11.2　1階線形微分方程式

$y'+P(x)\,y=Q(x)$　の解は

$$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right\}}\cdots\cdots\cdots(1)$$ 難しい。ではどうする。

簡単な解法　ポイント①　$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$　を積分する。 すなわち　$\int(f'\cdot g+f\cdot g')dx=f\cdot g$　を使う。 ポイント②　両辺に　$e^{(\ )}$　をかける ポイント③　$\{e^{(\ )}\}'=P(x)\,e^{(\ )}$　となる すなわち　$(\ \ )'=P(x)$　をさがす　$\Longrightarrow$　積分$(\ \ )=\int P(x)dx$

証明）

$$y'+P(x)\,y=Q(x)$$

$$y'\cdot e^{(\ )}+P(x)\,y\cdot e^{(\ )}=Q(x)\cdot e^{(\ )}$$ ………　ポイント②③

$$y'\cdot e^{(\ )}+\ y\cdot\{e^{(\ )}\}'=Q(x)\cdot e^{(\ )}$$

積分する（ポイント①）

$$y\cdot e^{(\ )}=\int Q(x)\cdot e^{(\ )}dx+C$$

両辺を $e^{(\ )}$ でわると解 (1) になる。

パターン1　【　$xy'+y$　】の場合　（$x\,y'+1\cdot y$） 積の公式になっている$\Longrightarrow$　$x\cdot y'+(x)'\cdot y$

例題1　次の微分方程式を解きなさい (1)　$xy'+y=x^2+3x$　　(2)　$xy'+y=2x^3+x$　　(3)　$xy'+y=1+\dfrac{1}{x}$

解）

(1)　$x\cdot y'+(x)'\cdot y=x^2+3x$

積分すると

$$x\cdot y=\int(x^2+3x)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+C$$

$$\therefore\quad y=\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{2}+\frac{C}{x}$$

(2)　$xy'+(x)'y=2x^3+x$

積分すると

$$x\cdot y=\int(2x^3+x)dx$$

$$=\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}+C$$

$$\therefore\quad y=\frac{x^3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$$

(3)　$xy'+(x)'y=1+\dfrac{1}{x}$

積分すると

$$x\cdot y=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=x+ln|x|+C$$

$$\therefore\quad y=1+\frac{ln|x|}{x}+\frac{C}{x}$$

パターン２　　　　　　　　　　　　【　$y' +\ y$　】の場合

積の公式になっている⟹　$e^x \cdot y' + (e^x)' \cdot y$

パターン２’　　　　　　　　　　　【　$y' + k \cdot y$　】の場合

積の公式になっている⟹　$e^x \cdot y' + (e^{k \cdot x})' \cdot y$

例題２　次の微分方程式を解きなさい

(1)　$y' + y = e^{2x}$　　(2)　$y' + y = 3e^{-5x} + 2$　　(3)　$y' + 2y = e^{3x}$

(1)　e^x をかけると

$$e^x \cdot y' + (e^x)' \cdot y = e^{3x}$$

積分すると

$$e^x \cdot y = \int e^{3x} dx$$
$$= \frac{e^{3x}}{3} + C$$

e^x で割って

$$\therefore \quad y = \frac{e^{2x}}{3} + \frac{C}{e^x}$$

(2)　e^x をかけると

$$e^x \cdot y' + (e^x)' \cdot y = 3e^{-4x} + 2e^x$$

積分すると

$$e^x \cdot y = \int (3e^{-4x} + 2e^x) dx$$
$$= \frac{3e^{-4x}}{-4} + 2e^x + C$$

e^x で割って

$$\therefore \quad y = -\frac{3e^{-5x}}{4} + 2 + \frac{C}{e^x}$$

(3)　e^{2x} をかけると

$$y'(e^{2x}) + 2y(e^{2x}) = e^{3x}(e^{2x})$$
$$y' \cdot e^{2x} + y \cdot (e^{2x})' = e^{5x}$$

