

執行戦略と取引コストに関する 研究の進展

すぎはらよしひこ
杉原慶彦

要 旨

近年、情報通信技術の進歩を背景に、電子取引を活用して大口取引執行時の価格への影響を低減させる動きが広がっているほか、売買の高速化や代替市場の発展を背景として、米欧市場を中心に取引の執行行動そのものに変化がみられる。杉原 [2011] では、市場参加者の実務的な視点からこうした動向を整理したが、本稿では、そのような執行行動に関する研究をサーベイする。

キーワード：取引コスト、最適執行戦略、マーケット・マイクロストラクチャー、アルゴリズム取引、高頻度取引、統計的裁定取引、最適注文回送

.....
本稿の作成に当たっては、宇野 淳教授（早稲田大学）、牧本直樹教授（筑波大学）ならびに日本銀行のスタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

杉原慶彦 日本銀行金融研究所企画役補佐
(現 金融機構局企画役補佐、E-mail: yoshihiko.sugihara@boj.or.jp)

1. はじめに

近年、情報通信技術の進歩を背景に、電子的手段を用いた金融取引（以下、電子取引）の活用が広がりを見せている。大口取引についてみると、注文を数多くの小口の注文に分割し、マーケット・インパクト¹を低減させる戦略が増加している。また、取引の電子化が進むにつれ、高速売買や代替市場²のプレゼンスが拡大するなど、人手を介する取引がほとんどであった時代と比較して、取引手段の選択肢そのものが増加してきている。これらの取引では、執行戦略の一部または全部をあらかじめ記述し機械的に実現する取引手法（以下、アルゴリズム取引）が用いられることが多い。本稿では、こうしたアルゴリズム取引を含め、各種の取引執行戦略の構造を説明することを試みた研究を中心にサーベイする。

これらの研究を市場参加者の取引執行形態に沿って分類すると、大口取引に関連するもの、高頻度取引に関連するもの、統計的裁定取引に関連するものに大別できる³。大口取引に関連する主な研究には、取引コストを最小にする執行戦略⁴（以下、最適執行戦略）を導出する理論的な研究のほか、マーケット・インパクトの関数形や指値板の形状などに関する実証分析がある。高頻度取引に関連する研究としては、在庫モデルや情報モデルといった市場の微視的構造（以下、マーケット・マイクロストラクチャー）を扱った理論研究のほかに、計量経済学的手法を用いた高頻度取引データの解析や人工知能を活用した定性情報の計測制御技術に関するものなどがある。統計的裁定取引に関連する研究では、大量の取引データを統計処理する手法などを扱っている。また、これらとは別に、隠れた注文⁵の規模を予測し、それをもとに複数の市場への最適な注文配分（smart order routing: SOR）⁶を導出する研究や、市場間の競合に関する研究など、複数の市場で取引可能な金融商品の執行戦略に関する研究がある。

本稿は、読者として取引コストの分析や執行戦略を考案する実務家のほか、当該分野の研究者を想定し、実務に応用可能であるか、実務の取組みを理論的に解釈する研究を幅広く取り上げる。大口取引における取引コスト・モデルなど研究の歴史が比較的長いテーマについては、その内容を体系立てて解説する。一方、急速に発達した一部の取引戦略では、実務の進歩が学術研究に大きく先行している。こうした中、近年では、やや後付け的ではあるが学術的な観点から実務の取組みを説明す

-
- 1 マーケット・インパクトとは、市場の流動性と比べ大規模な量の金融商品を一度に売買すると、需給バランスが崩れ価格が実勢以上に変化すること。
 - 2 代替市場とは、伝統的な取引所の立会取引以外の取引の場のこと。詳しくは、杉原 [2011] の4節を参照。
 - 3 高頻度取引とは、短期間の売買を高速で繰り返す取引手法のこと。統計的裁定取引とは、数理統計的な手法を用いて価格間の歪みをいち早く発見することで収益を得ようとする取引形態のこと。詳しくは、杉原 [2011] 3節(5)を参照。
 - 4 より正確には、取引に係るリスクを踏まえたくて取引コストを最小化する執行戦略を指す。
 - 5 隠れた注文とは、指値価格や注文量を開示しない注文形態のこと。詳しくは、杉原 [2011] 3節(7)を参照。
 - 6 SORとは、アルゴリズムに基づいて最良執行が可能な市場を探索し執行する仕組み。詳しくは、杉原 [2011] 4節(5)を参照。

る理論研究が次第に成果を生みつつある。このような研究は、実際の執行戦略を理解するのに役立つと考えられるため、なるべく広範に関連する研究を紹介する。

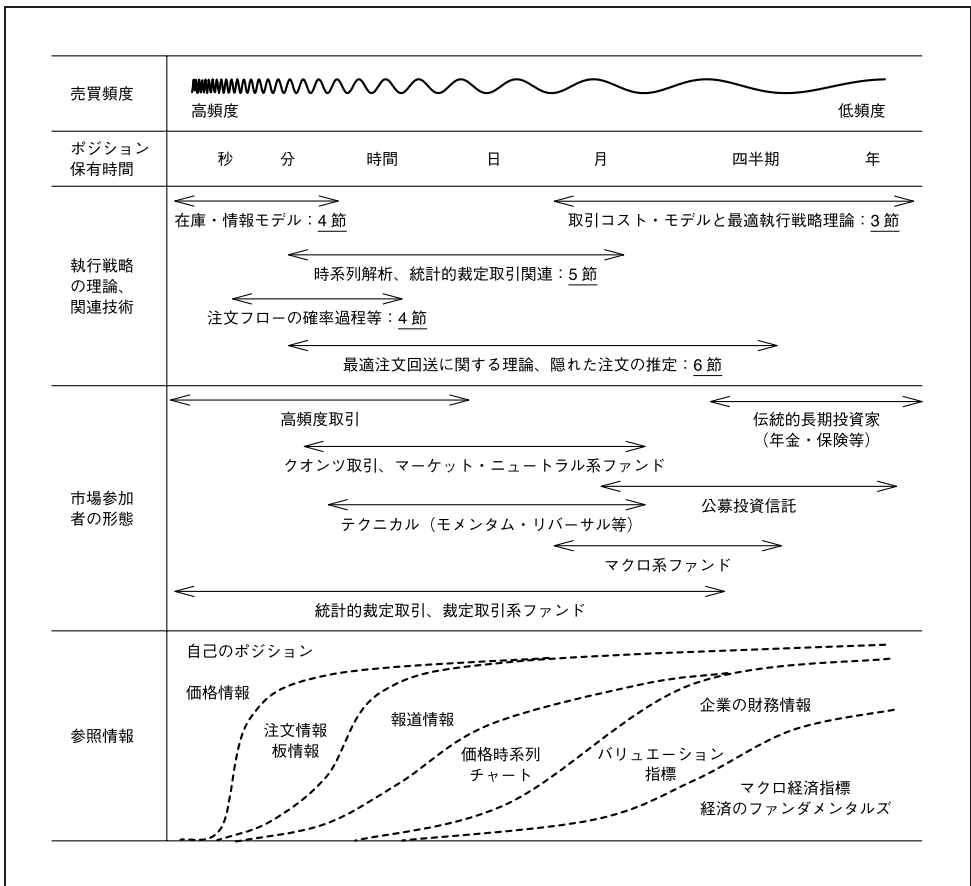
なお、本稿では、電子取引やアルゴリズム取引に関連する一部の専門用語について、詳細な説明を行わず用いている。これらの詳細を確認する必要がある場合等は、適宜、杉原 [2011] などを参照されたい。

2. 金融取引の執行戦略に関する研究の概観

(1) 取引頻度と執行戦略の形態

売買の頻度や形態に応じた市場参加者の特徴について、関連する執行戦略理論や取引で参照する情報などを整理すると図1のようになる。図の左方ほどポジション

図1 売買の頻度に応じた市場参加者の特徴と関連する執行戦略理論等



備考：下線部は本稿中の記載箇所を示す。

の保有時間が短く売買の頻度（回転）が高い市場参加者、逆に右方ほど保有時間が長く売買の頻度が低い参加者を示している。図からわかるように、市場の価格形成を分析するうえで売買頻度は軸の1つとなる。市場価格は、さまざまな売買頻度をもつ市場参加者の取引が重なり形成されている。市場参加者の売買頻度の違いは取引執行戦略の違いにつながり、その背後にある理論的枠組みや利用する情報の違いにもつながる。

売買頻度が低い市場参加者は、通常、企業の収益性や経済のファンダメンタルズをもとに投資戦略を構築し、ファンダメンタルズの変化を踏まえて売買することから、取引当たりの売買額は比較的大きい場合が多い。このため、取引コストをいかに小さく執行するかは1つの研究テーマとなっている。本稿では、取引コスト・モデルに基づく最適執行戦略として、そうした研究を整理する（3節）。一方、売買頻度が高い市場参加者は、市場の需給バランスや価格のトレンド・歪みなどを参照・予測して売買している。本稿では、こうした市場参加者のうち、アルゴリズム取引や代替市場を活用する高頻度取引と統計的裁定取引の執行戦略に着目し、関連する理論と実証研究についてまとめる（4、5節）。

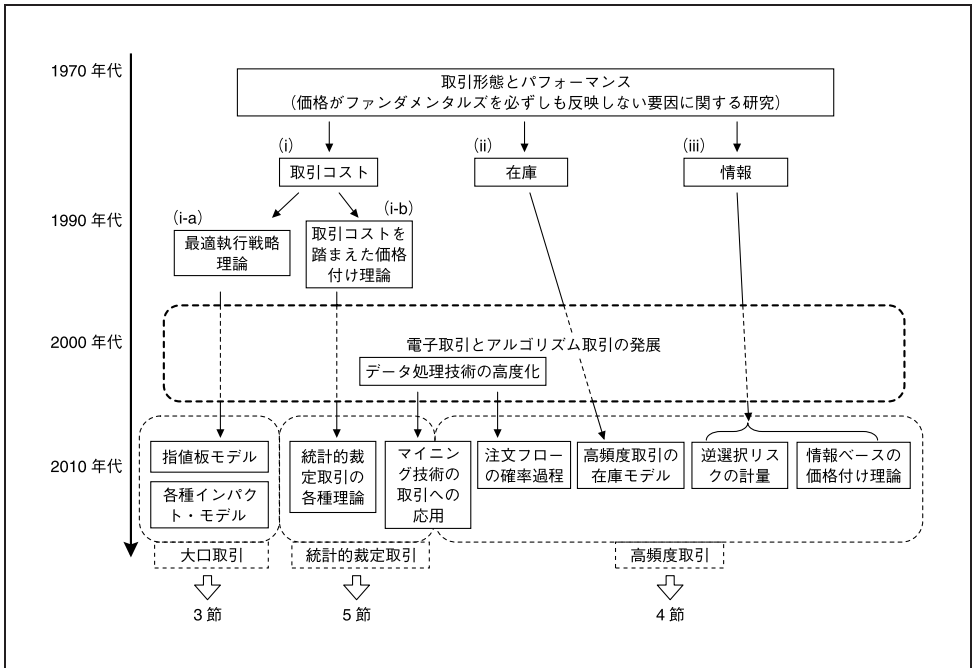
（2）研究の歴史

金融取引の執行戦略に関する研究の歴史は比較的長く、1970年代から現在までの流れは図2のように整理できる。まず、研究の萌芽期は1970年代に遡ることができる。当時は取引形態や市場構造が投資収益（以下、パフォーマンス）に影響を与えうるという着想のもと、価格がファンダメンタルズを必ずしも反映しない事象の発生原因を理論的に考察したものが多く、これらの研究で導入された理論は、(i)取引コスト・モデル、(ii)在庫モデル、(iii)情報モデルに大別することができる。その後、(i)の取引コスト・モデルは、1990年代に(i-a)最適執行戦略理論と(i-b)取引コストを踏まえた価格付け理論に分化した。2000年前後には情報通信技術の進歩を背景に電子取引の活用が急速に広がったことで、(i)～(iii)のモデルは、実務的ニーズを反映させ、さまざまなかたちで発展した。この間、データ処理技術の高度化を背景に、データ・マイニング技術を取引に応用する研究や、注文フローをティック・ベースで観察し確率過程で表現する理論など、新たな発想に基づく研究も出現している。

こうした研究は、どういった取引主体を想定しているかという切り口で大別できる。(i-a)は、大口取引を行う機関投資家を想定している。一方、(i-b)は、統計的裁定取引を想定した執行戦略に活用されている。(ii)および(iii)は高頻度取引の売買行動を説明する理論に応用されている。データ・マイニング技術は、高頻度取引と統計的裁定取引の双方への応用が想定できる。

以下では、本稿で取り扱うモデルを上記文脈に基づいて分類する。

図2 本稿で取り扱う主なモデルの歴史



(3) 大口取引の最適執行理論

大口取引の最適執行戦略に関する理論研究は、取引コスト・モデルの設定および執行戦略に基づいて次のように分類できる。

- 取引コスト・モデルの設定

マーケット・インパクト・モデル：一時的／恒久的インパクト・モデル、過渡的インパクト・モデル、指値板モデル、流動性供給関数モデル等
 ファンダメンタル価格過程：ブラウン運動、幾何ブラウン運動等

- 執行戦略

戦略の目的：取引コスト最小化、ベンチマークとの乖離最小化等
 戦略の動静：スタティック戦略、ダイナミック戦略
 想定する資産数：単一資産、2資産、多資産
 執行間隔：離散執行、連続執行
 売買の別：購入戦略、売却戦略

イ. 取引コスト・モデル

大口取引の最適執行戦略を導出する場合、取引コストを正確に評価することが重要である。マーケット・インパクト・モデルは、取引コストの要素のうちマーケット・インパクトを予測する目的で用いられ、通常、売買する金融商品の量や金額に依存する関数として与えられる。その与え方にはいくつかのタイプがある。これらについては3節で解説する。

他方、取引コストの要素のうち、タイミング・コストや機会コストを評価する際には、時間経過に伴う市場価格の変動をモデルに織り込む必要がある⁷。通常、大口取引の執行戦略を想定した理論研究では、想定する取引主体の執行以外の要因による価格変動を何らかのモデルで表現する。本稿では、当該価格を「ファンダメンタル価格」と呼ぶ。ファンダメンタル価格は、主にブラウン運動あるいは幾何ブラウン運動でモデル化される。

ロ. 想定する執行戦略

既存研究では、主として取引コストの削減、または何らかのベンチマークに関する執行主体と市場の乖離を最小化することを目的とした執行戦略の2つが考察対象となっている。本稿では、前者（取引コストの最小化を目的とした執行戦略）についてのみ取り上げる⁸。

既存研究は、戦略の動静に着目し、スタティック型とダイナミック型という分類もできる⁹。また、想定する資産数については、単一資産の執行戦略を想定した研究が多いが、多資産を同時に執行する戦略にも拡張されている。

執行間隔については、離散的な時刻にのみ執行できる状況（以下、離散執行）を想定した研究と、時間連続的な執行が可能な状況（以下、連続執行）を想定した研究がある¹⁰。売買の別については、取引コストが購入と売却で対称であると考え、どちらか一方を議論している研究がほとんどである¹¹。

こうした大口取引の執行戦略については、3節で取り上げる。

7 タイミング・コストとは、取引の執行中に市場や市場流動性が変化することに伴う事後的な費用である。機会コストは、市場の流動性が低い、あるいは価格が想定外の方向に遷移したなどの理由から取引が一部あるいはすべて執行できなかったことによる逸失利益を指す。詳しくは、杉原 [2011] 2節を参照。

8 ベンチマークの乖離を最小化することを目的とした執行戦略に関する研究としては、Konishi [2002]、McCulloch and Kazakov [2007]、Bouchard, Dang, and Lehalle [2009] などがある。

9 スタティック型は、過去の市場の動向に応じて執行額とタイミングをすべて決定し、それに従って取引を執行するタイプである。一方、ダイナミック型は、市場環境が変化した場合に戦略を調整しつつ、スタティック戦略を上回るパフォーマンスを目指すタイプである。詳しくは、杉原 [2011] 3節(4)ロ.を参照。

10 取引間隔に関する議論は、加藤 [2010] に詳しい。

11 通常、マーケット・インパクトは売却・購入いずれでも同等（正負の相違と、パラメータの設定の差異程度）であるとの前提がおかれている。ただし、一部の実証研究（Chiyachantana *et al.* [2004]、Hu [2009]、Nguyen *et al.* [2010]）では、マーケット・インパクトが売買非対称であるとの結果が得られている。また、Saar [2001] では、マーケット・インパクトの非対称性を踏まえたモデルが提案されている。

(4) 高頻度取引の執行戦略を巡る研究

高頻度取引とは、売買を高速かつ高頻度で行う取引戦略の一種である。高頻度取引に関連する研究は、マーケット・マイクロストラクチャーの分野で研究が行われてきたマーケット・メイカーの在庫モデルと、市場参加者の情報の非対称性と取引価格の関係に関する情報モデルがもととなっている。このほか、ティック・ベースの注文フローを確率過程で表現するモデルなどもある。

イ. 在庫モデル

高頻度取引は、売買した金融商品の保有時間が非常に短期間であるとはいえ、短期間のポジション保有に伴う価格変動リスク（在庫リスク）を抱える。在庫リスクを踏まえた執行戦略理論は、古くからマーケット・メイカーの執行戦略理論として研究が進んでいる。実際に、高頻度取引では、自身の在庫リスクを逐次評価することで、売買価格やポジション規模の制御に利用しているとみられる。これについては、4節(1)で解説する。

ロ. 情報モデル

高頻度取引が抱えるもう1つのリスクが逆選択リスクである。逆選択リスクとは、私的情報をもたない一般の市場参加者が、私的情報をもち情報優位な一部の市場参加者との取引において損失を被るリスクである。一部の高頻度取引では、注文に付随する情報量や売買注文量の偏りなどを分析し、価格の変化方向を予測することで、この逆選択リスクを低減しパフォーマンスを高めている。逆選択リスクを評価するための手法を説明する理論として、情報モデルを挙げることができる。当該理論と実証分析について4節(2)イ.およびロ.で解説する。

このほか、一部の高頻度取引では、ニュースや経済統計といった市場外から到来する情報が市場価格に影響を与えたとしたうえで、そこから収益を得ることを目指すものがある。これに関連する研究として、Brody, Hughston, and Macrina [2008]による情報ベースの価格付け理論（information-based asset pricing）がある。当該理論では、情報の流れをモデル化することで価格付けを行う。この点については、4節(2)ハ.で解説する。

(5) 統計的裁定取引の執行戦略を巡る研究

統計的裁定取引とは、市場価格が、過去の価格時系列、他市場での取引価格、他商品の価格などから推計される統計則に基づいて計算される合理的な価格に平均回帰すると仮定して、市場価格と合理的な価格との乖離に着目して売買を行う取引手法を指す。統計的裁定取引の一部では、取引コストを踏まえた価格付け理論が応用

されている。この点については、5節(1)および(2)で解説する。

また、一部の取引戦略では、経済統計など発生頻度が限られているイベントだけでなく、市場価格に影響しうる可能な限りの定性・定量情報を集め、市場価格のトレンドなどの推計に活用している。しかし、取引の対象となる情報は膨大にあることから、それらを個々に分析するのは効率的ではない。そこで、膨大な情報が価格や流動性等にどの程度の影響を与えうるのかについて、情報の鮮度やインパクトを機械的に計量する研究が行われている。こうした手法は、データ・マイニングと呼ばれている。データ・マイニングには、数値データのマイニングと、文字情報など定性データのマイニングの主に2つがある。前者は、過去の時系列に特徴的に現れる価格変動や流動性などのパターンを、時系列モデルあるいは人工知能などによって探査し、その予測に活用する一連の手法を指し、統計的裁定取引で活用されている。この点については、5節(3)で紹介する。後者は、金融市場ではとりわけ報道情報のマイニング（ニュース・マイニング）が利用され、高頻度取引の一部で利用されている。この点については、4節(4)で紹介する。

(6) 基本設定

具体的な執行戦略について解説する前に、取引の執行戦略、とりわけ取引コスト・ベース・モデルの基本設定と、本稿の数学表記について解説する。

イ. 離散執行

図3には、離散執行の問題を考えるうえでの基本設定を示した。想定する執行主体が、現時刻0から T までの間¹²、あらかじめ決められた K 回の執行タイミング($t_k = k\tau; k = 0, 1, \dots, K; \tau = T/K$)¹³において、総額 X を執行するとし、時刻 t_k における執行額を x_k ($0 \leq t_k \leq T; k = 0, \dots, K; \sum_{k=1}^K x_k = X$)、執行直後の残存執行額を X_k と表記する。 X 、 x_k 、 X_k の符号は、購入の場合は正、売却の場合は負とし、それらには、

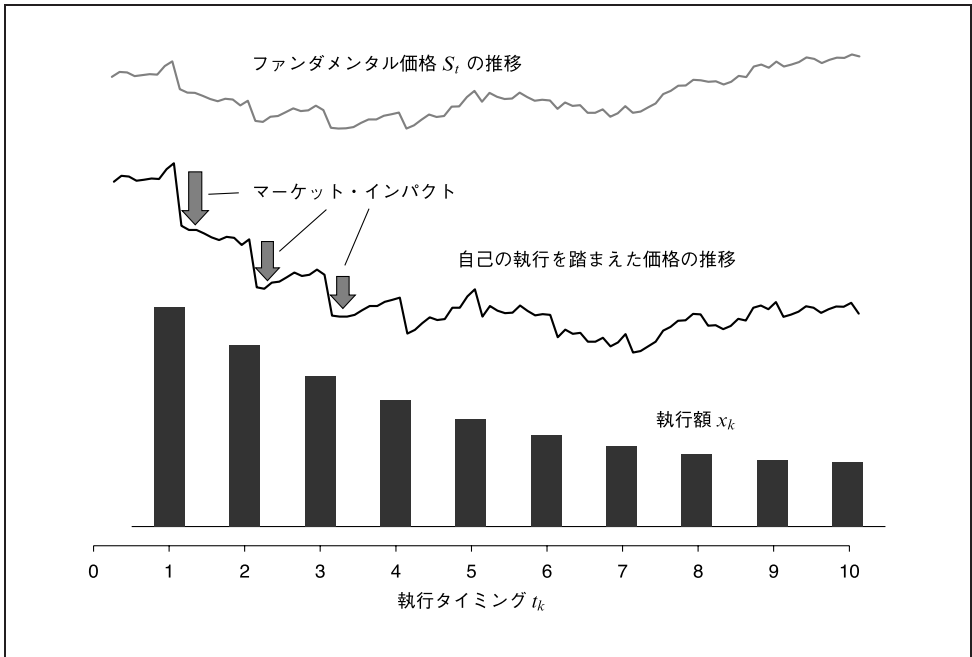
$$x_0 = X_K = 0, \quad X_0 = X, \quad X_k = X - \sum_{i=1}^k x_i \quad (k = 1, \dots, K), \quad (1)$$

の関係がある。執行タイミングについては必ずしも等間隔である必要はないが、数学的な扱いやすさから執行タイミングを等間隔としている先行研究が多い。本稿でも同様の設定とする。また、離散執行の場合は、執行額、残存執行額からなるベクトルを $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_K)$ 、 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_K)$ と太字で記し、執行戦略と呼

12 以下で紹介する先行研究によっては T が有限でないとしているものもある。

13 現時刻0では執行しないものとする。

図3 執行問題の基本設定（分散執行、概念図）



備考：図は、執行期間 $T = 10$ 、執行回数 $K = 10$ 、執行間隔 $\tau = 1$ の売却戦略を想定。

ぶ。執行戦略 \mathbf{x} のうち最適なものを、アスタリスクを付して $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_K^*)$ 、 $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_K^*)$ と表記する。

ロ. 連続執行

執行戦略は、時刻 t ($0 \leq t \leq T$) における執行レート x_t 、あるいは残存執行額 X_t として与えられ、

$$X_t = X - \int_0^t x_s ds = \int_t^T x_s ds, \tag{2}$$

の関係がある¹⁴。連続執行の場合も、分散執行と同様に、最適執行レートあるいは最適残存執行額にアスタリスクを付して表示する¹⁵。

ハ. そのほかの数学表記

そのほかの数学表記として、時刻 t における売買対象商品のファンダメンタル価格を S_t 、最良売り気配、買い気配の価格水準をそれぞれ A_t 、 B_t とし、取引主体の

14 分散執行における x_k （執行額）と、連続執行における x_t （執行レート = 単位時間当たりの執行額）の物理的次元は異なる。しかし本稿では、わかりやすさを重視し、両者とも x という同じ表記を用いる。

15 連続執行のもとでの最適執行戦略の議論では、数学的扱いやすさから、最適執行戦略が執行レート x_t^* ではなく残存執行額 X_t^* によって表現されることが多い。

平均約定価格（執行価格）を \tilde{S}_t と表す。また、時刻 t と $t + dt$ の間の市場の出来高を $v_t dt$ (> 0) と表し¹⁶、時刻 0 から t までの累積出来高を V_t ($V_t = \int_0^t v_s ds$) と表す。さらに、ファンダメンタル価格のボラティリティを σ (> 0)、想定する取引執行主体（トレーダー）のリスク回避度を γ と表記する。また、時刻 t における確率変数 Z の条件付き期待値を $\mathbb{E}_t[Z]$ 、同分散を $\mathbb{V}_t[Z]$ と表記する。

最適執行戦略の問題設定では、(1) 式あるいは (2) 式が制約条件の 1 つとなる。大口取引の執行戦略では、通常、すべての執行タイミングで売買が同一方向であることも条件となるが¹⁷、以下の議論ではそれらを条件として明示的に記載しない。また、最適執行戦略の理論では、通常、1 日未満から数日といった比較的短時間の価格変化を扱うことから、金利については無視できると仮定する。

