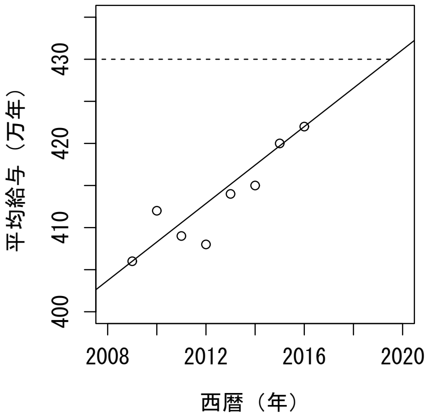
第 II 部　練習問題の解答

第 7 章

7.1 西暦を x（年），平均給与を y（万円）とし，求める直線を $y = a + bx$ とする．2009 年の平均給与は 406 万円，2016 年の平均給与が 422 万円なので，

$$\begin{aligned} 406 &= a + 2009b \\ 422 &= a + 2016b \end{aligned}$$

を満たす a, b を求める．この連立方程式を解くことで，$a = -29302/7, b = 16/7$ が得られる（以下の図はこのデータの散布図と求めた直線である）．



また，この直線から平均給与が 430 万円となる年を計算すると，

$$430 = -\frac{29302}{7} + \frac{16}{7}x$$

より，$x = 2019.5$（年）となる．

7.2 2004 年のトラヒックを 1 としたときの各年のトラヒックは

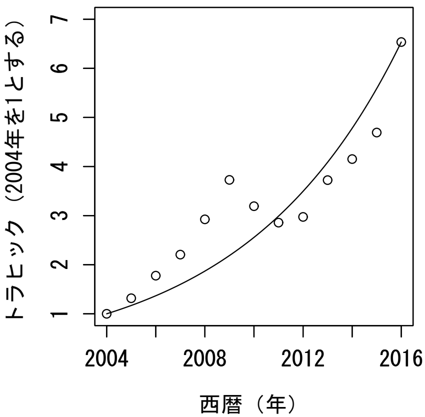
年	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
トラヒック	1.00	1.32	1.78	2.21	2.92	3.73	3.19

年	2011	2012	2013	2014	2015	2016
トラヒック	2.86	2.97	3.72	4.15	4.69	6.54

である（小数点以下第 3 位を四捨五入している）．2004 年のトラヒックを 1 としたときの 2016 年のトラヒックの値は 6.54 なので，

$$6.54 = a^{12}$$

より，$a = 1.17$ である．この散布図と求めた曲線は次のとおりである．



7.3 ポアソン分布の確率 $e^{-\lambda}\lambda^x/x!$ は正である．また，$\lambda = 1$ とすると，$x > 2$ のとき $e^{-1}/x! < e^{-1}/x$ であるので，

$$0 < \frac{e^{-1}}{x!} < \frac{1}{ex} \to 0 \quad (x \to \infty)$$

である．よって，はさみうちの原理より，$e^{-1}/x!$ は 0 に収束する．

➤ 第 8 章

8.1 $f(x) = x^2 - 2x + 5 + 8/x$ として，この関数を微分すると $f'(x) = 2x - 2 - 8/x^2$ である．また，

$$f'(x) = \frac{2(x^3 - x^2 - 4)}{x^2} = \frac{2(x-2)(x^2+x+2)}{x^2}$$

より，増減表は

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$

となるので，1 個あたりの作成費用が最小となるのは $x = 2$ のときである．

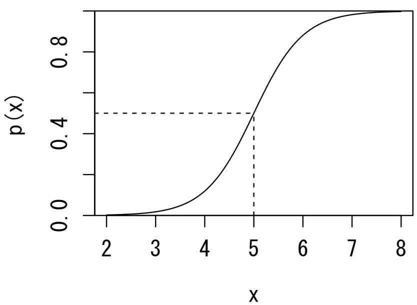
8.2 $p(x) = (1+\exp(10-2x))^{-1}$ を微分すると，$p'(x) = 2(1+\exp(10-2x))^{-2}\exp(10-2x)$ である．任意の x に対し $p'(x) > 0$ より，$p(x)$ は単調増加関数である．また，

$$\begin{aligned} p''(x) &= \frac{8(\exp(10-2x))^2}{(1+\exp(10-2x))^3} - \frac{4\exp(10-2x)}{(1+\exp(10-2x))^2} \\ &= \frac{4(\exp(10-2x)-1)\exp(10-2x)}{(1+\exp(10-2x))^3} \end{aligned}$$