積分すると

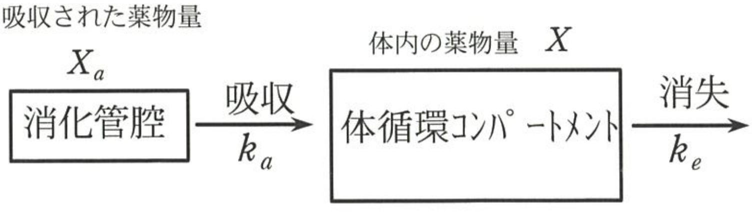
$$y \cdot e^{2x} = \int (e^{5x}) dx$$
$$= \frac{e^{5x}}{5} + C$$

e^{2x} で割って

$$\therefore \quad y = \frac{e^{3x}}{5} + \frac{C}{e^{2x}}$$

薬学を学んでいくものはここまでで大丈夫。具体例を挙げると。(詳しくは薬学で説明)

１－コンパーメントモデル (吸収過程が存在する)　：経口投与、皮下･筋肉注射



k_a ：吸収速度定数

k_b ：消失速度定数

消化管からｺﾝﾊﾟｰﾒﾝﾄ内に吸収される速度

＝　消化管に存在する薬物量の減少速度

$$\boxed{\frac{dX_a}{dt} = -k_a \cdot X_a} \quad \cdots\cdots\cdots (11-1)$$

体内ｺﾝﾊﾟｰﾒﾝﾄの中に存在する薬物量のXの変化速度

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = k_a \cdot X_a - k_e \cdot X} \quad \cdots\cdots\cdots (11-2)$$

(11－1) は変数分離形微分方程式、(11－2) は１階線形微分方程式になっている。

(11－1) の解は

$$X_a = C\,e^{-k_a t}$$

初濃度を X_a^0 とすると

$$\boxed{X_a = X_a^0\,e^{-k_a t}} \quad \cdots\cdots\cdots(11-3)$$

となる

※　X_a^0　は $t=0$ における
消化管に存在する薬物量
＝消化管から吸収される薬物量

(11－2) の解は

$$X' + k_e \cdot X = k_a \cdot X_a$$

$e^{k_e t}$ をかけると

$$X'(e^{k_e t}) + k_e \cdot X(e^{k_e t}) = k_a X_a (e^{k_e t})$$

$$X'(e^{k_e t}) + X(e^{k_e t})' = k_a X_a (e^{k_e t})$$

積分すると

$$X \cdot e^{k_e \cdot t} = k_a X_a \int e^{k_e t} dt$$

$$= k_a X_a \cdot \frac{1}{k_e} e^{k_e t} + I \qquad (I \text{ は積分定数})$$

$$\therefore \quad \boxed{X = \frac{k_a X_a}{k_e} + I \cdot e^{-k_e t}}$$

※　薬学に出てくる文字式は添え字に添え字が入るため文字が小さく見づらくなるので注意を要する。

さらに、話を進めよう。薬学に必要なのは (11－1) 、(11－2)　の連立方程式である。(11－1) で求めた解 (11－3) を(11－2) に代入して解いてみよう。

例題 3　次の連立方程式を解きなさい。

$$\frac{dX_a}{dt} = -k_a \cdot X_a \quad \cdots\cdots\cdots(11-1) \qquad \frac{dX}{dt} = k_a \cdot X_a - k_e \cdot X \quad \cdots\cdots\cdots(11-2)$$

解) (11－3) を(11－2) に代入すると

$$X' + k_e \cdot X = k_a \cdot X_a^0 e^{-k_a t}$$

$e^{k_e t}$ をかけると　$X'(e^{k_e t}) + k_e \cdot X(e^{k_e t}) = k_a X_a^0 e^{-k_a t}(e^{k_e t})$

積分すると

$$X \cdot e^{k_e \cdot t} = k_a X_a^0 \int e^{(-k_a + k_e)t}\, dt$$

$$= \frac{k_a X_a^0}{-k_a + k_e} e^{(-k_a + k_a)t} + I \qquad (I \text{ は積分定数})$$

$e^{k_e t}$ で割ると

$$X = \frac{k_a X_a^0}{-k_a + k_e} \cdot e^{-k_a \cdot t} + I \cdot e^{-k_e \cdot t}$$

初期条件　$t=0$　のとき薬物量　$X=0$　より（説明は薬学で）

$I = \dfrac{k_a X_a^0}{k_e - k_a}$　　となるので　　$X = \dfrac{k_a X_a^0}{k_e - k_a}\left(e^{-k_a \cdot t} - e^{-k_e \cdot t}\right)$