

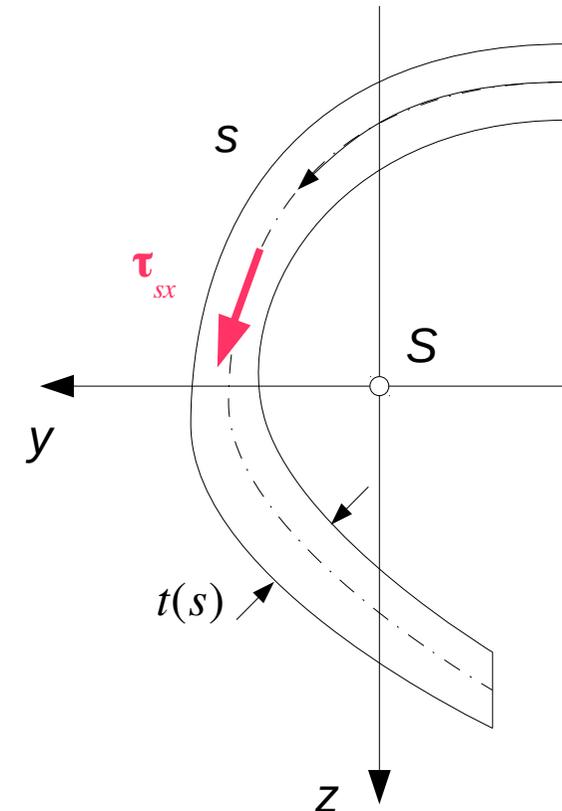
1. Querkraftschub in offenen Profilen

1.1 Schubfluss

1.2 Schubmittelpunkt

1.1 Schubfluss

- Geometrie:
 - Die Profilkordinate s wird entlang der Profilmittellinie gemessen.
 - Das Profil wird durch die Profilmittellinie und die Wandstärke $t(s)$ beschrieben.
- Annahme:
 - Die Schubspannung τ_{sx} ist tangential zur Profilmittellinie und über die Wandstärke konstant.



1.1 Schubfluss

- Definitionen:
 - Am positiven Schnittufer zeigt die positive Schubspannung τ_{sx} in positive s-Richtung.
 - Das Produkt

$$q_{sx} = t \tau_{sx}$$

wird als *Schubfluss* bezeichnet.

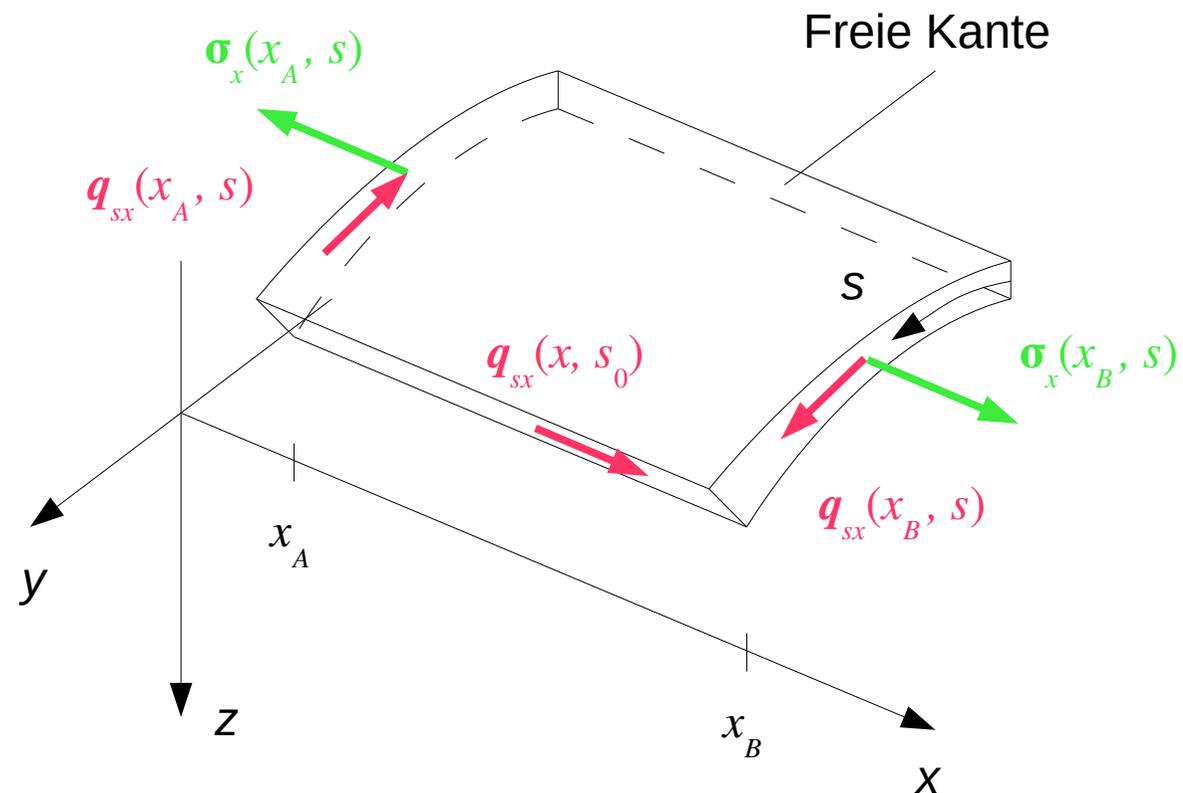
- Der Schubfluss ist eine Streckenlast.
- An freien Kanten ist der Schubfluss null.

1.1 Schubfluss

- Berechnung des Schubflusses:
 - Betrachtet wird ein Balken mit konstantem Querschnitt.
 - Aus dem Balken wird ein Abschnitt zwischen den Koordinaten $x = x_A$ und $x = x_B$ herausgeschnitten.
 - Dieser Abschnitt wird an der Stelle s_0 durch eine senkrecht auf der Profilmittellinie stehende Ebene geschnitten.
 - Betrachtet wird der Balkenausschnitt, der sich auf der Seite mit den kleineren Werten von s befindet.

1.1 Schubfluss

- Lasten am Balkenausschnitt:



1.1 Schubfluss

- Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_x = 0 : \int_{x_A}^{x_B} q_{sx}(x, s_0) dx + \int_{A(s_0)} (\sigma_x(x_B, y, z) - \sigma_x(x_A, y, z)) dA = 0$$

- Mit $\sigma_x(x_B, y, z) - \sigma_x(x_A, y, z) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(x, y, z) dx$

und Vertauschung der Integrationsreihenfolge folgt:

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(q_{sx}(x, s_0) + \int_{A(s_0)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(x, y, z) dA \right) dx = 0$$

1.1 Schubfluss

- Das Integral ist nur dann für beliebige Intervalle $[x_A, x_B]$ null, wenn der Integrand verschwindet:

$$q_{sx}(x, s_0) + \int_{A(s_0)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(x, y, z) dA = 0$$

- Im Hauptachsensystem gilt: $\sigma_x(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y$

- Daraus folgt: $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{dM_y}{dx} \frac{z}{I_y} - \frac{dM_z}{dx} \frac{y}{I_z}$

