第 I 部　練習問題の解答

第 1 章

1.1 (1) $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

1.2 (1) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.3 (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$

1.4 (1) -5　(2) 0

1.5 (1) $\sqrt{10}$　(2) $\sqrt{33}$　(3)$\sqrt{2}$

1.6 (1) $A^TA = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$, $AA^T = \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$, $A^TB = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$, $B^TA = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $A^TA = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$, $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$, $A^TB = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$, $B^TA = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$

1.7 (以下第 1 刷では番号誤り) A^TA の (i,j) 成分は $\sum_k a_{ki}a_{kj}$ と書け，これは (j,i) 成分とも等しいので A^TA は対称.

1.8 行列の積の結合則は $(AB)C$ 及び $A(BC)$ の (i,j) 成分が $\sum_{k,l} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$ と書けることからわかる．他の性質も要素ごとに考えれば容易に確認できる.

1.9 AB の (i,j) 成分は $\sum_k a_{ik}b_{kj}$ であるが，$i > j$ ならばどの k についても $i > k$ あるいは $k > j$ のいずれかが成り立つので， 和のすべての項は 0 となる.

1.10 $\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1000} \end{pmatrix}$

1.11 $A = I_n - \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_p} \end{pmatrix}$

第 2 章

2.1 定義の性質を順に確認すればよい．

2.2 $W = \{\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$ と表すことができ，この集合について部分ベクトル空間の定義の性質を順に確認すればよい．

2.3 (1) 一次独立　(2) 一次従属

2.4 一次独立性は明らか．また任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

と書けることから $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$ が基底を構成することがわかる．

2.5 W の基底として $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ がとれる．これを拡張して $\mathbb{R}^2$ の基底を作るには $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と比例的でない任意のベクトル (例えば，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) を加えればよい．

2.6 内積をそれぞれ計算することにより $\boldsymbol{w}_1 = 2\sqrt{6}\boldsymbol{v}_1 - \sqrt{11}\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{w}_2 = -2\sqrt{6}\boldsymbol{v}_1 + 3\sqrt{11}\boldsymbol{v}_2$ を得る．

2.7 $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.8 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への全射ではあるが単射でない写像の例を挙げる:$f(x_1, x_2) = x_1$.

2.9 (1) $\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$　(2) $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$　(3) $\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$

2.10
1. $P^TP = I_n$ は P^T が P の逆行列であることを示している．
2. $(PQ)^T(PQ) = Q^TP^TPQ = Q^TQ = I_n$.
3. $\|P\|^2 = \mathrm{tr}P^TP = \mathrm{tr}I_n = n$.

2.11 $W_2 = \{t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ と書け，正規直交基底は $\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.

2.12 定義より $P^2 = P$．また $P^4 = (P^2)(P^2) = PP = P$ も成り立つ．

2.13 (1) 2　(2) 3　(3) 2

第 3 章

3.1 (1) -6　(2) 2　(3) 58　(4) 0　(5) -3　(6) -2

3.2 第 1 列で展開した結果を (1) と (2) について示す．(3)〜(6) も (2) と同様であり，省略する．

(1)

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\det(-1)\times 2 + (-1)^{2+1}\det(1)\times 4$$

(2)

$$\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\times 3 + (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\times 1 + (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times 1.$$

3.3

(1) 全体の行列式の値は 1 であり, あとは余因子を求めると逆行列は $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(2) 全体の行列式の値は 2 である．余因子をそれぞれ求め 2 で割ると逆行列は $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

(3) 全体の行列式の値が 0 であり，逆行列は存在しない．

第 4 章

4.1

(1) 固有方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ であり，解は $\lambda = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ となる．$\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ に対応する長さ 1 の固有ベクトルは $\sqrt{\frac{2}{11+\sqrt{17}}}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1+\sqrt{17}}{2}\end{pmatrix}$ であり，$\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ に対応する長さ 1 の固有ベクトルは $\sqrt{\frac{2}{11-\sqrt{17}}}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\end{pmatrix}$ である．

(2) 固有方程式は $-\lambda(\lambda-2)(\lambda-6) = 0$．固有値 6 に対応する長さ 1 の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$．固有値 2 に対応する長さ 1 の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$．固有値 0 に対応する長さ 1 の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$.

(3) 単位行列でありすでに対角化されている．固有値はすべて 1 で，任意のベクトルが固有ベクトル．

4.2 $\det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1})\det(A-\lambda I)\det(P) = \det(A-\lambda I)$ である．これより $\det(A-\lambda I) = 0$ と $\det(P^{-1}AP - \lambda I) = 0$ が同値であることがわかる．

4.3

(1) 固有方程式は $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$ より固有値は $\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$. これらに対応する固有ベクトルからなる行列を P とおくと

$$\begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} P.$$

(2) 固有値は 2 及び $\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$. これらに対応する固有ベクトルからなる行列を P とすると

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} P.$$

(3) 固有値は 4 及び $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. これらに対応する固有ベクトルからなる行列を P とすると

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} P.$$

4.4

(1)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}^T$$

(2)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

4.5 (1) 半正定値　(2) 正定値　(3) 半正定値