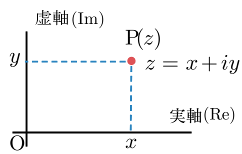
I
複素関数

　複素数は工学のあらゆる場面で使われています．とくに工学系大学課程では複素数を変数とする複素関数の理解が求められます．第 I 部では，複素数，複素平面，複素平面図形といった基礎事項のあとに，複素関数とは何かを学びます．複素関数の指数関数，三角関数，対数関数などは実関数とは別に定義されます．複素関数を実関数と同じに扱える場合と扱えない場合を理解します．以下に各章の学習項目と項目を代表する式や図を示します．

1	**複素数**	
1.1	複素数	$z=x+iy(i^2=-1)$
1.2	複素平面	虚軸と実軸
1.3	極形式	$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$



2	**複素平面**	
2.1	ド・モアブルの定理	$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$
2.2	n 乗根	n 個の解
2.3	複素平面図形	$\lvert z+a\rvert+\lvert z-a\rvert=b$

3	**複素関数**	
3.1	複素関数	$f(z)=w=u+iv$
3.2	写像	$w=az+b$
3.3	1次変換	$w=(az+b)/(cz+d)$

4	**指数・三角関数**	
4.1	指数関数	$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$
4.2	三角関数	$\cos z=(e^{iz}+e^{-iz})/2$
5	**双曲線・対数・べき関数**	
5.1	双曲線関数	$\cosh z=(e^z+e^{-z})/2$
5.2	対数関数	$\log z=\log r+i\theta$
5.3	べき関数	$z^a=e^{a\log z}$

1 複素数

要点

1. 複素数 $z = x + iy$ の実部 x を $\mathrm{Re}\,z$，虚部 y を $\mathrm{Im}\,z$ と表す．
2. z の極形式は $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，絶対値 $|z| = r$，偏角 $\arg z = \theta$．
3. 偏角は $\theta = \mathrm{Arg}\,z + 2n\pi$，$\mathrm{Arg}\,z$ を主値とよび，範囲を 2π に限定する．
4. 複素数の加減乗除は複素平面上での絶対値と偏角の変化で表される．

準備

1. 整数，実数，有理数，無理数の関係を確認する．
2. $(x\,y)$ 平面上の任意の直線について，位置や傾きを方程式で表せ．

1.1 複素数

2 乗して -1 となる数 i を次式のように定義する．i を**虚数単位**という．

$$i^2 = -1$$

複素数は実数と虚数単位の組み合わせによって次式のように表す．

要点1

$$z = x + iy\ (= x + yi)$$

x を複素数 z の**実部**とよび $\mathrm{Re}\,z$ と書き，y を**虚部**とよんで $\mathrm{Im}\,z$ と書く．また，実部が 0 の $z = iy\ (y \neq 0)$ を**純虚数**という．

2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ が等しいとは，次式のように実部と虚部がともに等しいことをいう．よって，$z = 0$ は，$x = y = 0$ を意味する．

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \text{かつ} \quad y_1 = y_2$$

複素数の四則演算は次ページの式で定義される．実部と虚部は個別に計算し，乗算では $i^2 = -1$ の関係を代入，除算では分母を有理化している．

$$\text{加}：z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\text{減}：z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\text{乗}：z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\text{除}：\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_1}^2 + {y_1}^2} + i\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{{x_1}^2 + {y_1}^2}$$

例題 1.1　$z_1 = -2 + 3i$，$z_2 = 1 - 2i$ について四則演算せよ．

答　加：$z_1 + z_2 = (-2 + 3i) + (1 - 2i) = -1 + i$

減：$z_1 - z_2 = (-2 + 3i) - (1 - 2i) = -3 + 5i$

乗：$z_1 \cdot z_2 = (-2 + 3i) \cdot (1 - 2i) = (-2 + 6) + (4 + 3)i = 4 + 7i$

除：$\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{(1 - 2i)(-2 - 3i)}{(-2 + 3i)(-2 - 3i)} = \dfrac{-8 + i}{4 + 9} = \dfrac{-8}{13} + \dfrac{1}{13}i$　■

1.2　複素平面

実数を数直線上の点に対応させたように，複素数 $z = x + iy$ を，(x, y) 平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ に 1 対 1 対応させることができる．この平面を**複素平面**または**複素数平面**といい，図 1.1 のように表す．y 軸を**虚軸**，x 軸を**実軸**といい，両者の交点を原点 O とよぶ．原点 O と点 P との距離を複素数 z の**絶対値**といい，$|z|$ で表す．よって $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ である．