1.1 Schubfluss

- Mit $\frac{dM_y}{dx} = Q_z$, $\frac{dM_z}{dx} = -Q_y$

und $s_0 = s$ gilt für den Schubfluss:

$$q_{sx}(x, s) = - \left(\frac{Q_z(x)}{I_y} S_y(s) + \frac{Q_y(x)}{I_z} S_z(s) \right)$$

- Dabei sind $S_y(s) = \int_{A(s)} z dA$ und $S_z(s) = \int_{A(s)} y dA$

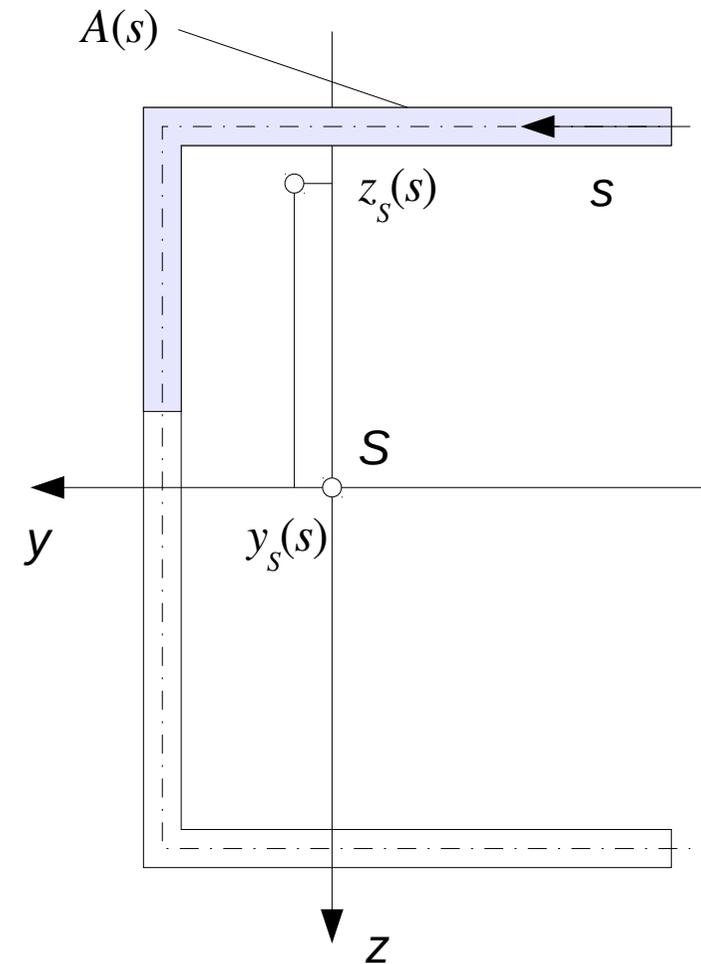
die statischen Momente des Querschnitts bis zur Stelle s .

1.1 Schubfluss

- Die statischen Momente können aus den Koordinaten des Flächenschwerpunkts der Teilfläche $A(s)$ berechnet werden:

$$S_y(s) = z_s(s) A(s)$$

$$S_z(s) = y_s(s) A(s)$$

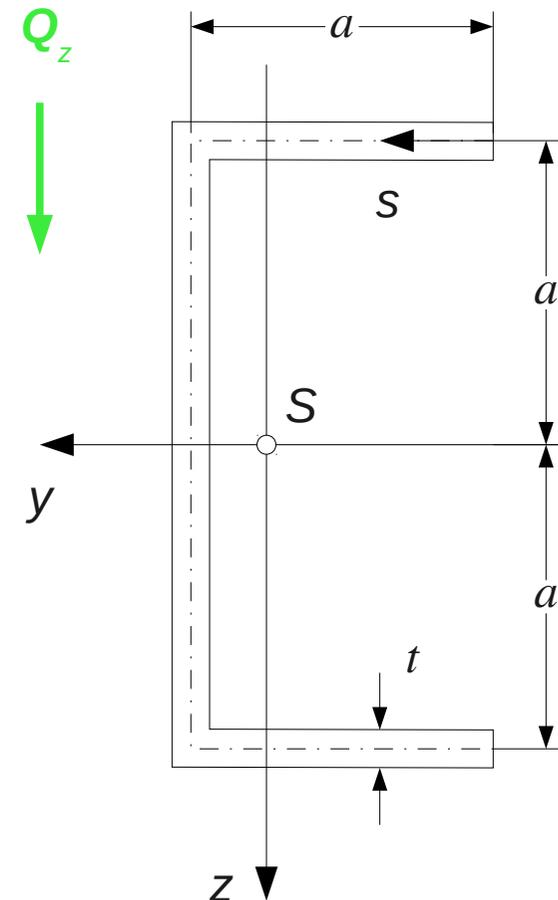


1.1 Schubfluss

- Beispiel: C-Profil

- Die resultierende Querkraft im abgebildeten dünnwandigen C-Profil ist Q_z .
- Gesucht ist der Schubfluss.
- Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{(2a)^3 t}{12} + 2 \cdot a^2 \cdot a t = \frac{8}{3} a^3 t$$



1.1 Schubfluss

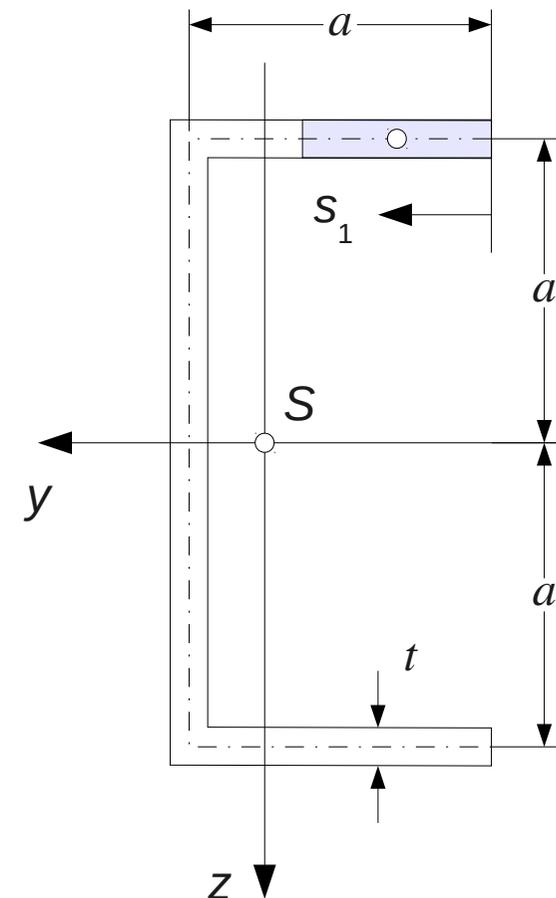
- Oberer Flansch:

$$S_y(s_1) = -a t s_1$$

$$S_y(0) = 0, \quad S_y(a) = -a^2 t$$

$$q_{sx}(s_1) = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{a^3 t} a t s_1 = \frac{3}{8} \frac{Q_z s_1}{a^2}$$

$$q_{sx}(0) = 0, \quad q_{sx}(a) = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{a}$$



1.1 Schubfluss

- Steg:

