26 (1919)

quartiques traitées par Fermat, puis par Euler et Legendre), on peut néanmoins trouver une identité. La résolution de E_4 entraîne en même temps la résolution d'une seconde quartique

$$E'_4 = X_1'^4 + 3aX_1'^3X'_2 + (3a^2+b)X_1'^2X_2'^2 + (a^3+2ab-c)X'_1X_2'^3 + (a^2b-ac+d)X_2'^4.$$

En lui appliquant les formules du paragraphe a, nous déterminons pour E'_4 des valeurs de variables qui seront nécessairement non nulles tant que X_2 sera différent de zéro.

En transportant ces valeurs de X'_1 et X'_2 dans les formules qui lient à X_1 et X_2, on a les valeurs cherchées. On trouve deux groupes de valeurs.

c. Les cas échappant à cette méthode sont ceux que définissent les conditions

$$a = 0, \qquad c = 0.$$

d. En appliquant les formules de récurrence relatives à cette quartique, et partant de la solution (X_1, X_2) déterminée ci-dessus, on obtient de nouvelles valeurs, fonctions seulement des coefficients, soit une série infinie d'identités, solutions du problème

$$E_4 = Z^2.$$

e. Lorsque, de l'équation $E_4 = KZ^2$, on possède une solution rationnelle, une transformation linéaire ramène la solution du problème à ne plus dépendre que de la résolution d'une quartique $e_4 = q^2$ à laquelle s'appliquent les considérations des paragraphes a, b et d; soit, en fin de compte, une série infinie d'identités, solutions de $E_4 = KZ^2$. Les quartiques proposées possèdent une infinité de solutions.

f. Les substitutions

$$Z = -\frac{2p}{q}, \qquad M = \frac{2U}{q}$$

ramènent le problème

$$q(p-q)(3q^2+3pq-2p^2) = U^2$$

à la cubique

$$Z^3 + 5Z^2 - 12 = M^2$$

qui appartient à une catégorie de problèmes posés par Euler (*Algèbre*, t. 2). Il s'agit de *carrifier* une cubique

$$X^3 + aX^2Y + \ldots + cY^3 = N^2$$

avec la condition qu'une des variables soit égale à une quantité σ donnée d'avance ($\sigma = 1$, dans les exemples d'Euler).

C'est à ce problème que se ramène la résolution de toute quartique

$$E_4 = KZ^2,$$

lorsque E_4 possède une racine rationnelle. (Elle ramène au cas de $Y = 1$, traitée plus loin.)

g. L'hypothèse $X = \sigma$ ramène le problème à la quartique

$$\sigma V^2 = t^4 + 4at^3 + 2(3a^2-b)t^2 + 4[a(a^2-b)+2c]t + [(a^2-b)^2+4ac]$$

qu'on sait traiter (*voir* § a et e).

L'hypothèse $Y = \sigma$ amène à la cubique

$$R^2 = y^3 + \sigma^2\frac{(3b-a^2)}{3}y + \left[\frac{8a^2\sigma^2}{27} + \frac{2a\sigma^3(a^2+b)}{3} - (ab-c)\right].$$

Lorsqu'on possède une solution de cette cubique, et c'est le cas du problème de M. Gérardin, comme elle ramène toujours à une cubique de même forme, on engendre ainsi, arithmétiquement, une infinité de solutions. D'ailleurs, la forme elliptique du problème est immédiate.

Les deux cas ne sont pas distincts l'un de l'autre : chacun d'eux peut facilement se ramener à la forme de l'autre.

Dans le cas de $X = 1$, et tant que a et c ne sont pas nuls simultanément, le problème d'Euler est soluble directement par identités (*voir* § a et b).

Si a et c sont nuls, σ ne peut être qu'un carré parfait.

h. Les hypothèses que l'on peut faire sur les facteurs du polynome

$$4U(2p-3U)(U-p) = w^3$$

ramènent à résoudre rationnellement

$$A^3 + B^3 = 4C^3,$$

problème qui fait l'objet de la question **4832** et de ma réponse à cette question. Le problème n'est donc pas possible en entiers.

DESPUJOLS.

4750 (**1917**, 78) (G. MÉTROD). — *Permutations.* — Cherchons #4750