第2章

指数関数

薬学の専門書や薬剤師国家試験の解説書には指数計算式が多く載っている．ただ，途中の計算式は省略された形で記載されているので計算力が不十分な人にとって理解するのが難しいものになる．この章では指数の基礎はもちろん，薬学で扱う問題によく使われる公式を理解し，使えるようにすることを目指そう．また，薬学では濃度 C，時間 t などが使われている．x，y 以外の文字にも慣れておこう．

2.1　指数計算と半減期

薬学で扱う数字は非常に小さい数である．数字は $a \times 10^n$ の形で出てくることも多いので，指数の基礎計算を確実に身につけていこう．まずは，有効数字の復習からはじめる．

definition

有効数字（有効桁数）

・0ではない数字に挟まれた 0 は桁数として数える．

20005 は有効数字 5 桁である．10.04 は有効数字 4 桁である．

・0ではない数字より前に 0 がある場合，その 0 は桁数として数えない．

0.032 は有効数字 2 桁である．0.00405 は有効数字 3 桁である．

0.5004 は有効数字 4 桁である．

・小数点より右にある 0 は桁数として数える．

10.00 は有効数字 4 桁である．8.0000 は有効数字 5 桁である．

次に高校数学で学んだ公式を確認する．微分積分の計算によく使われる．

（累乗根（m 乗根）$\sqrt[m]{a}$ は m 乗すると a になる数：$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$，$m$ は整数に限らず，実数でも成立）

formulas

指数公式　（薬学では $a > 0$，$b > 0$ で考える）

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

特に $a^0 = 1$　　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$　　$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

例題1　次の数字を $a \times 10^n$ の形にしなさい．ただし，$1 \leqq a < 10$，n は整数とする（この形で扱うことが多い）．

(1)　2300　　(2)　0.00023

解　(1)　$2300 = 2.3 \times 10^3$　　(2)　$0.00023 = 2.3 \times 10^{-4}$

計算問題の中でこれらを使うときには次のような約束事がある．

rules

解答の有効数字の桁数は，問題の中の有効数字の桁数に合わせる．
$a \times 10^n$ で表すときは　$1 \leqq a < 10$　の範囲にする．

例題2　窒素 N_2，1 g の気体中の分子の数を求めよ．ただし，N_2 の分子量は28，アボガドロ定数は 6.0×10^{23} 個/mol とする．

解　28 g : 6.0×10^{23}（個）= 1 g : x（個）

$$x = \frac{6.0 \times 10^{23}}{28} = 0.2142 \times 10^{23} \fallingdotseq 2.1 \times 10^{22}$$

問題文の有効数字2桁
⇒　解の有効数字2桁

例題3　次の値を $a \times 10^n$ の形に直しなさい．ただし，$1 \leqq a < 10$，n は整数とする．

(1)　$\dfrac{1}{10^3}$　(2)　$\dfrac{1}{2.0 \times 10^{-3}}$　(3)　$\dfrac{1}{4.0 \times 10^{-5}}$　(4)　$\dfrac{1.0 \times 10^{-3}}{500}$　(5)　$2.0 \times 10^3 + 5.0 \times 10^2$

(6)　$2.0 \times 10^{-4} + 3.0 \times 10^{-3}$　(7)　$3.2 \times 10^{-21} + 3.0 \times 10^{-22}$　(8)　$2.0 \times 10^{-6} \times (4.0 \times 10^{-6})^2$

解　(1)　10^{-3}

(2)　与式 $= (0.5) \times 10^3 = 5.0 \times 10^2$

(3)　与式 $= 0.25 \times 10^5 = 2.5 \times 10^4$

(4)　与式 $= \dfrac{1}{5} \times \dfrac{10^{-3}}{10^2} = 0.2 \times 10^{-5} = 2.0 \times 10^{-6}$

(5)　与式 $= 2.0 \times 10^3 + 0.5 \times 10^3 = 2.5 \times 10^3$

(6)　与式 $= 0.2 \times 10^{-3} + 3.0 \times 10^{-3} = 3.2 \times 10^{-3}$

(7)　与式 $= 3.2 \times 10^{-21} + 0.3 \times 10^{-21} = 3.5 \times 10^{-21}$

(8)　与式 $= 2.0 \times 10^{-6} \times 16 \times 10^{-12} = 32 \times 10^{-18} = 3.2 \times 10^{-17}$

$1 \leqq a < 10$ の条件があるが例外として $n = 1$ のときにはたとえば，$3 \times 10 = 30$ とする．(5)(6)(7)は大きい指数にあわせる．

例題4　次の計算をしなさい．

(1)　$\dfrac{1}{a^{-3}}$　　(2)　$\sqrt[3]{8^2}$　　(3)　$(ab)^5 \times (a^2b^1)^{-2}$　　(4)　$(ab^2)^2 \div (a^{-2}b^3) \times (a^3b^{-1})^{-1}$

(5)　$6^5 \div 12^4 \times 18$　　(6)　$25^{1.5} \times 8^{\frac{2}{3}}$　　(7)　$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}$

解　(1)　与式 $= (a^{-3})^{-1} = a^3$

(2)　与式 $= (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

(3)　与式 $= a^5b^5 \times a^{-4}b^{-2} = a^{5+(-4)} \times b^{5+(-2)} = ab^3$

(4)　与式 $= a^2b^4 \div a^{-2}b^3 \times a^{-3}b^1 = a^{2-(-2)+(-3)}\, b^{4-3+1} = ab^2$

(5)　与式 $= (2 \times 3)^5 \div (2^2 \times 3)^4 \times (2 \times 3^2) = 2^{5-8+1} \cdot 3^{5-4+2} = 2^{-2} \cdot 3^3 = \dfrac{27}{4}$