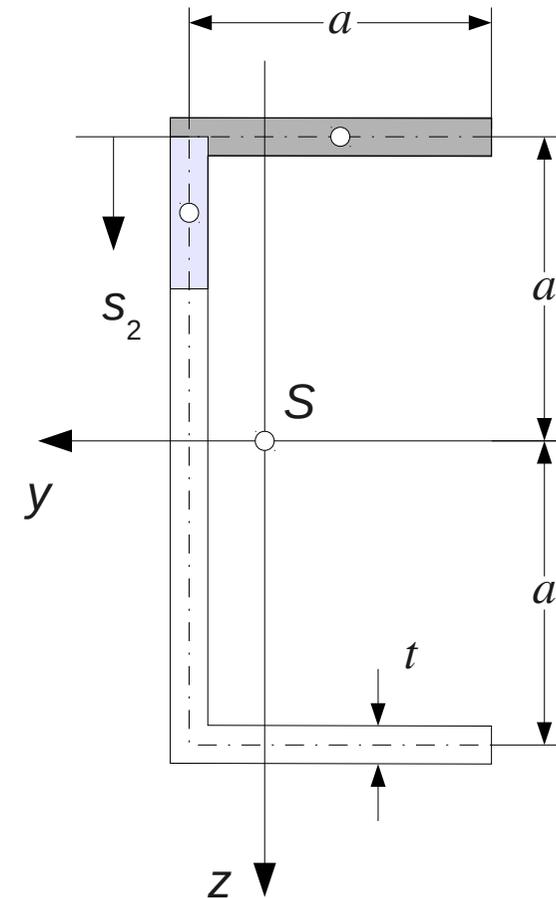
$$S_y(s_2) = -a^2 t + \left(-a + \frac{s_2}{2}\right) t s_2$$

$$= -\frac{a^2 t}{2} \left(2 + 2 \frac{s_2}{a} - \frac{s_2^2}{a^2}\right)$$

$$S_y(0) = -a^2 t, \quad S_y(2a) = -a^2 t$$

$$q_{sx}(s_2) = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{a} \left(2 + 2 \frac{s_2}{a} - \frac{s_2^2}{a^2}\right)$$

$$q_{sx}(0) = q_{sx}(2a) = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{a}$$



1.1 Schubfluss

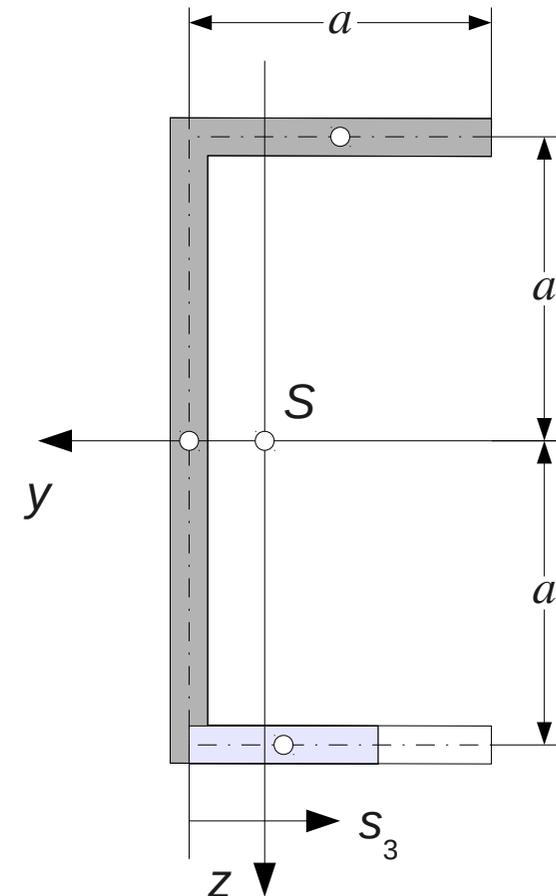
- Unterer Flansch:

$$S_y(s_3) = -a^2 t + a t s_3 = -a^2 t \left(1 - \frac{s_3}{a}\right)$$

$$S_y(0) = -a^2 t, \quad S_y(a) = 0$$

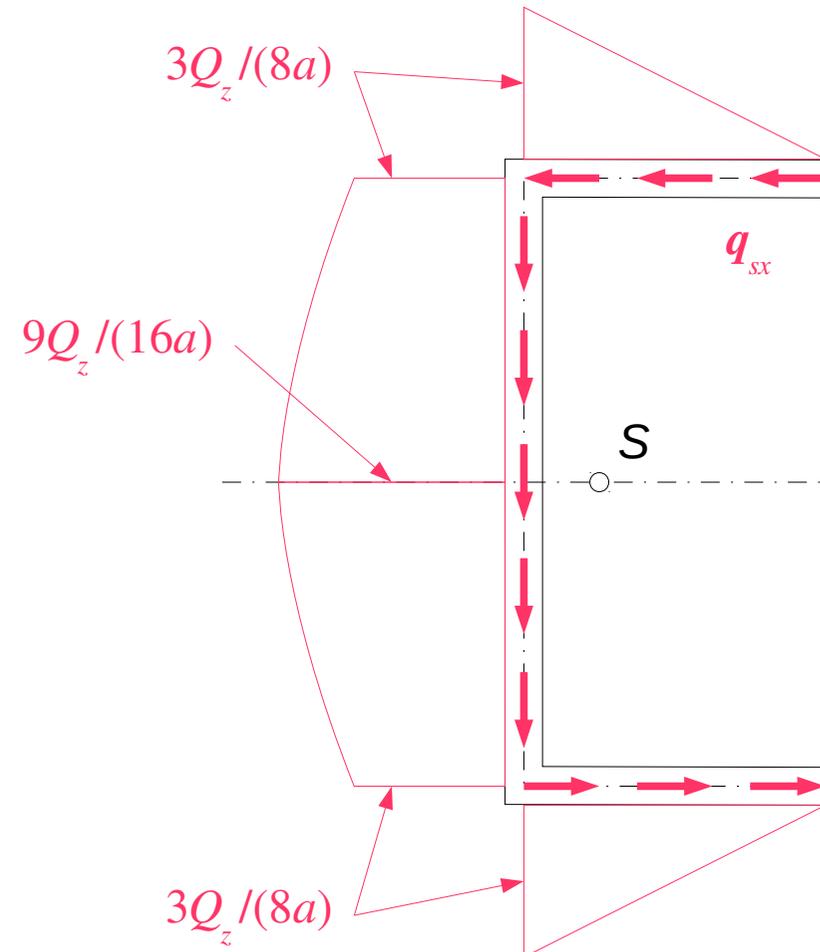
$$q_{sx}(s_3) = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{a} \left(1 - \frac{s_3}{a}\right)$$

$$q_{sx}(0) = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{a}, \quad q_{sx}(a) = 0$$



1.1 Schubfluss

- Verlauf des Schubflusses:
 - Der Schubfluss erzeugt ein resultierendes positives Moment um die durch den Schwerpunkt verlaufende x -Achse.
 - Die Wirkungslinie der resultierenden Querkraft Q_z muss daher links vom Schwerpunkt liegen.

