第 III 部　練習問題の解答

➤ 第 12 章

12.1 とりあえず，議長と副議長が全員自宅生か全員寮生となる場合も含めて，議長 1 名，副議長 2 名，書記 2 名を選ぶ選び方を考えてみる．まず，最初に議長を一人選ぶことにする．これは，25 人中 1 人を選ぶ選び方なので，${}_{25}\mathrm{C}_1$ 通りある．次に副議長を選ぶ．残りの 24 人中 2 人を選ぶ選び方は，${}_{24}\mathrm{C}_2$ 通りある．さらに，書記を残りの 22 人から 2 人選ぶとすると，これは，${}_{22}\mathrm{C}_2$ 通りある．これらをすべて掛け合わせると，

$$
{}_{25}\mathrm{C}_1 \times {}_{24}\mathrm{C}_2 \times {}_{22}\mathrm{C}_2 = 25 \times \frac{24 \times 23}{2} \times \frac{22 \times 21}{2} = 1593900
$$

この 1593900 通りの中には，議長・副議長が全員自宅生の場合や全員寮生の場合があるが，これらは何通りあるのであろうか．全員自宅生の場合は，議長を選ぶ方法が ${}_{14}\mathrm{C}_1$ 通り，続けて副議長を選ぶ方法が，${}_{13}\mathrm{C}_2$ 通りある．最後に書記を選ぶときは，残りの男女 22 人から 2 人を選ぶので，${}_{22}\mathrm{C}_2$ 通りある．これらを掛け合わせたもの

$$
{}_{14}\mathrm{C}_1 \times {}_{13}\mathrm{C}_2 \times {}_{22}\mathrm{C}_2 = 14 \times \frac{13 \times 12}{2} \times \frac{22 \times 21}{2} = 252252
$$

が，議長・副議長が全員自宅生となる場合の数である．同様に議長・副議長が全員寮生となる場合の数は，

$$
{}_{11}\mathrm{C}_1 \times {}_{10}\mathrm{C}_2 \times {}_{22}\mathrm{C}_2 = 11 \times \frac{10 \times 9}{2} \times \frac{22 \times 21}{2} = 114345
$$

通りである．結果として，答えは，

$$
1593900 - 252252 - 114345 = 1227303
$$

通りである．

12.2 条件付き確率の定義より，

$$
P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}
$$

であるので，$P(A|B) \geq 0$ は明らか．また，$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$（これは，$A \cap B$ と $\bar{A} \cap B$ がお互い疎であり，この二つの和集合が B であることによる.）から，$P(B) \geq P(A \cap B)$，すなわち

$$
\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1
$$

である．これより，(1) が証明された．

次に (2) を証明する．見やすくするために，以下のように記すことにする．

$$W = A_1 \cup A_2, \quad Y = A_1 \cap A_2$$

この時，次の関係がなりたつ．

$$W \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B), \qquad Y \cap B = (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B)$$

この関係と条件付きでない通常の和事象の公式から，

$$\begin{aligned} P(W \cap B) &= P\Big((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\Big) \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P\Big((A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B)\Big) \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(Y \cap B) \end{aligned}$$

を得る．この式の左右両端を $P(B)$ で割ると，条件付き確率の定義から，

$$P(W|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(Y|B)$$

となり，これは (2) に他ならない．

(3) を証明する．

$$W_i = A_i \cap B, \quad i = 1, \dots k$$

とすると，

$$\left(\bigcup_i^k A_i\right) \cap B = \bigcup_i^k W_i$$

であり，A_i，$i = 1, \dots, k$ が互いに疎であるから，W_i も互いに疎である．よって，

$$P\left(\bigcup_i^k W_i\right) = \sum_{i=1}^k P(W_i)$$

を得る．結局，

$$P\left(\left(\bigcup_i^k A_i\right) \cap B\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i \cap B)$$

となるが，この両辺を $P(B)$ で割ると，条件付き確率の定義から，

$$P\left(\bigcup_i^k A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i|B)$$

となって，(3) が証明された．

最後に (4) を証明する．$A \cap B$ と $\bar{A} \cap B$ は，互いに疎であり，その和集合は B なので，

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

両辺を $P(B)$ で割ると，条件つき確率の定義より

$$1 = P(A|B) + P(\bar{A}|B)$$

となって，証明された．

12.3 このことを証明するには，「事象 A と B が独立ならば，A と $\bar{B}$ も独立である」ことを示せば十分である，実際，この事実を何回も使って，残りの二つのペアの独立性も証明できる．前問 (4) より，

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A). \tag{$*$}$$

A と B が独立であることは，

$$P(B|A) = P(B)$$

であることに他ならないので，$(*)$ の右辺は，

$$1 - P(B) = P(\bar{B}).$$

に等しい．最後の等式は，条件付きでない一般の余事象の公式による．よって

$$P(\bar{B}|A) = P(\bar{B})$$

となり，これは A と $\bar{B}$ も独立であることに他ならない．

➢ 第 13 章

13.1 例 13.12 と 13.15 の結果から，

$$\begin{aligned} E\bigl[E[X|Y]\bigr] &= \sum_{j=1}^{3} E[X|y_j]P_Y(y_j) \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{3}{12} + \frac{5}{4} \times \frac{4}{12} + \frac{6}{5} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{6}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

一方，例 13.13 で求めたように $E[X] = 4/3$ だったので，$E\bigl[E[X|Y]\bigr] = E[X]$ が成立している．

　X と Y の独立性に関しては，例えば

$$P(x_1|y_2) = \frac{3}{4} \neq \frac{2}{3} = P_X(x_1)$$

なので，独立でない．

➢ 第 14 章

14.1 $B(4,\ 1/6)$ の場合，(14.4) を使うと，

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} = \frac{4-x}{x+1}\frac{1}{5}$$

となる．このことから

$$\begin{aligned} P(x+1) < P(x) &\Longleftrightarrow \frac{4-x}{x+1}\frac{1}{5} < 1 \\ &\Longleftrightarrow -\frac{1}{6} < x \end{aligned}$$

である．全ての実現値 $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ がこの不等式を満たしているので，$P(x)$ は単調減少であることが分かる．従ってモードは $x = 0$ である（図 14.1(a) 参照）．

$B(10,\ 1/2)$ の場合，(14.4) を使うと

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} = \frac{10-x}{x+1}$$

となるので，

$$\begin{aligned} P(x+1) >\ (<)\ P(x) &\Longleftrightarrow \frac{10-x}{x+1} >\ (<)\ 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{9}{2} >\ (<)\ x \end{aligned}$$

である．よって，

$$P(0) < P(1) < \cdots < P(4) < P(5) > P(6) > \cdots > P(10)$$

となり，モードは $x = 5$ である（図 14.1(b) 参照）．