以下では、5、6 節を除き、主として単一資産の売却戦略を例にとり解説していく。なお、最適化計算手法の詳細については踏み込まない。

3. 大口取引の最適執行戦略

本節では取引コスト・モデルを紹介し、モデルの設定のもとで大口取引の最適執行戦略についてみていく。取引コスト・モデルとして、本稿では、(1) 一時的／恒久的インパクト・モデル（temporary and permanent impact model）、(2) 過渡的インパクト・モデル（transient impact model）、(3) 指値板モデル（limit order book model）、(4) 流動性供給関数モデル（liquidity supply curve model）の 4 つを取り上げる¹⁸。ただし、(4) の流動性供給関数モデルは、(1) の特殊ケースに相当すると考えられることから、(1) に含めて紹介する¹⁹。

取引コストを最小にする最適執行戦略には、スタティック戦略であるインプリメンテーション・ショートフォール（implementation shortfall: IS）戦略とダイナミック戦略であるアダプティブ・ショートフォール（adaptive shortfall: AS）戦略があるが、そうした戦略の静動による相違もみていく²⁰。最後に、執行戦略のモデルを構築するうえで重要な価格操作の理論について触れる。

16 v_t は瞬間出来高レートを表す。 x_t と同次元。 $v_t = \dot{V}_t$ 。

17 本節で取り上げる売却戦略では、 $x_k \leq 0$ ($k = 1, \dots, K$) が条件となる。

18 このほか、Jondeau, Perilla, and Rockinger [2008] によるマーケット・メイカー型モデルも提案されているが本稿では取り上げない。

19 これらのモデルは、実際に取引に用いられるアルゴリズムの背後で動くモデルとは異なるが、取引執行の事前分析で活用されているモデルとは類似しているとみられる。ここで、執行の事前分析とは、どういったアルゴリズムを用い、どの市場で執行するのが適切であるのかについて、事前に過去の市場データなどを用いて分析する枠組みのこと。詳しくは、杉原 [2011] の 5 節(1)を参照。

20 大口取引の最適執行戦略に関する理論研究のサーベイとしては、小田・久田・山井 [2000]、Borkovec and Heidle [2010]、Gökay, Roch, and Soner [2010]、加藤 [2010] がある。本節では、それらも参考にしつつ解説する。

(1) 一時的／恒久的インパクト・モデル

一時的／恒久的インパクト・モデルは、マーケット・インパクトを、ファンダメンタル価格と執行価格の乖離である一時的インパクト (temporary impact) と、一時的インパクトのうち執行の終了時刻まで残存する恒久的インパクト (permanent impact) の2つから構成されると考えるモデルである^{21, 22}。

図4には、一時的／恒久的インパクト・モデルの基本概念を示した。 k 回目の執行時について、執行直前のファンダメンタル価格 $S_{t_{k-1}}$ と執行価格 \tilde{S}_{t_k} は取引コスト等が存在するため異なる。売却方向の執行を想定すると、執行後、ファンダメンタル価格は、執行前のファンダメンタル価格 $S_{t_{k-1}}$ より低く、執行価格 \tilde{S}_{t_k} より高い水準となる。執行直前のファンダメンタル価格と執行価格の差を一時的インパクト、執行前後のファンダメンタル価格の差を恒久的インパクトと定義する。恒久的インパクトは、ファンダメンタル価格を変化させることから、後のすべての約定価格に影響する。

イ. 基本的枠組み

Almgren and Chriss [2000] は、上記の枠組みにおける一時的／恒久的インパクトを適当な関数として外生的に与えることで、大口取引の執行戦略を導出した。 x_k の売却執行に対する恒久的インパクトを $g(x_k/\tau)$ 、一時的インパクトを $h(x_k/\tau)$ と表現する^{23, 24}。このとき、想定する取引主体の売買が行われない場合にはファンダメ

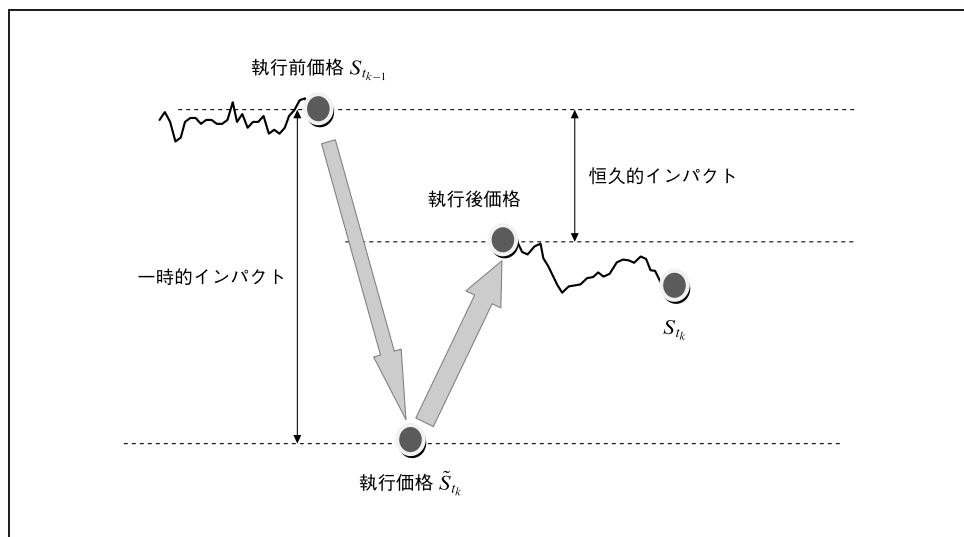
21 杉原 [2011] の2節(1)でも解説したように、大口取引のマーケット・インパクトの経済学的背景については、古くからマーケット・マイクロストラクチャーの分野で研究が行われてきている。それによると、マーケット・インパクトは、流動性を需要することに伴う一時的な要素と、取引が市場に割安・割高のシグナルを与えることに伴う恒久的な要素の主に2つによって構成されると考えられている。前者は、古くは Demsetz [1968]、Stoll [1978] などによって理論化された要素である。同要素は、金融商品のファンダメンタルな価値に依存するものではないため、時間の経過に伴い復元する効果をもつと考えられている。一方、後者は、Scholes [1972]、Kraus and Stoll [1972] などによって提唱された要素である。同要素は、ファンダメンタルな価値を変化させるため長時間持続すると考えられている。当該要素は、流動性需給の観点から、需要関数の非弾力性 (inelastic demand curves) によって説明されることもある。こうした考えに基づき、Holthausen, Leftwich, and Mayers [1987] は、マーケット・インパクトが、金融商品の需給バランスが一時的に変化することに伴う「一時的インパクト」と、売買のシグナリング効果によって永続する「恒久的インパクト」の2つによって構成されると考えた。一時的／恒久的インパクト・モデルの枠組みは、こうした研究が背景となっている。

22 取引コストは、流動性を供給することの対価 (プレミアム) と捉えることができる。Çetin, Jarrow, and Protter [2004] は、流動性の供給関数によって取引コストを表現するモデル (流動性供給関数モデル) を提案した。これは、一時的／恒久的インパクト・モデルにおいて、恒久的インパクトが存在せず、一時的インパクトのみから構成される場合と類似する。Roch [2011] は、Çetin, Jarrow, and Protter [2004] を拡張することで、流動性供給関数の形状が確率的に時間変化するモデルを提案し、バリエーション・スワップのヘッジ戦略に応用している。

23 $g(x)$ および $h(x)$ は、購入 ($x > 0$) の場合は正 ($g(x) > 0, h(x) > 0$)、売却 ($x < 0$) の場合は負 ($g(x) < 0, h(x) < 0$) となる関数。 g および h を x_k そのものの関数ではなく x_k/τ の関数と設定するのは、後述の連続時間化において、 g, h を瞬間執行額 (執行レート) の関数と同一表記するため。

24 当該モデルが合理的であるためには、恒久的インパクト g が取引量の線形関数である必要がある。本節(4)で解説する。

図4 一時的／恒久的インパクト・モデルの概念図



備考：売却の執行を想定。

ンタル価格がブラウン運動するが、取引主体による売り注文 x_k の執行により、ファンダメンタル価格が恒久的インパクトを受け、執行後の価格 S_{t_k} は、

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} + \tau g(x_k/\tau) + \sigma\sqrt{\tau}Z_k \quad (k = 1, \dots, K), \quad Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (3)$$

と推移する²⁵。また、一時的インパクトのため、 k 回目の執行での売却価格は、前回の執行直後の価格 $S_{t_{k-1}}$ から乖離し、

$$\tilde{S}_{t_k} = S_{t_{k-1}} + h(x_k/\tau), \quad (4)$$

となると設定する。以上のもとで、売却に係る IS は、取引執行直前の時刻 0 において、次のように計算できる²⁶。

$$\text{IS}(x) = S_0|X| - \sum_{k=1}^K \tilde{S}_{t_k}|x_k| = \sum_{k=1}^K [X_k \tau g(x_k/\tau) + x_k h(x_k/\tau) - \sigma\sqrt{\tau}X_k Z_k]. \quad (5)$$

上記の枠組みを、取引間隔をゼロに漸近 ($\tau \rightarrow 0$) させることで連続時間化すると、IS は、時刻 t における執行レート x_t と残存執行額 X_t 、標準ブラウン運動 W_t を用いて次のようにかける。

²⁵ $\mathcal{N}(a, b)$ は平均 a 、分散 b の正規分布を表す。

²⁶ IS とは、投資家が投資の意思決定をした時点の市場価格から計算される想定上の損益と執行後に判明する実際の損益の乖離のこと。ここでは、現時刻 0 の価格 S_0 で意思決定したとしている。IS について詳しくは、杉原 [2011] の 2 節 (2) を参照。

$$IS(x) = \int_0^T [X_t g(x_t) + x_t h(x_t)] dt - \sigma \int_0^T X_t dW_t. \quad (6)$$

(5) 式、あるいはその連続時間版である (6) 式を最小化することで最適執行戦略を導出することができる²⁷。先行研究では、当該モデル設定をもとに、ロ. スタティック戦略である IS 戦略と、ハ. ダイナミック戦略である AS 戦略が導出される。以下では、それらを分けて解説していく。

ロ. スタティック戦略 (IS 戦略)

Grinold and Kahn [2000] あるいは Almgren and Chriss [2000] は、 g および h がそれぞれ x_k に比例する関数である最も単純なケースについて、平均分散アプローチ

$$x^* = \arg \min_x [E[IS(x)] + \gamma V[IS(x)]], \quad (7)$$

によって最適執行戦略を導出している。(7) 式を解くと、最適な残存執行額は、

$$X_k^* = X \frac{\sinh[\kappa(T - t_k)]}{\sinh(\kappa T)} \quad (k = 1, \dots, K), \quad (8)$$

と解析的に与えられる²⁸。ただし、 κ は、パラメータのみから構成され、リスク回避度 γ の平方根とボラティリティ σ に近似的に比例する固定値である²⁹。また、Almgren [2003] では、恒久的インパクト g が上記と同様に執行額に比例する関数で、かつ一時的インパクトがべき関数 $h(x) \propto x^\alpha$ ($\alpha \neq 1$) となる場合には、連続時間極限において、

$$X_t^* = X \left[1 + \frac{(1 - \alpha)t}{(1 + \alpha)T_*} \right]^{-(1+\alpha)/(1-\alpha)}, \quad (9)$$

と、最適な残存執行額の解析解が導出できる。ただし、 T_* はパラメータと総執行額から決まる特定の時刻である³⁰。

27 これに類似した枠組みとして、Kissell and Glantz [2003]、Kissell, Glantz, and Malamut [2004] によって提案された枠組みもある。当該枠組みでは、最初からマーケット・インパクトを一時的／恒久的と分けて与えるのではなく、売買の偏りをもとにマーケット・インパクト全体をモデル化し、それを一時的／恒久的インパクトに配分するかたちで表現している。また、Kissell and Malamut [2006] は、このモデルに基づいて、近似的に最適執行戦略を導出している。

28 各取引タイミングにおける最適執行額 x_k^* は、残存執行額を微分することで得られる。この場合は、

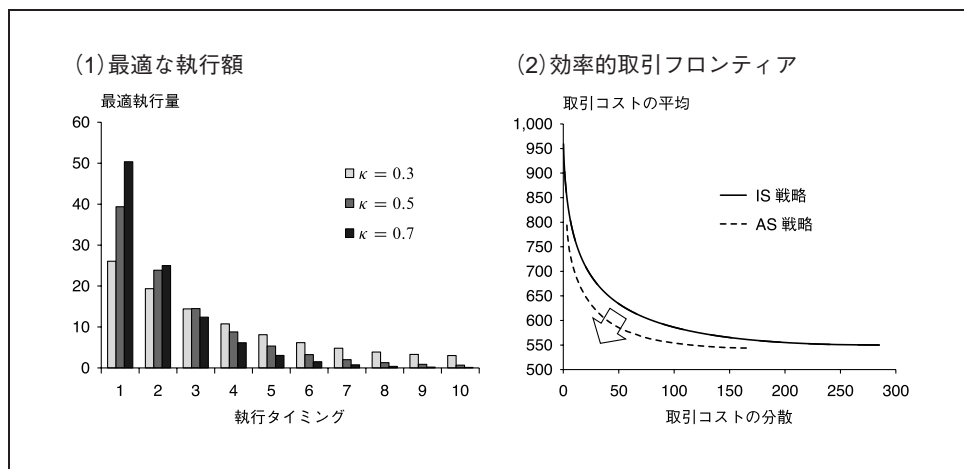
$$x_k^* = \frac{2X \sinh(\kappa\tau/2) \cosh[\kappa\{T - (k - 1/2)\tau\}]}{\sinh(\kappa T)} \quad (k = 1, \dots, K),$$

となる。

29 一時的インパクトの比例係数を θ とすると、 $\kappa = \sqrt{\gamma/\theta}\sigma + o(\tau)$ となる。

30 ただし、 $T_* < T(\alpha - 1)/(\alpha + 1)$ の場合、最適な残存執行額 X_t^* は時刻 T より前にゼロに達するため、それ以降は、 $X_t^* = 0$ と設定する。

図5 一時的／恒久的インパクト・モデルにおけるIS／AS戦略



備考： $T = 10$ 、 $K = 10$ 、 σ および一時的／恒久的インパクトの比例係数が 0.1 のケース。効率的取引フロンティアとは、注文が発生した時点で想定されるリスクを所与として、取引コストが最小となる執行戦略全体をプロットしたもの。AS 戦略については本節(1)ハ.を参照。

資料：Almgren and Chriss [2000] による結果をもとに作成

(8) 式、(9) 式は、特定の設定のもとで IS 戦略の最適な執行パスを解析的に示した結果であるが、興味深い点を含んでいる。例えば、 γ が正であるリスク回避的な取引主体 ($\gamma > 0$) を想定した場合、図 5 (1) に示すように、最適執行額 x_t^* は時間とともに減衰し³¹、その強弱はリスク回避度 γ 等に依存する。図 5 (1) では、 $\kappa = 0.3, 0.5, 0.7$ それぞれの場合の最適執行額を示している。 κ が大きいほど、すなわち、リスク回避度 γ あるいはファンダメンタル価格のボラティリティ σ が大きいほど、価格変動リスク（タイミング・コスト）を回避する傾向が強まるため、早い時刻での執行額が多くなり、執行額の減衰もその分だけ強くなる。一方、リスク中立的な取引主体 ($\gamma = 0$ 、 $\kappa \simeq 0$) を想定した場合には、均等執行 (TWAP [time weighted average price] 戦略) が最適となる。また、この場合、執行タイミングを均等な時刻間隔ではなく、出来高の累積値が一定量を超えるたびに測った時刻間隔（流動性時刻）に置き換えると、この場合の最適戦略は VWAP (volume-weighted average price) 戦略となることが知られている³²。

このような執行スケジュールが最適となる背景には、次の(i)～(iii)の3つの効果が影響している。すなわち、(i)時間をかけて執行することで一時的インパクトを分散させる効果、(ii)早めに執行することでタイミング・コストを低減させる効果、

31 (8) 式、(9) 式を時間で 1 階微分し -1 を乗じた値は x_t^* となる。それをさらに微分すると負値となることから、 x_t^* は一般に単調減少である。ただし、多資産に拡張した場合には必ずしも単調にならないことが知られている。

32 VWAP 戦略とは、自己の売買高加重平均価格を市場の出来高加重平均価格に合わせるかたちで執行する戦略のこと。詳しくは、Almgren and Lorenz [2007] を参照。

(iii)遅めに執行する額を増やすことで前段の執行で発生した恒久的インパクトによる後続の執行コストの上昇を抑える効果である。特に執行回数が多い場合には、(i)と(ii)の効果が大きくなる。Almgren and Chriss [2000]では、これらの効果について、残存執行量の半減期が $1/\kappa$ となることを用いて分析している。具体的には、 $\tau \rightarrow 0$ の連続極限において、半減期 $1/\kappa$ は一時的インパクトの比例係数を $\gamma\sigma^2$ で除した量の平方根に漸近する。すなわち一時的インパクトが大きいくほど、半減期が長期化し最適執行戦略における X_t の水準（以下、最適な執行速度）が低下する一方、リスク回避度が上昇する、あるいはファンダメンタル価格のボラティリティが高まるほど、半減期が短期化し最適な執行速度が上昇する。

これに関連した研究として、Konishi and Makimoto [2001]は、Almgren and Chriss [2000]の枠組みを拡張し、取引期間が無限の極限($T \rightarrow \infty$)における最適執行戦略を、平均標準偏差最小化問題

$$\min_{\substack{x_t \\ 0 \leq t < \infty}} \lim_{T \rightarrow \infty} \{ \mathbb{E}[\text{IS}] + \tilde{\gamma} \sqrt{\mathbb{V}[\text{IS}]}, \quad (10)$$

を解くことで導出している³³。一時的／恒久的インパクトがともに執行額に比例する場合、最適残存執行額は時間の経過に関する指数関数に従って減少する。すなわち、Konishi and Makimoto [2001]では、取引期間が有限であるとの条件を除いたことから、取引期間が有限の(8)式、(9)式対比で緩やかに執行するのが最適となる^{34,35}。

ハ. ダイナミック戦略 (AS 戦略)

取引期間が無限(無限満期)のダイナミック戦略(AS戦略)は、適当な条件のもとでは数学的に解くことができる。例えば、リスク回避的な投資家を想定し、ダイナミックな最適執行戦略を導出している研究としては Schied and Schöneborn [2009]がある。彼らは、一時的／恒久的インパクトがともに執行額に比例し、かつ取引期間が無限である場合の最適執行戦略を効用最大化問題を解くことで導出している。特に効用関数が指数型であり、そのリスク回避度 γ が保有資産規模によらず一定であるときには、最適執行戦略は時刻 t の指数減少関数

33 Konishi and Makimoto [2001]では、最適化問題のペナルティ項(γ が掛けられた項)を、ファンダメンタル価格で評価した総執行額の標準偏差としているが、(3)式の価格過程を前提とすると、同ペナルティ項とISの標準偏差は同値であることから、(10)式ではISで表記している。

34 このほか、Konishi and Makimoto [2001]では、一度に執行できる量に制限がある場合の最適執行戦略も導出している。

35 このほかの研究として、Gatheral and Schied [2011]では、一時的／恒久的インパクト・モデルを、幾何ブラウン運動の枠組みで再評価している。具体的には、ファンダメンタル価格が $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$ と表され、一時的／恒久的インパクトがともに執行額の線形関数となる場合を想定している。ただし、評価関数のペナルティ項については、取引コストの分散や標準偏差ではなく、残存リスク量に相当する $\gamma \int_0^T X_t S_t dt$ と与えている。結果として、執行にかかる時間 T が適当な水準であれば、ブラウン運動、幾何ブラウン運動それぞれの枠組みで導出した最適な執行速度の差異は、実務上無視できるほど小さいことが示されている。このほか、Schmidt [2010]は、Almgren and Chriss [2000]のモデルを一部変更し、為替市場に応用している。

$$X_t^* = X \exp\left(-t\sqrt{\frac{\sigma^2\gamma}{2\theta}}\right), \quad (11)$$

となる。ただし、 θ は一時的インパクトの比例係数である。これは、取引期間が無
限であるとした Konishi and Makimoto [2001] の結果と同じ指数関数となっている。

有限満期のダイナミック戦略は、数学的に解くことが困難である。初期の研究と
しては、Bertsimas and Lo [1998] が知られているが³⁶、リスク中立的な投資家が想
定されており、価格変動に伴うタイミング・コストは考慮されていない。

Almgren and Lorenz [2006, 2007]、Lorenz and Almgren [2011] では、Almgren and
Chriss [2000] と同様の取引コスト・モデルを用いて有限満期のダイナミックな最適執
行戦略を分析している。Almgren and Lorenz [2007] は、Almgren and Chriss [2000]
の平均分散問題の枠組みを、市場の状況に合わせて更新することで、ダイナミック
なコスト型戦略を導出する枠組みを示している。また、Lorenz and Almgren [2011]
では、取引量と残存執行額に係るコストの期待値を制御変数とし、コストの分散を
最小にする執行戦略を数値的に導出している。これらの研究で導出された最適執行
戦略は閉じた解析解として求められてはいないが、数値シミュレーションによりそ
の特性が分析されている。主な分析結果として、AS 戦略では、最新の市場情報に応
じて執行戦略をダイナミックに更新するため、IS 戦略と比べて、執行にかかるリス
ク量が同じであっても取引コストをより低く抑えられる。これを効率的取引フロン
ティアの枠組みで考えると、ダイナミック戦略が想定する効率的取引フロンティア
は、スタティック戦略対比で左下方向へシフトする (図 5 (2))。

AS 戦略に関するその他の研究としては、He and Mamaysky [2005]、Forsyth *et al.*
[2011]、Kharroubi and Pham [2009]、Krokmal and Uryasev [2007]、Kato [2009] な
ど数多くある。それらの多くは、連続執行のもとでベルマン方程式によって最適執
行問題を定式化し、シミュレーションによってその解である最適執行戦略の性質を
調べている。例えば、He and Mamaysky [2005] は、ファンダメンタル価格過程が幾
何ブラウン運動に従い、一時的・恒久的インパクトの両者が執行額の指数関数とな
る設定³⁷のもとで、期待効用を最大化する執行戦略の特徴を数値的に分析している。
また、Forsyth *et al.* [2011] は、取引コストの平均分散最小化問題として最適執行問
題を定式化している。Krokmal and Uryasev [2007] では執行タイミングと執行額の
同時最適化を試みている。

36 Bertsimas and Lo [1998] は、恒久的インパクトが執行額に比例し、かつ一時的インパクトが存在しない場
合 ($g(x) \propto x$, $h(x) = 0$) において、IS を各執行タイミングごとに最小化するダイナミックな最適執行戦
略を導出している。こうした設定のもとで、最適執行戦略は、各執行タイミングの残存執行額に比例する
ことが示されている。分析によると、当該最適執行戦略に基づいた執行は、単純な均等分割の執行戦略対
比で取引コストを 25~40% 低減させるとの結果が得られている。

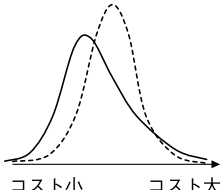
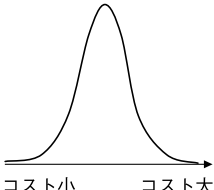
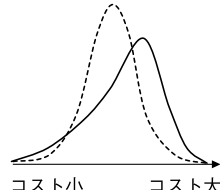
37 He and Mamaysky [2005] では、売却戦略を考え、執行後判明する約定価格から計算した売却益を、執行
額に応じて指数的に減少する収益関数 $x_t S_t e^{-\lambda x_t}$ (λ はパラメータ) として与えている。この収益関数は、
Almgren and Chriss [2000] の枠組みにおける一時的インパクト関数 h に相当する。

二. ダイナミック戦略と AIM/PIM

前出の Schied and Schöneborn [2009] では、リスク回避度が保有資産規模の関数となるとの想定のもと、資産規模に対する執行戦略の感応度分析が行われている。具体的には、リスク回避度が保有資産規模の増加関数となる投資家を想定する場合には、資産価格が上昇（下落）するほど早く売却（購入）するのが最適となる。すなわち、資産規模が拡大するほどリスク回避的となることから、価格上昇局面で売却額を増やすこととなる。一方、リスク回避度が同減少関数となる場合には、資産価格が下落（上昇）するほど早く売却（購入）するのが最適となる。これらは、それぞれ AS 戦略の AIM (aggressive in the money)、PIM (passive in the money) に相当する³⁸。

このように、先行研究で判明している AIM/PIM の枠組みと戦略や取引コストの関係は、表 1 のように整理できる。Almgren and Lorenz [2007] では、先行きの価格変化の方向（トレンド）が予想できる場合、そのトレンドに合わせて執行額を変化させることで AIM/PIM となることが理論的に示されている。例えば、売却の AIM では、価格が上昇するほど、より早く多くの量を執行するのが最適であることが導かれている。このほか、Kissell and Malamut [2006] では、AIM/PIM の枠組みと取引コストの分布の関係が分析されている。

表 1 AIM/PIM の枠組みと取引コスト等の関係

	AIM	中立	PIM
効用関数との関係 (Schied and Schöneborn [2009])	IARA (リスク回避度が資産の増加関数)	CARA (リスク回避度が一定)	DARA (リスク回避度が資産の減少関数)
価格トレンドとの関係 (売却戦略、Almgren and Lorenz [2007])	価格上昇トレンドで早く売る一方、下落トレンドで遅く売る	価格トレンドに非依存	価格上昇トレンドで遅く売る一方、下落トレンドで早く売る
取引コストの分布形状との関係 (Kissell and Malamut [2006])	最頻値が低コスト側に遷移する一方、高コスト方向のリスクが増す	—	最頻値が高コスト側に遷移する一方、低コスト方向のリスクが増す
			