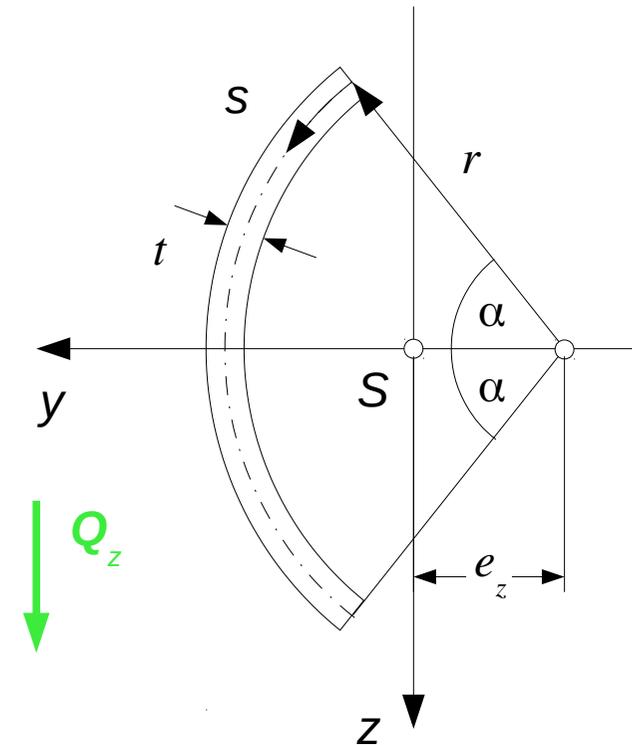


1.1 Schubfluss

- Beispiel: Kreisbogenprofil
 - Die resultierende Querkraft im abgebildeten dünnwandigen Kreisbogenprofil ist Q_z .
 - Gesucht ist der Schubfluss und die maximale Schubspannung.
 - Geometrie:

$$z(s) = -r \sin\left(\alpha - \frac{s}{r}\right)$$

$$0 \leq s \leq 2\alpha r$$



1.1 Schubfluss

- Flächenträgheitsmoment:

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_0^{2\alpha r} z^2(s) t ds = r^2 t \int_0^{2\alpha r} \sin^2\left(\alpha - \frac{s}{r}\right) ds = r^3 t \int_0^{2\alpha} \sin^2\left(\alpha - \frac{s}{r}\right) d\left(\frac{s}{r}\right) \\
 &= r^3 t \left[-\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{s}{r}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(2\left(\alpha - \frac{s}{r}\right)\right) \right]_{s/r=0}^{s/r=2\alpha} \\
 &= r^3 t \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\alpha) + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\alpha) \right] \\
 &= \frac{r^3 t}{2} (2\alpha - \sin(2\alpha))
 \end{aligned}$$

1.1 Schubfluss

- Statisches Moment:

$$\begin{aligned}
 S_y(s) &= \int_0^s z(\bar{s}) t d\bar{s} = -r t \int_0^s \sin\left(\alpha - \frac{\bar{s}}{r}\right) d\bar{s} = -r^2 t \left[\cos\left(\alpha - \frac{\bar{s}}{r}\right) \right]_{\bar{s}=0}^{\bar{s}=s} \\
 &= -r^2 t \left[\cos\left(\alpha - \frac{s}{r}\right) - \cos(\alpha) \right]
 \end{aligned}$$

- Schubfluss:

$$\begin{aligned}
 q_{sx}(s) &= -\frac{Q_z}{I_y} S_y(s) = Q_z \frac{2 r^2 t (\cos(\alpha - s/r) - \cos(\alpha))}{r^3 t (2\alpha - \sin(2\alpha))} \\
 &= \frac{2 Q_z (\cos(\alpha - s/r) - \cos(\alpha))}{r (2\alpha - \sin(2\alpha))}
 \end{aligned}$$

1.1 Schubfluss

- Größter Schubfluss:

$$q_{sxmax} = q_{sx}(r, \alpha) = \frac{2 Q_z (1 - \cos(\alpha))}{r (2\alpha - \sin(2\alpha))}$$

- Größte Schubspannung:

$$\tau_{sxmax} = \frac{q_{sxmax}}{t} = \frac{2 Q_z}{r t} \frac{1 - \cos(\alpha)}{2\alpha - \sin(2\alpha)}$$

1.1 Schubfluss

- Maximaler Schubfluss:

- In beiden Beispielen tritt der maximale Schubfluss an der Stelle $z = 0$ auf.
- Das gilt allgemein, wenn die resultierende Querkraft in z -Richtung zeigt:

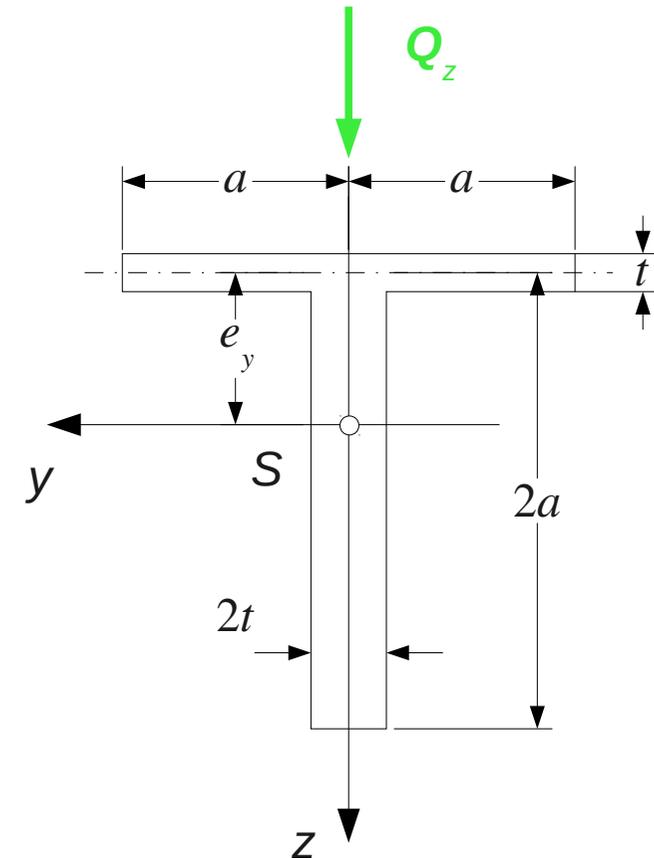
$$q_{sx}(s) = -\frac{Q_z}{I_y} S_y(s) = -\frac{Q_z}{I_y} \int_0^s z t ds$$

$$\frac{dq_{sx}}{ds} = 0 \quad : \quad \frac{d}{ds} \int_0^s z t ds = z t = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0$$

- Zeigt die resultierende Querkraft in y -Richtung, tritt das Maximum bei $y = 0$ auf.

1.1 Schubfluss

- Beispiel: T-Profil
 - Die resultierende Querkraft im abgebildeten dünnwandigen T-Profil ist Q_z .
 - Gesucht ist der Schubfluss und die maximale Schubspannung.



