laterali distinte in due coppie di triangoli rettangoli uguali (L).* — Si ottiene prendendo la metà ARSTE del corpo (G) = OERAT (figg. 28 e 29), o la quarta parte del corpo (F) = ABCDE (fig. 28).

Il valore dei suoi spigoli è il seguente:

$$AR = RS = ST = TA = ES = \frac{1}{2} d_3 = l \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ER = ET = \frac{1}{2} d_3 = \frac{l\sqrt{6}}{3} ; AE = l$$

71. Tetraedro (M) di due coppie di triangoli rettangoli eguali. — È la metà SRAE del solido precedente (L) = ARSTE (figg. 28 e 29) o la metà del solido (J) = ABES (figg. 27 e 28).

I suoi spigoli sono:

$$AR = RS = SE = \frac{1}{2} d_3 = l \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ER = \frac{1}{2} d_3 = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

$$AS = \frac{1}{2} d_3 = \frac{l\sqrt{6}}{3} ; AE = l$$

72. Si può osservare che dei poliedri precedenti solamente il dodecaedro, il romboedro e l'ottaedro ammettono un centro geometrico.

Osserviamo ancora che dei 12 corpi trovati per i quali è possibile aggrupparne un certo numero, di una stessa specie, in modo da ottenere un poliedro regolare, si hanno i casi seguenti:

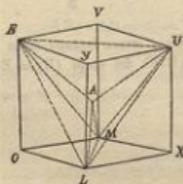


FIG. 30.

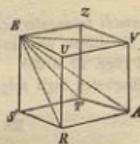


FIG. 31.

- 1°. Sei (F) per formare un cubo (k_1) di lato d_3 (fig. 25)
- 2°. Quattro (D) per formare un cubo (k_2) di lato $\frac{1}{2} D_3 = d_3$ (fig. 30)
- 3°. Tre (L) per formare un cubo (k_3) di lato $\frac{1}{2} d_3$ (fig. 31)

73. Per dodici corpi trovati possono essere messe in evidenza con facilità le derivazioni precedentemente accennate, per mezzo del seguente quadro:

$$\left. \begin{array}{l}
 (B) = \frac{1}{2}(A) \\
 \dots \\
 (E) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(B) \\ \frac{1}{2}(C) \end{array} \right\} \dots (H) = \frac{1}{2}(E) \\
 (G) = \frac{1}{2}(A) \quad (F) = \frac{1}{2}(C) \dots \dots \dots \\
 \dots \dots \dots (G) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(C) \\ \frac{1}{2}(D) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \\
 (D) = \frac{1}{2}(A)
 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l}
 (J) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(H) \\ \frac{1}{2}(I) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \\
 (L) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(F) \\ \frac{1}{2}(G) \end{array} \right\}
 \end{array} \right\} (M) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(J) \\ \frac{1}{2}(L) \end{array} \right\}$$

74. Parimente nel quadro che segue abbiamo la indicazione del numero delle parti eguali di cui si compone ognuno dei corpi (A), (B), (C)... rispetto ad alcuni o a tutti i corpi che nel quadro precedente seguono quello considerato.

	(M)	(L)	(J)	(I)	(H)	(G)	(F)	(E)	(D)	(C)	(B)	(A)
(A)	96	32	48	24	24	24	12	12	8	6	4	1
(B)	24	—	12	6	6	—	—	3	—	—	1	—
(C)	16	8	8	4	4	4	2	2	—	1	—	—
(D)	12	6	—	—	—	3	—	—	1	—	—	—
(E)	8	—	4	2	2	—	—	1	—	—	—	—
(F)	8	—	4	2	—	—	1	—	—	—	—	—
(G)	4	2	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—
(H)	4	—	2	—	1	—	—	—	—	—	—	—
(I)	4	—	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—
(J)	2	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(L)	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
(M)	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

In questo quadro ogni numero indica quanti corpi corrispondenti al simbolo posto in testa alla colonna, sono contenuti nel corpo rappresentato dal simbolo della prima colonna a sinistra.

75. Infine nel terzo ed ultimo quadro seguente sono posti in evidenza i numeri delle varie specie di angoloidi appartenenti ai corpi (B), (C), (D)... (M) e che occorrono per formare i vari angoloidi dei corpi (A), (B), (C)... (M) o dei cubi (K₁), (K₂), (K₃), da cui il corpo considerato può derivarsi.