備考：図中の破線は中立のケース。

³⁸ AIM とは、ベンチマークに対して有利な市場環境でより積極的に執行することを目指すダイナミック型執行戦略のこと。PIM はそうした環境において逆に保守的に執行することを目指す執行戦略。詳しくは、杉原 [2011] の 3 節(4)ロ. を参照。

ホ. インパクト関数の特定と推定

一時的／恒久的インパクト・モデルを取引に活用する際には、インパクト関数 g 、 h をどういった関数で表現するのが適当であるか、また、銘柄によって市場規模や取引頻度が異なる中で、インパクト関数のパラメータはどういった値が適当であるかといった点を考えなくてはならない。これらについて、Almgren *et al.* [2005b]、Lillo, Farmer, and Mantegna [2002, 2003]、Kyle and Obizhaeva [2010] を取り上げ解説する。

(イ) 関数形の特定

マーケット・インパクトの関数形に関する実証分析については、計量経済学や経済物理学の分野の研究対象となっており、主な研究として Hasbrouck [1991]、Kempf and Korn [1999]、Evans and Lyons [2002]、Plerou *et al.* [2002] がある。これらでは、マーケット・インパクトが取引額に関する上に凸の増加関数であるとの分析結果を得ている。膨大なデータを分析した研究として Lillo, Farmer, and Mantegna [2002, 2003] がある。彼らは、1995～98年にニューヨーク証券取引所で売買された時価総額が大きい1,000銘柄の全取引を解析し、一時的インパクトの関数形を推定した³⁹。それによると、一時的インパクト関数 $h(x)$ について、次のような関係が観察されている。

$$\log\{C^{\alpha_0}|h(x)|\} \propto \log\{C^{\alpha_1}|x|\}. \quad (12)$$

ここで、 C は対象となる銘柄の時価総額を表す。すなわち、一時的インパクト h は、執行額 $|x|$ のべき関数で近似できる。Lillo, Farmer, and Mantegna [2003] は、時価総額の調整で用いるべき関数のパラメータ（べき指数） α_0 、 α_1 はともに0.3程度と安定的な値に推定された一方、一時的インパクトのべき指数値（(12)式の比例係数）の推定値は、計測時期によって0.1～0.4の範囲で変動したと報告した⁴⁰。

Kyle and Obizhaeva [2010] は、マーケット・マイクロストラクチャーの理論と実証分析に基づいて、流動性や取引回数の相違を踏まえたマーケット・インパクトの関数形を提案した。具体的には、取引頻度が高い銘柄は、低い銘柄と比べて取引時間（transaction time）が速く進んでいると考え⁴¹、取引頻度、取引量の違いを銘柄固有の「取引時間」の違いで説明した。そのうえで、この取引時間をそろえることで、取引の活発度が異なる幅広い銘柄に対して汎用的に利用できるマーケット・インパクトの関数形を導出した。当該手法に基づく、マーケット・インパクトは、価格・流動性・ボラティリティの積の1/3乗に比例するとの関係が導かれた。Kyle and

39 ここでの一時的インパクトは、執行後に観測された最良気配と執行価格との価格差として定義されている。

40 こうした研究とは異なり、マーケット・インパクトが取引量にほぼ比例すると結論付けている研究もある。例えば、Breen, Hodrick, and Korajczyk [2002] は、5分と30分間隔で計測した株価データを用いて取引コストを分析した結果、線形の一時的インパクト関数が適当であるとしている。

41 あるいは、取引量が大きい銘柄は、小さい銘柄と比べて取引量時間（volume time）が速いともいえる。

Obizhaeva [2010] は、2001～05 年における機関投資家の取引データを用いて、前提とする不変量や上記の関係が妥当であることを実証した。

(ロ) パラメータの推定

Almgren *et al.* [2005a, b] では、一時的・恒久的インパクト関数 h 、 g の関数形としてべき関数を想定した場合のパラメータを、2001 年 12 月から 2003 年 6 月までのシティーグループ株式部門の大規模取引データから推定した⁴²。具体的には、 \mathcal{V} を発行済み株式数、 \bar{V} を日中平均出来高として、

$$\begin{cases} g(x) \propto \text{sign}(x)|x|^{0.89 \pm 0.1} (\mathcal{V}/\bar{V})^{0.27 \pm 0.2}, \\ h(x) \propto \text{sign}(x)|x|^{0.60 \pm 0.4}, \end{cases}$$

と推定している（± の右に表示された数値は、各パラメータの標準誤差を示す）⁴³。

(2) 過渡的インパクト・モデル

過渡的インパクト・モデル (transient impact model) は、執行後のマーケット・インパクトが幾何級数的に減衰すると仮定した連続時間の取引コスト・モデルである (図 6)。インパクトが生じた後、徐々にファンダメンタル価格に漸近し、恒久的に残存する要素がないことから、過渡的インパクトと呼ばれている。当該モデルは、Gatheral [2010] によって提案され、Gatheral, Schied, and Slynko [2011]、Alfonsi, Schied, and Slynko [2010] において最適執行戦略が導出されている。

イ. 基本的枠組み

過渡的インパクト・モデルでは、ブラウン運動に従うファンダメンタル価格 S_t を用いて、平均約定価格 \tilde{S}_t が、

$$\tilde{S}_t = S_t + \int_0^t \zeta(t-s)x_s ds,$$

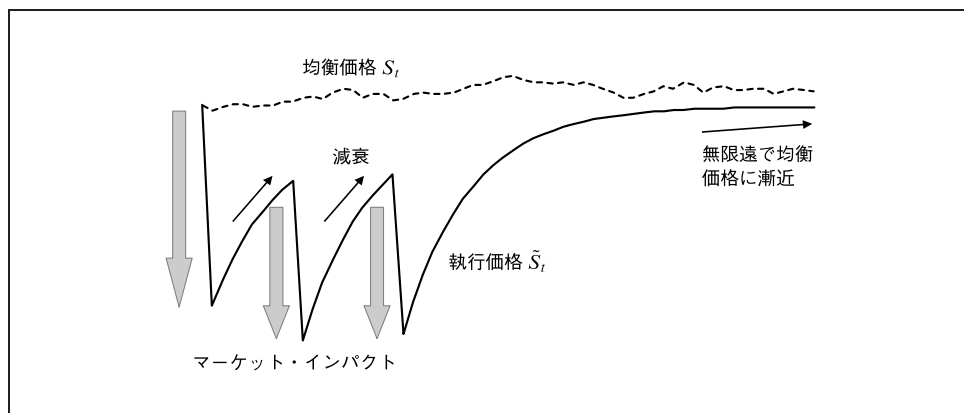
42 恒久的インパクトは、執行開始直前の価格 S_0 を基準に、全注文執行後の価格 S_T から算出した増減率と定義している。一方、一時的インパクト h は、 S_0 を基準に平均執行価格 $(1/X) \sum_{k=1}^K x_k S_{l_k}$ から算出した平均的な増減率と定義している。具体的には、

$$\begin{cases} g\left(\frac{X}{\bar{V}T}\right) \propto \frac{S_T - S_0}{S_0} \cdot \frac{1}{T\sigma}, \\ h\left(\frac{X}{\bar{V}T}\right) \propto \frac{(1/X) \sum_{k=1}^K x_k S_{l_k} - S_0}{S_0} \cdot \frac{1}{\sigma}, \end{cases}$$

と設定したうえで推計している。

43 恒久的インパクト関数 g に含まれる \mathcal{V}/\bar{V} のべき乗項は、Breen, Hodrick, and Korajczyk [2002] に倣って付加された項。発行済み株式数に応じた流動性の変化を調整している。sign(x) は x の符号を示す。

図6 過渡的インパクト・モデルの概念図



備考：売却の執行を想定。

と与えられる⁴⁴。すなわち、執行を重ねる都度、それより以前の執行 (x_s) で発生したインパクトが減衰しつつも累積する。 $\zeta(t)$ は経過時間 t に関する減少関数で、減衰核 (decay kernel) と呼ばれている⁴⁵。

過渡的インパクト・モデルを一時的／恒久的インパクト・モデルと比べると、前者は執行後の価格弾性効果が減衰しつつも、価格が徐々にファンダメンタル価格に漸近すると考えるのに対して、後者は価格弾性効果を一時的インパクトと恒久的インパクトの差として表現し、復元しない価格変化が恒久的に残存すると考える点が異なっている。

ロ. スタティック戦略 (IS 戦略)

過渡的インパクトを想定した執行戦略に関する研究はまだ途上であるが、リスク中立的な取引主体を仮定した IS 戦略 (期待コスト最小化戦略) は、さまざまな減衰核について解析的に導出されている。Gatheral, Schied, and Slynko [2011] は、 ζ が経過時間の指数関数、べき関数、対数関数、周期関数などさまざまなケースについて、期待コスト最小化戦略を導出している。例えば、指数関数 $\zeta(t) = e^{-\rho t}$ ($\rho > 0$) の場合、期待コスト最小化戦略は、

$$dX_t^* = \frac{X}{\rho T + 2} (\delta_0(dt) + \rho dt + \delta_T(dt)), \quad (13)$$

(ただし、 $\delta_t(x)$ はディラックのデルタ関数) となる。このとき、執行開始直後と終了直前以外の時刻では一定量執行する戦略が最適となる。

44 より詳細には、当該モデルは、線形の過渡的インパクト・モデルである。累積するマーケット・インパクトが非線形であるようなモデルを構築することもできる。

45 モデルが合理的であるためには、減衰核 a は経過時間に関して下に凸である必要がある。本節(4)で解説する。

過渡的インパクト・モデルは、次の(3)で紹介する指値板モデルにおいて、指値板上の注文量が平均回帰するタイプのモデルと類似している。特に、減衰核が指数関数である(13)式の結果は、指値板上の流動性が平均回帰する指値板モデルにおけるリスク中立的な取引主体の最適執行戦略((17)式の連続時間版)に相当する。

なお、過渡的インパクト・モデルは比較的新しいことから、ダイナミックな執行戦略に関しては理論、実証ともに研究途上にあり、論文として発表されたものは見当たらない。

(3) 指値板モデル

指値板モデル (limit order book model) とは、注文駆動型あるいはハイブリッド型の市場⁴⁶を想定し、注文指値板上の注文量(流動性)をモデル化することで、間接的にマーケット・インパクトを計量するモデルである。すなわち、指値板上の注文量の変化をモデル化することで、間接的にマーケット・インパクトを算出する。当該モデルの枠組みは、Obizhaeva and Wang [2005] によって提案され、Alfonsi, Fruth, and Schied [2010]、Makimoto and Sugihara [2010]、Predoiu, Shaikhet, and Shreve [2011] によって拡張されている。

イ. 基本的枠組み

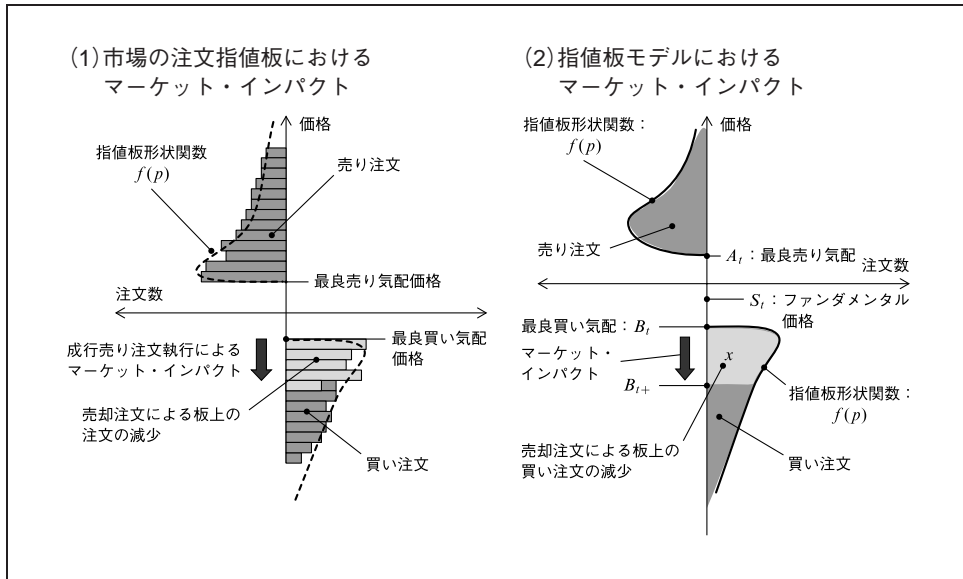
図7には指値板モデルの概念図を示した。当該モデルでは、指値板上の注文量を、連続的な価格 s に存在する注文密度関数 $f(s)$ ($f(s) > 0$) として与え⁴⁷、その形状や板上の注文量の時間変化をモデル化する。 x の売り注文の成行執行を考える場合、当該注文は市場に提示されている買い指値注文のうち、価格が高い順、注文の到来が早い順に付け合わされる。執行額 x が、最良買い気配価格上に存在する注文量より大きい場合、最良買い気配価格は執行により低下する(図7(1))。価格を連続化した指値板モデルで考えると、 x は最良買い気配価格 B_t 以下にある指値注文量、すなわち $f(s)$ と縦軸の間の面積に相当する。執行直前の最良買い気配価格 B_t と執行直後の最良買い気配価格 B_{t+} 、および x の間には、

$$x = \int_{B_t}^{B_{t+}} f(s) ds, \quad (14)$$

46 注文駆動型市場とは、指値注文板に市場参加者の注文を集め付け合わせるタイプの市場のこと。ハイブリッド型市場とは、指値注文板を開示するとともに、マーケット・メイカーを指定したような、呼値駆動型と注文駆動型の両市場の仕組みを併用しているタイプの市場のこと。詳しくは、杉原 [2011] 4節(1)を参照。

47 実際の市場では、指値注文を提示できる価格は離散的であるほか、注文量も売買単位の自然数倍であるが、指値板モデルでは数学的簡単化のため連続的な価格に連続的な規模の指値注文を入れられるとし、指値板の形状を注文密度として与える。

図7 指値板モデルの概念図



備考：売却の執行を想定。

の関係がある (図7 (2))⁴⁸。一方、 x の執行の平均約定価格 \tilde{S}_t は、(14) 式から計算される B_{t+} を用いて、

$$\tilde{S}_t = \frac{1}{x} \int_{B_t}^{B_{t+}} sf(s) ds,$$

と計算できる。

2節(6)で想定したような K 回の離散執行を考える場合、売却に係る IS は次のように計算できる。

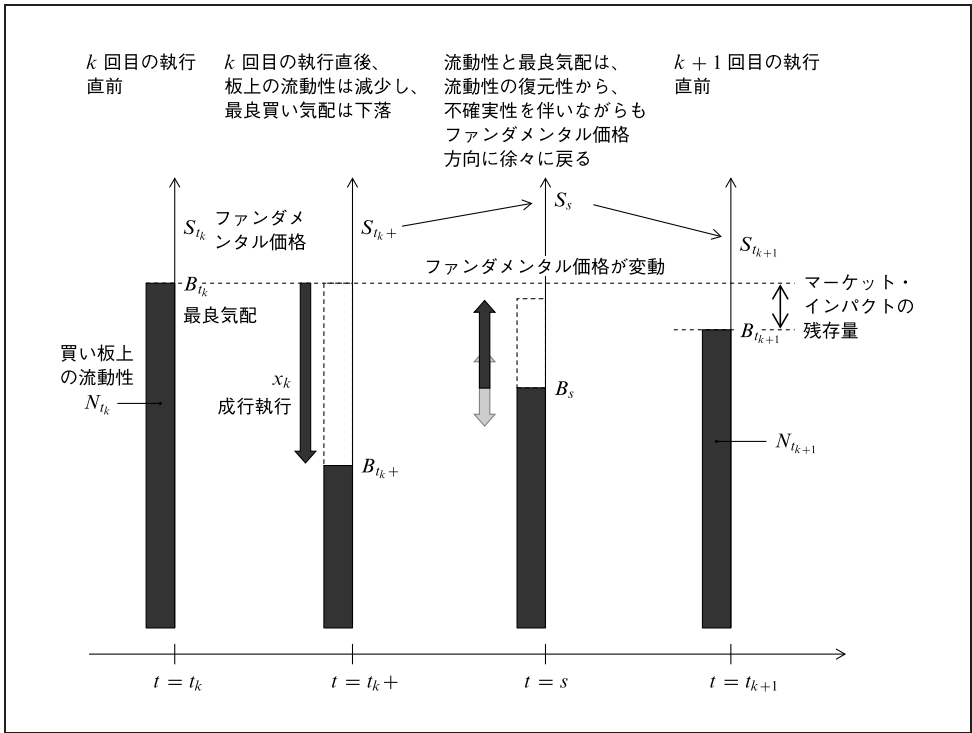
$$IS(x) = S_0|X| - \sum_{k=1}^K \tilde{S}_{t_k} |x_k| = -S_0X + \sum_{k=1}^K \int_{B_{t_k}}^{B_{t_k+}} sf(s) ds. \quad (15)$$

次に、買い注文板上の総注文量 (流動性) N_t をモデル化する。先行研究によってまちまちに設定されているものの、注文量が平均回帰するモデルが比較的多い。例えば、Makimoto and Sugihara [2010] では、 N_t が次のような平均回帰過程に従うと設定している。

$$\begin{cases} dN_t = \rho(\bar{N} - N_t) dt + \sigma_N dW_t & (t_k < t < t_{k+1}), \\ N_{t_k+} = N_{t_k} - x_k, & t = t_k (k = 1, \dots, K). \end{cases} \quad (16)$$

48 ここでは、売却 ($x < 0$) を考えているので、 $B_t > B_{t+}$ となる。

図 8 指値板モデルのダイナミクス



備考：フラットな指値板形状を想定。

資料：Makimoto and Sugihara [2010] の図 1 (b) をもとに作成

ここで、 ρ 、 \bar{N} 、 σ_N は $0 < \rho < 1$ 、 $\bar{N} > 0$ 、 $\sigma_N > 0$ を満たすパラメータである⁴⁹。Obizhaeva and Wang [2005]、Alfonsi, Fruth, and Schied [2010] では、(16) 第 1 式第 2 項 (確率項) が無いモデルを用いている。(16) 式で表される流動性の平均回帰性は、流動性の復元性 (resiliency) とも呼ばれ、執行戦略を導出するうえで重要な要素となる。 $\rho \rightarrow 0$ では復元性はゼロであり、マーケット・インパクトは、そのほとんどが恒久的インパクトに相当し長期的に残存する。一方、 $\rho \rightarrow 1$ では復元性は 100% であり、マーケット・インパクトは、そのほとんどが一時的インパクトに相当するため、次の執行タイミングまでにほぼ消失する。このように、指値板モデルでは、流動性の復元性によりマーケット・インパクトの残存量が決まる性質があり (図 8)、この点は、本節 (2) で解説した過渡的インパクト・モデルが減衰核の設定に応じてマーケット・インパクトの残存量が決められたのと類似している⁵⁰。このような性質は、流動性の戻りを待って執行するような最適執行戦略の導出につながっていく。

49 平均回帰成分のパラメータ ρ および \bar{N} は、指値および取消注文フローの確率過程と関係がある。詳細は、Makimoto and Sugihara [2010] を参照。

50 (16) 式は、減衰核 $\zeta(t) = e^{-\rho t}$ のケースに相当。厳密には、平均約定価格とファンダメンタル価格の乖離には指値板の形状関数が関連する。

ロ. 任意の指値板形状に適応可能なリスク中立的戦略

Obizhaeva and Wang [2005] では、指値板がフラットである ($f(s)$ が s によらず一定値となる) 場合の最適執行戦略を導出している。Alfonsi, Fruth, and Schied [2010] は、指値板の形状関数 $f(s)$ を 2 階微分可能な任意の関数に拡張し、期待コスト最小化戦略

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbb{E}[\text{IS}(\mathbf{x})],$$

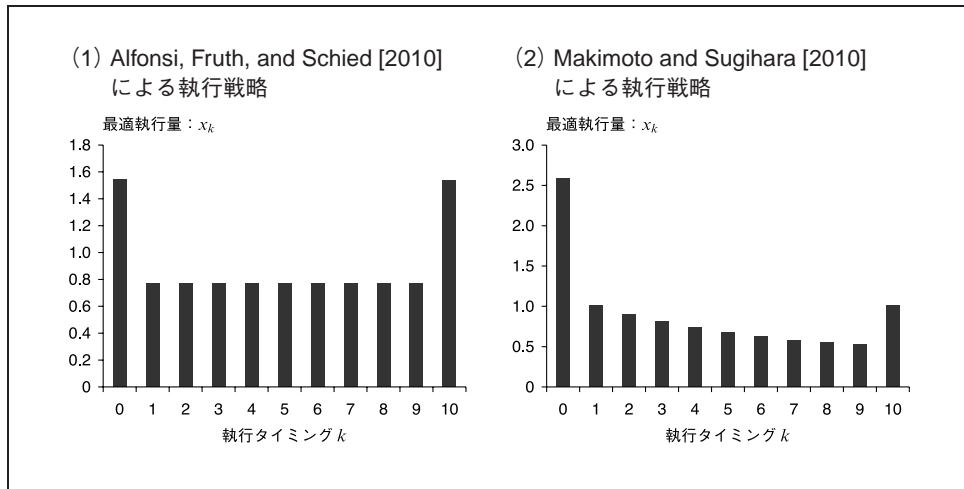
を導出している。この解は以下ようになる。

$$\begin{cases} x_1^* = G(f, \rho, X, K), \\ x_k^* = (1 - \rho)x_1^* \quad (k = 2, \dots, K - 1), \\ x_K^* = X - \{1 + (K - 2)(1 - \rho)\}x_1^*. \end{cases} \quad (17)$$

ただし G は f に依存する関数であり、一般に閉じたかたちでは得られない⁵¹。この期待コスト最小化戦略では、最初と最後の執行以外は均等執行となる。最初の執行タイミングでは、指値板の形状や執行回数、流動性の戻りに応じた執行額が選択される一方、最後の執行タイミングでは残存量すべてを売り切る戦略となっている (図 9 (1))。

関連した研究として、Predoiu, Shaikhet, and Shreve [2011] は、任意形状の指値板の設定のもとで、流動性の復元性に関するモデルをより一般化した期待コスト最小

図 9 指値型モデルにおける執行戦略の比較



備考：(1)、(2)とも同一のパラメータ（執行回数 $K = 11$ 回、総執行額 $X = 10$ ）で試算。(2)では、 $\gamma = 0.5$ を用いた。なお、 t_0 時点 ($k = 0$) でも執行する想定としている点に留意。

51 ただし、板の形状がフラットである場合には G は閉じたかたちで与えられる。

化戦略を導出している。当該戦略では、最初と最後を除いた中間の執行タイミングにおいて流動性の復元性に合わせた速度で執行するのが最適である。ただ、Alfonsi, Fruth, and Schied [2010] や Predoiu, Shaikhet, and Shreve [2011] では、指値板形状は任意に設定可能である一方、リスク回避的な投資家を仮定した戦略が導出されていない。また、指値板上の流動性 N_t のモデルに、(16) 第 1 式第 2 項（確率項）に相当する項が含まれていないため、流動性の変化が決定論的である。

ハ. 流動性が確率的に変動するもとのリスク回避的戦略

これに対して、Makimoto and Sugihara [2010] は、流動性が不確実性を伴い変動するもとの、リスク回避的な投資家を仮定した最適執行戦略を導出している。具体的には、ファンダメンタル価格がブラウン運動に従い、指値板形状がフラットであり、さらに板上の流動性が (16) 式に従って変化するとしたうえで、平均分散問題 ((7) 式) を解析的に解いた。単一資産の場合の執行戦略は、 ϕ 、 ϕ_1 、 ϕ_2 および φ をパラメータからなる固定値として、

$$\begin{cases} x_0^* = \{\phi_1 + (\phi_2 + 1)(\phi^K + \phi^{-K+1})\}\varphi, \\ x_k^* = \{(\phi - \rho)\phi^{K-k} + (1 - \rho\phi)\phi^{-K+k}\}\varphi \quad (k = 1, \dots, K-1), \\ x_K^* = (\phi + 1)\varphi, \end{cases} \quad (18)$$

とかける⁵²。典型的な執行戦略をみると、図 9 (2) のようになる。Alfonsi, Fruth, and Schied [2010] は、執行の途中段階がすべて一定の戦略が導出されるが、Makimoto and Sugihara [2010] では、タイミング・コスト等を考慮するため執行の中間段階でも執行額を徐々に減らすのが最適となる⁵³。