1.1 Schubfluss

- Schwerpunkt:

$$A = 2at + 2a \cdot 2t = 6at, \quad e_y = \frac{a \cdot 4at}{6at} = \frac{2}{3}a$$

- Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = e_y^2 \cdot 2at + \frac{(2a)^3 \cdot 2t}{12} + (a - e_y)^2 \cdot 4at = a^3 t \left(\frac{8}{9} + \frac{16}{12} + \frac{4}{9} \right) = \frac{8}{3} a^3 t$$

1.1 Schubfluss

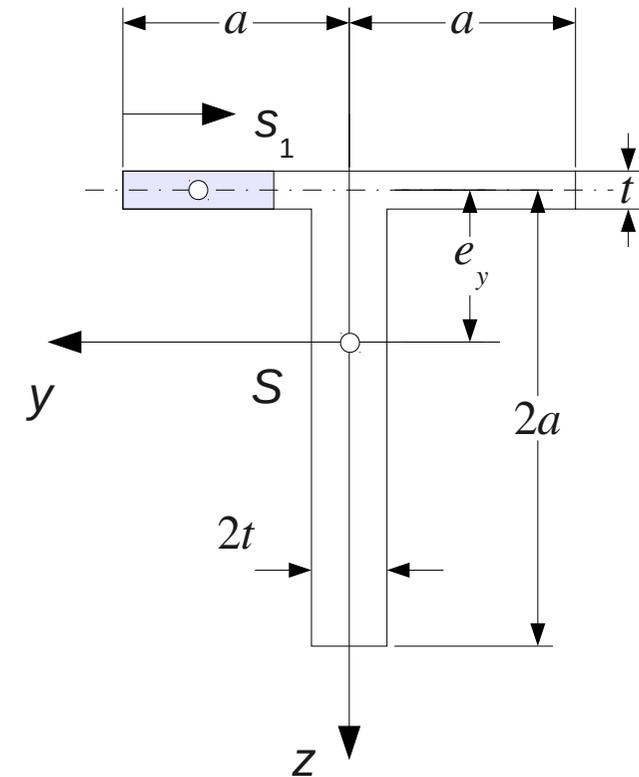
- Linker Flansch:

$$S_y(s_1) = -e_y t s_1 = -\frac{2}{3} a t s_1$$

$$q_{sx1}(s_1) = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{a^3 t} \cdot \frac{2}{3} a t s_1 = \frac{Q_z}{4a} \frac{s_1}{a}$$

$$q_{sx1}(a) = \frac{Q_z}{4a}$$

$$\tau_{1max} = \frac{q_{sx1}(a)}{t} = \frac{Q_z}{4at}$$



1.1 Schubfluss

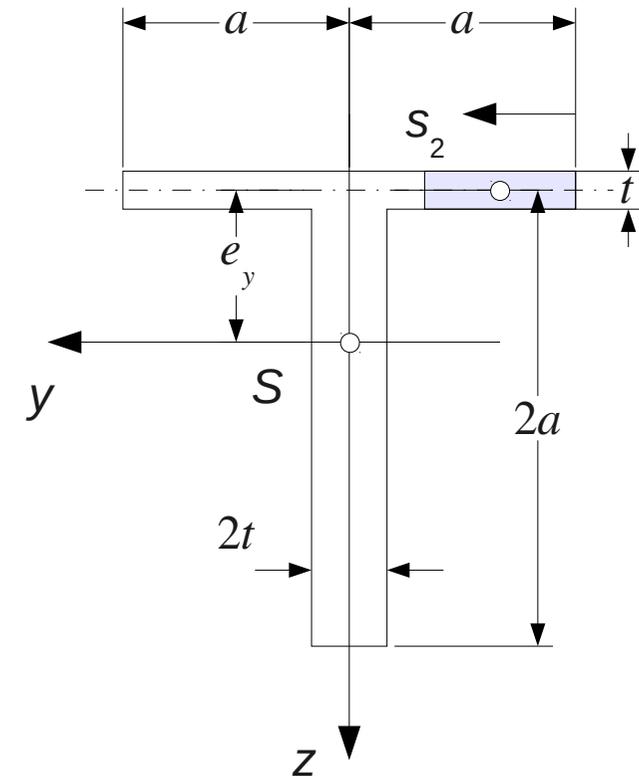
- Rechter Flansch:

$$S_y(s_2) = -e_y t s_2 = -\frac{2}{3} a t s_2$$

$$q_{sx2}(s_2) = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{a^3 t} \cdot \frac{2}{3} a t s_2 = \frac{Q_z}{4a} \frac{s_2}{a}$$

$$q_{sx2}(a) = \frac{Q_z}{4a}$$

$$\tau_{2max} = \frac{q_{sx2}(a)}{t} = \frac{Q_z}{4at}$$



1.1 Schubfluss

- Maximum im Steg:

$$z=0 \rightarrow s_{3max} = e_y = \frac{2}{3} a$$

$$q_{sx3max} = \frac{Q_z}{8a} \left(4 + \frac{4 \cdot 2}{3} - \frac{3 \cdot 4}{9} \right) = \frac{16}{24} \frac{Q_z}{a} = \frac{2}{3} \frac{Q_z}{a}$$

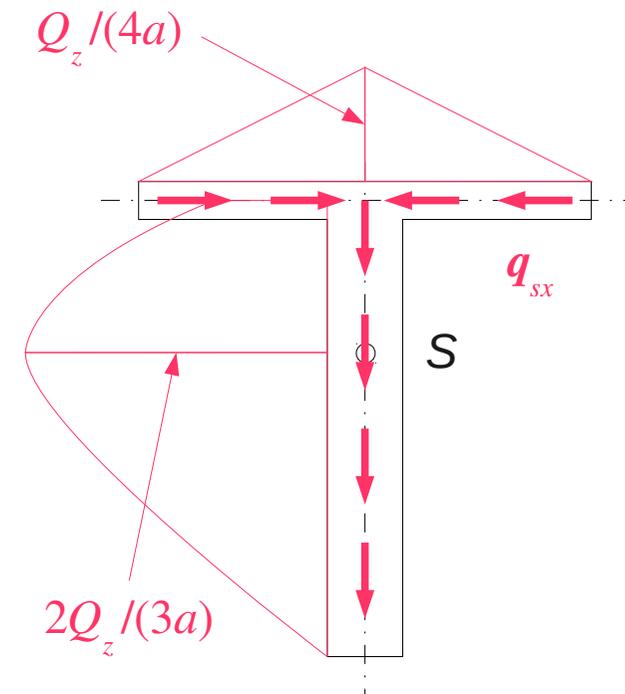
$$\tau_{3max} = \frac{2}{3} \frac{Q_z}{a \cdot 2t} = \frac{1}{3} \frac{Q_z}{at}$$

- Maximale Schubspannung:

$$\tau_{max} = \max(\tau_{1max}, \tau_{2max}, \tau_{3max}) = \tau_{3max} = \frac{1}{3} \frac{Q_z}{at}$$