Tale quadro si limita a mettere in rilievo solamente quei casi che ci torneranno utili per poter riconoscere più facilmente di quali e quanti angoli solidi, appartenenti ai corpi predetti, sono composte le varie stelle delle reti correlative:

(B) = A, M, D, E, L, F, O, B ₂	(A) figg. 25, 27	H = E, O, B, A ₂	(E) figg. 27, 28
(C) = E, A, B, C, D, O ₂	(A) * 25, 28	I = {A ₁ B, D, E, E ₁	(E) * 27, 28
(D) = {O, E, L, M, A ₁	(A) * 26, 29	{A ₁ B, D, E ₂	(F) * 28
{O, E, L ₂ M ₂ A ₂	(K ₂) * 30	J = {A ₁ B, E, S ₂	(H) * 27, 28
(E) = {A, B, E, D, O ₂	(B) * 27	{A ₁ B, E, S ₂	(I) * 27, 28
{A, B, E, D ₂ O ₂	(C) * 28	L = {A ₁ R, S, T, E ₁	(G) * 28, 29
(F) = {A ₂ B, C, D, E ₁	(C) * 28	{A ₁ R, S, T, E ₂	(F) * 28
{A ₂ B, C, D ₂ O ₂	(K ₁) * 25	{A ₁ R, S, T, E ₂	(K ₃) * 31
(G) = {O, E, R, A, T ₂	(C) * 28	M = {S, R, A, E ₂	(L) * 28, 29
{O, E, R, A ₂ T ₂	(D) * 29	{S, R, A, E ₂	(J) * 27, 28

Le prime lettere fra parentesi sono i simboli dei corpi che si considerano; le lettere della terza colonna, sempre fra parentesi, rappresentano i corpi da cui derivano rispettivamente i primi. Gli indici numerici delle lettere (seconda colonna) le quali denotano i vari angoloidi del corpo corrispondente nella prima colonna, stanno a rappresentare il numero di tali angoloidi che abbisognano per formare gli angoloidi corrispondenti del corpo da cui può derivarsi il primo.

76. Occupiamoci in ultimo di due altri dodecaedri speciali i quali possono facilmente derivarsi dal *dodecaedro romboidale* (60). Uno di questi nuovi solidi insieme a quello rappresentato da una delle tre parti eguali in cui può decomporci l'altro, forniscono gli elementi per costituire rispettivamente le correlative delle reti fondamentali 2' e 13'.

Per la derivazione di uno di questi solidi si lasciano invariate nel *dodecaedro romboidale* (figg. 25 e 26) le tre losanghe che formano l'angolo solido triedro A; delle 6 costole parallele all'asse AH, si lasciano pure invariate quelle che partono dai tre vertici E, L, M mentre le altre tre DP, FQ, NB si riducono ad un terzo, e si riuniscono poi consecutivamente i punti N, G, Q, I, P, C (fig. 32).

La linea esagonale spezzata così ottenuta è simmetrica ad NLFMEE rispetto al piano che biseca ortogonalmente le tre costole CE, LG, MI, il che si rende manifesto osservando che i trapezi laterali risultano isosceli pel fatto che la proiezione p, per esempio di BL sulla LG, è la terza parte della stessa LG. Infatti, essendo (n. 60)

$$\cot \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{2}, \text{ si ha } \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

e quindi

$$p = BL \cos \alpha = \frac{BL}{3}$$

Dopo ciò prendendo H simmetrico di A rispetto al piano di simmetria predetto, e congiungendo questo punto con C, G e I si viene a formare in H un triedro di tre losanghe identico a quello che ha il vertice in A.

La lunghezza dell'asse AH (fig. 32), si trova osservando che $NB = \frac{1}{2}l$, che
 (n. 60) $AB = d_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}l$ e che quindi

$$AH = NB + 2AB \cos \omega = \frac{l}{3}(1 + 4\sqrt{3} \cos \omega) = \frac{5l}{3}$$
 essendo ω l'angolo (fig. 25) che AB, lato di un cubo, forma colla sua diagonale AH.

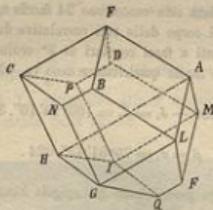


FIG. 32.

Dalla semplice ispezione della fig. 32 si riconosce subito che il dodecaedro ora considerato si compone di tre solidi eguali all'esaedro ALBECNGH al quale daremo il nome di *rombotrapezoide* e che è formato da due losanghe e da 4 trapezi due a due eguali. I trapezi più piccoli hanno la base minore NB eguale alla terza parte della maggiore, e nei trapezi più grandi la base maggiore AH eguaglia i $\frac{5}{3}$ della minore.