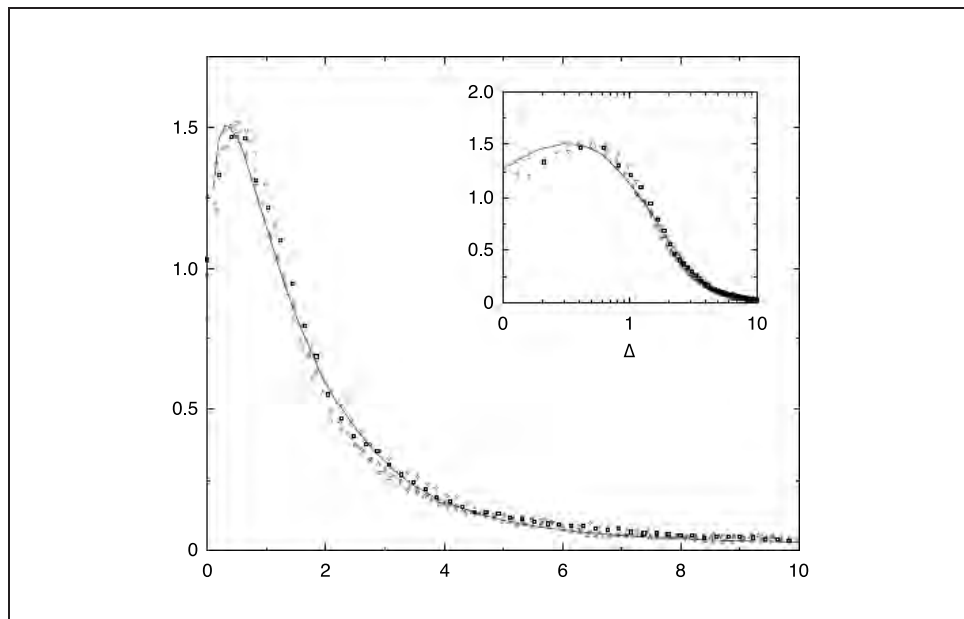
ニ. 指値注文板に関する実証分析

指値板モデルでは、指値板の形状や板上の注文量の時間変化が、マーケット・インパクトや執行戦略を決める重要な要素となる。指値板モデルの執行戦略の理論研究と並行するかたちで、こうした板形状等に関する実証分析が一部で行われている。指値板の形状に関する詳細な分析としては、Bouchaud, Mézard, and Potters [2002a]、Potters and Bouchaud [2003]、Zovko and Farmer [2002] などがある。Bouchaud, Mézard, and Potters [2002a] は、2001 年 2 月のパリ証券取引所における流動性が高い 3 銘柄の指値注文を分析し、最良気配から δ だけ離れた価格帯への指値注文の

52 Makimoto and Sugihara [2010] では、時刻 0 で執行すると設定している。

53 さらに、Makimoto and Sugihara [2010] では、(18) 式を多資産に拡張し、多資産の場合でも執行戦略が解析的に導出できることを示している。低流動性銘柄と高流動性銘柄を組み合わせた 2 資産の同時執行の場合、両者の流動性相関が上昇するほど高流動性銘柄をより早めに執行するのが最適となる一方、低流動性銘柄については流動性相関が変化しても執行速度をほとんど変化させない戦略が最適となることがわかっている。これは、投資家が相関関係が安定している複数の資産を同時に執行する際には、流動性が高い銘柄に限って執行速度を調整することで取引コストを削減できることを示唆している。

図 10 指値注文板の平均的な形状



備考：縦軸は注文密度、横軸は最良気配からの価格差を表す。縦軸・横軸ともに規格化後。プロットは実データ、実線は(19)式をカリブレートしたもの。

資料：Bouchaud, Mézard, and Potters [2002b] から転載

流入数が δ に関するべき分布で近似できるとの結果を得ている。同様に、ロンドン証券取引所に上場する 50 社を対象とした Zovko and Farmer [2002] の調査でも、指値注文の流入量が δ に関するべき分布となっていることが示されている。Bouchaud, Mézard, and Potters [2002a] は、こうした結果をもとに、べき分布の指数を α とし、指値注文板の平均的な形状 \bar{f} が

$$\bar{f}(s) = e^{-s} \int_0^s u^{-1-\alpha} \sinh(u) du + \sinh(s) \int_s^\infty \tilde{u}^{-1-\alpha} e^{-\tilde{u}} d\tilde{u}, \quad (19)$$

といった関数で表現できるとした⁵⁴。Bouchaud, Mézard, and Potters [2002b] から抜粋した図 10 をみると、実際の市場の指値板形状 (プロット) が、実線で示した (19) 式によく合致することが確認できる。Potters and Bouchaud [2003] では、米国株式の一部についても同様の特徴があることを実証している⁵⁵。

54 この結果は、指値注文の流入量が δ に関する指数 α のべき関数になるとの実証結果に加えて、最良気配の価格変動が拡散過程に従い、かつ流入した指値注文の滞在時間 (取り消されるまでの時間) が注文によらず一定であるとの 2 つの仮定のもとで導かれたもの。

55 ただし、当該調査結果は、一部の売買システムに発注・取引されたデータのみを対象としており、市場全体の指値注文を対象としているわけではない。

(19) 式のような指値板の形状は、実際のマーケット・インパクトが非線形であることを示唆している。最良気配近傍の価格帯にある指値注文で吸収可能である比較的小口な成行注文のマーケット・インパクトは、その注文量の増減にさほど影響を受けないが、それを超える大口の成行注文では、その注文規模に応じてべき級数的にインパクトが増大することが示唆される⁵⁶。この結果については、マイクロストラクチャーが異なる広範な銘柄を対象とした実証研究によって、さらに詳細に検証されることが望まれる。

(4) 執行戦略と価格操作

執行戦略の理論と並行して、価格操作 (price manipulation) に関する研究も進んでいる。取引コスト・モデルにおいて同じ分量を成行で往復売買 (round-trip trade; 買って売り戻し、あるいはその逆) した場合に、期待収益が正值となる (利益が発生する) 状況⁵⁷は「価格操作が可能である」と定義される。ただし、このときビッド・オファー・スプレッドは考慮しない。本稿の設定では、

$$\sum_{k=1}^K x_k = 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{E}_0[\text{IS}(\mathbf{x})] < 0, \quad (20)$$

を満たす執行戦略 \mathbf{x} が価格操作に該当する⁵⁸。価格操作の概念は Jarrow [1992, 1994] によって提案され、Huberman and Stanzl [2004] によって厳密に定義された。

取引コスト・モデルを用いて執行戦略を考案する場合に価格操作の可能性を許容すると、その売買を繰り返すことで無限の利益が得られる状況が想定できてしまう。そのため、価格操作の可能性を排除するか、往復売買を認めないことが、執行戦略理論を構成するうえでの前提条件として必要となる⁵⁹。

イ. 一時的／恒久的インパクト・モデルと価格操作

Huberman and Stanzl [2004] は、価格操作の条件 ((20) 式) を一時的／恒久的インパクト・モデルに適用できると考えた場合、価格操作の可能性を排除するためには、恒久的インパクトが執行額の線形関数でなくてはならない (線形以外の場合はすべて価格操作が可能となる) ことを示した (図 11)。1 回ですべての注文を執行する戦略 (実線) と、同額を 2 回に分けて執行する戦略 (破線) を考えた場合、価格操作が不可能なモデルでは、図 11 (1) のように執行後の最終的なファンダメンタル価格

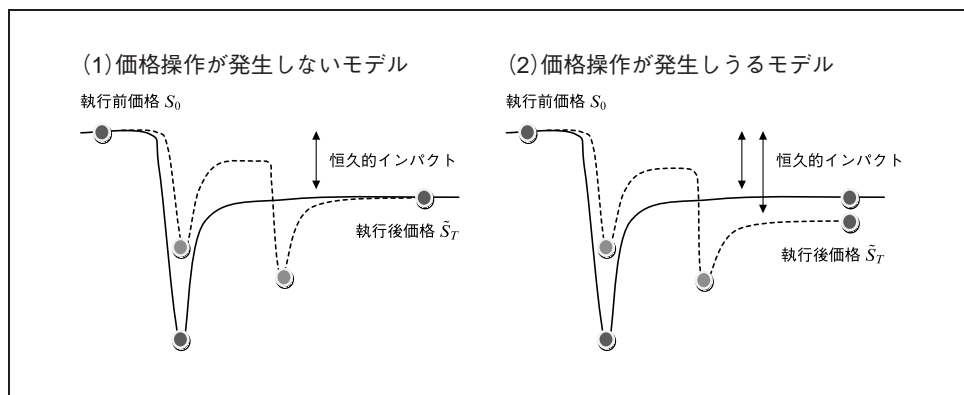
⁵⁶ Roşu [2009] は、指値板の形状とマーケット・インパクトの非線形性を理論面から論じている。

⁵⁷ 期待取引コストが負となる状況と言い換えることもできる。

⁵⁸ 往復売買なので、 x_k ($k = 1, \dots, K$) の符号がそろっている必要はない。なお、符号がそろっている場合は、価格操作に該当しない。

⁵⁹ ここでの価格操作は、執行戦略理論の前提条件の一部を構成する概念であり、法制度上の価格操作 (相場操縦) の定義と必ずしも同一ではない。

図 11 一時的／恒久的インパクト・モデルにおける価格操作（概念図）



備考：実線は一括執行、破線は同額を2回に分割して執行した場合。

資料：Fabozzi, Focardi, and Kolm [2010] を参考に作成

が一致する。すなわち、一時的インパクトは異なるが、恒久的インパクトは執行額に比例するため、最終的に発生する恒久的インパクトはどちらの戦略でも同じとなる⁶⁰。一方、価格操作が可能なモデルは、図 11 (2) のように執行後の最終的なファンダメンタル価格が異なる。売買戦略によって最終的なファンダメンタル価格が異なると、例えば、初めに大口の売却でマーケット・インパクトを与えファンダメンタル価格を低減させた後、緩やかに買い戻すことで、ファンダメンタル価格の変化を通じて無限の利益が得られる戦略をとることが可能となってしまう。

ロ. 過渡的インパクト・モデルと価格操作

過渡的インパクト・モデルに関する価格操作は、Gatheral [2010] および Gatheral, Schied, and Slynko [2011] が分析している。それによると、過渡的インパクト・モデルでは、ファンダメンタル価格への回帰の速さを表す係数 $\zeta(t)$ が時間 t に関する下に凸の関数 ($\zeta''(t) \geq 0$) である場合は、価格操作が不可能であることが示されている⁶¹。この結果は、流動性が平均回帰すると仮定する指値板モデルにも適用可能である。

60 これを一般化すると、「価格操作が発生しない完備な市場では、どのような執行戦略をとっても、ファンダメンタル価格に与えるインパクトは同一である」ことが成り立つ。ただし、一時的なインパクトの影響から、支払う取引コストは戦略によって異なりうる。

61 この場合、厳密には、最適執行戦略が購入注文のみ、あるいは売却注文のみから構成される。

4. 高頻度取引の執行戦略を巡る研究

本節では、高頻度取引に関連する研究を整理する。(1)で在庫モデル、(2)で情報モデルについてまとめ、(3)で注文フローの確率過程、(4)でニュース・マイニングを紹介する。

(1) 在庫モデル

イ. 高頻度取引のポジション保有時間と損益

高頻度取引に関連する在庫モデルの研究について紹介する。在庫モデルに関連する高頻度取引の典型例としては、表2に示したような戦略がある。これらの戦略では、価格が動く前にいかに早くポジションを閉じるか、すなわち売買の高速化と在庫リスクの削減が損益を決めるポイントとなる。

Menkveld [2011]によると、高頻度取引の損益は、

$$\text{高頻度取引の損益} = \text{スプレッド損益} + \text{ポジション損益},$$

と分解できる。ここで、スプレッド損益は、執行価格とファンダメンタル価格の差から生じる損益⁶²であり、ポジション損益は、ファンダメンタル価格が変動することでポジション（在庫）の価値が変化することによる損益である。図12には、Menkveld [2011]による高頻度取引のポジションの保有時間と損益、リスク量の推計値を示している。高頻度取引のポジション損益が正值となるのは、ポジション保有時間が5秒未満の場合のみであり、それを超える保有時間ではポジション損益が損失となるほか、1分以上の保有時間ではリスク量が無視できないほど拡大する。このため、取引

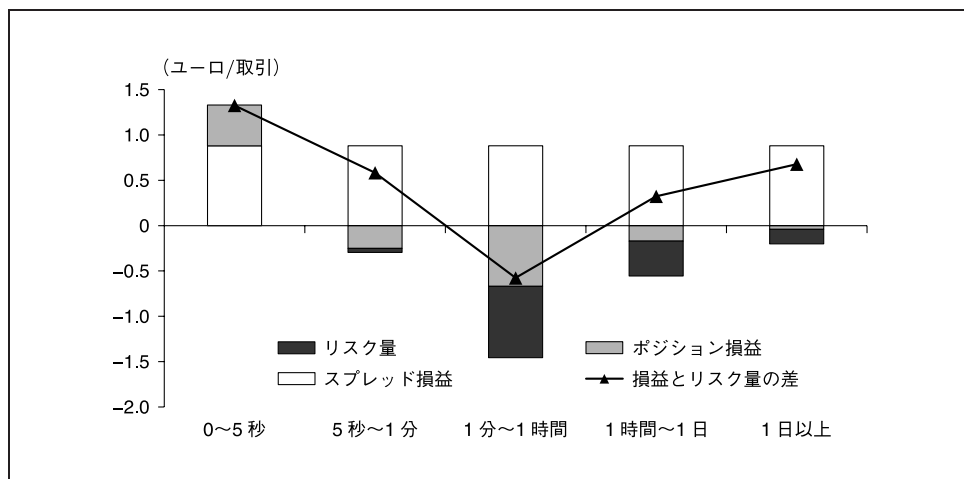
表2 在庫モデルに関連する高頻度取引戦略の例

戦略名	概要
Wait for the other side	自身の買い注文が約定した後、売り指値注文を提示し、ビッド・オファー・スプレッドを収益とする最も単純な戦略。
Lean your market	自身の買い注文が約定したら、自身の売り注文および買い注文の指値水準を引き下げる。スプレッドに係る収益は減るが、ポジション解消の確率を高めることで在庫リスクを低減する。
Scratch for the rebate	リベートが得られる市場で行われる。自身の買い注文が約定した場合、即座に自身の売り気配を約定した買い気配の水準に変更することによりポジション解消の確率を高め、在庫リスクを削減する。リベートを収益とする。

資料：Durbin [2010] を参考に作成

62 高頻度取引は、指値注文で執行することから、スプレッド損益は、通常、正值（利益）となる。

図 12 高頻度取引のポジション保有時間と損益等



備考：スプレッド損益は、保有時間によらない推計値（0.88 ユーロ/取引）としている。リスク量は、ポジション損益の分散にリスク回避度として 0.1 を乗じた量を負値で表示している。また、折れ線は、リスク回避度を 0.1 とした場合のリスク調整後損益を表している。

資料：Menkveld [2011] を参考に作成

主体は執行の遅延（latency）の削減を目指しているほか、在庫リスクを計算しポジションの制御に活用しているとみられる。前者の遅延の削減は情報技術の分野であるため本稿では解説しない。後者の在庫リスクを踏まえた執行戦略理論は、古くからマーケット・マイクロストラクチャーの分野でマーケット・メイカーの執行戦略理論として研究が進んでいる。

ロ. 基礎理論

Ho and Stoll [1981, 1983] は、呼値駆動型市場においてマーケット・メイカーの在庫リスクと、マーケット・メイカーが自身の収益を最大化するために提示すべき気配値の関係を説明する理論を考案した。Avellaneda and Stoikov [2008] は、Ho and Stoll [1981, 1983] の枠組みを注文駆動型市場に拡張し、市場への注文・取消指図の確率的な到来と、実証分析に基づく指値板の形状を前提に、高頻度取引主体の最適戦略を導出した。以下では、この Avellaneda and Stoikov [2008] のモデルについて解説する⁶³。

時刻 t におけるファンダメンタル価格が S_t である金融商品を売買する取引主体を考える。そのポジション（在庫）およびキャッシュの保有量をそれぞれ q_t 、 c_t とし（ q_t の正/負はロング/ショートに対応）、提示する売りおよび買い気配価格を $S_t + \delta_t^A$ 、 $S_t - \delta_t^B$ とかく。取引主体は、ある将来時刻 T ($> t$) での期待効用が最大

63 こうしたモデルのほかに、Chacko, Jurek, and Stafford [2008] のように、マーケット・メイカーが提示する指値注文のオプション性とその対価という視点から執行戦略を分析している研究もある。

となるように時刻 t で提示する気配値の水準を決める。指数型効用関数を仮定すると、取引主体の最適戦略は、リスク回避度を γ として、 $\mathbb{E}_t[-\exp[-\gamma(c_T + q_T S_T)]]$ を最大化する δ_t^A 、 δ_t^B を求めることに帰着する。

次に、 S_t 、 c_t 、 q_t の変動をモデル化する。ファンダメンタル価格 S_t はボラティリティ σ のブラウン運動に従うとする。時刻 t に約定する取引主体の買い注文の数量を N_t^B 、同売り注文の数量を N_t^A とし、これらは他の市場参加者からの成行注文の頻度と指値板の形状に依存して確率的に変動すると考える。ここでは、 N_t^i ($i = \{A, B\}$) は、それぞれ呼値水準に応じた強度 $\lambda(\delta_t^i)$ ($i = \{A, B\}$) のポアソン過程に従うと設定する⁶⁴。このとき、キャッシュ c_t および在庫 q_t は、

$$\begin{cases} dc_t = (S_t + \delta_t^A) dN_t^A - (S_t - \delta_t^B) dN_t^B, \\ dq_t = dN_t^B - dN_t^A, \end{cases}$$

となる。さらに Avellaneda and Stoikov [2008] では、指値板の形状およびマーケット・インパクトがともに注文額のべき関数に近似できるとの実証結果⁶⁵を踏まえて、強度 $\lambda(\delta_t^i)$ ($i = \{A, B\}$) の関数形が δ の指数関数 $\lambda(\delta) \propto e^{-\alpha\delta}$ になるとしている (α はパラメータ)。

こうした前提のもとで近似を行い動的計画法によって上述の効用最大化問題を解くと、次のような近似的な関係式が得られる。

$$\begin{cases} \bar{S}_t \simeq S_t - \gamma\sigma^2(T-t)q_t, \\ \delta_t^A + \delta_t^B \simeq \gamma\sigma^2(T-t) + \frac{2}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right), \end{cases} \quad (21)$$

ここで、 \bar{S}_t は取引主体からみた主観的なファンダメンタル価格（以下、主観的ファンダメンタル価格）であり、在庫水準、リスク回避度および価格のボラティリティに応じて市場のファンダメンタル価格 S_t から乖離する⁶⁶。在庫 q_t が正である場合、リスク回避的な取引主体の主観的ファンダメンタル価格は市場のファンダメンタル価格を下回り、在庫が負（ショート）である場合には上回る。このとき、取引主体が、主観的ファンダメンタル価格 \bar{S}_t を中心として $\delta_t^A + \delta_t^B$ の幅でビッド・オファーを提示するのが理論上最適である⁶⁷。

例として図 13 には、取引主体がロング・ポジションである場合について、市場の指値板と取引主体の主観的ファンダメンタル価格などを図示した。在庫リスクのため、取引主体は市場の最良気配より低い水準に売買気配を提示する。(21) 式に示し

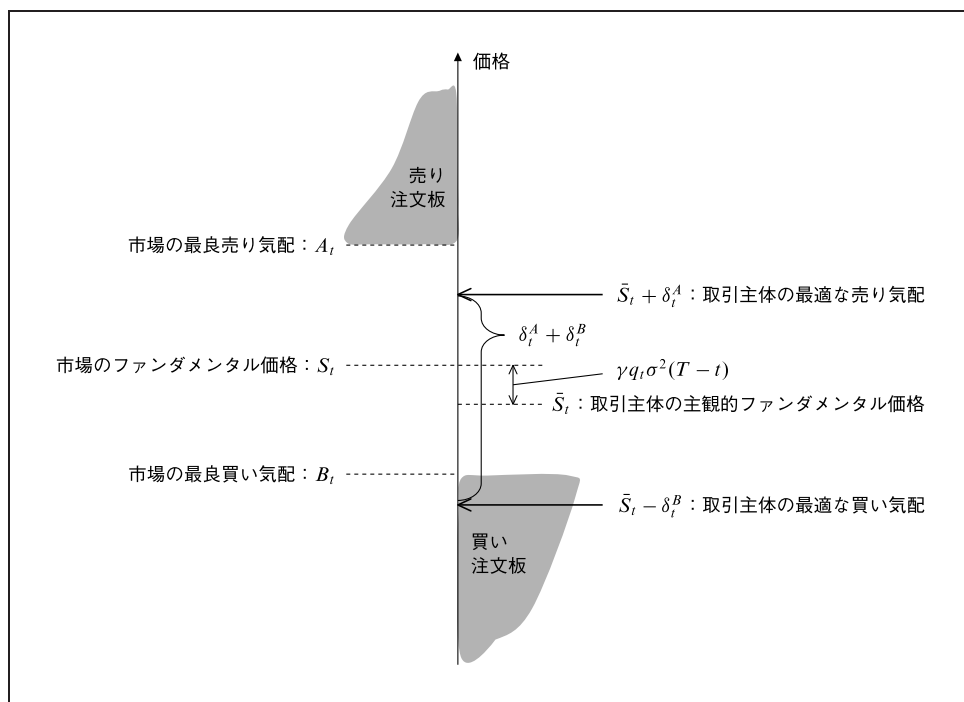
64 Avellaneda and Stoikov [2008] では、強度が売り注文板と買い注文板で異なる設定とし、執行戦略の近似解を導出しているが、複雑であることから、ここでは売買同一と仮定して解説する。

65 3 節(3)ニ.で紹介した Bouchaud, Mézard, and Potters [2002a] を参照。

66 (21) 第 1 式と脚注 64 の仮定から \bar{S}_t と $\delta_t^A - \delta_t^B$ に関する関係式が導出できることから、(21) 式の 2 つの関係式は効用最大化問題の近似解 δ_t^A 、 δ_t^B と同値である。

67 強度の関数形が売りと買いで異なる場合には、最適なビッド・オファーの中心は \bar{S}_t から乖離する。

図 13 Avellaneda and Stoikov [2008] のモデルにおける高頻度取引主体の最適な気配提示水準（概念図）



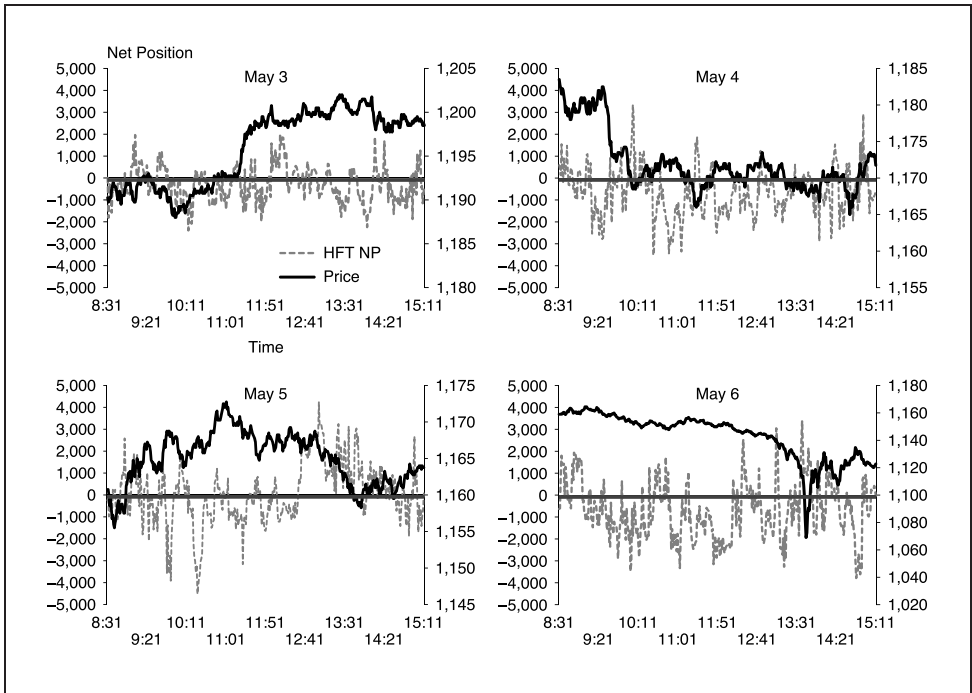
たスプレッド水準の第 1 項が価格変動に伴うリスクを、第 2 項が注文の到達頻度や指値板の形状に依存した量となっている。このように、最適な執行戦略は、価格変動と指値注文の流量に依存して決まる。

ハ. 高頻度取引の在庫と価格変動

前述の Avellaneda and Stoikov [2008] の研究は、指値注文板の形状および取引主体の在庫量と、取引主体が提示する価格の関係を分析している。このモデルは、あくまでも価格変動や市場流動性が安定している局面を想定したものであるが、市場が不安定な局面で高頻度取引主体がどのように売買するかについても示唆を与える。例えば、(21) 式においてボラティリティ σ が大きい場合には、 $S_t - \bar{S}_t$ および $\delta_t^A + \delta_t^B$ の両者とも大きくなる。すなわち市場価格の変動が大きい局面では、取引主体は自身の在庫リスクが上昇することから、主観的ファンダメンタル価格を市場のファンダメンタル価格から大きく乖離させ、大きめのスプレッドを要求するようになる。さらにこうした局面で市場参加者の売買注文が一方に偏った場合には在庫リスクが一段と高まることから、取引主体は最良気配を市場のファンダメンタル価格から一段と引き離すと考えられる。

関連する実証研究として Kirilenko *et al.* [2010] がある。当該研究では、2010 年 5 月 6 日の米国株式市場で発生したフラッシュ・クラッシュ時における高頻度取引主

図 14 フラッシュ・クラッシュ前後における高頻度取引のポジション



備考：実線は S&P 500 株価指数先物 E ミニ相場、破線は高頻度取引のポジションを示す。フラッシュ・クラッシュが発生した日時は、5 月 6 日 14～15 時の間。ここでの高頻度取引の定義は、取引の仲介を行う業者（195 社）の中で、とりわけ売買の頻度と規模が大きい上位 3% を占める 16 社としており、本稿の高頻度取引の定義より狭い。

