第 2 章

**ニュートンの運動方程式から出発して，直交座標が極座標でも同じ形に書き表される方程式（ラグランジュの運動方程式）を導き出す。**

# ニュートン力学から<br>解析力学へ

## 2.1　ラグランジュの運動方程式

ニュートンの運動方程式を極座標のような座標で表す場合，直交座標の表式に比べ見通しの悪い面倒な式になる。これはニュートンの運動方程式が加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ と力ベクトル $\boldsymbol{F}$ の間のベクトルの方程式の形になっていることによる。極座標では，対応する直交基底が質点の位置ごとに変化してしまうため，加速度ベクトルの表式が複雑になってしまうのである。ニュートンの運動方程式と同等な方程式で，直交座標でも極座標でも同じ形に書き表すことができるようなものがあれば非常に便利である。

直線上を運動する質点の場合の運動方程式 (1.2) を考えよう。この式の両辺に微小変位 $\mathrm{d}x$ を掛けてみると，

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x = F_x\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

となる。右辺は外力 $F_x$ が質点に対してした仕事である。左辺は $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ を代入すると

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$