より，$x = 5$ のとき $p''(x) = 0$，$x < 5$ のとき $p''(x) > 0$，$x > 5$ のとき $p''(x) < 0$ である．以上より，増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	5	$\cdots$	∞
$p'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$p''(x)$		$+$	0	$-$	
$p(x)$	0	⤴	$1/2$	⤴	1

であるので，このグラフは



となる。

8.3 100 人中 15 人が支持するという現象が最も起こりやすい p とは，

$$ {}_{100}\mathrm{C}_{15}p^{15}(1-p)^{85} $$

が最大となる p である．ここで，この対数

$$ \log {}_{100}\mathrm{C}_{15} + 15\log p + 85\log(1-p) $$

について p で微分したものが 0 となる p を求める．すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}(\log {}_{100}\mathrm{C}_{15} + 15\log p + 85\log(1-p)) = \frac{15}{p} - \frac{85}{1-p} &= 0\\ 15(1-p) - 85p &= 0\\ p &= \frac{15}{100} = 0.15\end{aligned}$$

である．$0 < p < 1$ のときは ${}_{100}\mathrm{C}_{15}p^{15}(1-p)^{85} > 0$ であり，かつ $p = 0, p = 1$ のとき ${}_{100}\mathrm{C}_{15}p^{15}(1-p)^{85} = 0$ なので，$p = 0.15$ のときにこの確率が最大となる．

➤ 第 9 章

9.1

$$\begin{aligned}\int_0^2 (278 - 139t)dt &= \left[278t - \frac{139}{2}t^2\right]_0^2\\ &= 278\end{aligned}$$

9.2

$$\int_0^{10} \{200 - 2(t-4)^2\}(1 - \sin(\pi t/12 - \pi/3))dt$$

について，$x = t - 4$ と変数変換する．すると，

$$\begin{aligned}\int_{-4}^6 (200 - 2x^2)(1 - \sin(\pi x/12))dx &= \int_{-4}^6 (200 - 2x^2)dx\\ &\quad - 200\int_{-4}^6 \sin(\pi x/12)dx\\ &\quad + 2\int_{-4}^6 x^2\sin(\pi x/12)dx\\ &= \left[200x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-4}^6\\ &\quad + \frac{2400}{\pi}[\cos(\pi x/12)]_{-4}^6\\ &\quad - \frac{24}{\pi}\int_{-4}^6 x^2(\cos(\pi x/12))'dx\\ &= \frac{5440}{3} - \frac{1200}{\pi}\\ &\quad - \frac{24}{\pi}[x^2\cos(\pi x/12)]_{-4}^6 + \frac{48}{\pi}\int_{-4}^6 x\cos(\pi x/12)dx\\ &= \frac{5440}{3} - \frac{1008}{\pi}\\ &\quad + \frac{576}{\pi^2}\int_{-4}^6 x(\sin(\pi x/12))'dx\\ &= \frac{5440}{3} - \frac{1008}{\pi}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{576}{\pi^2}[x\sin(\pi x/12)]_{-4}^{6}-\frac{576}{\pi^2}\int_{-4}^{6}\sin(\pi x/12)dx\\
&=\frac{5440}{3}-\frac{1008}{\pi}+\frac{3456-1152\sqrt{3}}{\pi^2}+\frac{6912}{\pi^3}[\cos(\pi x/12)]_{-4}^{6}\\
&=\frac{5440}{3}-\frac{1008}{\pi}+\frac{3456-1152\sqrt{3}}{\pi^2}-\frac{3456}{\pi^3}\\
&\fallingdotseq 1529.013
\end{aligned}
$$