資料：Kirilenko *et al.* [2010] から転載

体の在庫量を詳細に調査している⁶⁸。それによると、フラッシュ・クラッシュのきっかけとなった S&P 500 株価指数先物 E ミニ相場が急落する局面において、i) 市場流動性が急減する中で一部の高頻度取引主体は売買を活発化させ取引量を増やしたこと、ii) この間、同主体の在庫はロングに偏っていたものの、偏りの度合いはそれ以前の 3 日間と大差なかったことが示されている（図 14）。この分析結果は、高頻度取引の多くが、価格水準やその変動と無関係に在庫量を一定規模以下に抑制していることを示唆している⁶⁹。Kirilenko *et al.* [2010] は、こうした点が、短期間の価格ボラティリティを高めることにつながった可能性を指摘している⁷⁰。

68 フラッシュ・クラッシュについては、杉原 [2011] の 6 節(2)を参照。

69 この点を Avellaneda and Stoikov [2008] のモデルと合わせて考えると、フラッシュ・クラッシュ時ににおいて市場参加者の大勢が売買を取りやめ流動性が急減する中で、高頻度取引主体の主観的ファンダメンタル価格と市場のファンダメンタル価格が乖離したことから、同主体がロング・ポジションを造成する際には非常に低い価格を提示したと推察される。また、在庫量を一定規模以下に抑えるために、積み上がったポジションの一部を成行注文で即座に減少させた可能性もある。

70 これに関連して、Khandani and Lo [2011] は、2007 年 8 月 6 日の世界的な株価下落時（いわゆるパリバ・ショック時）に、マーケット・メイカ型の戦略が非常に大きな損失を被り、マーケット・メイカーが取引

(2) 情報モデル

一部の高頻度取引では、注文に付随する情報量や売買注文量の偏りなどを分析し、価格の変化方向を予測することで、リスクを低減し収益性を高めている。表3には、その戦略例を示した。本節では、こうした情報を取引に活用する理論を紹介する。

イ. 情報の非対称性に関する基礎理論

市場における情報の非対称性と逆選択のリスクは古くから研究されているテーマである。その代表的な研究として、Glosten and Milgrom [1985]、Kyle [1985]、Easley *et al.* [1996]、Biais, Martimort, and Rochet [2000] がある。Glosten and Milgrom [1985] は、マーケット・メイカーが情報を有した市場参加者 (informed trader) からの注文を受けなくてはならないことが、ビッド・オファー・スプレッドの発生要因であることを理論的に示した⁷¹。具体的には、市場に到来する注文が情報を有しているか否か、情報を有している場合、価格上昇方向の情報か下落方向の情報かによって注文を3つに分類し、それぞれの発生確率に応じて取引主体がどのように呼値を変化させるべきかを理論化した。Easley *et al.* [1996] は、Glosten and Milgrom [1985] の議論を発展させ、取引データから市場の情報の非対称性の度合いを表す量を推計

表3 情報モデルに関連する高頻度取引戦略の例

戦略名	概要
Penny jump	注文フローの偏りや注文に付随する情報量を予測して取引に活用する。例えば、買い指値板に大きめの買い注文が到来した場合、最良買い気配を上昇させるように自身の買い注文を入れることで売り手の執行を促す。売り手が上昇させた買い気配に対して執行した場合には、最良売り気配で売却しポジションを閉じる。想定したように価格が上昇しなかった場合には、損切りしポジションを閉じる。
Push the elephant	自身の買い指値と同じ価格帯に、大口の買い注文が存在する場合、価格が上昇する可能性を見込んで、執行確率を高めるため自身の買い指値の価格水準を徐々に引き上げる。その際、引き上げた自身の買い注文の一部が執行されることがある。もし、それに合わせて大口買い注文の指値が引き上がってくる場合には、その大口注文に対して自身が購入した分を売却し、ポジションを閉じる。
Tow the iceberg	隠れた注文やアイスバーグ注文をリバース・エンジニアし、隠れた大口注文の存在を予想して執行に活用する。アイスバーグと想定される注文を発見した場合には、Push the elephant と同等の戦略をとる。

資料：Durbin [2010] を参考に作成

量を急減させたことが、その後しばらくの間の株価の不安定化を招いた1つの要因であった可能性を指摘している。

71 一方、Biais, Martimort, and Rochet [2000] は、情報の非対称性のもとでのマーケット・メイカーの不完全な競争 (寡占) が呼値駆動型市場のビッド・オファー・スプレッドを拡大する要因となることを理論的に示した。Kyle [1985] は、コール・オークション市場を前提とした場合に同様の事象が生じることを示した。

する手法を提案した。以下では、Glosten and Milgrom [1985] や Easley *et al.* [1996] による基礎理論を簡単に紹介する。

時刻 t におけるファンダメンタル価格が S_t である資産を売買する市場に到来する注文量が、情報保有の有無によって強度の異なるポアソン過程に従うと考える。情報を有していない注文 (noise order) は一定強度 λ_n で到来する一方、情報を有している注文 (informed order) は強度 λ_i で到来するとし、情報を有した 1 つの注文は、資産の価値を Δs だけ変化させると設定する。また、マーケット・メイカーは注文が到来する時刻 t の直前に、情報を有していない注文、価格下落方向の情報を有している注文、価格上昇方向の情報を有している注文の割合がそれぞれ $p_n(t)$ 、 $p_{id}(t)$ 、 $p_{iu}(t)$ であると想定している ($p_n(t) + p_{id}(t) + p_{iu}(t) = 1$)。バイズの定理から、取引主体が提示するビッド B_t およびオファー A_t は、

$$\begin{cases} B_{t+1} = \mathbb{E}_t[S_{t+1}] - \frac{\lambda_i p_{id}(t)}{\lambda_n + \lambda_i p_{id}(t)} \Delta s, \\ A_{t+1} = \mathbb{E}_t[S_{t+1}] + \frac{\lambda_i p_{iu}(t)}{\lambda_n + \lambda_i p_{iu}(t)} \Delta s, \end{cases} \quad (22)$$

と表すことができる。(22) 式は、取引主体が情報を有した市場参加者 (informed trader) の存在によって、結果として逆選択を行うことになるとしても、スプレッドによりその損失を補填できる気配値の水準 (およびスプレッド) を示している。その水準は、確率 $p_n(t)$ 、 $p_{id}(t)$ 、 $p_{iu}(t)$ で表される逆選択の可能性と、注文が情報を有するか否かの比率によって決まる。

Easley *et al.* [1996] によると、パラメータ λ_n 、 λ_i および初期値 $p_n(0)$ 、 $p_{id}(0)$ 、 $p_{iu}(0)$ は、過去の購入と売却の約定数⁷²から、最尤法によって推計できる⁷³。すなわち、売却と購入に関する注文量や約定数の比率から情報の非対称性の度合いが決まる。Easley *et al.* [1996] は、この情報の非対称性度合いを、情報をもつ注文が全注文に占める割合である PIN (probability of information-based trade)⁷⁴で計測することを提案した⁷⁵。

72 Easley *et al.* [1996] では、仲値より高い価格での約定を購入と、低い価格での約定を売却と設定している。

また、仲値での約定の場合には、次の取引で約定価格が上昇したか下落したかで購入か売却を判断している。

73 Easley *et al.* [1996] は、 Δs については情報を有した注文のマーケット・インパクトに設定している。

74 PIN は、

$$\text{PIN} = \frac{\lambda_i(1 - p_n(t))}{\lambda_i(1 - p_n(t)) + 2\lambda_n}$$

と計算される。脚注 72 に示したように、PIN の推計では、約定が価格上昇/下落のどちらの方向に影響を与えているかを正しく評価する必要があり、これが推計上の難点である。

75 Easley *et al.* [2008] では、PIN の時間的持続性が高いこと、銘柄間の相関が高いこと、企業収益の報告前に上昇することなどが示されている。Kubota and Takehara [2009] では、PIN を流動性が反映された部分と流動性が反映されていない部分 (調整 PIN) とに分解したうえで、日本の株式市場に適用した結果、調整 PIN が流動性の指標と相関していると分析している。

ロ. 執行戦略への活用と逆選択リスクの管理

PIN で計測できる情報の非対称性の度合いを考慮した取引戦略はさまざまに考えられる。最も単純な例としては、買い注文が流入した際に、価格が上昇／下落する確率を、

$$\begin{cases} \Pr(\text{価格が上昇} \mid \text{買い注文が流入}) \simeq \text{PIN} \cdot 100\% + (1 - \text{PIN}) \cdot 50\%, \\ \Pr(\text{価格が下落} \mid \text{買い注文が流入}) \simeq \text{PIN} \cdot 0\% + (1 - \text{PIN}) \cdot 50\%, \end{cases}$$

と推定することで、注文フローと情報の非対称性に応じた価格変化を先読みする戦略が考えられる（売り注文が流入した場合も同様）。しかし、上記で解説したように、PIN は最尤法を用いるため推計に時間を要する。また PIN は、過去一定期間のサンプルに基づいて推計されるため、過去一定期間で均した情報の非対称性については把握できるが、取引時間中に流入する個々の注文の細かな非対称性については把握できない。また一部の研究では、PIN が情報の非対称性の有用な代理変数となっていないとの批判もある⁷⁶。そのため、実際の執行戦略に活用するためには工夫が必要となる。その工夫として、VPIN、注文フローの偏り、注文の積極性の3つを取り上げる。

(イ) VPIN

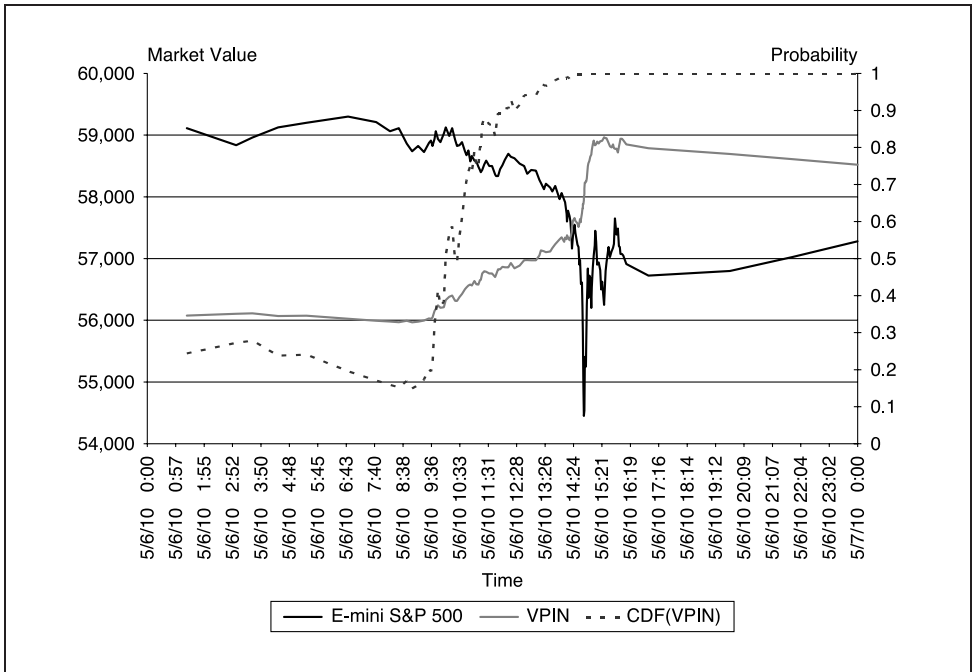
Easley, Prado, and O'Hara [2011a] では、注文量から推計した PIN ではなく、出来高から推計した VPIN を取引に活用することを提案した。VPIN は、売り手主導の出来高と買い手主導の出来高の差について、過去一定期間累積した値をその間の出来高全体で規格化した量として定義される⁷⁷。PIN と VPIN は、モデルが仮定する状況のもとではほぼ同値（近似誤差程度の差異）であるが、情報源が異なっている。また、VPIN は、PIN のように最尤法による推計を要しないため高速に計算できる。Easley, Prado, and O'Hara [2011a] によると、VPIN は PIN と同様に情報の非対称性の度合いを表現しており、高頻度取引のような高速売買での利用に適しているとされる。

Easley, Prado, and O'Hara [2011b] は、フラッシュ・クラッシュが発生した2010年5月6日のS&P 500 株価指数先物Eミニ相場の取引データを用いてVPINを計算したところ、クラッシュの発生はかなり前からVPINが高水準のレベルに上昇していたことが観測され（図15）、このことから、クラッシュが発生する以前から市場で情報の非対称性が拡大し、価格形成が不安定化する危険性が高まっていたと指摘した。さらに、高頻度取引業者など機械的に売買を行う市場参加者は常にVPINを参照するとともに、VPINに基づいた逆選択リスクの管理を行うべきであると主張した。

76 Duarte and Young [2009] や Kubota and Takehara [2009] を参照。

77 ここで、買い手主導の出来高とは、執行価格が、(i) 1時点前の執行価格より高い、(ii) 1時点前の執行価格と同一かつ1時点前が買い手主導であった、とのどちらかに相当する場合の取引高と定義している（売り手主導の出来高も同様）。VPIN は、売り手主導の出来高から買い手主導の出来高を差し引いた量のばらつき度合いを表している。

図 15 フラッシュ・クラッシュ前後における VPIN の動き



備考：破線（CDF(VPIN)）は、過去の VPIN データから推計される累積確率密度（CDF）の中で、現時点の VPIN がどの位置にあるかを示した量。値が高いほど過去と比べて現在の VPIN が高まっていることを示している。

資料：Easley, Prado, and O'Hara [2011a] から転載

(ロ) 注文フローの偏り

情報の非対称性を分析するうえで、売買注文の偏りも重要な要素となる。ここでは、注文フローと価格変動の関係について分析した実証研究を紹介する。

Plerou *et al.* [2002] は、1994～95 年の米国株のティック・データに基づき、売買の偏り⁷⁸と価格変動の関係を分析し、価格変動と売買の偏りには、指数が 1/3～1 となる、べき関数の関係があることを実証した。Cont, Kukanov, and Stoikov [2011] は、2010 年 4 月の米 S&P 500 株価指数構成銘柄のうち 50 社のティック・データを解析した結果、最良気配上の売買注文量の偏りが価格変動の多くを説明すると結論付けている。具体的には、最良買い気配上の注文量の時間変化から最良売り気配上の注文量の時間変化を差し引いた値を注文フローの偏り（order flow imbalance: OFI）と定義する。同時刻の価格変化を当該 OFI に単純回帰すると、ほとんどの銘柄で決定係数が 65～68% に決まり明確な比例関係が認められた一方、取引量を説明変数に加えて回帰分析を行っても統計的有意性は認められなかった。こうした点から、Cont,

78 ここでは、1 つ前に約定した価格より低い価格で約定した場合には売り（マイナス）に、高い価格で約定した場合には買い（プラス）に偏っていると判断し、それに約定株数を掛け合わせた量を過去一定時間分足し上げた値を売買の偏りとして分析している。

Kukanov, and Stoikov [2011] は注文の偏りが短時間の価格変化の大部分を決めていると分析している⁷⁹。

これに関連して、注文フローに時間的な持続性（自己相関）があるとの結果も多数報告されている。例えば、Biais, Hillion, and Spatt [1995]、Foucault, Kadan, and Kandel [2005]、Obizhaeva [2008] は、売買注文の偏りに統計的に有意な自己相関があることを示している。これらの結果を総合すると、注文フローの偏りは、価格の方向性を先読みする取引（いわゆるディレクショナル取引）の執行戦略にとって重要であるといえる。

(ハ) 注文の積極性

情報の非対称性を読み取るための別の工夫として、注文の積極性（order aggressiveness）を利用する試みもある。注文の積極性とは、マーケット・インパクトやスプレッドといったコストを支払ってでも現時点の最良気配に近い価格で早く執行したいと考える市場参加者の割合を指す。積極性が高い注文ほど、背後で現在の価格が割安あるいは割高であるとの評価が行われている可能性があり、そうした注文は情報を有している可能性が高いと判断される⁸⁰。注文の積極性に関しては、Biais, Hillion, and Spatt [1995]、Rinaldo [2004]、Foucault, Kadan, and Kandel [2005]、Pasquariello and Vega [2007] など古くから多数の研究が行われている。注文の積極性を表す指標としては、指値注文に対する成行注文の比率がしばしば用いられるが、より詳細な指標として、Rinaldo [2004] では、注文指図を i) 最良気配上の注文量より大きい成行注文、ii) 最良気配上の注文量より小さい成行注文、iii) 最良気配の内側の価格への指値注文、iv) 最良気配上あるいはその外側の価格帯への指値注文、v) 指値注文の取消の5つに分類し、この順に積極性が高いと設定している。積極性の変化については、注文価格を最良気配に近い価格水準に入れ替える行動や、同じ価格水準に滞在する時間等によって計測されている⁸¹。

79 このほか、Evans and Lyons [2002] は、為替相場変動の説明要因として、マクロ指標のほかに注文フローを加えると、その説明力が増すことを実証している。Rime, Sarno, and Sojli [2010] は、高頻度データを用いて、注文フローには日中の為替相場の変動に対する予測力があることを示している。

80 消極的に売買する情報トレーダーも存在しうるが、この枠組みでの議論の対象ではない。

81 Rinaldo [2004] では、取引主体が発注している側の指値板の注文量が増すほど、スプレッドが拡大するほど、また、ボラティリティが増すほど、注文の積極性が増すとの結果が得られている。関連する研究として、Obizhaeva [2008] は機関投資家の大口取引データ（7割程度が米国で執行された2001～05年のデータ）を用いて取引コストを分析している。具体的には、Fama and French [1992] の3ファクターにモーメントを加えた4ファクター・モデルで規格化された株価収益率データを用いて、当該機関投資家の売買執行後における株価の変化方向を分析している。購入の場合には価格上昇が、売却の場合には価格下落が2週間程度に亘って統計的に有意に観察され、情報の非対称性が大きい銘柄ほど大きくなるとの結果が得られている。情報の非対称性については、(a) 当該企業の収益予想を算出しているアナリストの数（大きいほど透明性が高まり情報の非対称性が低下）、(b) ビッド・オファー・スプレッドの大きさ（大きいほどマーケット・メイカーにとっての逆選択リスクが大きく、情報の非対称性が大きいとみなされる）、(c) PIN の3つによって計量している。Obizhaeva [2008] の結果は、大口注文が平均数日に分けて執行されていること、また、その際のマーケット・インパクトには持続性があり、情報の非対称性に依存することなどを示唆している。

ハ. 情報ベースの価格付けモデル

高頻度取引をはじめとした一部の取引戦略では、ニュースや経済統計といった市場外から到来する情報が市場価格に与えるインパクトから収益を得ることを目指すものがある。これに関連する研究として、Brody, Hughston, and Macrina [2008] による情報ベースの価格付けモデル (information-based asset pricing model) がある。当該モデルでは、情報の流れをモデル化することで価格付けを行う。情報の流れという推計が困難な確率過程を含むため実務に直接利用できるモデルではないが、取引の理論的枠組みや有効性を理解するうえで役立つことから紹介する⁸²。

時刻 t においてすべての市場参加者に既知である情報の流れを ξ_t とかき、当該情報のもとで、将来の時刻 T ($> t$) に C_T のキャッシュ・フローを生む資産の時刻 t での価値を評価することを考える⁸³。Brody, Hughston, and Macrina [2008] は、適当な ξ_t のモデルとして、

$$\xi_t = \eta C_T t + \beta_{t,T}, \quad (23)$$

を提案している。ここで、 η は時間の経過に伴いキャッシュ・フローの真の価値 C_T が市場に明らかになってくる速度、 $\beta_{t,T}$ は情報ノイズを表しており標準ブラウニアン・ブリッジによってモデル化されている⁸⁴。さらに任意の期間の無リスクの債券価格が既知であると、時刻 t における満期 T の無リスク・ゼロクーポン債券価格 (額面 1) を $d_{t,T}$ と表す。このとき、同資産の時刻 t における価格 S_t は、 $S_t = d_{t,T} \mathbb{E}[C_T | \xi_t]$ と表せる。ここで \mathbb{E} はリスク中立測度下での期待値を表す。

Brody *et al.* [2008] では、この情報ベースの価格付けモデルをもとに、市場情報を上回る情報を有した取引主体 (情報トレーダー) の取引を想定したモデルを示している。それによると、情報トレーダーは、市場と同一の事前分布 (価格に対する事前予想) をもつが、情報については、市場全体の情報 ((23) 式) に加えて別の情報

$$\xi'_t = \eta' C_T t + \beta'_{t,T}, \quad (24)$$

を有しているとする。ただし、ノイズ $\beta_{t,T}$ と別のノイズ $\beta'_{t,T}$ の相関係数は ρ ($-1 < \rho < 1$) であり、両者は無相関でありうるものの完全相関はしないものとする。こうした設定で、情報トレーダーが評価する価格は、

$$\hat{S}_t = d_{t,T} \mathbb{E}[C_T | \xi_t, \xi'_t] = d_{t,T} \mathbb{E}[C_T | \hat{\xi}_t], \quad (25)$$

82 当該モデルに関連する技術として、ニュース・マイニングがある。本節(4)で紹介する。

83 一般の価格付け理論では、未知のキャッシュ・フロー C_T を確率過程によってモデル化するが、情報ベースの価格付け理論では、 C_T については事前分布のみが与えられているとし、情報 ξ_t を確率過程によってモデル化する。

84 ここでブラウニアン・ブリッジとは、始点 0 と終点 T が確率 1 でゼロ ($\beta_{0,T} = \beta_{T,T} = 0$) となるブラウン運動であり、時刻 t ($0 < t < T$) における分散が $t(T-t)/T$ となる。

となる。ただし、

$$\hat{\xi}_t = \hat{\eta} C_{Tt} + \hat{\beta}_{t,T}, \quad \hat{\eta}^2 = \frac{\eta^2 - 2\rho\eta\eta' + (\eta')^2}{1 - \rho^2}, \quad (26)$$

であり、 $\hat{\beta}_{t,T}$ は別の標準ブラウニアン・ブリッジである。すなわち、市場価格 S_t に反映される情報量は、将来のキャッシュ・フローの真の価値の η の割合であるのに対して、情報トレーダーの評価価格 \hat{S}_t に反映される情報量は真の価値の $\hat{\eta}$ の割合である。(26) 式より $\hat{\eta}^2 - \eta^2 = (\rho\eta - \eta')^2 / (1 - \rho^2) > 0$ であるから、情報トレーダーの評価価格は、 η の大小やノイズの相関 ρ にかかわらず市場価格より多くの真の情報量を反映する。

Brody *et al.* [2008] では、情報トレーダーがとりうる最も単純な取引例として、事前確率 $p_1 = 0.2$ で $c_1 = 0$ 、確率 $p_2 = 0.8$ で $c_2 = 1$ となる仮想的な債券を満期保有で購入する場合の、情報トレーダーの損益を次のように求めている。市場情報のみをもつ市場トレーダーは、市場価格 S_t がある一定の価格 K を超えた場合に無リスク金利で調達した資金をもとに当該債券を購入する。一方、情報トレーダーは市場価格が \hat{S}_t を超えた場合に無リスク金利で調達した資金をもとに購入する。このとき、満期における市場トレーダー、情報トレーダーそれぞれの収益 V_T 、 \hat{V}_T は、

$$\begin{cases} V_T = \mathbf{1}_{\{S_t > K\}}(X_T - S_t/d_{t,T}), \\ \hat{V}_T = \mathbf{1}_{\{\hat{S}_t > K\}}(X_T - S_t/d_{t,T}), \end{cases}$$

となる。その差の期待値は、

$$\mathbb{E}[\hat{V}_T - V_T \mid \xi_t, \hat{\xi}_t] = \frac{1}{d_{t,T}}(\mathbf{1}_{\{\hat{S}_t > K\}} - \mathbf{1}_{\{S_t > K\}})(\hat{S}_t - S_t) > 0,$$

となり、情報トレーダーの収益が無リスクで市場トレーダーを上回る。

(3) 注文フローの確率過程

Cont, Stoikov, and Talreja [2008] は、売り買いの両サイドに流入する指値・成行・取消指図の流量（注文フロー）がポアソン過程に従うとの設定のもと、次の注文が市場に到達した際に価格がどちら方向にどれほどの確率で動くかを数学的に導出している。具体的には、市場に到来する 1 単位の指値・成行注文と指値注文取消の指図がすべて強度の異なるポアソン過程に従うと考える。成行注文の強度は一定値 μ とし、指値注文の強度 λ はファンダメンタル価格からのティック数（呼値の数） δ のべき関数として $\lambda(\delta) \propto \delta^{-\alpha}$ と設定する⁸⁵。また、指値の取消注文は、それぞれの価

⁸⁵ これは、3 節(3)ニ. で紹介した Bouchaud, Mézard, and Potters [2002a] による実データの解析結果と整合的な設定である。なお、Cont, Stoikov, and Talreja [2008] は、当該式を東証に上場している銘柄にカリブレートし、比例係数が 1.92、 $\hat{\alpha} = 0.52$ と推定している。

格帯に残存する指値注文量 $n(\delta)$ に比例する関数として $\theta(\delta) \propto n(\delta)$ と決め、比例係数はそれぞれの δ ごとに推定している⁸⁶。

こうした設定のもとで、ファンダメンタル価格が上昇する時刻を次のように求めている。最良買い気配に n_b 個、最良売り気配に n_a 個の注文が存在するとする。はじめに、最良気配に存在する n 個の注文が、執行あるいは取り消されることによりゼロとなる最初の時刻 τ_n を求めると、そのラプラス変換は⁸⁷、

$$\mathcal{L}[\tau_n](s) = \left(-\frac{1}{\lambda(\delta)}\right)^n \prod_{i=1}^n \Phi_{k=i}^{\infty} \frac{-\lambda(\delta)\{\mu + \theta(\delta)k\}}{\lambda(\delta) + \mu + \theta(\delta)k + s}, \quad (27)$$