77. Un altro dodecaedro, analogo al precedente, si ottiene supponendo che (fig. 25 o 26) il solo angolo solido H insieme alle tre losanghe che lo formano ruotino di 60° intorno all'asse AH. Dopo ciò ricordando quanto è stato detto al numero precedente relativamente alla lunghezza della proiezione di BL sulla LG, è facile riconoscere che questo nuovo *dodecaedro*, che chiameremo *rombotrapezoidale* ha una forma somigliante a quella della fig. 32. Tutti i suoi spigoli sono eguale ad l (lato della losanga del dodecaedro romboidale) eccettuati i 3, NB, QF, FD che sono eguali a $\frac{1}{2}l$ e i 3, LG, EC, MI che sono eguali a $\frac{3}{2}l$. Quest'ultimo dodecaedro è il corpo correlativo alla *varietà* del *cubo ottaedro*, nella quale i due triangoli equilateri e i due quadrati che concorrono in ciascun vertice risultano alternati fra di loro, per 6 angoloidi, e adiacenti l'uno all'altro per gli altri 6, mentre nel *cubo ottaedro ordinario* tutti gli angoloidi sono costituiti da due triangoli e due quadrati alternati.

Ed ora veniamo alla determinazione delle reti correlative a quelle formate da poliedri regolari e semiregolari.

78. Il quadro delle reti fondamentali dato al n. 45, e le osservazioni fatte ai nn. 51, 52, 53, ci mettono in grado di dedurre facilmente tutte le reti correlative.

Tralasciando quelle che sono già state trovate per altra via (n. 54... 58), la determinazione delle rimanenti può farsi nel modo seguente.

Per la rete fondamentale 2 si ha che in ogni stella concorrono 14 angolidi di cui 8 appartengono a dei tetraedri e 6 a degli ottaedri regolari, quindi nella correlativa ogni corpo ha 14 angoli solidi di cui 8 appartengono a stelle regolari tetraspighi e 6 a stelle regolari ottaspighi. Ogni stella della rete fondamentale contiene 12 fasci di 4° ordine i cui diedri opposti sono eguali, e perciò i corpi della rete correlativa debbono contenere 12 facce quadrilatera di cui gli angoli opposti sono eguali.

In ogni stella della prima rete concorrono 24 facce appartenenti tutte a triangoli equilateri e quindi ogni corpo delle reti correlative deve contenere 24 diedri di 120° perchè tutti appartenenti a fasci regolari di 3° ordine.

Gli angoli α e β delle facce quadrilatera sono (n. 49, 3°)

$$\alpha = 180 - \delta_1 = \delta_2 = 109^{\circ} 28' 16'', 376,$$

e quindi

$$\beta = \delta_1 = 70^{\circ} 31' 43'', 624.$$

La faccia è una losanga perchè tutti gli spighi hanno una lunghezza espressa da (n. 52)

$$a_1 + a_2 = \frac{l\sqrt{6}}{12} + \frac{l\sqrt{6}}{2} = l \left(\frac{7\sqrt{6}}{12} \right)$$

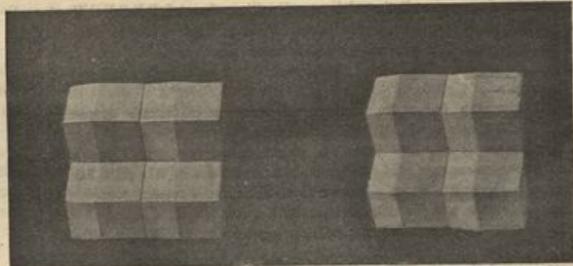


Fig. 33.

I corpi, adunque, che formano la rete correlativa alla 2 (fig. 33) sono dei *dodecaedri romboidali* già descritti al n. 60.