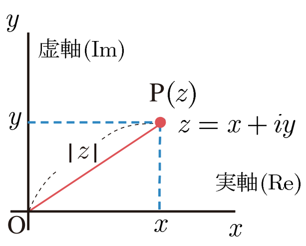


図 1.1　複素平面

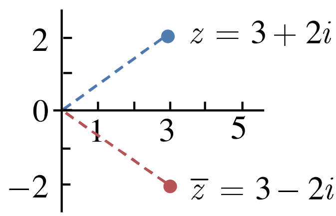


図 1.2　共役複素数

複素数 $z = x + iy$ に対して複素数 $z = x - iy$ を z の**共役複素数**といい，$\bar{z}$ で表す．図 1.2 の例からわかるように，$\bar{z}$は実軸に対して z と対称の位置にある．

$$\bar{z} = x - iy \quad (z = x + iy) \tag{1.1}$$

であるから，z と $\overline{z}$ の和と差よりよく使う関係式 (1.2) が求まる．

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \operatorname{Re} z = x, \quad \frac{z-\overline{z}}{2i} = \operatorname{Im} z = y \tag{1.2}$$

また共役複素数については次式が成り立つ．

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ (b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$ (c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$

(d) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ (e) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ (f) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

たとえば (c) は $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ だから ,$\overline{z_1 z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 - i y_1)(x_2 - i y_2) = \overline{z}_1 \overline{z}_2$ と確認できる．

例題 1.2 $\overline{\overline{z}},\ z \cdot \overline{z},\ |z_1 + z_2|^2$ を求めよ．

答 $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x+iy = z$,

$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$,

$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)$

$\quad = z_1 \overline{z}_1 + (z_1 \overline{z}_2 + \overline{z_1 \overline{z}_2}) + z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z}_2) + |z_2|^2$

($z \cdot \overline{z} = |z|^2$ の関係はよく使う) ■

図 1.3 は 2 つの複素数 $z_1 = 3+i$，$z_2 = 1+2i$ の和：$z_1 + z_2 = 4+3i$ を，複素平面図形として求めたもので，一方の複素数と原点を結ぶ線分を平行移動して他方の点につなげている．減算 $z_1 - z_2$ は z_1 と $-z_2$ の和と考えればよいので，図 1.4 のように原点に対して z_2 と対称な位置に $-z_2(= -x_2 - iy_2)$ をおき z_1 との和をとる．

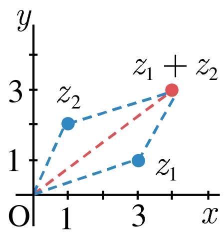


図 1.3 複素数の和

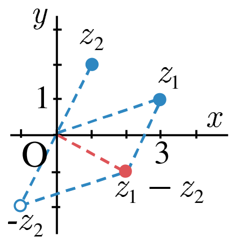


図 1.4 複素数の差

1.3　極形式

図 1.5 に示すように，複素数 $z = x + iy (\neq 0)$ に対応した複素平面上の点を P とする．原点 O から点 P までの距離を r，実軸の正の部分から線分 OP へなす角を θ とすると，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ である．よって式 (1.3) が成り立ち，これを**極形式**という．なお，$\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ である．

要点2

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.3}$$

r は複素数 z の絶対値に等しく式 (1.4) の関係が得られる．

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \tag{1.4}$$

また $|z|^2 = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2$ の関係式より，不等式 $|z| \geq \mathrm{Re}\, z$，$|z| \geq \mathrm{Im}\, z$ が成り立つ．なお 2 つの複素数について，不等式 $|z_1| > |z_2|$ は実数の大小関係を表すが，$z_1 > z_2$ は意味をなさない．

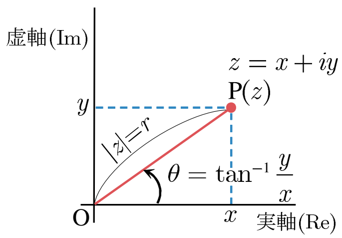


図 1.5　極形式

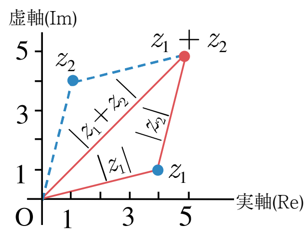


図 1.6　三角不等式

図 1.6 は，2 つの複素数 z_1 と z_2 の加算を示す．三角形の 2 辺の和は他の 1 辺よりも大きいので，式 (1.5) に示す三角不等式が成り立つ．

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{1.5}$$

式 (1.5) から帰納法により，一般化された三角不等式 (1.6) が求まる．

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \tag{1.6}$$

よって複素数の和の絶対値は各複素数の絶対値の和を超えることはない．

図 1.5 の θ は式 (1.7) のように表され θ を**偏角**とよんで $\arg z$ で表す．

要点3

$$\theta = \arg z \tag{1.7}$$

ただし，1 つの偏角を θ とすると，一般に $\arg z = \theta + 2n\pi$（n は整数）と表されるため，偏角の範囲を 2π に限定する場合がある．通常 $-\pi < \theta \leq \pi$ または $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲が使われ，この範囲内の偏角を **主値**といい，大文字の $\mathrm{Arg}\, z$ で表す．