となる⁸⁸。ファンダメンタル価格が動くのは、(a)最良買い気配の注文量がゼロとなる、(b)最良売り気配の注文量がゼロとなる、(c)ビッド・オファー・スプレッド内に新しい指値注文が到来するのいずれかが発生した時点である。まず、ビッド・オファー・スプレッドが1ティックとなる(c)の変化がないようなケースを考えると、ファンダメンタル価格が上昇するのは、 n_b がゼロとなる前に n_a がゼロとなる場合であるから、その時刻は $\tau_{n_a} - \tau_{n_b}$ がゼロとなる最初の時刻である。そのラプラス変換は、

$$\mathcal{L}[\tau_{n_a} - \tau_{n_b}](s) = (1/s)\mathcal{L}[\tau_{n_a}](s)\mathcal{L}[\tau_{n_b}](-s),$$

と与えられる。次に、スプレッドのティック数が $d (> 1)$ である場合を考えると、ファンダメンタル価格が上昇するのは、 x_b がゼロとなるか売り指値がスプレッド内に到来する前に x_a がゼロとなる、あるいは買い指値がスプレッド内に到来する、のいずれかの場合であるから、その時刻 τ_{up} について、

86 こうした設定は、出生死滅過程 (birth-death process) と呼ばれている。Makimoto and Sugihara [2010] でも、指値板上の注文総量の変化を類似の過程でモデル化している。

87 確率変数 X の確率密度関数を $f_X(x)$ とすると、そのラプラス変換は、

$$\mathcal{L}[X](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f_X(x) dx = \mathbb{E}[e^{-sX}],$$

と定義される。確率密度関数 $f_X(x)$ のラプラス変換を、ここでは確率変数 X のラプラス変換と呼ぶこととする。

88 出生率 λ 、死亡率 θ の出生死滅過程において、注文量が i から1つ減り $i-1$ に遷移する最初の時刻のラプラス変換が、

$$-\frac{1}{\lambda} \Phi_{k=i}^{\infty} \frac{-\lambda\theta k}{\lambda + \theta k + s},$$

と表されるとの Abate and Whitt [1999] の結果を用いている。ここで、 Φ は連分数：

$$\Phi_{k=m}^n \frac{a_k}{b_k} = g_n(g_{n-1}(\dots(g_m(0))\dots)) = g_m \circ g_{m+1} \circ \dots \circ g_n(0),$$

$$g_k(x) = \frac{a_k}{b_k + x} \quad (k = m, m+1, \dots, n),$$

を表すオペレータである。

$$f_{\tau_{up}}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \left\{ \mathcal{L}[\tau_{na}](\Lambda(\delta) + s) + \frac{\Lambda(\delta)\{1 - \mathcal{L}[\tau_{na}](\Lambda(\delta) + s)\}}{\Lambda(\delta) + s} \right\} \right. \\ \left. \times \left\{ \mathcal{L}[\tau_{nb}](\Lambda(\delta) - s) + \frac{\Lambda(\delta)\{1 - \mathcal{L}[\tau_{nb}](\Lambda(\delta) - s)\}}{\Lambda(\delta) - s} \right\} \right] (x), \quad (28)$$

(ただし、 $\Lambda(\delta) = \sum_{k=1}^{\delta-1} \lambda(k)$) と計算できる⁸⁹。(27)・(28)式を売り・買いの注文板の双方に適用すると、市場データから注文流量の強度を推定することで、次に価格が動くまでの時間とその変化方向を確率的に予測することができる。また、価格が変動する前にポジションを閉じることができる確率も計算できる。Cont, Stoikov, and Talreja [2008] は、こうした理論が、高頻度取引のリスク(収益の振れ)を低減するのに有効であることを実データを用いて示している。

(4) 高頻度取引とニュース・マイニング

高頻度取引を中心とした一部のアルゴリズム取引戦略ではニュース情報が利用される。その際、定性的なニュースは、コンピュータでの解析が可能なように定型化される。定型化されたニュースは「機械可読ニュース」(machine readable news)と呼ばれ、一部の大手情報ベンダーから配信されている。機械可読ニュースは、そのままでは取引に用いることはできず、さらに何らかの統計的な処理により定量情報に変換されている。定性的な報道情報を定量化するこうした一連の手法は「ニュース・マイニング」と呼ばれ、1990年代から研究されている。ニュース・マイニングは研究途上であり、確立された一般的な手法があるわけではないが、ここでは、現在実務で使われている手法として、トムソン・ロイター社が提供するニューススコープ・イベント指数と同センチメント指数を取り上げて解説する。

イベント指数は、政治、マクロ経済、企業財務、地政学的リスクといった情報区分に関連する報道の活発さを指数化したものである。AlphaSimplex Group [2008]によると、イベント指数では、相場に関連する情報をいくつかの情報区分に分類し、過去数分間の報道情報内にそれぞれの区分に該当するキーワードがどの程度含まれるかを指数化している。イベント指数を取引に用いる際には、個々の情報区分が利用者にとってどの程度重要かを数値化し、重要度に応じてイベント指数を加重平均す

89 (28)式では、確率変数 τ_x と独立な指数分布に従う確率変数 $Z \sim \mathcal{E}(\Lambda)$ の最小値 $\tau_n \wedge Z$ の累積確率密度関数が、

$$F_{\tau_n \wedge Z}(t) = 1 - \Pr[\tau_n > t] \Pr[Z > t] = 1 - \{1 - F_{\tau_n}(t)\} e^{-\Lambda t},$$

となることから、そのラプラス変換が、

$$\mathcal{L}[\tau_n \wedge Z](s) = \mathcal{L}[\tau_n](\Lambda + s) + \frac{\Lambda}{\Lambda + s} \{1 - \mathcal{L}[\tau_n](\Lambda + s)\},$$

と計算できることを用いている。

るなど、利用者のニーズに応じた加工が施される。

センチメント指数は、機械可読ニュースを一定のアルゴリズムに従って、市場のセンチメントを表現する指数に変換したものである。当該アルゴリズムの概要は以下のとおりである。

- (i) 各ニュース記事内の単語について、ポジティブ／ネガティブな意味を表すキーワードを抽出し、個々の単語のポジティブ／ネガティブな度合いを定量化し足し上げた「インパクト・スコア」を算出する。
- (ii) 各記事が、該当する企業あるいはマクロ経済や政治といった情報区分にどのくらい関連したものを「妥当性スコア」として評価する。
- (iii) 各記事のユニークさ、時間的な早さを別途「ユニーク性スコア」として評価する。同じ情報を引用した記事であれば評価は低くなる。
- (iv) インパクト・スコア、妥当性スコア、ユニーク性スコアを、それぞれ記事の対象となる企業ごと、あるいはジャンルごとに統合する。
- (v) 単位時間内における統合した各スコアを適当なウエイトをもとに加重平均することでセンチメント指数を算出する。

ニュース・マイニングでは、各情報区分に該当するキーワードの選択や指数化する際の加重の与え方がポイントとなる。現在のところ前者については、はじめに手動で妥当な単語を幅広く選択し、そのうえで簡単なアルゴリズムで絞り込む手法がとられているようである⁹⁰。後者については、過去データに基づいたテスト（バックテスト）を実施することにより、価格の変化方向やその大きさなどの予測力が高い加重が探査される。前者・後者とも、その実装に人工ニューラルネットワークや遺伝的プログラミングといった人工知能技術が応用されることもある。

このように算出した指数（報道関連指数）は、実務においては、短時間の価格変化の方向や大きさを予測する際に活用されているとみられる。指数の大小に応じてポジションを変化させる直接的な利用のほか、既存のアルゴリズムに取り込んで利用されることが多いようである。Johnson [2010]によると、報道関連指数は、数秒先の価格変化方向を予測し逆選択に起因する取引コストの削減につなげる、あるいは報道関連指数が大きく変動した際にポジションを自動的に造成あるいは解消するアルゴリズムを組み込むことで在庫リスクを制御するといった活用方法が想定されている⁹¹。

このようにニュース・マイニングは、逆選択に起因する取引コストの削減には有効である可能性があるが、収益に直接に寄与するかについては見方が定まっているわけではない。ニュース・マイニングを取引に活用する研究をサーベイした Mittermayer and Knolmayer [2006]によると、ニュース・マイニングで相場のトレンドを予測し

90 AlphaSimplex Group [2008]では、価格のボラティリティを単語の出現頻度に回帰し、その回帰係数をもとに単語の重要度を決めている。

91 報道関連指数は、大口取引向けアルゴリズム取引においても、取引コストの一部分であるタイミング・コストの計量で重要となるボラティリティや流動性の予測に活用されているとみられる。

10分～1日の取引間隔で売買する試行実験では、平均で数十パーセントの収益率が期待できるとの結果が得られている。一方で、Koppel and Shtrimerberg [2006] では、こうした試行結果は理論上のものであり、取引コストなどが勘案されていないため、現実にはそうした収益を達成するのは困難との見解が示されている。

なお、ニュース・マイニングは、取引への活用を目指しているだけでなく、報道情報に対する市場の反応に関する研究にも利用されている。また、これに関連して、最近では、インターネット上の企業や相場に関する書き込み、あるいはツイッターのつぶやきといった「口コミの流布情報」から、大衆のセンチメントの変化（バイラル効果）を早期に捉え、株価指数の変化方向を予測する研究も行われている（Bollen, Pepe, and Mao [2009]、Bollen, Mao, and Zeng [2011]、Berreby [2010]）。

5. 統計的裁定取引の執行戦略を巡る研究

統計的裁定取引（statistical arbitrage）とは、市場での非合理的な価格が、過去の時系列や他の商品の価格から推計される統計則に基づいて算出された合理的な価格に平均回帰するとの前提で構築される取引戦略である^{92,93}。典型的な統計的裁定取引について、表4に示した。統計的裁定取引戦略は、(1)過去データの分析に基づいた「データ駆動型戦略」と、(2)金融工学の理論を背景とした「理論駆動型戦略」の2つに大別できる。統計的裁定取引等の戦略は非常に多岐に亘るため、ここでは個々の理論は解説せず、統計的裁定取引の基礎理論について解説する⁹⁴。

(1) データ駆動型戦略

データ駆動型の統計的裁定取引について解説している研究としては、Pole [2007]、Avellaneda and Lee [2010]、Meucci [2010]、Fabozzi, Focardi, and Kolm [2010] などがある。それらによると、データ駆動型戦略の背景にある基本的なアイデアは次のようである。

- (i) N 個の複数資産の収益率 R_t の共変動成分（systematic factor） \tilde{R}_t を探索し、その数を M とする。

92 統計的裁定取引の概要は杉原 [2011] 3節(5)ロ.を参照。複数資産を対象とした高頻度取引の収益を決める1つのポイントは、複数銘柄の価格調整をいかに速く行うかにある。すなわち、複数銘柄間の価格の歪みをいち早く修正する裁定取引のようなかたちで売買を行うことから、高頻度で行われる統計的裁定取引は、高頻度取引の一種に分類されることもある。

93 数学的に厳密に統計的裁定取引機会の存在を議論した研究として Bondarenko [2003] がある。それによると、統計的裁定取引とは、(i)満期のペイオフの期待値が正である、かつ(ii)満期の資産価格が既知である条件付きのペイオフの期待値がゼロ以上であるとの2つの条件が満たされる無コストの取引であると定義されている。

94 個々の戦略については、Durbin [2010]、Aldridge [2009]、Narang [2009]などを参照。

表 4 統計的裁定取引の典型例

取引対象	名称	内容	背後にある考え方・特徴
現物	レイテンシー裁定 (株式、為替)	複数の市場や取引システムで 売買されている同一商品の価 格の乖離を裁定。	同一商品は同一価格である。 取引システムによって売買や 価格更新の速度に差があるた め一時的に価格が乖離しうる。
	ETF 裁定 (株式)	指数 ETF 構成銘柄の株価から 計算した ETF 理論値と、ETF の市場価格の乖離を裁定。	ETF 構成銘柄の株価が変化す れば、理論上 ETF の水準も変 化する。
	ペア・トレード (主に株式)	相関が高い資産ペアの価格差 を裁定。	過去データからみて相関が高 く安定的である資産価格の乖 離は、平均回帰する。ヘッジ ファンドのロング・ショート 戦略に類似しているが、同戦 略は企業収益予想等ファンダ メンタルズに関連する情報を 利用する一方、統計的裁定取 引では通常利用しない。
	三角裁定 (為替)	3 通貨の 3 つのペアについて、 うち 2 つから構成される残り 1 つの理論相場と、市場の為 替相場との乖離を裁定。	複数ペアの為替相場には、理 論的な関係がある。
現物と 派生商品	ベースス、 キャッシュ & キャリー (株式)	同一企業 (あるいは指数) に 関する現物と先物価格の乖離 を裁定。	現物と先物価格には理論的な 関係があり、両者はその関係 から著しく乖離しない。
	現物とオプション	現物価格やボラティリティの 変化に対するオプション価格 の理論的变化幅と、市場価格 の変化幅に差があるとき、そ れを裁定。	原資産価格、そのボラティリ ティとオプション価格には理 論的な関係があり、過去デー タからみて、その関係は安定 しているとされる。
派生商品	プット・コール・ パリティ	オプションのプット・コール・ パリティを裁定。	プット・オプションとコール・ オプションおよび先物価格間 には、理論的な関係がある。
	オプション・ペア、 先物ペア (株式、 コモディティ)	原資産価格あるいはボラティ リティ間の相関が高い 2 つの オプションや先物価格の乖離 を裁定。	過去データからみて原資産の 価格やボラティリティの相関 が高く安定的である派生商品 価格は著しく乖離しない。
	限月スプレッド (株式、コモディ ティ)	満期の異なる先物価格が著し く乖離する場合、その差を裁 定。	異なる限月の先物価格には理 論的な関係があり、両者はその 関係から著しく乖離しない。

備考：シャドーは理論駆動型戦略。アルゴリズム取引が活用される統計的裁定取引を掲載。主としてヘッジファンドが行う裁定取引（イールドカーブ裁定、キャピタル・ストラクチャー裁定、アセット・スワップ、ボラティリティ裁定等）は掲載していない。

- (ii) 価格変動から m ($< M$) 個の主要な共変動成分によって説明可能な変動をすべて取り除いた残存部（固有変動成分；idiosyncratic factor）が平均回帰的な変動となるように m を設定する。
- (iii) 固有変動成分がその平均に対して低い場合は購入、高い場合は売却する。

すなわち、 $\tilde{\mathbf{R}}_t$ を主要な共変動成分からなる m 次元ベクトル、 $\boldsymbol{\mu}$ 、 \mathbf{B} をそれぞれパラメータからなる N 次元ベクトルおよび $N \times m$ 行列とすると、収益率が

$$\mathbf{R}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (29)$$

と表現されるモデルが想定されている。ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ は平均回帰する固有変動成分ベクトルで裁定取引の源泉となる変動性を示す。また、パラメータ $\boldsymbol{\mu}$ 、 \mathbf{B} は過去データから推計される。なお、(29) 式は、資産収益率の間の裁定取引を想定したものであるが、現物と先物など派生商品の裁定取引でも類似のモデルが適用できる。

データ駆動型戦略で重要となるのは、固有変動成分が平均回帰的な挙動を示すような共変動成分をいかに発見するかである。Avellaneda and Lee [2010] では共変動成分として、過去の時系列の主成分分析を用いるケースと、業種別株価指数 ETF（上場投資信託）を活用するケースが想定されている。主成分分析のケースは、規格化された収益率の分散共分散行列を主成分分解し、そのうち上位 m 個の主成分のそれぞれを合成するポートフォリオを構築することで構成される⁹⁵。共変動成分数 m について、ランダム行列理論⁹⁶を用いて主要国の株価を分析した Plerou *et al.* [2002] などの実証研究では、10~20 の共変動成分で株価変動のおよそ 50% が説明可能であるとされている。一方、業種別 ETF を用いるケースは、金融商品を保有（あるいは売却）する一方、共変動成分となりうる業種別 ETF 等をベータ (\mathbf{B}) だけ売却（購入）することで構成される。

上記の研究では、裁定の対象となる乖離を導出することに主眼がおかれている。これに対して Martin and Schöneborn [2011] では、裁定対象とする乖離 ε_t を平均回帰過程として外生的に与え、最適な売買タイミングを自己ポジション q_t と裁定対象 ε_t の関数として導出している⁹⁷。具体的には、まず裁定対象 ε_t について、

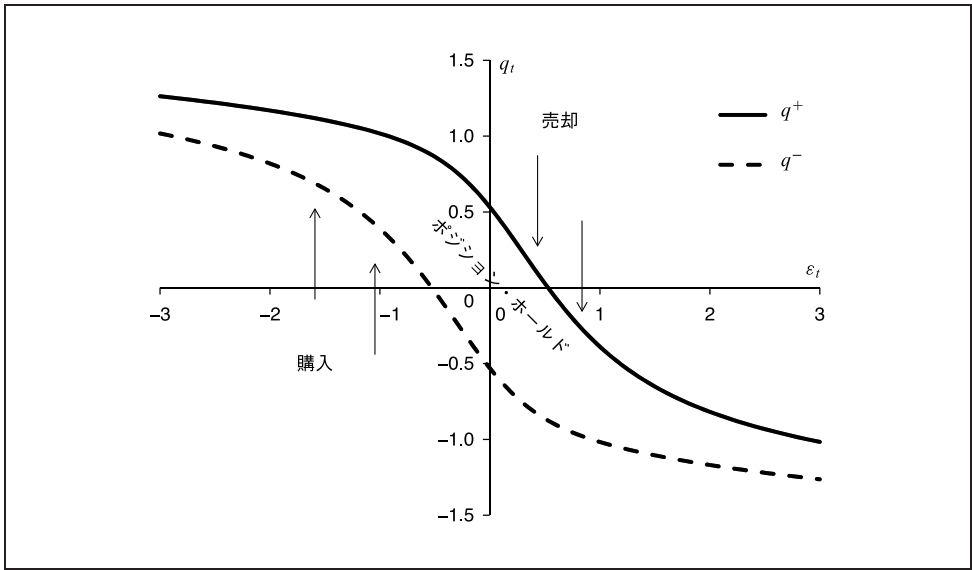
$$d\varepsilon_t = \mu(\varepsilon_t) dt + \sigma(\varepsilon_t) dW_t, \quad (30)$$

95 当該ポートフォリオは、単純に該当する主成分の固有ベクトルをボラティリティで規格化した分量（ベータ）だけ各資産を保有することで構築できる。

96 ランダム行列とは、確率変数を要素にもつ行列で、その固有値が従う漸近分布が解析的に導出できる。当該漸近分布と実データから導出される固有値を比較することで、共変動成分と認識される固有値の閾順位等を測ることができる。

97 類似の研究として、Bertram [2010] あるいは Boguslavsky and Boguslavskaya [2004] でも、乖離を外生的に与え、それが一定水準を下回れば購入し、別の一定水準を上回ると売却するという単純な戦略を想定し、収益率や執行時間の分析を行っている。また、Guo and Zhang [2005] は、レジーム・スイッチング・モデルを用いて、最適な売却、購入タイミングを分析している。

図 16 統計的裁定取引における売買上限／下限の例



備考：実線より上が売却領域、破線より下が購入領域、両線の間が売買を行わない（ポジション・ホールド）領域。平均回帰・局所ボラティリティ・モデルを想定。

資料：Martin and Schöneborn [2011] を参考に作成

と表現する。ここで、 $\mu(\varepsilon_t)$ 、 $\sigma(\varepsilon_t)$ は ε_t の関数であり、(30) 式は平均回帰過程を含む一般的な過程を表現できる。このとき、執行量に比例する取引コスト（比例係数： θ ）が発生する前提で、乖離を売買する主体の効用最大化問題を解くと、ポジション q に関する上限 $q^+(\varepsilon_t)$ 、下限 $q^-(\varepsilon_t)$ の近似解が次のように導出される。

$$q^\pm(\varepsilon_t) \simeq \frac{1}{\gamma} \left(q_0(\varepsilon_t) - \left\{ \frac{2\theta^2 |q'_0(\varepsilon_t)|}{3} \right\}^{1/3} \pm \left\{ \frac{3\theta |q'_0(\varepsilon_t)|^2}{2} \right\}^{1/3} \right), \quad q_0(\varepsilon_t) = \frac{\mu(\varepsilon_t)}{\sigma(\varepsilon_t)}. \quad (31)$$

ここで γ は取引主体のリスク回避度である。図 16 には、 $\mu(\varepsilon_t) = -b\varepsilon_t$ 、 $\sigma(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon(1 + c^2\varepsilon_t^2)^\beta$ となるような平均回帰・局所ボラティリティ・モデルを想定した場合の $q^\pm(\varepsilon_t)$ を、横軸に ε_t 、縦軸に q_t をとり図示した。図からわかるように、 $q^\pm(\varepsilon_t)$ は右肩下がりの曲線となり、両曲線の内側では取引せず、 $q^+(\varepsilon_t)$ より上の領域ではポジションが $q^+(\varepsilon_t)$ となるまで売却し、 $q^-(\varepsilon_t)$ より下の領域ではポジションが $q^-(\varepsilon_t)$ となるまで購入するのが適当である。

(31) 式は、統計的裁定取引を行う主体の執行行動について、いくつかの示唆を与えている。例えば、リスク回避度 γ が上昇すると、 $q^\pm(\varepsilon_t)$ がともに低下しその距離が縮まる。すなわち、リスク回避的な主体ほどポジションの保有量を減らすことから、ポジションを維持する領域が狭まり、売買を頻繁に繰り返す高頻度な戦略が最適となる。逆に、取引コストが拡大すると、 $q^\pm(\varepsilon_t)$ の間の距離は図の中心部分（ ε_t が

ゼロの近傍)で拡大する。これは、取引コストが拡大すると、支払うコストに見合うだけ裁定対象の乖離が拡大するのを待たなくてはならないことを示している。

データ駆動型戦略では、固有成分を探索する際などに定量データのマイニング技術を応用しているものがある。本節(3)で紹介する。

(2) 理論駆動型戦略

理論駆動型戦略は、取引コストなど市場の摩擦の影響で、市場価格が無裁定理論から計算される理論価格から乖離することがあり、その乖離が時間の経過とともに平均回帰するとの前提で組まれている。表4からわかるように、理論駆動型戦略の多くには派生商品が関連しており、その背後には取引コストを踏まえた派生商品の価格付けやヘッジに関する理論がある。この分野は古くから数多くの研究がなされている⁹⁸。通常、合理的な価格帯、あるいは価格の上限・下限等が導出される。その価格帯と市場価格の水準を比較することで、割安であれば購入し割高であれば売却するといった理論駆動型の戦略が構築できる。

このほかに、特定の市場の歪みを対象とした研究もある。例えば、Avellaneda and Lipkin [2009] は、ショート・ポジション造成を目的とした借入れが困難化する金融商品の価格過程をモデル化している⁹⁹。借入れの困難化は、一種の取引コストの増大と考えることができる。Avellaneda and Lipkin [2009] は、借入れ困難な証券の価格過程を外生的に与えることで¹⁰⁰、当該資産を原資産とした派生証券の価格付け手法を提案している¹⁰¹。このようなモデルも、計算される歪みを踏まえた価格と市

98 こうした研究では、オプションのデルタヘッジを例に分析されることが多い。例えば、Cvitanic and Ma [1996] は、大口投資家のポートフォリオの変化が資産価格に影響するとの前提で、オプションのヘッジ戦略や原資産価格の変動を理論化している。Rogers and Singh [2010] は、一時的/恒久的インパクト・モデルに従う取引コストが発生するもとで、流動性が低い資産の最適なヘッジ戦略を導出している。一方、Bank and Baum [2004] は、大口投資家の裁定機会の存在について議論している。それによると、大口投資家はマーケット・インパクトを与えることができる一方、取引コストを支払わなくてはならない。この両者をネットアウトするような確率測度の存在が、大口投資家の裁定機会が存在しないための条件であるとされている。また、Platen and Schweizer [1998]、Frey and Stremme [1997]、Sircar and Papanicolaou [1998] などでは、オプション等の離散的なヘッジ行動によって、原資産価格がどういった影響を受けるか、さらにその結果、オプション価格にどういったフィードバックがあるかについて、経済学的観点から分析されている。

99 例えば、空売り規制や、流通量に対するショート・ポジションの割合が高い証券に対して急激なポジションの清算需要が発生する、いわゆるスキューズがこうした状況に当たる。

100 具体的には、ショート・ポジションを解消する需要 (buy-in rate) が大きくなると証券価格が急激に上昇する一方、その需要が減少すると当該価格が上昇前の水準まで急速に下落する特徴が市場で観察される。これを踏まえ、Avellaneda and Lipkin [2009] は、価格過程として、ドリフトが buy-in rate に比例するとともに、同レートの頻度で下方ジャンプが発生するジャンプ拡散過程を想定している。

101 これに類似した研究として、Avellaneda and Lipkin [2003] は、オプションのデルタヘッジを背景に、原資産価格が満期にオプションのある権利行使価格に近づく確率が高まるピンニング (stock pinning) の現象をモデル化している。当該モデルを前提として、満期日に、ピンニングが発生しうる権利行使価格のオプションを売却し原資産を購入することができれば、ピンニング現象を裁定する理論駆動型の戦略が構築できる。

場価格に乖離がある場合、歪みがその後解消されることを前提とした逆張り取引など理論駆動型の統計的裁定取引戦略を構築するのに利用できる。

(3) 統計的裁定取引とデータ・マイニング

一般的なファイナンスの理論では、価格の変動率（ボラティリティ）のモデル化はさまざまに提案されているが、平均的な価格や収益率の変化方向（トレンド）については、単純に時間に比例して増大する、あるいは平均回帰するというように単純化されることが多い。統計的裁定取引を中心とした一部の執行戦略では、このトレンドをデータ・マイニングによって探査し、それが将来も続くとの判断のもとで取引戦略が組まれる。価格のトレンド等を予測する試みは、古くから経験的・発見的に行われてきたチャート分析やテクニカル分析を理論化・高度化したものと捉えることもできる¹⁰²。

