I

1階微分方程式

1 章では，微分方程式でよく出てくる用語の意味をまとめています．2 章では，代表的な微分方程式の形である変数分離形の解き方を学びます．3 章では，変数分離形に変形できる代表例として同次形の解き方を説明します．

4，5 章では，1 階線形方程式の解き方を系統的に学習します．4 章では斉次方程式を変数分離形に変形して解く方法，5 章では，斉次方程式の一般解の形から非斉次方程式を解く定数変化法を扱います．

1　微分方程式の基礎事項

要点

1. 微分方程式は，独立変数 x の関数とその導関数との間に成り立つ関係式である．
2. 微分方程式の階数は，微分方程式に含まれる導関数の最高階数である．
3. 線形微分方程式は，未知関数とその導関数について 1 次方程式になっている．
4. 一般解は，n 個の任意定数を含んだ n 階微分方程式の解である．
5. 特殊解は，一般解の n 個の任意定数に具体的な値を代入して得られる解である．

準備

1. 2 元連立 1 次方程式の解き方を復習する．

1.1　微分方程式とは

要点1

n 回微分可能な，**独立変数**x の関数

$$y = y\,(x)$$

とその導関数

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'\,(x)\,(1\text{ 階}) \\ y'' &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y''\,(x)\,(2\text{ 階}) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \frac{\mathrm{d}^{(n)}y}{\mathrm{d}x^{(n)}} = y^{(n)}\,(x)\,(n\text{ 階}) \end{aligned}$$

の間に成り立つ関係式

$$f\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

を，y を**未知関数**とする**微分方程式**という．この微分方程式を満足する関数 $y = y(x)$ を**微分方程式の解**といい，解を求めること，または解が満たす方程式をその導関数を含まずに表すことを**微分方程式を解く**という．

1.2　階数

要点2 微分方程式に含まれる導関数の最高階数を，その微分方程式の**階数**という．

例

$$y' = -y \tag{1.1}$$

は 1 階微分方程式である．

例

$$y'' = -y \tag{1.2}$$

は 2 階微分方程式である．

要点3 未知関数 y とその導関数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ について 1 次方程式になっている微分方程式を，**n 階線形微分方程式**という．

例

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

は 1 階線形微分方程式である．

例

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x)$$

は 2 階線形微分方程式である．

上の 2 つの例で右辺の関数が恒等的に 0 となる微分方程式を**斉次**(せいじ)**微分方程式**(あるいは**同次微分方程式**) といい，右辺の関数が 0 でない微分方程式を**非斉次微分方程式**(あるいは**非同次微分方程式**) という．

線形微分方程式でないものを**非線形微分方程式**という．

例

$$y' + y^2 = 0$$

は，y の 2 次関数を含むので非線形微分方程式である．

1.3　一般解と特殊解

要点4 n 階微分方程式の解は n 個の任意定数を含んでおり，そのような解を**一般解**という．

要点5 一般解の n 個の任意定数に具体的な値を代入して得られる解を**特殊解**という．

例　1 階微分方程式 (1.1) の一般解は

$$y = C \exp(-x)$$

であり，1 個の任意定数 C を含む．たとえば，$C = 1$ を代入して得られた解 $y = \exp(-x)$ は特殊解の例である．

例　2 階微分方程式 (1.2) の一般解は，

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

であり，2 個の任意定数 C_1, C_2 を含む．たとえば，$C_1 = 1, C_2 = 0$ を代入して得られた解 $y = \cos x$ は特殊解の例である．

微分方程式の一般解の任意定数にどのような値を入れても得られない解を**特異解**という．

例　微分方程式 $y'^2 = 4y$ の一般解は $y = (x - C)^2$ である．ここで，C は任意定数である．$y = 0$ も微分方程式の解であるが，一般解の任意定数 C にどのような値を入れても得られない．よって，$y = 0$ は特異解である．

1.4　初期条件と境界条件

独立変数 x の 1 つの値 X に対する関数 y と導関数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ の値を与える条件を**初期条件**といい，その条件を満足する特殊解を求める問題を**初期値問題**という．n 階微分方程式の一般解は n 個の任意定数を含んでいるので，関数 $y(X)$ と $(n-1)$ 階までの導関数 $y'(X), y''(X), \cdots, y^{(n-1)}(X)$ の値を与える．初期値問題は時間的変化を扱う問題によくあらわれる．

独立変数 x の複数の値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対する関数 y あるいは導関数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ の値を与える条件を**境界条件**といい，その条件を満足する特殊解を求める問題を**境界値問題**という．n 階微分方程式の一般解は n 個の任意定数を含んでいるので，n 個の境界条件を与える．たとえば関数の値を与える

場合，$y(X_1), y(X_2), \cdots, y(X_n)$ の値を与える．境界値問題は場所的変化を扱う問題によくあらわれる．

例題 1.1　1 階微分方程式 (1.1) を，$x=0$ のとき $y=y(0)=1$ の初期条件で解く．

答　1 階微分方程式 (1.1) の一般解 $y=C\exp(-x)$ に初期条件を代入すると，$C=1$ となる．よって，$y=\exp(-x)$ がその初期条件での特殊解になる．■

例題 1.2　2 階微分方程式 (1.2) を，$x=0$ のとき $y=y(0)=1$ および $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ の 2 つの境界条件で解く．