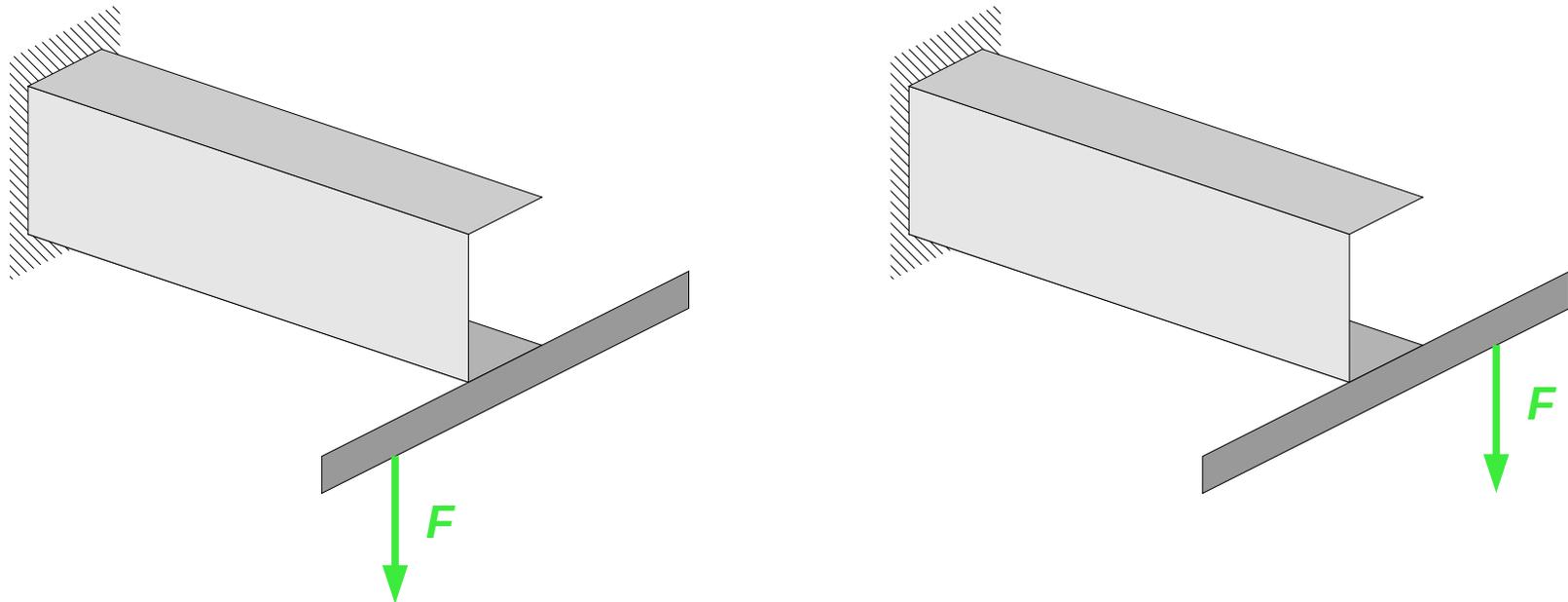
1.1 Schubfluss

- Verlauf des Schubflusses:
 - An der Verzweigung ist die Summe der zufließenden Schubflüsse gleich der Summe der abfließenden Schubflüsse.



1.2 Schubmittelpunkt

- In welchem Punkt des Querschnitts muss die äußere Kraft angreifen, damit sich der Querschnitt nicht verdreht?
- In welchem Punkt des Querschnitts greift die aus dem Schubfluss resultierende Querkraft an?

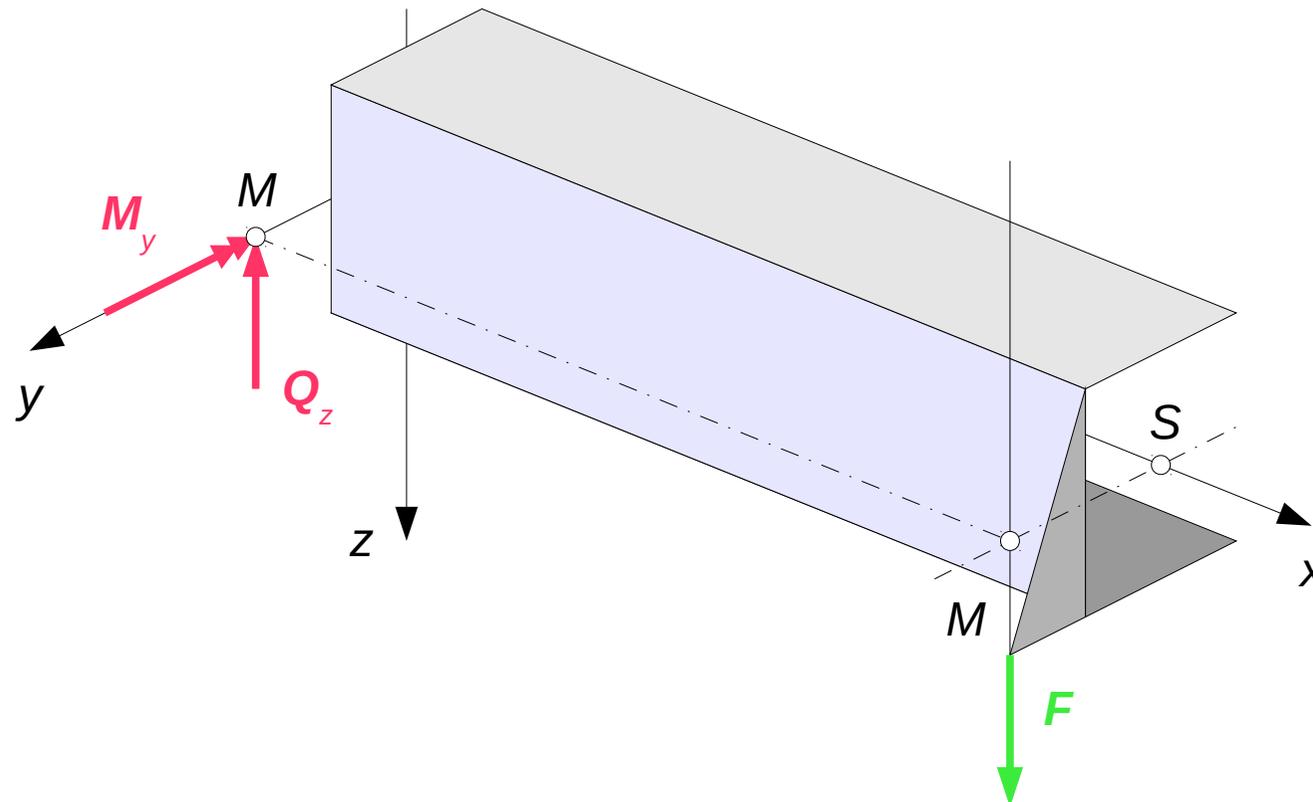


1.2 Schubmittelpunkt

- Definition:
 - Der Punkt, in dem die aus dem Schubfluss resultierende Querkraft angreift, wird als *Schubmittelpunkt M* bezeichnet.
 - Das resultierende Moment des Schubflusses bezüglich des Schubmittelpunkts ist null.
 - Aus dem Momentengleichgewicht um die x -Achse folgt, dass der Schubmittelpunkt auch der Punkt des Querschnitts ist, in dem eine äußere Kraft angreifen muss, damit sich der Balken nicht verdreht.