時系列モデルを用いる場合、計量経済学やファイナンスで提案されている幅広いモデルの中から、過去の時系列の確率統計的な特徴を再現するモデルが選択される。すなわち、価格トレンドやボラティリティの変動を表す関数あるいは確率過程が外生的に与えられる。これに対して、人工知能を用いる場合には、これらの関数あるいは確率過程が過去データの学習から内生的に決まる。例えば、遺伝的プログラミングでは、単純な取引ルール（例えば、過去数週間の移動平均より低ければ買い、高ければ売るなど）を「遺伝子」と考え、それらの組合せが遺伝し進化することにより、多数の取引ルールを結合させた取引戦略の中から、適応度が高い、すなわち過去データからみて収益性が高い取引ルールの組合せが探査される¹⁰³。また、人工ニューラル・ネットワークでは、過去の時系列の学習によって獲得されたニューロン間の結合の強さを表現する行列に基づいて、現在の市場状況を入力した場合に価格トレンド等の予測値が出力される¹⁰⁴。

102 金融業では、取引に活用する目的以外にも、保険の解約数を予測する、あるいはクレジットカード等の不正利用を検知するなどの目的で、データ・マイニングが用いられている（今野・刈屋・木島 [2004] 433 頁）。

103 この基本的な枠組みは Allen and Karjalainen [1993] を参照。また、遺伝的プログラミングを取引に活用する研究については Navet and Chen [2009] が調査している。

104 例えば、Dounias, Thomaidis, and Kondakis [2005]、Thomaidis and Dounias [2006]、Thomaidis, Kondakis, and Dounias [2006]、Thomaidis [2007] は、ボラティリティについてはよく知られた GARCH モデル（generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model; Bollerslev [1986]）で予測し、トレンドについては人工ニューラル・ネットワークで予測するハイブリッドなモデルを提案している。

6. 複数の市場での執行戦略と市場間競争

本節では、複数の市場における執行戦略や、市場間の競争に関する最近の研究を取り上げる。特に、隠れた注文の存在を踏まえた最適注文回送 (smart order routing: SOR) のアルゴリズムや隠れた注文規模の予測等に関する研究と、市場間競争に関する研究の2つを紹介する。

(1) 隠れた注文と執行戦略

SOR とは、複数の市場で同一銘柄が取引可能である場合、市場の動向に応じて注文を最適な分量に分割し、それぞれの市場に回送し執行する仕組みを指す。SOR の基本的な枠組みは、杉原 [2011] の4節(5)に示したとおり単純であるが、ダークプールや隠れた注文が存在する場合のSORのアルゴリズムは単純ではなく、背後にはその数量を予測する何らかの理論モデルがある。それらについてみていく。

イ. ダークプール内の注文量の推定

隠れた注文の存在を踏まえたSORアルゴリズムの初期のものとしては、Almgren and Harts [2008] がある。当該モデルでは、隠れた注文量 (implied hidden liquidity) が時間の経過に伴い一様に減衰し、かつ最良気配の内側に一様に分布しているとの強い仮定のもとで、ある価格帯に存在する開示された指値注文量と、同価格帯での過去の約定数 (隠れた注文を含みうる) の乖離から、現在存在する隠れた注文量を推定している¹⁰⁵。

Laruelle, Lehalle, and Pagès [2010] は、1つの主市場 (指値注文が公開されている

105 具体的には、ある銘柄が、隠れた注文が提示される J 個の代替市場で売買されているとし、投資家が同銘柄を K 回に分けて執行する前提で、隠れた注文量を推計している。市場 j ($j = 1, \dots, J$) の時刻 t における最良気配上の隠れた注文量を $n_j(t)$ (> 0)、最良気配の内側に存在する隠れた注文量を $n_j^+(t)$ (≥ 0) とする。市場 j では、注文量が、他の投資家の執行や取消によって、時間の経過に伴い ρ_j ($0 < \rho_j < 1$) だけ減衰すると考え、 $k + 1$ 回目の取引時点の隠れた注文の推移を次のように予想する。 k 回目の注文が

- i) 市場 j で執行されなかった場合: $n_j(t_{k+1}) = \rho_j n_j(t_k)$ 、 $n_j^+(t_{k+1}) = \rho_j n_j^+(t_k)$ 、
- ii) 市場 j の最良気配で執行された場合: $n_j(t_{k+1}) = \rho_j n_j(t_k) + \hat{n}_j(t_k)$ 、 $n_j^+(t_{k+1}) = 0$ 、
- iii) 市場 j の最良気配の内側で執行された場合: $n_j(t_{k+1}) = \rho_j n_j(t_k)$ 、 $n_j^+(t_{k+1}) = \rho_j n_j^+(t_k) + \hat{n}_j^+(t_k)$ 。

ただし、 t_k は k 回目 ($k = 1, \dots, K$) の執行直前の時刻である。また、 $\hat{n}_j(t_k)$ 、 $\hat{n}_j^+(t_k)$ は、 k 回目の発注が執行された場合の隠れた注文の予想数量であり、Almgren and Harts [2008] では次のように決められている。 $N_j(t_k)$ を $k - 1$ 回目の執行直後から k 回目の執行直前までの市場 j における最良気配価格での出来高 (他の市場参加者の最良気配での約定数量)、 $\bar{n}_j(t_k)$ を時刻 t_k 時点で同市場の最良気配に存在する開示された注文量とする。このとき、 $N_j(t_k)$ の分量は、最良気配上の隠れた注文と開示された注文に対して約定したことから、隠れた注文の予想残存数量は、 $\hat{n}_j(t_k) = \max\{N_j(t_k) - \bar{n}_j(t_k), 0\}$ と推計できる。また、最良気配の内側の隠れた注文の予想数量 $\hat{n}_j^+(t_k)$ は、ビッド・オファー・スプレッドを δ_0 、最後に最良気配の内側で約定した約定価格と時刻 t_k 時点の最良気配の差を δ_1 とし、最良気配の内側の隠れた注文が一様に分布していることを前提とすると、 $\hat{n}_j^+(t_k) = \delta_1 / \delta_0 \max\{N_j(t_k) - \bar{n}_j(t_k), 0\}$ と推計できる。

市場) と J 個のダークプール (ダークプール $j = 1, \dots, J$) が存在するもとの最適な購入戦略を導出している。具体的には、時刻 t_k において当該銘柄の最良売り気配価格を A_{t_k} 、取引主体が希望する購入注文のうち A_{t_k} の価格で購入できる分量が x_k ありとし、ダークプール j に $\omega_j^k x_k$ だけ成行注文として発注するとする。ここで、 $\sum_{j=1}^J \omega_j^k = 1$ 、 $\omega_j^k > 0$ である。一方、ダークプール j において、 A_{t_k} 以下の価格帯 $b_j^k A_{t_k}$ ($0 \leq b_j^k \leq 1$) (b_j^k は所与のパラメータ) にある隠れた売却注文量 (確率変数) を $N_j^H(t_k)$ とすると、ダークプール j で実際に約定される分量は $\min(\omega_j^k x_k, N_j^H(t_k))$ である。このとき、ダークプールで購入できなかった分量を主市場の最良気配で購入すると考えると、購入金額は、

$$\underbrace{\sum_{j=1}^J b_j^k A_{t_k} \min(\omega_j^k x_k, N_j^H(t_k))}_{\text{ダークプールでの購入金額}} + \underbrace{A_{t_k} \left(x_k - \sum_{j=1}^J \min(\omega_j^k x_k, N_j^H(t_k)) \right)}_{\text{主市場での購入金額}},$$

となる。当該金額の期待値を最小化する問題は、

$$\max_{\{\omega_j^k\}_{j=1}^J} \left[\sum_{j=1}^J (1 - b_j^k) \mathbb{E}[\min(\omega_j^k x_k, N_j^H(t_k))] \mid \sum_{j=1}^J \omega_j^k = 1 \right], \quad (32)$$

とかける。この解は、

$$\mathbb{E} \left[x_k (1 - b_j^k) \mathbf{1}\{\omega_j^k x_k \leq N_j^H(t_k)\} - \frac{x_k}{J} \sum_{i=1}^J (1 - b_i^k) \mathbf{1}\{\omega_i^k x_k \leq N_i^H(t_k)\} \right] = 0, \\ \forall j = 1, \dots, J, \quad (33)$$

を満たす ω_j^k ($j = 1, \dots, J$) として計算できる¹⁰⁶。Laruelle, Lehalle, and Pagès [2010] では、 x_k と $N_j^H(t_k)$ ($j = 1, \dots, J$) が対数正規分布に従う確率変数である場合に、当該アルゴリズムのパフォーマンスが、他の SOR アルゴリズムを上回ることをシミュレーションによって示している。

当該アルゴリズムの実用化に際しては、 N_j^H が従う確率分布を推定することがポイントとなる。すなわち、(32) 式で $\mathbb{E}[\min(\omega_j^k x_k, N_j^H(t_k))] = \sum_{m=1}^{\omega_j^k x_k} \Pr[N_j^H(t_k) \geq m]$ であることから、(32) 式の計算は、隠れた注文量 N_j^H が従う確率分布を過去データから推計することに帰着する。Ganchev *et al.* [2010] は、 $\Pr[N_j^H \geq m]$ の推定アルゴリズムとして、 Kaplan-Meier 推定量 (Kaplan-Meier estimator) を用いている¹⁰⁷。具体的には、時刻 t_0 から t_K までの $K + 1$ 回の執行タイミングにおいて、ダー

106 Laruelle, Lehalle, and Pagès [2010] では、(33) 式を満たす ω_j^k を計算するアルゴリズムが示されている。

107 Kaplan-Meier 推定量とは、Kaplan and Meier [1958] によって提案された推定量で、疫学で被験者のサンプル集団が複数の計測時刻でそろっていない不完全なデータから生存率や死亡率を推定する際になどに用いられる。

クプール j で発注した注文の一部（数量 l ($l > 0$ ））が執行された場合の数を $n_j^K(l)$ 、同クプールへの発注額によらず数量 l が執行された場合の数を $\tilde{n}_j^K(l)$ として、

$$\widehat{\Pr}[N_j^H \geq m] = \prod_{l=0}^{m-1} \left(1 - \frac{n_j^K(l)}{\tilde{n}_j^K(l)} \right),$$

と推定している¹⁰⁸。米国では、こうした研究をもとにした SOR のアルゴリズムが実務で活用されているようである（Kearns [2008]）。

□. ダークプールが存在するもとの大口注文の執行戦略

Kratz and Schöneborn [2010] は、3 節 (1) で解説した一時的／恒久的インパクトの枠組みのもとで、ダークプールでの執行の可能性を考慮した最適執行戦略を導出している。具体的には、主市場とダークプール¹⁰⁹の2つで執行可能な取引主体を想定し、主市場ではマーケット・インパクトが発生する一方、ダークプールでは発生せずファンダメンタル価格で執行可能であるとの設定で執行戦略を導出している。2 節 (6) に示した大口注文に関する執行戦略の基本設定に加えて、マーケット・インパクトが取引量に比例する線形の一時的インパクトのみで構成され、さらにダークプールで執行される場合には残存執行額のすべてが執行されるか、すべてが執行されないかのどちらかに確率的に決まるとの強い仮定のもとで、最適執行戦略が解析的に導出されている。ダークプールで執行される確率を p と設定すると、最適残存執行額の期待値は、

$$X_k^* = X(1-p)^{k/2} \frac{\sinh[\kappa_p(T-t_k)]}{\sinh(\kappa_p T)} \quad (k = 1, \dots, K). \quad (34)$$

ただし、 κ_p は、ダークプールでの執行確率 p に依存した量として

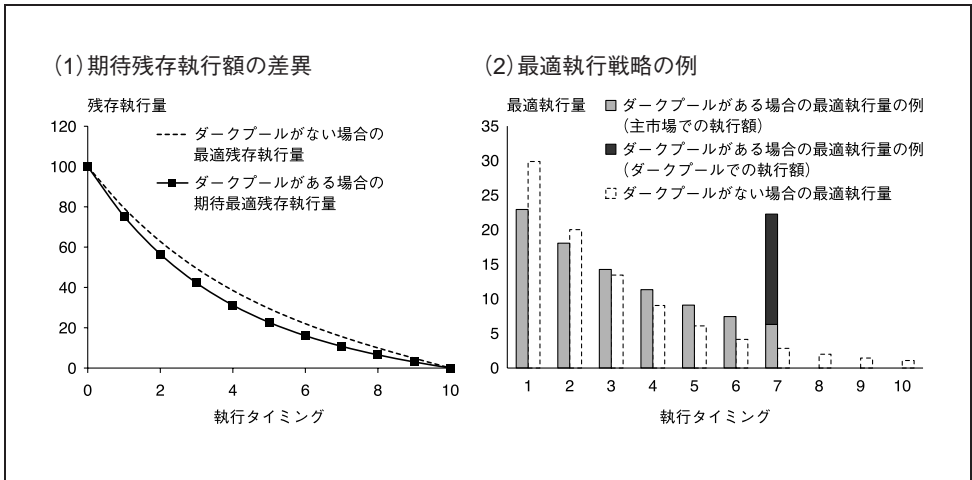
$$\kappa_p = \operatorname{arcosh} \left\{ \frac{\sqrt{1-p}}{2} \left(\frac{\gamma\sigma}{\theta} + 1 + \frac{1}{1-p} \right) \right\},$$

(θ は一時的インパクトの比例係数、 σ はファンダメンタル価格のボラティリティ、 γ はリスク回避度) となる。ダークプールで執行される確率 p が大きいほど残存執行量が大きくなり、執行速度が低下することがわかる。

108 $n_j^K(l)$ は、ダークプール j における売り注文量が l 個である場合の数を示している。一方、 $\tilde{n}_j^K(l)$ は、同ダークプール内に少なくとも l 個の注文が存在していることは判明しているが、その数が不確定である場合の数を示している。したがって、 $1 - n_j^K(l)/\tilde{n}_j^K(l)$ は、少なくとも l 個の注文が存在したことが既知である条件のもとで、少なくとも $l+1$ 個の注文が存在した実現確率を表しており、当該確率を $l=0$ から掛け合わせたうえ、それを1から差し引くことで、ダークプール内の注文量に関する確率の推計値が導出される。

109 現実にはダークプールは複数存在しうが、本論文では、そうした複数のダークプールを統合した統合ダークプール (aggregated dark pool) が1つ存在する状況を想定している。

図 17 ダークプールの有無に対する執行戦略の差異



備考：パラメータは、 $X = 100$ 、 $T = 10$ 、 $p = 0.1$ 、 $\gamma = 0.1$ 、 $\sigma = 0.5$ 、 $\theta = 0.5$ 。

資料：Kratz and Schöneborn [2010] を参考に作成

図 17 には、一時的／恒久的インパクト・モデルのもとのダークプールの有無に対する執行戦略の差異を示した。図 17 (1)は、残存執行額を示している。ダークプールで執行される可能性がある場合、執行量の期待値は低下する¹¹⁰。図 17 (2)は、7 回目の執行タイミングにおいてダークプールにて執行された場合の執行額の例を示している。執行額の期待値でみると、ダークプールで執行される可能性がある場合には、その可能性を織り込んだより緩やかな執行が最適となる。

こうした結果は理論的に興味深いだが、モデルの設定においてダークプールでの執行額、取引コスト、執行確率が外生的に与えられており、それらは推計が難しい。

ハ. 開示された指値注文板に存在する隠れた注文量の推定

米欧を中心とした一部の市場では、指値注文板が開示されているものの当該板に注文を開示しないオプション付きの指値注文（隠れた注文）を受け付けている市場がある。Stoikov, Avellaneda, and Reed [2010] は、4 節(3)で紹介した注文フローの確率過程をもとに、最良気配上に隠れた流動性が存在するとの前提で、価格が次の瞬間に上昇する確率を近似的に導出している。この枠組みを逆に用いると、価格の変化方向から最良気配上の隠れた注文量を推計することができる。当該推計値の大小は、SOR において取引システムの優先順位を付す際に活用できる。

具体的には、まず、最良気配に流入する指値注文量、および流出する成行注文と指値注文の取消の合算数が、いずれも、強度が異なるポアソン過程に従う前提のもと

110 ただし、多資産の場合はこの限りではない。当該モデルを多資産に拡張すると、ポートフォリオの一部、あるいは希望執行量より多い量をダークプールに発注するのが最適であるとの結果が得られる。

で、次の注文の流出入によって価格が上方向に動く確率を次のように導出する。最良売り／買い気配上の注文量をそれぞれ N_t^A 、 N_t^B とかくと、ポアソン過程の中心極限定理によって、 N_t^A 、 N_t^B はそれぞれ相関する2つのブラウン運動に近似できる¹¹¹。その相関係数が-1に近い場合¹¹²、次の注文流出入によって価格が上昇する確率 $p^{\text{up}}(N_t^A, N_t^B)$ は、

$$p^{\text{up}}(N_t^A, N_t^B) \simeq \frac{N_t^B + N^H}{N_t^A + N_t^B + 2N^H}, \quad (35)$$

と近似的に表される。ここで N^H は最良気配上に存在する隠れた注文量である¹¹³。Stoikov, Avellaneda, and Reed [2010] では、実際に米国の個別銘柄やETFの5日分のティック・データから $p^{\text{up}}(N_t^A, N_t^B)$ 、 N_t^A 、 N_t^B を算出し¹¹⁴、(35)式をカリブレートすることで N^H を推計している。隠れた注文は、市場によって異なるものの、平均的には、最良気配に存在する注文量の10~20%程度であるとの推計結果を得ている。

当該枠組みは、最良気配上の隠れた注文量 N^H が売りと買いで同一である、注文量が負になりうる、最良気配以外の価格帯の注文を無視しているなど、いくつかの強い仮定がおかれている。実務での活用を展望すると、研究のさらなる一般化と頑健性の向上が求められる。

(2) 市場間競争等に関する研究

複数市場での執行を巡るもう1つの研究領域として、市場間競争に関連する研究がある。ここでは、当該領域に関する近年のいくつかの研究を紹介する。

イ. 最適注文回送と市場間競争

Parlour and Seppi [2003] は、注文駆動型市場と呼値駆動型市場の競合に関して簡単なモデルを用いて分析した。Foucault and Menkveld [2008] は、Parlour and Seppi [2003] のモデルを発展させ、SORと市場間競争の関係について分析している(図18)。SOR経由の注文の割合が拡大するほど主市場と代替市場の共存可能性が高まる一方で、代替市場への発注に係るコストが上昇するほど主市場が支配的となる。他方、代替市場が支配的となるには、SORが100%利用され、かつ代替市場への発注に係るコストが低いという厳しい条件が満たされる場合に限られる。さらに Foucault

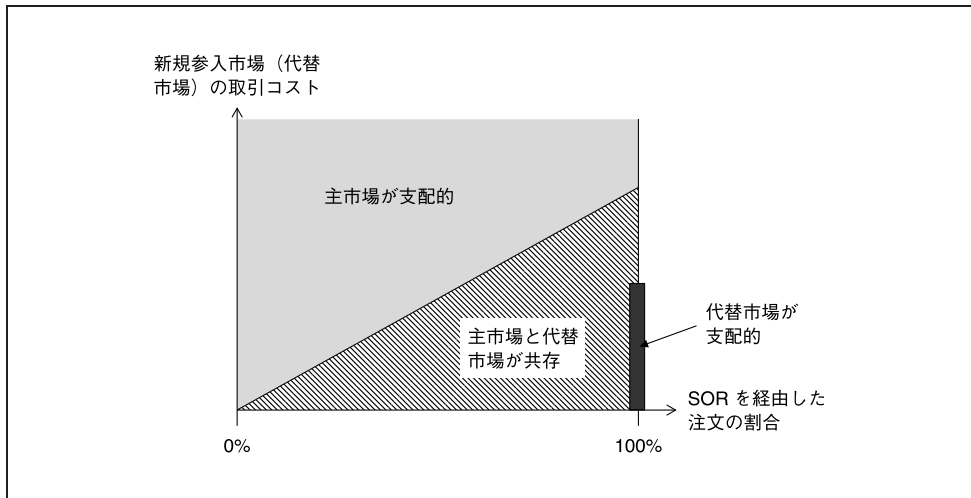
111 Stoikov, Avellaneda, and Reed [2010] では、最良気配上に存在する隠れた注文量について売り／買い気配で同一であると仮定している。

112 これは、買い注文が増加すると売り注文が確実に減少することを示しており、実際の市場の注文の動きに近い仮定である。

113 ここでは、売り・買い気配ともに同数 N^H の隠れた注文が存在すると仮定している。

114 $p^{\text{up}}(N_t^A, N_t^B)$ は仲値の上昇確率として推計している。

図 18 主市場と代替市場の競合関係



資料：Foucault and Menkveld [2008] を参考に作成

and Menkveld [2008] では、主市場と代替市場が共存する場合には、SOR の利用が高まるにつれて、どちらか単体の市場と比べ市場全体の流動性が理論上高まることも示している¹¹⁵。こうした結果は、市場が発展し厚みを増すためには、代替市場での執行コストが低いだけでなく、SOR が発展することが重要であることを示唆している。

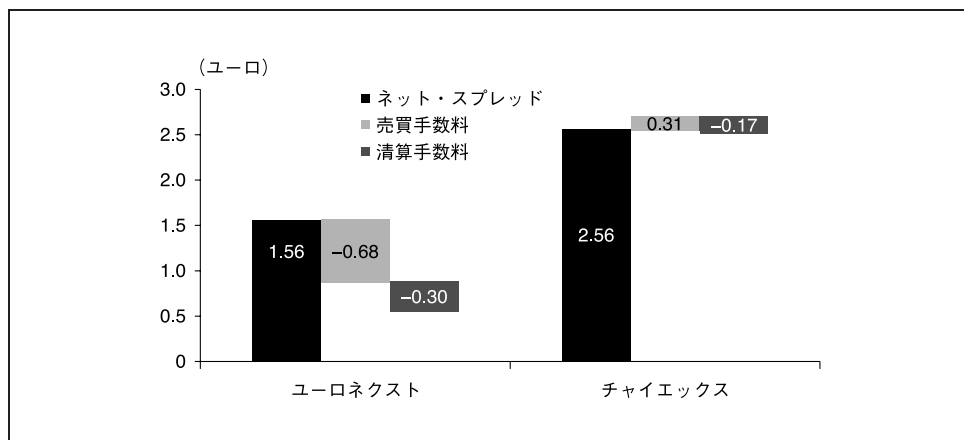
ロ. 高頻度取引と市場間競争

Menkveld [2011] は、高頻度取引と新規参入市場の関係について分析している。高頻度取引業者が、新規参入した代替市場で売買を始めるためには、インフラ投資コストや執行戦略の再構築コストなどいくつかの初期投資コストが必要となる。Menkveld [2011] は、新参の代替市場が拡大するためには、そうした初期投資コストを補うだけのリターンが市場参加者にもたらされる必要があるとして分析している。図 19 には、Menkveld [2011] を参考に、欧州株式市場に代替市場のチャイエックス (Chi-X) 市場が参入した時期 (2007 年 4 月) から 1 年程度の期間における高頻度取引の売買収益について、既存の市場であるユーロネクスト市場と比較した結果を示した。ユーロネクスト市場対比、チャイエックス市場では、ネット・スプレッド (高頻度取引の収益源) が大きいと推計される一方、清算手数料は低いと推計されている¹¹⁶。また、チャイエックス市場で指値注文を提示することによって得られ

115 これと類似した研究として、Degryse, Achter, and Wuyts [2009] では、呼値駆動型市場と定時付合せ型の代替市場の 2 つの市場が存在するもとは、呼値駆動型市場のみの場合と比べ取引コストが低下することで、取引主体の厚生が高まることを理論的に示している。

116 チャイエックスにおけるネット・スプレッドが相対的に高い背景の 1 つには、売買の速度があると思われる。4 節(1)の図 12 を参照。

図 19 主市場と代替市場における高頻度取引の損益分解



備考：1取引当たりの損益を示す。売買手数料にはリベートを含む。

資料：Menkveld [2011] を参考に作成

るリベートも高頻度取引の追加的な収益源となっている。こうした結果は、代替市場の手数料体系や売買の高速さが、高頻度取引の取引コストや逆選択のリスクを低減させることを示唆している。Menkveld [2011] は、これが、欧州におけるチャイエックス市場の拡大に寄与した可能性を指摘している。

7. おわりに

本稿では、杉原 [2011] でサーベイしたアルゴリズム取引や代替市場を巡る金融実務の背後にある、理論および実証研究について幅広くみてきた。まず、大口取引の最適執行戦略について、取引コスト・モデルを中心に解説した。次に、高頻度取引や統計的裁定取引の売買手法を説明するモデルと実証分析を整理した。さらに、複数の市場で取引が可能な場合の最適な注文の配分に関する戦略や、市場間の競争を巡る最近の研究についても取り上げた。

アルゴリズム取引は、従来トレーダーが技能として体得していた取引執行戦略を、理論化・アルゴリズム化し、情報通信技術を活用して高速・効率的に実現しているものである。人を介した執行がアルゴリズム化・電子化されることにより、トレーダーが有していた技能が客観化・透明化されてくると同時に、今までは想定されなかった新しい取引スタイルが実用化されてきている。これらのアルゴリズムの分析が進めば、理論として体系化する研究が増加すると考えられる。ただ、現在のところ、執行戦略に関する学術研究は、総じてみれば個別に理論化され分析されている段階にあると筆者は考えている。最適執行戦略理論など研究がかなり進み体系的に解説が可能である領域がある一方で、例えば、取引手段の多様化や取引の高速化が

もたらす社会厚生への影響の評価をはじめとして、研究が十分に進んでいない領域も多い。

多岐に亘るファイナンス研究の世界では、金融商品の価格付けや投資戦略の策定、あるいはリスク管理手法といった分野が既に発展を遂げ、実務に幅広く応用されてきた。一方、本稿で紹介した金融取引執行の分野は、それらと比べるとまだ歴史が浅い。また同分野は、近年、実務の進歩が著しく、実務が研究にかなり先行しているように思われる。今後、研究がさらに広がり、実務との乖離が縮まることで、両者の間にさらなるシナジーが生まれることを期待したい。

参考文献

- 今野 浩・刈屋武昭・木島正明編、『金融工学辞典』、朝倉書店、2004年
- 小田信之・久田祥史・山井康浩、「流動性リスクの評価方法について：理論サーベイと実用化に向けた課題」、『金融研究』第19巻第1号、日本銀行金融研究所、2000年、137～154頁
- 加藤 恭、「最適執行理論：金融実務への応用に向けた理論モデルの構築」、『オペレーションズ・リサーチ』第55巻第9号、2010年、553～558頁
- 杉原慶彦、「取引コストの削減を巡る市場参加者の取組み：アルゴリズム取引と代替市場の活用」、『金融研究』第30巻第2号、日本銀行金融研究所、2011年、29～88頁
- Abate, Joseph, and Ward Whitt, “Computing Laplace Transforms for Numerical Inversion via Continued Fractions,” *IMFORMS Journal on Computing*, 11 (4), 1999, pp. 394–405.
- Aldridge, Irene, *High-Frequency Trading: A Practical Guide to Algorithmic Strategies and Trading Systems*, Wiley Trading, 2009.
- Alfonsi, Aurélien, Antje Fruth, and Alexander Schied, “Optimal Execution Strategies in Limit Order Books with General Shape Functions,” *Quantitative Finance*, 10 (2), 2010, pp. 143–157.
- , Alexander Schied, and Alla Slynko, “Order Book Resilience, Price Manipulation, and the Positive Portfolio Problem,” preprint, 2010 (<http://ssrn.com/abstract=1499209>).
- Allen, Franklin, and Risto Karjalainen, “Using Genetic Algorithms to Find Technical Trading Rules,” working paper 20-93, Rodney L. White Center for Financial Research, The Wharton School, University of Pennsylvania, 1993.
- Almgren, Robert, “Optimal Execution with Nonlinear Impact Functions and Trading-Enhanced Risk,” *Applied Mathematical Finance*, 10 (2), 2003, pp. 1–18.
- , and Neil Chriss, “Optimal Execution of Portfolio Transactions,” *Journal of Risk*, 3 (2), 2000, pp. 5–39.
- , and Bill Harts, “A Dynamic Algorithm for Smart Order Routing,” Stream-Base White Paper, 2008.
- , and Julian Lorenz, “Bayesian Adaptive Trading with a Daily Cycle,” *Journal of Trading*, 1 (4), 2006, pp. 38–46.
- , and ———, “Adaptive Arrival Price,” in B. R. Bruce, ed. *Algorithmic Trading III, Institutional Investor*, 2007, pp. 59–66.
- , Chee Thum, Emmanuel Hauptmann, and Hong Li, “Direct Estimation of Equity Market Impact,” preprint, 2005a (<http://www.cims.nyu.edu/~almgren/papers/costestim.pdf>).