となる．

9.3

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

第 10 章

10.1 $f(x,y)=10000x(y-x)/(0.01y+1)^4$ とすると，

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y)&=10000(y-2x)/(0.01y+1)^4\\
f_y(x,y)&=10000x/(0.01y+1)^4-400x(y-x)/(0.01y+1)^5\\
&=100(100-3y+4x)x/(0.01y+1)^5
\end{aligned}
$$

なので，$x>0,y>0$ の範囲で $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となる点は $x=50,y=100$ である．また，

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y)&=-20000/(0.01y+1)^4\\
f_{xy}(x,y)&=10000/(0.01y+1)^4-400(y-2x)/(0.01y+1)^5\\
&=100(100-3y+8x)/(0.01y+1)^5\\
f_{yy}(x,y)&=-300x/(0.01y+1)^5-5(100-3y+4x)x/(0.01y+1)^6\\
&=(-800+12y-20x)x/(0.01y+1)^6
\end{aligned}
$$

である．よって，$f_{xx}(50,100)=-1250, f_{xy}(50,100)=625, f_{yy}(50,100)=-468.75$ である．

以上より，ヘシアンは $|H|=1250\times 468.75-625^2=195312.5>0$ となり，$f_{xx}(50,100)<0$ より，$x=50,y=100$ で利益は最大となり，そのときの利益は $f(50,100)=1562500$ となる．

10.2 $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$ について，$f_x(x,y)=2x+2y, f_y(x,y)=2x+6y$ なので，$f_x(1,0)=2, f_y(1,0)=2$ である．よって，$(x,y)=(1,0)$ での $(\alpha,\beta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ 方向の微分は

$$2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)$$

である．以上より，$\theta=5\pi/4$ のとき，つまり，$(\cos\theta,\sin\theta)=(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ 方向の方向微分が最小となる．

10.3 $f(a,b) = (3-a-b)^2 + (4-a-2b)^2 + (5-a-7b)^2$ であるので，$f_a(a,b) = -2(3-a-b) - 2(4-a-2b) - 2(5-a-7b) = -24 + 6a + 20b$，$f_b(a,b) = -2(3-a-b) - 4(4-a-2b) - 14(5-a-7b) = -92 + 20a + 108b$ である．ここで，$f_a(a,b) = f_b(a,b) = 0$ とすると，$a = 94/31, b = 9/31$ が得られる．

また，$f_{aa}(a,b) = 6, f_{ab}(a,b) = 20, f_{bb}(a,b) = 108$ より，ヘシアンは $|H| = 6 \times 108 - 20^2 = 248 > 0$ となり，$f_{aa}(a,b) > 0$ より，$(a,b) = (94/31, 9/31)$ で最小となる．

第 11 章

11.1

$$\begin{aligned}
\int\int_{[0,100]\times[0,100]} f(x,y)dxdy &= 40\int_0^{100}(-0.01x^2+0.4x+30)dx\int_0^{100}(-0.01y+1)dy \\
&= 40 \times \left[-\frac{1}{300}x^3+\frac{1}{5}x^2+30x\right]_0^{100} \times \left[-\frac{1}{200}y^2+y\right]_0^{100} \\
&= 40 \times \frac{5000}{3} \times 50 \\
&= \frac{10000000}{3}
\end{aligned}$$

11.2 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換を行うとヤコビ行列式は

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r
\end{aligned}$$

となる．また，積分領域は $R' = \{(r,\theta) | 0 < r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ となる．変数変換を行うことで，

$$\begin{aligned}
\int\int_R \frac{1}{2\pi}\exp(-(x^2+y^2)/2)dxdy &= \int\int_{R'} \frac{r}{2\pi}\exp(-r^2/2)drd\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 r\exp(-r^2/2)dr\int_0^{2\pi} 1d\theta \\
&= [-\exp(-r^2/2)]_0^1 \\
&= 1 - e^{-1/2}
\end{aligned}$$

と計算される．