79. Per la determinazione della rete correlativa alla 2' si ragiona nello stesso modo, giacchè i corpi che la costituiscono non differiscono da quelli della rete pre-

cedente che per la forma di alcune delle facce, perchè sei di esse sono losanghe eguali a quelle del dodecaedro romboidale, e sei sono trapezi isosceli i cui angoli sono eguali a quelli della losanga. Gli spigoli del solido sono:

$$\begin{aligned} \text{base maggiore del trapezio} &= 2 a_0 = \frac{1}{2} l \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) \\ \text{• minore • • •} &= 2 a_1 = \frac{1}{2} l \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) \\ \text{lati eguali • • • • •} &= a_0 + a_1 = l \left(\frac{1\sqrt{6}}{4} \right) \end{aligned}$$

Questi valori divisi per $\frac{\sqrt{6}}{4}$ diventano identici a quelli ottenuti pel *dodecaedro rombotrappozoidale* (77). La correlativa alla 2' è quindi formata di questi speciali dodecaedri ed è rappresentata dalla fig. 34.

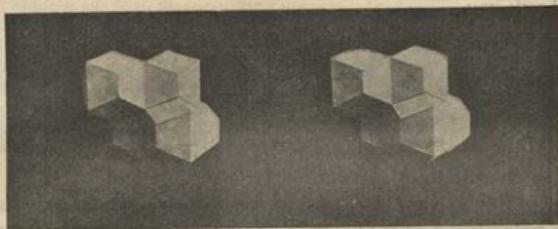


FIG. 34.

80. La rete correlativa alla 3 si trova collo stesso metodo; essa è formata di tetraedri di cui le 4 facce sono triangoli o isosceli eguali. Le lunghezze degli spigoli sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{base del triangolo} &= 2 a_0' = l 2 \sqrt{2} = l \frac{2\sqrt{3}}{6} (\sqrt{6}) \\ \text{lati eguali} &= 2 a_1' = l \sqrt{6} = l (\sqrt{6}) \end{aligned}$$

Questi valori divisi per $(\sqrt{6})$ si riducono a quelli degli spigoli del tetraedro (H) considerato al n. 67.

81. Per le reti che portano il numero d'ordine dal 4 al 12 sono già state considerate le corrispondenti correlative ai nn. 54 . . . 58.

La correlativa alla rete 13 si ricava seguendo lo stesso procedimento e si trova che essa risulta formata di romboedri (n. 61).

82. La rete correlativa della 13' è costituita da 7 facce, 8 angoloidi e 12 costole.

Infatti, esaminando la rete 13' si vede che ai 2 fasci $2_1(\delta_{II}^{\alpha} \delta_{II}^{\beta} \delta_{II}^{\gamma})$ corrispondono due losanghe i cui lati sono $l \frac{\sqrt{6}}{2}$; ai due fasci, $2_4(2 \delta_{II}^{\alpha} 2 \delta_{II}^{\beta})$ corrispondono due trapezi isosceli di cui i lati sono:

$$\text{base maggiore} = 2 a_n^* = \frac{l\sqrt{6}}{2} = l \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

$$\text{base minore} = 2 a_i = 2 \frac{l\sqrt{6}}{6} = \frac{l}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

$$\text{lati eguali} = a_i + a_n^* = \frac{l\sqrt{6}}{2} = l \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

Infine ai due fasci $2_4(2 \delta_{II}^{\alpha} 2 \delta_{II}^{\beta})$ corrispondono pure due trapezi isosceli i lati del quale sono:

$$\text{base maggiore} = 2 a_n^* = \frac{5l\sqrt{6}}{6} = \frac{5l}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

$$\text{base minore} = 2 a_i^* = \frac{l\sqrt{6}}{2} = l \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

$$\text{lati eguali} = 2 a_n^* = l \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

Dividendo per $\left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$ tutti i valori trovati e confrontando i risultati con quelli che corrispondono al solido del n. 77, si può concludere che la correlativa della rete 13' è formata da *rombotrapozedri*.

83. Senza esporre ora dettagliatamente le ricerche relative alle reti correlative rimanenti, tanto più che queste ricerche si conducono con metodo identico a quello seguito precedentemente, ci contenteremo di dare i risultati finali i quali ci dicono che i corpi che rispettivamente costituiscono le correlative alle reti fondamentali

14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22

sono (F), (C), (D), (G), (J), (L), (I), (E), (M)

già studiati e descritti al nn. 60-75.