1.2 Schubmittelpunkt

- Beispiel: Kragbalken, rechter Teilbalken

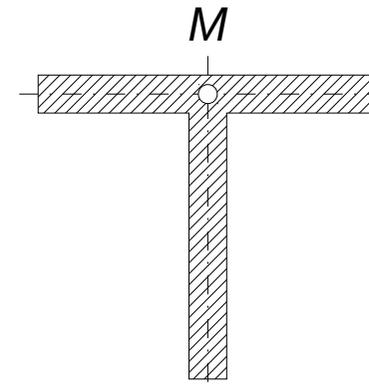
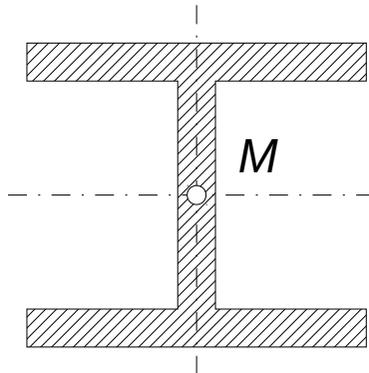
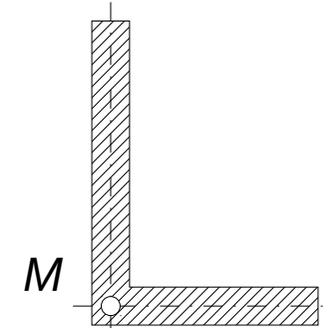
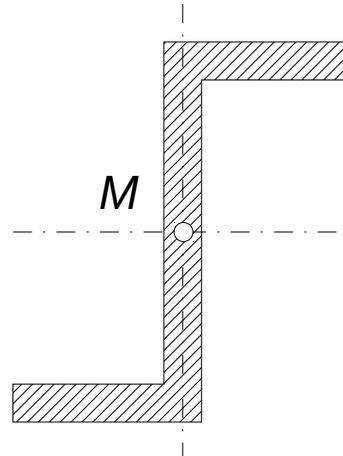
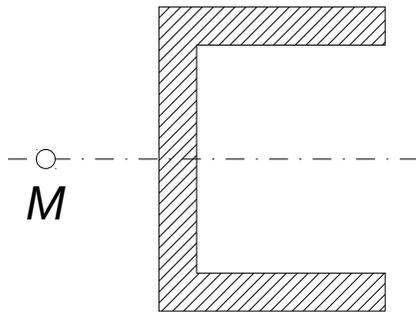


1.2 Schubmittelpunkt

- Spezialfälle:
 - Bei symmetrischen Querschnitten liegt der Schubmittelpunkt auf der Symmetrieachse.
 - Bei doppelt symmetrischen Querschnitten stimmt der Schubmittelpunkt mit dem Schwerpunkt überein.
 - Bei punktsymmetrischen Querschnitten stimmt der Schubmittelpunkt mit dem Schwerpunkt überein.
 - Bei Querschnitten, die aus geradlinigen Teilprofilen zusammengesetzt sind, deren Mittellinien sich in einem Punkt schneiden, liegt der Schubmittelpunkt im Schnittpunkt der Profilmittellinien.

1.2 Schubmittelpunkt

- Beispiele:

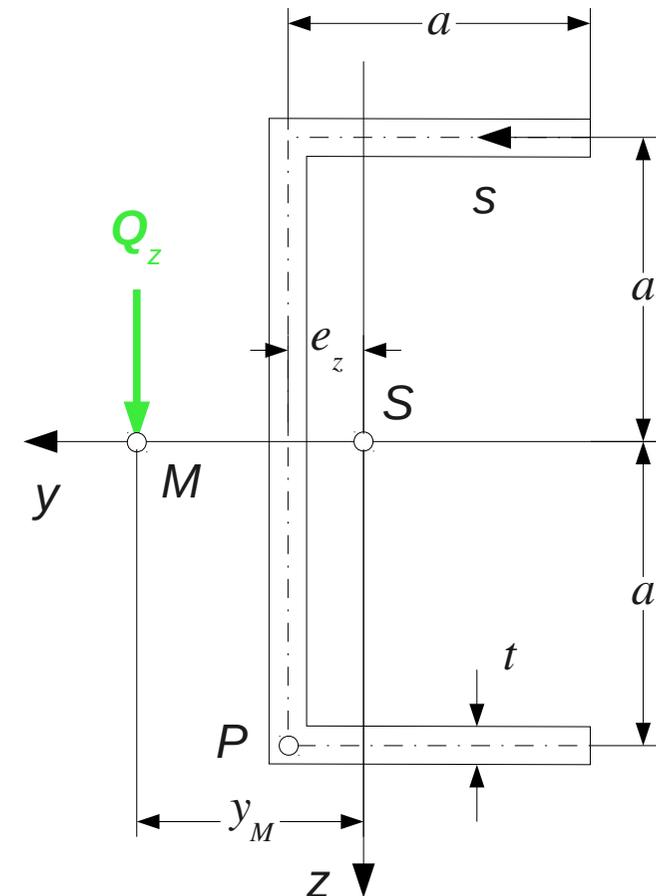


1.2 Schubmittelpunkt

- Berechnung:
 - Für jeden beliebig gewählten Bezugspunkt muss das Moment des Schubflusses mit dem Moment der resultierenden Querkraft übereinstimmen.
 - Die Koordinate z_M kann aus dem Vergleich der Momente für eine Querkraft in y -Richtung und die Koordinate y_M aus dem Vergleich der Momente für eine Querkraft in z -Richtung berechnet werden.

1.2 Schubmittelpunkt

- Beispiel: C-Profil
 - Das Profil ist symmetrisch bezüglich der y -Achse. Daher liegt der Schubmittelpunkt auf der y -Achse.
 - Das Moment der im Schubmittelpunkt angreifenden Querkraft Q_z bezüglich Punkt P muss mit dem Moment des zugehörigen Schubflusses übereinstimmen.



1.2 Schubmittelpunkt

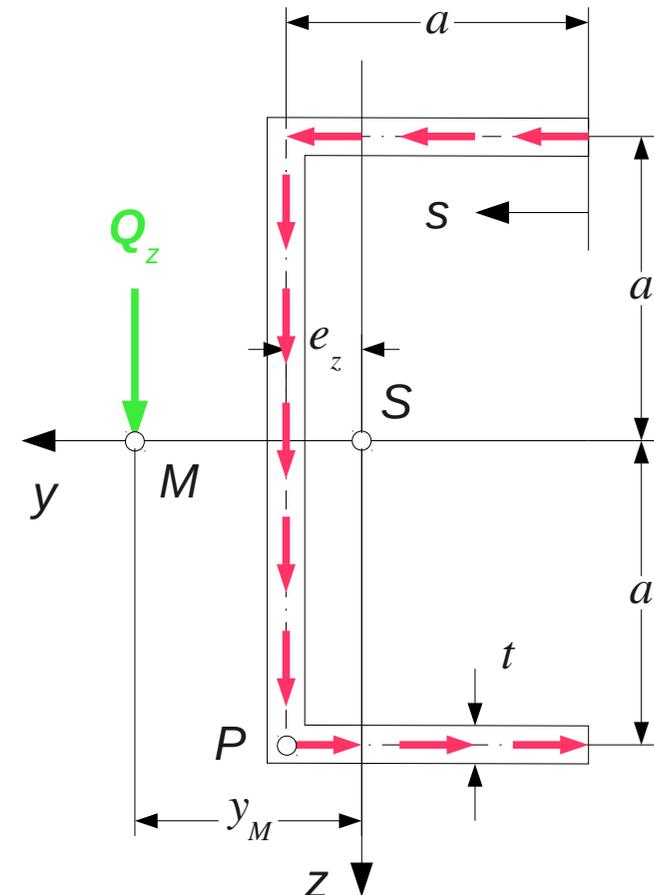
- Schwerpunktsabstand des Stegs:

$$A = 2 \cdot a t + 2 a t = 4 a t$$

$$e_z = \frac{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a t}{4 a t} = \frac{a}{4}$$