複素数 $z = x + iy$ は極形式の $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に変換することができる．たとえば $z = 1 - \sqrt{3}i$ を変換する場合は，絶対値を $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ と求め，次に偏角を $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\dfrac{\pi}{3}$ と求める．以上から求める極形式は $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi\right)\right\}$ である．このように，偏角の範囲が指定されていない場合は，$2n\pi$ を加えることに注意する．

図 1.7 は，2 つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ の積 z_1z_2 を複素平面上で表す．三角関数の加法定理を使って整理すると，

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}$$

となる．よって積の場合に絶対値は積，偏角は和として式 (1.8) で与えられる．

要点4

$$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1|\,|z_2|, \quad \arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{1.8}$$

よってある複素数に $z = \cos\theta + i\sin\theta$ をかけると，絶対値は変わらないが，偏角は角度 θ 増加するといえる．たとえば $z = i$ の場合 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ だから，ある複素数に i をかけると原点を中心に反時計まわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転する．この様子を図 1.8 に示す．

除算については，積の式 $|zz_1| = |z|\,|z_1|$, $\arg(zz_1) = \arg z + \arg z_1$ において，$z = \dfrac{z_2}{z_1}$ とおけば式 (1.9) が得られる．

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \quad \arg\frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1 \tag{1.9}$$

よって

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}\{\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\} \tag{1.10}$$

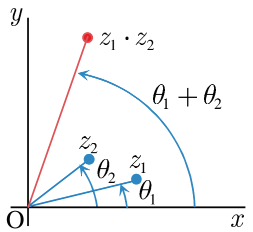


図 1.7　複素数の積

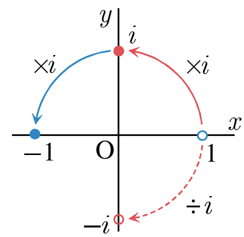


図 1.8　i の作用

である．ある複素数を i で割ると，図 1.8 のように時計まわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転する．

例題 1.3　複素数 $z=1+i$ を極形式に変換せよ．

答　$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{1}{1}=\dfrac{\pi}{4}$ より $z=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right)\right\}$ ■

展開

問題 1.1 以下について z_1+z_2，z_1-z_2，$z_1\cdot z_2$，$\dfrac{z_2}{z_1}$ を計算せよ．

(1) $z_1=i,\quad z_2=1-i$　(2) $z_1=8+3i,\quad z_2=9+2i$

(3) $z_1=2-i,\quad z_2=\overline{z}_1=2+i$

問題 1.2 以下の複素数を複素平面上に図示し，その絶対値を求めよ．

(1) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$　(2) $\sqrt{3}+i$　(3) $-3-\sqrt{3}i$

問題 1.3 三角不等式 $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$（式 (1.5)）を，$|z|^2=z\overline{z}$ および $2\mathrm{Re}z=z+\overline{z}$ の関係を利用して導出せよ．

問題 1.4 $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$ となることを**問題 1.3** と同様に示せ．

問題 1.5 $\overline{z}-2iz=1+i$ より z を求めよ．

問題 1.6 偏角の範囲を $0\leq\theta<2\pi$ として，以下の複素数 z を極形式で表せ．

(1) $1+\sqrt{3}i$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{4}i$　(3) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$　(4) $(\sqrt{3}+i)^2$

(5) $\dfrac{1-i}{1+i}$

確認事項 I

1章　複素数

- ☐ 複素数の実部，虚部が求められる
- ☐ 複素数の和差積商を求めることができる
- ☐ 複素数を極形式で表すことができる
- ☐ 偏角の主値の範囲に応じて，複素数の偏角を求めることができる
- ☐ 複素数の加減乗除を複素平面上で表すことができる

2章　複素平面

- ☐ ド・モアブルの定理を理解している
- ☐ 複素数の n 乗が計算できる
- ☐ 複素数の n 乗根を求めることができる
- ☐ 複素数の n 乗根（主値）を複素平面上に図示できる
- ☐ 複素平面上の範囲を数式で表すことができる
- ☐ 複素平面図形の平行移動や回転を式で表すことができる

3章　複素関数

- ☐ 複素関数と実関数の違いを説明できる
- ☐ 境界，領域，範囲の定義を理解している
- ☐ 1 価関数と多価関数の違いを説明できる
- ☐ 写像を例を使って説明できる
- ☐ 一次変換を求め図示できる

4章　指数・三角関数

- ☐ 複素指数関数の定義式を理解し使うことができる
- ☐ 極形式の複素数を指数表示できる
- ☐ 複素三角関数の定義を理解し，指数関数に変換することができる
- ☐ 実数と複素数のオイラーの公式を使うことができる
- ☐ 指数関数や三角関数を含む方程式を解くことができる

5章　双曲線・対数・べき関数

- ☐ 複素双曲線関数の定義式を理解し使うことができる
- ☐ 複素対数関数の定義を理解し，多価関数であることを説明できる
- ☐ 複素対数関数の計算ができる
- ☐ べき関数の価数について説明ができる
- ☐ 双曲線・対数・べき関数を含む方程式を解くことができる