Dal quadro del n. 45 si deduce facilmente, per ogni rete correlativa, l'ordine delle varie stelle rispetto agli angoloidi. Ma per trovare l'ordine di dette stelle rispetto agli angoloidi dei corpi (A)(B)(C)...(L)(M) che le formano, basta osservare che per la rete di dodicacetri romboidali (A) (fig. 33) le stelle di angoloidi triedri (A, B, C, D, E, F, G, H, I, figg. 25, 26) sono di 6° ordine, e quelle di an-

gloidi tetraedri (E, L, M, N, F, Q, figg. 25, 26) sono di 4° ordine. Dopo ciò il prospetto del n. 75 ci permette di risolvere subito la questione proposta. Si consideri per es. la rete correlativa alla 14, formata di corpi (F). Dal prospetto predetto si riconosce subito che gli angoloidi A (= B = C = D) ed E sono rispettivamente di 2° e 1° ordine rispetto agli angoloidi omonimi di (F); che gli angoloidi del dodecaedro romboidale sono di ordine 3° e 1° rispetto a quelli del corpo (C); dunque le stelle della rete sono di ordine 24° e 6° rispetto ai medesimi angoloidi.

Allo stesso risultato si giunge osservando che gli angoloidi A = B = C = D e O di K, sono rispettivamente di ordine 3° e 6° rispetto agli angoloidi omonimi di F, e che nella rete di cubi tutte le stelle sono dell'8° ordine rispetto agli angoloidi.

84. Tutte le nozioni esposte fin qui, intorno alla costituzione delle reti correlative, possono essere riassunte in un quadro analogo a quello dato al n. 45 per le reti fondamentali; però possiamo dispensarci dal compilare questo nuovo quadro, giacchè quello precedentemente ricordato può egualmente servire per le reti correlative, quando: I. Gli enti *stelle* si cambino coi *poliedri*; II. L'ordine della *stella* (n. 45) rispetto agli *angoloidi*, ai *fasci alle faccie*, con quello dei *poliedri*, rispetto agli *angoloidi*, alle *faccie alle costole*; III. I numeri che nella costituzione delle singole stelle indicano: 1°, i gruppi di *angoloidi eguali* appartenenti alle varie specie di *poliedri*; 2°, i gruppi di *fasci eguali* costituiti da speciali *dicdri* di determinati *poliedri*; 3°, i gruppi di *faccie eguali o regolari* dei vari ordini, si cambino rispettivamente coi numeri che nella costituzione dei singoli *poliedri* indicano: 1°, i gruppi di *angoloidi eguali* appartenenti alle varie specie di *stelle*; 2°, i gruppi di *faccie eguali* contenenti speciali *angoli piani* di determinato *stello*; 3°, i gruppi di *fasci eguali o regolari* dei vari ordini.

85. Dobbiamo però osservare che mentre per le reti fondamentali possiamo limitarci a dare il quadro del n° 45 contenente la sola indicazione del modo di costituzione delle stelle, essendo la forma dei poliedri regolari e semiregolari ben nota, per le reti correlative sarebbe opportuno che il quadro corrispondente, oltre contenere le analoghe indicazioni relative ai poliedri, contenesse anche quelle che si riferiscono alle stelle regolari e semiregolari. Ma anche questa parte del prospetto può facilmente compilarsi ponendo mente a quanto è stato detto al n. 49, e alla forma dei solidi regolari e semiregolari quale risulta dal quadro dato al n. 14. Ci limiteremo qui a riportare un esempio della completa indicazione di tutte le particolarità relative alla costituzione di una rete fondamentale e alla sua corrispondente correlativa:

Rete fondamentale di e, co e rco con stelle pentangoloidali (rete 17)

STELLE			POLIEDRI				
Ordine rispetto		Poliedri	Ordine rispetto				
agli angoloidi	ai fasci		agli angoloidi	alle faccie	alle costole		
5	$\left\{ \begin{array}{l} 2\sigma_e \\ 1\sigma_{co} \\ 2\sigma_{rco} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2_3(\sigma_e^{24}, 2\sigma_{rco}^{24}) \\ 4_3(\sigma_e^{24}, \sigma_{co}^{12}, \sigma_{rco}^{12}) \end{array} \right.$	9	$\left\{ \begin{array}{l} 2f_c \\ 7f_{co} \\ rco \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 8\sigma_3 \\ 12\sigma_4 \\ 24\sigma_6 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 6f_6 \\ 8f_8, 6f_4 \\ 8f_8, 6f_4, 10f_6 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 12 \} f_4 \} f_6 \} \\ 24 \} f_8 \} f_4 \} \\ 48 \} 24(f_4 \} f_8), 24(f_8 \} f_4) \end{array} \right.$

Rete correlativa di x, x_{20}, q_{20} con poliedri pentangoloidali (rete di corpi (G))