- , ———, ———, and ———, “Equity Market Impact,” *Risk*, July, 2005b, pp. 57–62.
- AlphaSimplex Group, LLC, “The Reuters Newsscope Event Indices,” working paper, 2008 (<http://online.thomsonreuters.com/mrn/>).
- Avellaneda, Marco, and Jeong-Hyun Lee, “Statistical Arbitrage in the U.S. Equities Market,” *Quantitative Finance*, 10 (7), 2010, pp. 761–782.
- , and Michael D. Lipkin, “A Market-Induced Mechanism for Stock Pinning,” *Quantitative Finance*, 3 (6), 2003, pp. 417–425.
- , and ———, “A Dynamic Model for Hard-to-Borrow Stocks,” *Risk*, June, 2009, pp. 92–97.
- , and Sasha Stoikov, “High-Frequency Trading in a Limit Order Book,” *Quantitative Finance*, 8 (3), 2008, pp. 217–224.
- Bank, Peter, and Dietmar Baum, “Hedging and Portfolio Optimization in Financial Markets with a Large Trader,” *Mathematical Finance*, 14 (1), 2004, pp. 1–18.
- Berreby, David, “On Markets and Collective Mood,” *Nature*, 467, 2010, p. 31.
- Bertram, William K., “Analytic Solutions for Optimal Statistical Arbitrage Trading,” *Physica A*, 389 (11), 2010, pp. 2234–2243.
- Bertsimas, Dimitris, and Andrew W. Lo, “Optimal Control of Execution Costs,” *Journal of Financial Markets*, 1, 1998, pp. 1–50.
- Biais, Bruno, Pierre Hillion, and Chester Spatt, “An Empirical Analysis of the Limit Order Book and the Order Flow in the Paris Bourse,” *The Journal of Finance*, 50 (5), 1995, pp. 1655–1689.
- , David Martimort, and Jean-Charles Rochet, “Competing Mechanisms in a Common Value Environment,” *Econometrica*, 68 (4), 2000, pp. 799–837.
- Boguslavsky, Michael, and Elena Boguslavskaya, “Arbitrage under Power,” *Risk*, June, 2004, pp. 69–73.
- Bollen, Johan, Huina Mao, and Xiao-Jun Zeng, “Twitter Mood Predicts the Stock Market,” *Journal of Computational Science*, 2 (1), 2011, pp. 1–8.
- , Alberto Pepe, and Huina Mao, “Modelling Public Mood and Emotion: Twitter Sentiment and Socio-Economic Phenomena,” working paper, 2009 (<http://arxiv.org/pdf/0911.1583v1>).
- Bollerslev, Tim, “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31 (3), 1986, pp. 307–327.
- Bondarenko, Oleg, “Statistical Arbitrage and Securities Prices,” *The Review of Financial Studies*, 16 (3), 2003, pp. 875–919.
- Borkovec, Milan, and Hans G. Heidle, “Building and Evaluating a Transaction Cost Model: A Primer,” *The Journal of Trading*, 5 (2), 2010, pp. 57–77.

- Bouchard, Bruno, Ngoc-Minh Dang, and Charles-Albert Lehalle, "Optimal Control of Trading Algorithm: A General Impulse Control Approach," working paper, 2009 (<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00432203/>).
- Bouchaud, Jean-Philippe, Marc Mézard, and Marc Potters, "Statistical Properties of Stock Order Books: Empirical Results and Models," *Quantitative Finance*, 2 (4), 2002a, pp. 251–256.
- , ———, and ———, "Statistical Properties of Stock Order Books: Empirical Results and Models," working paper, 2002b (<http://www.cfm.fr/papers/0203511.pdf>).
- Breen, William J., Laurie Simon Hodrick, and Robert A. Korajczyk, "Predicting Equity Liquidity," *Management Science*, 48 (4), 2002, pp. 470–483.
- Brody, Dorje C., Mark H. A. Davis, Robyn L. Friedman, and Lane P. Hughston, "Informed Traders," *Proceedings of the Royal Society A*, 465, 2008, pp. 1103–1122.
- , Lane P. Hughston, and Andrea Macrina, "Information-Based Asset Pricing," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 11 (1), 2008, pp. 107–142.
- Çetin, Umut, Robert A. Jarrow, and Philip Protter, "Liquidity Risk and Arbitrage Pricing Theory," *Finance and Stochastics*, 8 (3), 2004, pp. 311–341.
- Chacko, George C., Jakub W. Jurek, and Erik Stafford, "The Price of Immediacy," *The Journal of Finance*, 63 (3), 2008, pp. 1253–1290.
- Chiyachantana, Chiraphol N., Pankaj K. Jain, Christine Jiang, and Robert A. Wood, "International Evidence on Institutional Trading Behaviour and Price Impact," *The Journal of Finance*, 59 (2), 2004, pp. 869–898.
- Cont, Rama, Arseniy Kukanov, and Sasha Stoikov, "The Price Impact of Order Book Events," working paper, 2011 (<http://ssrn.com/abstract=1712822>).
- , Sasha Stoikov, and Rishi Talreja, "A Stochastic Model for Order Book Dynamics," working paper, 2008 (<http://ssrn.com/abstract=1273160>).
- Cvitanić, Jakša, and Jin Ma, "Hedging Options for a Large Investor and Forward-Backward SDE's," *The Annals of Applied Probability*, 6 (2), 1996, pp. 370–398.
- Degryse, Hans, Mark V. Achter, and Gunther Wuyts, "Dynamic Order Submission Strategies with Competition between a Dealer Market and a Crossing Network," *Journal of Financial Economics*, 91 (3), 2009, pp. 319–338.
- Demsetz, Harold, "The Cost of Transacting," *Quarterly Journal of Economics*, 82 (1), 1968, pp. 33–53.
- Dounias, George D., Nikos S. Thomaidis, and Nick Kondakis, "Financial Statistical Modelling with a New Nature-Inspired Technique," Presented in the 1st European Symposium on Nature-Inspired Smart-Information Systems, Albufeira, Portugal, 2005 (<http://ssrn.com/abstract=890247>).

- Duarte, Jefferson, and Lance Young, “Why PIN Is Priced?” *Journal of Financial Economics*, 91 (2), 2009, pp. 119–138.
- Durbin, Michael, *All about High-Frequency Trading*, McGraw-Hill, 2010.
- Easley, David, Nicholas M. Kiefer, Maureen O’Hara, and Joseph B. Paperman, “Liquidity, Information, and Infrequently Traded Stocks,” *The Journal of Finance*, 51 (4), 1996, pp. 1405–1436.
- , Robert F. Engle, Maureen O’Hara, and Liuren Wu, “Time-Varying Arrival Rates of Informed and Uninformed Trades,” *Journal of Financial Econometrics*, 6 (2), 2008, pp. 171–207.
- , Marcos M. López de Prado, and Maureen O’Hara, “Measuring Flow Toxicity in a High Frequency World,” working paper, 2011a (<http://ssrn.com/abstract=1695596>).
- , ———, and ———, “The Microstructure of the ‘Flash Crash’: Flow Toxicity, Liquidity Crashes and the Probability of Informed Trading,” *The Journal of Portfolio Management*, 37 (2), 2011b, pp. 118–128.
- Evans, Martin D. D., and Richard K. Lyons, “Order Flow and Exchange Rate Dynamics,” *Journal of Political Economy*, 110 (1), 2002, pp. 170–180.
- Fabozzi, Frank J., Sergio M. Focardi, and Petter N. Kolm, *Quantitative Equity Investing: Techniques and Strategies*, Wiley, 2010.
- Fama, Eugene F., and Kenneth R. French, “The Cross-Section of Expected Stock Returns,” *The Journal of Finance*, 47 (2), 1992, pp. 427–465.
- Forsyth, Peter A., J. Shannon Kennedy, Shu Tong Tse, and Heath Windcliff, “Optimal Trade Execution: A Mean-Quadratic-Variation Approach,” Technical Report, 2011 (http://www.cs.uwaterloo.ca/~paforsyt/quad_trade.pdf).
- Foucault, Thierry, and Arbert J. Menkveld, “Competition for Order Flow and Smart Order Routing Systems,” *The Journal of Finance*, 63 (1), 2008, pp. 119–158.
- , Ohad Kadan, and Eugene Kandel, “Limit Order Book as a Market for Liquidity,” *Review of Financial Studies*, 18 (4), 2005, pp. 1171–1217.
- Frey, Rüdiger, and Alexander Stremme, “Market Volatility and Feedback Effects from Dynamic Hedging,” *Mathematical Finance*, 7 (4), 1997, pp. 351–374.
- Ganchev, Kuzman, Michael Kearns, Yuriy Nevmyvaka, and Jennifer Wortman, “Censored Exploration and the Dark Pool Problem,” *Communication of the ACM*, 53 (5), 2010, pp. 99–107.
- Gatheral, Jim, “No-Dynamic-Arbitrage and Market Impact,” *Quantitative Finance*, 10 (7), 2010, pp. 749–759.
- , and Alexander Schied, “Optimal Trade Execution under Geometric Brownian Motion in the Almgren and Chriss Framework,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14 (3), 2011, pp. 353–368.

- , ———, and Alla Slynko, “Transient Linear Price Impact and Fredholm Integral Equations,” *Mathematical Finance*, forthcoming, 2011.
- Glosten, Lawrence R., and Paul R. Milgrom, “Bid, Ask and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders,” *Journal of Financial Economics*, 14 (1), 1985, pp. 71–100.
- Gökay, Selim, Alexandre F. Roch, and H. Mete Soner, “Liquidity Models in Continuous and Discrete Time,” working paper Series No. 600, Swiss National Center of Competence in Research, Financial Valuation and Risk Management, 2010.
- Grinold, Richard C., and Ronald L. Kahn, *Active Portfolio Management: A Quantitative Approach for Providing Superior Returns and Controlling Risk (2nd edition)*, McGraw-Hill, 2000.
- Guo, X., and Q. Zhang, “Optimal Selling Rules in a Regime Switching Model,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 (9), 2005, pp. 1450–1454.
- Hasbrouck, Joel, “Measuring the Information Content of Stock Trades,” *The Journal of Finance*, 46 (1), 1991, pp. 179–207.
- He, Hua, and Harry Mamaysky, “Dynamic Trading Policies with Price Impact,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29 (5), 2005, pp. 891–930.
- Ho, Thomas, and Hans R. Stoll, “Optimal Dealer Pricing under Transactions and Return Uncertainty,” *Journal of Financial Economics*, 9 (1), 1981, pp. 47–73.
- , and ———, “The Dynamics of Dealer Markets under Competition,” *The Journal of Finance*, 38 (4), 1983, pp. 1053–1074.
- Holthausen, Robert W., Richard W. Leftwich, and David Mayers, “The Effect of Large Block Transactions on Security Prices: A Cross-Sectional Analysis,” *Journal of Financial Economics*, 19 (2), 1987, pp. 237–267.
- Hu, Gang, “Measures of Implicit Trading Costs and Buy-Sell Asymmetry,” *Journal of Financial Markets*, 12 (3), 2009, pp. 418–437.
- Huberman, Gur, and Werner Stanzl, “Price Manipulation and Quasi-arbitrage,” *Econometrica*, 72 (4), 2004, pp. 1247–1275.
- Jarrow, Robert, “Market Manipulation, Bubbles, Corners, and Short Squeezes,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27 (3), 1992, pp. 311–336.
- , “Derivative Security Markets, Market Manipulation and Option Pricing Theory,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29 (2), 1994, pp. 241–261.
- Johnson, Barry C., *Algorithmic Trading and DMA: An Introduction to Direct Access Trading Strategies*, 4Myeloma Press, 2010.
- Jondeau, Eric, Augusto Perilla, and Michael Rockinger, “Optimal Liquidation Strategies in Illiquid Markets,” Swiss Finance Institute Research Paper No. 09-24, 2008.
- Kaplan, Edward L., and Paul Meier, “Nonparametric Estimation from Incomplete Observations,” *Journal of American Statistical Association*, 53, 1958, pp. 457–481.

- Kato, Takashi, “Optimal Execution Problem with Market Impact,” working paper, 2009 (<http://arxiv.org/pdf/0907.3282>).
- Kearns, Michael, “An Algorithmic Approach,” *Electronic and Algo Trading Report*, September, 2008, pp. 12–13.
- Kempf, Alexander, and Olaf Korn, “Market Depth and Order Size,” *Journal of Financial Markets*, 2 (1), 1999, pp. 29–48.
- Khandani, Amir E., and Andrew W. Lo, “What Happened to the Quants in August 2007?: Evidence from Factors and Transactions Data,” *Journal of Financial Markets*, 14 (1), 2011, pp. 1–46.
- Kharroubi, Idris, and Huyên Pham, “Optimal Portfolio Liquidation with Execution Cost and Risk,” working paper, 2009 (<http://arxiv.org/abs/0906.2565v1>).
- Kirilenko, Andrei, Albert S. Kyle, Mehrdad Samadi, and Tugkan Tuzun, “The Flash Crash: The Impact of High Frequency Trading on an Electronic Market,” working paper, 2010 (<http://ssrn.com/abstract=1686004>).
- Kissell, Robert, and Morton Glantz, *Optimal Trading Strategies: Quantitative Approach for Managing Market Impact and Trading Risk*, Amacom Books, 2003.
- , and Roberto Malamut, “Algorithmic Decision-Making Framework,” *Journal of Trading*, 1 (1), 2006, pp. 12–21.
- , Morton Glantz, and Roberto Malamut, “A Practical Framework for Estimating Transaction Costs and Developing Optimal Trading Strategies to Achieve Best Execution,” *Financial Research Letters*, 1 (1), 2004, pp. 35–46.
- Konishi, Hizuru, “Optimal Slice of a VWAP Trade,” *Journal of Financial Markets*, 5 (2), 2002, pp. 197–221.
- , and Naoki Makimoto, “Optimal Slice of a Block Trade,” *Journal of Risk*, 3 (4), 2001, pp. 33–52.
- Koppel, Moshe, and Itai Shtrimberg, “Good News or Bad News? Let the Market Decide,” *Computing Attitude and Affect in Text: Theory and Applications*, 20, 2006, pp. 297–301.
- Kratz, Peter, and Torsten Schöneborn, “Optimal Liquidation in Dark Pools,” EFA 2009 Bergen Meetings Paper, 2010 (<http://ssrn.com/abstract=1344583>).
- Kraus, Alan, and Hans R. Stoll, “Price Impacts of Block Trading on the New York Stock Exchange,” *The Journal of Finance*, 27 (3), 1972, pp. 569–588.
- Krokhmal, Pavlo, and Stanislav Uryasev, “A Sample-Path Approach to Optimal Position Liquidation,” *Annals of Operations Research*, 152 (1), 2007, pp. 193–225.
- Kubota, Keiichi, and Hitoshi Takehara, “Information Based Trade, the PIN Variable, and Portfolio Style Differences: Evidences from Tokyo Stock Exchange Firms,” *Pacific-Basin Finance Journal*, 17 (3), 2009, pp. 319–337.
- Kyle, Albert S., “Continuous Auctions and Insider Trading,” *Econometrica*, 53 (6), 1985, pp. 1315–1335.

- , and Anna Obizhaeva, “Market Microstructure Invariants,” working paper, 2010 (<http://ssrn.com/abstract=1687965>).
- Laruelle, Sophie, Charles-Albert Lehalle, and Gilles Pagès, “Optimal Split of Orders Across Liquidity Pools: A Stochastic Algorithm Approach,” working paper, 2010 (<http://arxiv.org/abs/0910.1166>).
- Lillo, Fabrizio, J. Dooyne Farmer, and Rosario N. Mantegna, “Single Curve Collapse of the Price Impact Function for the New York Stock Exchange,” working paper, 2002 (<http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0207428>).
- , ———, and ———, “Econophysics: Master Curve for Price-Impact Function,” *Nature*, 421 (9), 2003, p. 129.
- Lorenz, Julian, and Robert Almgren, “Mean-Variance Optimal Adaptive Execution,” *Applied Mathematical Finance*, forthcoming, 2011.
- Makimoto, Naoki, and Yoshihiko Sugihara, “Optimal Execution of Multi-asset Block Orders under Stochastic Liquidity,” IMES Discussion Paper Series No. 2010-E-25, Bank of Japan, 2010.
- Martin, Richard, and Torsten Schöneborn, “Mean Reversion Pays, but Costs,” *Risk*, February, 2011, pp. 84–89.
- McCulloch, James, and Vladimir Kazakov, “Optimal VWAP Trading Strategy and Relative Volume,” Research Paper No. 201, Quantitative Finance Research Center, University of Technology Sydney, 2007.
- Menkveld, Albert J., “High Frequency Trading and the New-Market Makers,” working paper, 2011 (<http://ssrn.com/abstract=1722924>).
- Meucci, Attilio, “Review of Statistical Arbitrage, Cointegration, and Multivariate Ornstein-Uhlenbeck,” Bloomberg Portfolio Research Paper No. 2010-01-CLASSROOM, 2010.
- Mittermayer, Marc-André, and Gerhard F. Knolmayer, “Text Mining Systems for Market Response to News: A Survey,” working paper No. 184, Institute of Information Systems, University of Bern, 2006.
- Narang, Rishi K., *Inside the Black Box: The Simple Truth about Quantitative Trading*, Wiley Finance, 2009.
- Navet, Nicolas, and Shu-Heng Chen, “Financial Data Mining with Genetic Programming: A Survey and Look Forward,” *Automated Trader*, 14, 2009.
- Nguyen, Anh H., Huu N. Duong, Petko S. Kalev, and Natalie Y. Oh, “Implicit Trading Costs, Divergence of Opinion, and Short-Selling Constraints in the Limit Book Order Market,” *Journal of Trading*, 5 (2), 2010, pp. 92–101.
- Obizhaeva, Anna, “Information vs. Liquidity: Evidence from Portfolio Transition Trades,” University of Maryland, working paper, 2008.
- , and Jiang Wang, “Optimal Trading Strategy and Supply/Demand Dynamics,” Discussion Paper, MIT Sloan School of Management, 2005.

- Parlour, Christine A., and Duane J. Seppi, “Liquidity-Based Competition for Order Flow,” *The Review of Financial Studies*, 16 (2), 2003, pp. 301–343.
- Pasquariello, Paolo, and Clara Vega, “Informed and Strategic Order Flow in the Bond Markets,” *Review of Financial Studies*, 20 (6), 2007, pp. 1975–2019.
- Platen, Eckhard, and Martin Schweizer, “On Feedback Effects from Hedging Derivatives,” *Mathematical Finance*, 8 (1), 1998, pp. 67–84.
- Plerou, Vasiliki, Parameswaran Gopikrishnan, Bernd Rosenow, Luís A. N. Amaral, Thomas Guhr, and H. Eugene Stanley, “Random Matrix Approach to Cross Correlations in Financial Data,” *Physical Review E*, 65 (6), 2002.
- Pole, Andrew, *Statistical Arbitrag: Algorithmic Trading Insights and Techniques*, Wiley Finance, 2007.
- Potters, Marc, and Jean-Philippe Bouchaud, “More Statistical Properties of Order Books and Price Impact,” *Physica A*, 324 (1–2), 2003, pp. 133–140.
- Predoiu, Silviu, Gennady Shaikhet, and Steven Shreve, “Optimal Execution in a General One-Sided Limit-Order Book,” *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2, 2011, pp. 183–212.
- Ranaldo, Angelo, “Order Aggressiveness in Limit Order Book Markets,” *Journal of Financial Markets*, 7 (1), 2004, pp. 53–74.
- Rime, Dagfinn, Lucio Sarno, and Elvia Sojli, “Exchange Rate Forecasting, Order Flow and Macroeconomic Information,” *Journal of International Economics*, 80 (1), 2010, pp. 72–88.
- Roch, Alexandre F., “Liquidity Risk, Price Impacts and the Replication Problem,” *Finance and Stochastics*, forthcoming, 2011.
- Roşu, Ioanid, “A Dynamic Model of the Limit Order Book,” *The Review of Financial Studies*, 22 (11), 2009, pp. 4601–4641.
- Rogers, Leonard C. G., and Surbjeet Singh, “The Cost of Illiquidity and Its Effect on Hedging,” *Mathematical Finance*, 20 (4), 2010, pp. 597–615.
- Saar, Gideon, “Price Impact Asymmetry of Block Trades: An Institutional Trading Explanation,” *Review of Financial Studies*, 14 (4), 2001, pp. 1153–1181.
- Schied, Alexander, and Torsten Schöneborn, “Risk Aversion and the Dynamics of Optimal Liquidation Strategies in Illiquid Markets,” *Finance and Stochastics*, 13 (2), 2009, pp. 181–204.
- Schmidt, Anatoly B., “Optimal Execution in the Global FX Market,” *Journal of Trading*, 5 (3), 2010, pp. 68–77.
- Scholes, Myron S., “The Market for Securities: Substitution versus Price Pressure and the Effects of Information on Share Prices,” *Journal of Business*, 45 (2), 1972, pp. 179–211.

- Sircar, K. Ronnie, and George Papanicolaou, "General Black-Scholes Models Accounting for Increased Market Volatility from Hedging Strategies," *Applied Mathematical Finance*, 5 (1), 1998, pp. 45–82.
- Stoikov, Sasha, Marco Avellaneda, and Josh Reed, "Forecasting Prices from Level-I Quotes in the Presence of Hidden Liquidity," working paper, 2010 (<http://ssrn.com/abstract=1691401>).
- Stoll, Hans R., "The Supply of Dealer Services in Securities Markets," *The Journal of Finance*, 33 (4), 1978, pp. 1133–1151.
- Thomaidis, Nikos S., "Efficient Statistical Analysis of Financial Time-Series Using Neural Networks and GARCH Models," working paper, 2007 (<http://ssrn.com/abstract=957887>).
- , and George D. Dounias, "A General Class of Neural Network-GARCH Models for Financial Time Series Analysis," working paper, 2006 (<http://ssrn.com/abstract=899775>).
- , Nick Kondakis, and George D. Dounias, "An Intelligent Statistical Arbitrage Trading System," *Lecture Notes in Computer Science*, 3955, 2006, pp. 596–599.
- Zovko, Ilija, and J. Dooyne Farmer, "The Power of Patience: A Behavioural Regularity in Limit-Order Placement," *Quantitative Finance*, 2, 2002, pp. 387–392.