- Moment der Querkraft:

$$M^P(Q_z) = (y_M - e_z) Q_z$$



1.2 Schubmittelpunkt

- Nur der Schubfluss im oberen Flansch trägt zum Moment um Punkt P bei:

$$M^P(q_{sx}) = 2a \int_0^a q_{sx}(s_1) ds_1 = 2a \cdot \frac{3}{8} \frac{Q_z}{a^2} \int_0^a s_1 ds_1 = 2a \cdot \frac{3}{8} \frac{Q_z}{a^2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{3}{8} Q_z a$$

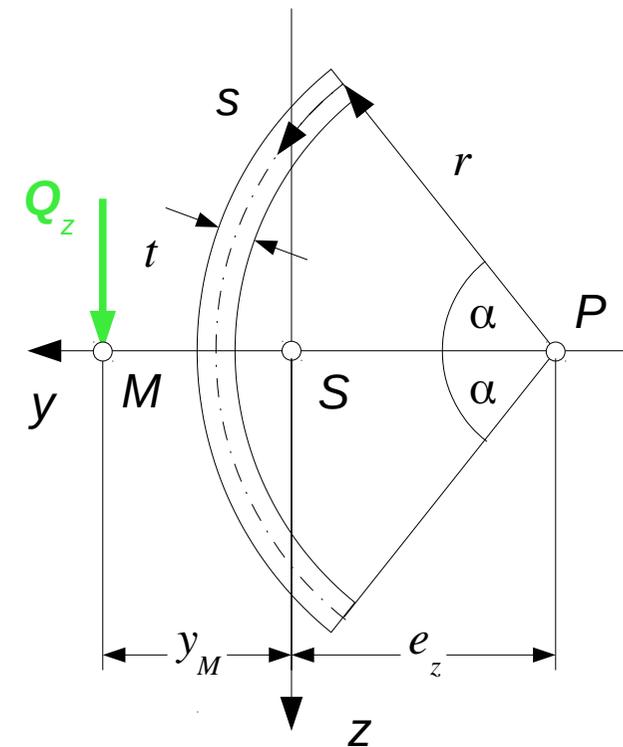
- Übereinstimmung der Momente:

$$M^P(Q_z) = M^P(q_{sx}) \quad : \quad (y_M - e_z) Q_z = \frac{3}{8} Q_z a$$

$$\rightarrow y_M = \frac{3}{8} a + e_z = \frac{3}{8} a + \frac{1}{4} a = \frac{5}{8} a$$

1.2 Schubmittelpunkt

- Beispiel: Kreisbogenprofil
 - Das Profil ist symmetrisch bezüglich der y -Achse. Daher liegt der Schubmittelpunkt auf der y -Achse.
 - Das Moment der im Schubmittelpunkt angreifenden Querkraft Q_z bezüglich Punkt P muss mit dem Moment des zugehörigen Schubflusses übereinstimmen



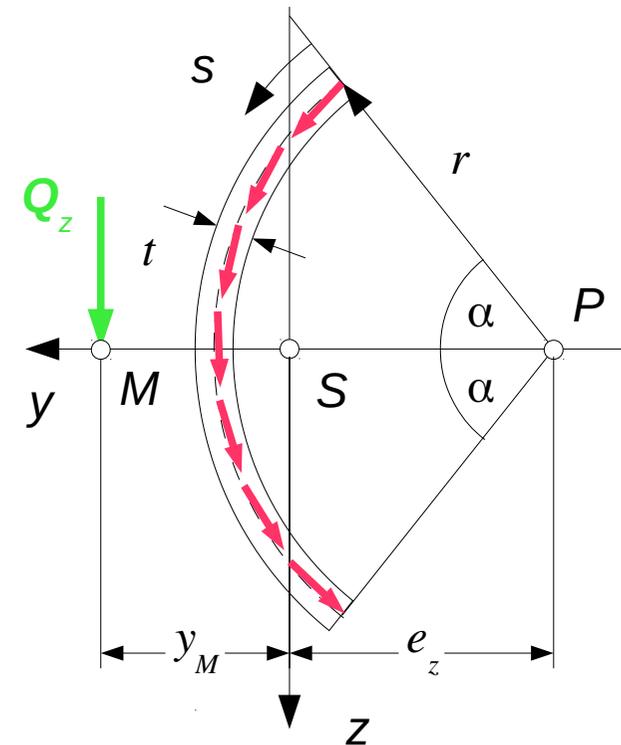
1.2 Schubmittelpunkt

- Schwerpunktsabstand (Formel für Linienschwerpunkt):

$$e_z = r \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$$

- Moment der Querkraft:

$$M^P(Q_z) = (y_M + e_z) Q_z$$



1.2 Schubmittelpunkt

- Moment des Schubflusses:

$$q_{sx}(s) = \frac{2 Q_z (\cos(\alpha - s/r) - \cos(\alpha))}{r (2\alpha - \sin(2\alpha))}$$

$$\begin{aligned} M^P(q_{sx}) &= \int_0^{2\alpha r} r q_{sx} ds = \frac{2 Q_z r}{2\alpha - \sin(2\alpha)} \int_0^{2\alpha} \left(\cos\left(\alpha - \frac{s}{r}\right) - \cos(\alpha) \right) d\left(\frac{s}{r}\right) \\ &= \frac{2 Q_z r}{2\alpha - \sin(2\alpha)} \left(\left[-\sin\left(\alpha - \frac{s}{r}\right) \right]_{s/r=0}^{s/r=2\alpha} - 2\alpha \cos(\alpha) \right) \\ &= \frac{2 Q_z r}{2\alpha - \sin(2\alpha)} (2 \sin(\alpha) - 2\alpha \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

1.2 Schubmittelpunkt

- Übereinstimmung der Momente:

$$M^P(Q_z) = M^P(q_{sx}) :$$

$$(y_M + e_z) Q_z = \frac{2 Q_z r}{2\alpha - \sin(2\alpha)} (2 \sin(\alpha) - 2\alpha \cos(\alpha))$$

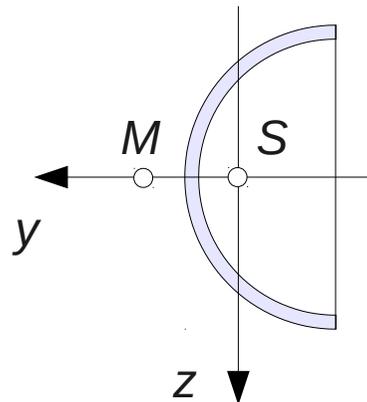
$$\rightarrow y_M = 2r \frac{\sin(\alpha) - \alpha \cos(\alpha)}{\alpha - \sin(\alpha) \cos(\alpha)} - e_z = r \left(2 \frac{\sin(\alpha) - \alpha \cos(\alpha)}{\alpha - \sin(\alpha) \cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)$$

1.2 Schubmittelpunkt

- Beispiel: $\alpha = \pi/2$

$$e_z = \frac{2}{\pi} r$$

$$y_M = r \left(2 \frac{1}{\pi/2} - \frac{1}{\pi/2} \right) = \frac{2}{\pi} r$$



- Beispiel: $\alpha = \pi$

$$e_z = 0$$

$$y_M = r \left(2 \frac{\pi}{\pi} \right) = 2r$$