(6)　与式 $= (5^2)^{1.5} \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = 5^3 \times 2^2 = 500$

(7)　与式 $= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = a^{\frac{5}{6}}$

例題5　ある薬物を人に投与した場合，その血中濃度の半減期（$t_{1/2}$）は4時間であった．投与直後の初濃度が 100 μg/mL として，投与後2時間，12時間の血中濃度を計算せよ．ただし，薬物を体内に静脈注射すると体内の血中濃度 C は時間 t に対して指数関数

$C = C_0 e^{-kt}$　　（1次反応式）

で表される式に従って変化する．ただし，$\sqrt{2} = 1.414$ とする．

解　半減期の条件より，　$t = t_{1/2} = 4$，$C = \dfrac{C_0}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$　を　$C = C_0 e^{-kt}$　に代入すると

$$50 = 100\, e^{-4k} \qquad \therefore \quad e^{-4k} = \frac{1}{2}$$

2時間後の濃度は

$$C = 100e^{-2k} = 100(e^{-4k})^{\frac{1}{2}} = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 100 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{100\sqrt{2}}{2} = \frac{141.4}{2} = 70.7$$

同様に12時間後の濃度は

$$C = 100e^{-12k} = 100(e^{-4k})^3 = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{100}{8} = 12.5$$

$e^{-2k} = (e^{-4k})^{\frac{1}{2}}$，$e^{-6k} = (e^{-4k})^{\frac{3}{2}}$ の考え方は意外と難しい．血中濃度の公式を暗記すると簡単に出せる．

formulas

初濃度 C_0，半減期 $t_{1/2}$ の薬物の投与後 t 時間の血中濃度 C_t は，$C_t = C_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$ である．

別解　血中濃度の公式に $C_0 = 100$，$t_{1/2} = 4$，$t = 2$ を代入すると

$$C_2 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{4}} = 100\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{100\sqrt{2}}{2} = 70.7$$

同様に $C_0 = 100$，$t_{1/2} = 4$，$t = 12$ を代入すると

$$C_{12} = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{4}} = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{100}{8} = 12.5$$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ はすぐできるようになっておこう．

血中濃度の公式の証明

半減期の時刻 $t = t_{1/2}$，濃度 $C = \frac{C_0}{2}$ を1次反応式 $C = C_0 e^{-kt}$ に代入すると

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{-kt_{1/2}} \qquad \therefore \quad e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

第3章で学ぶが $\ln x = \log_e x$ である（p.25参照）．

対数を使って表すと

$$-kt_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \qquad \therefore \quad k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

これを1次反応式 $C = C_0 e^{-kt}$ に代入すると

$$C = C_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}}t} = C_0 (e^{-\ln 2})^{\frac{t}{t_{1/2}}} = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$$

公式 $a^{\log_a M} = M$ より

$$e^{-\ln 2} = e^{\log_e 2^{-1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

演習問題

問1 例題1に従い，書き直しなさい．

(1) $18000 = 1.8 \times 10^{(\quad)}$ (2) $(\qquad) = 2.84 \times 10^4$

(3) $(\qquad) = 1.8 \times 10^{-5}$ (4) $0.0000284 = 2.84 \times 10^{(\quad)}$

問2 累乗根，分数式は指数に，指数は累乗根，分数式に直しなさい．

(1) $\sqrt{a}$ (2) $2\sqrt[3]{a^5}$ (3) $\frac{1}{a^2}$ (4) $\frac{15}{a^3}$ (5) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$ (6) $\frac{-2}{\sqrt[4]{a^5}}$

(7) $x^{\frac{3}{4}}$ (8) $4x^{\frac{5}{3}}$ (9) x^{-3} (10) $3x^{-4}$ (11) $x^{-\frac{3}{4}}$ (12) $2x^{-\frac{3}{2}}$

問3 次の計算をしなさい．

(1) $2^0 + 2^3 + \frac{1}{2^{-2}} + 16^{\frac{1}{4}}$ (2) $\sqrt{9} - \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^2} - 9^{-1}$ (3) $\frac{1}{10^{-2}} + \frac{1}{10^{-1}} + \frac{1}{10^0}$

(4) $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$ (5) $a^{-3}b^6c^{-2} \times (a^2b^{-3})^2c^3$ (6) $a^{\frac{11}{3}} \div a^{\frac{3}{2}} \div a^{\frac{1}{6}}$

(7) $x^{\frac{1}{3}} \div x^{-\frac{3}{2}} \times x^{\frac{1}{6}}$ (8) $(2a^2b^3) \times \left(3a^2b^{\frac{3}{2}}\right)^2$ (9) $\sqrt{a} \div \sqrt[6]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$

問4 次の数，式を $a \times 10^n$（$1 \leqq a < 10$，nは整数）の形で表しなさい．

(1) $\frac{1}{2.0 \times 10^{-3}}$ (2) $\frac{2 \times 10^{-3}}{500}$ (3) $2.4 \times 10^{15} + 3.5 \times 10^{14}$

(4) $2.4 \times 10^{-23} + 3.5 \times 10^{-24}$ (5) $(2.0 \times 10^{-5}) \times (3.0 \times 10^{-3})^2$

問5 $C = C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$ に以下の値を代入してCを計算しなさい．ただし，$\sqrt{2} = 1.414$ とする．

(1) $C_0 = 100$，$t_{1/2} = 6$，$t = 3$ (2) $C_0 = 50$，$t_{1/2} = 4$，$t = 6$ (3) $C_0 = 40$，$t_{1/2} = 2$，$t = 5$