答　2 階微分方程式 (1.2) の一般解 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ に 2 つの境界条件を代入する．

$x=0$ のとき $\sin x=0$ であるので $C_1=1$ となる．また，$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos x=0$ であるので $C_2=0$ となる．よって，$y=\cos x$ がその境界条件での特殊解になる．■

1.5　積分法の復習

微分方程式を解く際には，関数を積分する必要がある．以下に，代表的な積分法をまとめておく．

置換積分…u が x の関数であるとき，$\displaystyle\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int f(u)\,\mathrm{d}u$ となる．

部分積分…2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ に関して，

$$\int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,g(x)-\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ．

例題 1.3　$\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ を求める．

答　$x^2+1=u$ とおくと，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x$ であるので，

$$\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\log_e|u|+C=\frac{1}{2}\log_e\left(x^2+1\right)+C$$

となる．ここで，C は任意定数である． ■

関数 f の**原始関数**は導関数が f となる関数をいう．$\frac{1}{u}$ の原始関数は底を e とする対数関数である自然対数 $\log_{\mathrm{e}}|u|$ となる．今後，本書で用いる対数関数はすべて自然対数であるため，底の e を省いて $\log|u|$ のように記述する．なお，対数関数の引数は正であるため，u の絶対値をとることに注意する．

例題 1.4 $\int x\log x\mathrm{d}x$ を求める．

答

$$\begin{aligned}\int x\log x\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x^2(\log x)'\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}x+C\end{aligned}$$

となる．ここで，C は任意定数である． ■

1.6 関数のべき級数展開の復習

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ が，$|x|<\rho$ の範囲 (これを**収束域**という) で収束するとき，ρ を**収束半径**という．これを求める方法として次の 2 つがある．収束域では，項別に微分，積分が可能である．

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|=\frac{1}{\rho}$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}=\frac{1}{\rho}$$

関数 $f(x)$ の**マクローリン展開**(または $x=0$ における**テーラー展開**という) は以下で与えられる．

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

これは，関数をべき級数で展開したものと同じであり，x^n の係数 A_n は $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

で与えられる．

例題 1.5　$\dfrac{1}{1+x}$ を $x=0$ においてテーラー展開し，この収束域を求める．

答　$f(x)=\dfrac{1}{1+x}=(x+1)^{-1}$ とおく．$f'(x)=-(x+1)^{-2}$，$f''(x)=2(x+1)^{-3}$ より，

$$f^{(n)}(x)=n!(-1)^n(x+1)^{-n-1}$$

$f^{(n)}(0)=n!(-1)^n$ より，テーラー展開は

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

となる．$A_n=(-1)^n$ より，

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|=\lim_{n\to\infty}|-1|=1$$

となる．よって，収束域は $|x|<1$ となる．■

展開

問題 1.1 次の微分方程式の階数を示せ．
(1) $x^2y''+xy'+y=0$，(2) $y'+\dfrac{1}{x}y=x$

問題 1.2 次の微分方程式は線形方程式か，非線形方程式かを示せ．
(1) $y'^2+xy=0$，(2) $y'+\dfrac{1}{x}y=x$

問題 1.3 次の微分方程式は斉次方程式か，非斉次方程式かを示せ．
(1) $x^2y''+xy'+y=0$，(2) $y'+\dfrac{1}{x}y=x$

問題 1.4 (1) 微分方程式 $y''=y$ の一般解は $y=C_1\exp x+C_2\exp(-x)$ であることを，微分方程式へ代入して確認せよ．
(2) 微分方程式 $y''=y$ を，$x=0$ のとき $y=y(0)=1$ および $y'=y'(0)=0$ の 2 つの初期条件で解け．

問題 1.5 (1) 微分方程式 $y=xy'-y'^2$ の一般解は $y=\dfrac{1}{2}Cx-\dfrac{1}{4}C^2$ であることを，微分方程式へ代入して確認せよ．
(2) $y=\dfrac{1}{4}x^2$ が微分方程式 $y=xy'-y'^2$ の特異解であることを確認せよ．

確認事項　I

1 章　微分方程式の基礎事項

- □ 微分方程式の階数の意味が理解できる
- □ 線形方程式と非線形方程式の違いが理解できる
- □ 斉次方程式と非斉次方程式の違いが理解できる
- □ 一般解と特殊解の違いが理解できる
- □ 初期条件，境界条件の意味が理解できる

2 章　変数分離形

- □ 変数分離形の意味が理解できる
- □ 変数分離形の解き方を理解できる
- □ 1 階微分方程式の一般解には 1 つの任意定数が含まれることを理解している
- □ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(Ax + By + C\right)$ の形が解ける

3 章　同次形

- □ 同次形の意味が理解できる
- □ 同次形の解き方が理解できる
- □ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\dfrac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$ の形が解ける

4 章　1 階線形斉次方程式

- □ 1 階線形斉次方程式の意味が理解できる
- □ 1 階線形斉次方程式の解き方が理解できる
- □ $f\left(x, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$ の形が解ける
- □ $f\left(y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$ の形が解ける

5 章　1 階線形非斉次方程式

- □ 1 階線形非斉次方程式の意味が理解できる
- □ 定数変化法による 1 階線形非斉次方程式の解き方が理解できる
- □ 非斉次方程式の一般解は，対応する斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和であることが理解できる
- □ 1 階線形方程式の解がただ 1 つだけ必ず存在する条件が理解できる