POLIEDRI			Stelle	STELLE		
Ordine rispetto				Ordine rispetto		
agli angoloidi	alle faccie	alle costole		agli angoloidi	alle faccie	alle costole
5 $\left\{ \begin{array}{l} 2\sigma_x \\ 1\sigma_{x_{20}} \\ 2\sigma_{q_{20}} \end{array} \right\}$	6 $\left\{ \begin{array}{l} 2_1(\alpha_x^{44} 2\alpha_{q_{20}}^{44}) \\ 4_2(\alpha_x^{44} \alpha_{x_{20}}^{44} \alpha_{q_{20}}^{44}) \end{array} \right\}$	9 $\left\{ \begin{array}{l} 2g_2 \\ 7g_3 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x \\ x_{20} \\ q_{20} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 8\sigma_1 \\ 12\sigma_2 \\ 24\sigma_3 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 6g_4 \\ 8g_3, 6g_4 \\ 3g_3, 6g_4, 10g_4 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 12 \{g_1, g_4\} \\ 24 \{g_2, g_3\} \\ 48 \{24(g_1, g_4), 24(g_2, g_3)\} \end{array} \right\}$

Si noti che le f'_i sono quadrati uguali alla f_i , tuttavia sono stati distinti fra di loro perchè effettivamente le f'_i hanno nel rco una funzione diversa da quella delle f_i .

La stessa cosa si può ripetere per gli angoloidi quadrispighi regolari g_1 e g'_1 rispetto alla stella q_{20} .

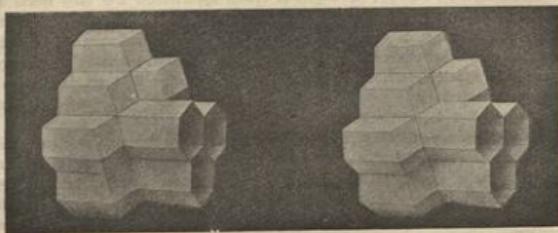


FIG. 35.

36. Le cellette degli alveari delle api hanno, come è noto, la forma prismatica esagonale. L'ingresso di tali celle è un esagono regolare, e il fondo è costituito da tre losanghe eguali che formano un angolo solido triedro col vertice sull'asse della superficie prismatica. Tali celle sono disposte secondo due strati (fig. 35), l'uno contro l'altro in maniera che il fondo di ognuno è costituito dalle losanghe di tre alveoli dello strato opposto. Ora è facile riconoscere che questo aggregamento è identico a quello di due strati di *dodecaedri romboidali*, come si rileva dalla stessa fig. 35, nella quale una di tali celle è stata appunto ridotta a dodecaedro romboidale. È pure noto (ed è stato matematicamente dimostrato) che la forma dell'alveare è tale che con una data quantità di materia (cera) contiene il maggior numero possibile di celle uguali e simili o di data capacità. La rete (fig. 33) di *dodecaedri romboidali* deve quindi soddisfare alla stessa condizione di *minimum*.

87. Porrò termine al presente lavoro colla seguente osservazione: Le reti piane *semiregolari* e le loro *correlative*, possono tutte ottenersi mediante opportune modificazioni fatte rispettivamente sugli angoloidi o sulle faccie delle reti regolari, nella stessa guisa che i *poliedri semiregolari* e i loro *correlativi* possono ricavarsi con analoghe modificazioni effettuate sugli elementi dei *poliedri regolari* (*).

Lo stesso fatto deve ora verificarsi per le reti dello spazio ordinario, vale a dire che quelle semiregolari e le loro correlative, debbono potersi ottenere con modificazioni da eseguirsi sull'unica rete regolare di poliedri (rete di esaedri); anzi, guidati dall'analogia di quanto si verifica pel nostro spazio, quelle speciali operazioni di modificazioni sopra accennate per passare dalla rete poliedrale regolare alle semiregolari corrispondenti, debbono suggerire molto probabilmente i modi per ottenere i corpi semiregolari e i loro correlativi dello spazio a quattro dimensioni dai 6 poliedri regolari dello stesso spazio.

Per ora mi basta di avere accennato alla questione nella speranza di potervi tornar sopra quando, come ho già detto ai nn. 7 e 47, mi occuperò della ricerca delle reti dello spazio ordinario considerandole come poliedri di un numero infinito di elementi dello spazio a 4 dimensioni.

(*) Di queste derivazioni dei poliedri semiregolari dai regolari mi occuperò più estesamente in altro lavoro.