スタンダード
工学系の
複素解析

安岡 康一・広川 二郎／著

2022年1月 現在
「展開」解答例

講談社

『スタンダード工学系の複素解析』問題略解：補足

2021 年 12 月改定

1　複素数

問題 1.1

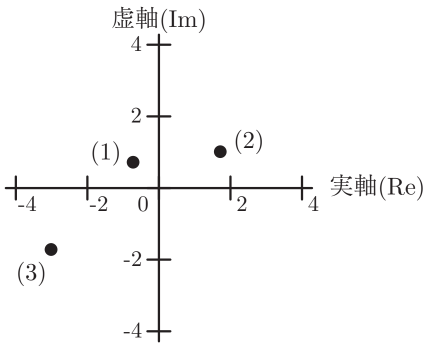
(1)　$i+(1-i)=1,\quad i-(1-i)=-1+2i,\quad i(1-i)=1+i,\quad \dfrac{1-i}{i}=\dfrac{1}{i}-1=-1-i$

(2)　$(8+3i)+(9+2i)=17+5i,\quad (8+3i)-(9+2i)=-1+i,\quad (8+3i)(9+2i)=66+43i,$
$\dfrac{9+2i}{8+3i}=\dfrac{(9+2i)(8-3i)}{(8+3i)(8-3i)}=\dfrac{78}{73}-\dfrac{11}{73}i$

(3)　$(2-i)+(2+i)=4,\quad (2-i)-(2+i)=-2i,\quad (2-i)(2+i)=5,\quad \dfrac{2+i}{2-i}=\dfrac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$

問題 1.2

(1)　$\left|-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right|=1$　(2)　$\left|\sqrt{3}+i\right|=2$　(3)　$\left|-3-\sqrt{3}i\right|=2\sqrt{3}$



問題1.2

問題 1.3

$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}})+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\leq |z_1|^2+2\,|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2=|z_1|^2+2\,|z_1|\,|z_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2.\quad (\because 2\mathrm{Re}\,z=z+\overline{z},\ |z|\geq \mathrm{Re}\,z)$

問題 1.4

$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}})+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\geq |z_1|^2-2\,|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2=|z_1|^2-2\,|z_1|\,|z_2|+|z_2|^2=(|z_1|-|z_2|)^2.$

問題 1.5

$z=x+iy$ とすると $\overline{z}-2iz=x-iy-2i(x+iy)=x+2y-i(2x+y)=1+i$ より $x+2y=1,\ -(2x+y)=1$ だから $x=-1,\ y=1.$

問題 1.6

(1)　$|z|=2,\theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\dfrac{\pi}{3}$ より $z=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right).$

(2)　$|z| = \dfrac{1}{2}$, $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ より，偏角の指定範囲に合わせて 2π を加えて $z = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

(3)　$|z| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \pi$ より $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi$.

(4)　展開すると $z = 2 + 2\sqrt{3}i$. $|z| = 4$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ より $z = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(5)　分母を有利化すると $\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$. $|z| = 1$, $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ より，偏角の指定範囲に合わせて 2π を加えて $z = \left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) = i\sin\dfrac{3\pi}{2}$.

2　複素平面

問題 2.1　※次の z を $a+ib$ の形式で求めよ.

(1)　$w = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{i}{4}\right)$ とおくと $|w| = \dfrac{1}{2}$, $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ より，$w = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$.

よって $z = w^{25} = \left[\dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}\right]^{25} = \dfrac{1}{2^{25}}\left\{\cos\left(-\dfrac{25\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{25\pi}{6}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2^{25}}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6} - 4\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6} - 4\pi\right)\right\} = \dfrac{1}{2^{25}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{1}{2^{26}}\,(\sqrt{3} - i)$.

(2)　$w = \left(-\dfrac{1}{8} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}i\right)$ とおくと $|w| = \dfrac{1}{4}$, $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$ より，$w = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

よって $z = w^{16} = \left\{\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\right\}^{16} = \dfrac{1}{4^{16}}\left(\cos\dfrac{32\pi}{3} + i\sin\dfrac{32\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2^{32}}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) =$
$\dfrac{1}{2^{32}}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{1}{2^{33}}\,(-1 + \sqrt{3}i)$.

問題 2.2　※次の z を $a+ib$ の形式で求めよ.

(1)　問題 2.1(1) の結果を使って $z = \sqrt{w} = w^{\frac{1}{2}} = \left[\dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}\right]^{1/2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i\right\} = \dfrac{1}{4}\left\{(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})\,i\right\}$.

(2)　問題2.2(2) の結果を使って $z = \sqrt[4]{w} = w^{\frac{1}{4}} = \left\{\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\right\}^{1/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4}}\left(\cos\dfrac{2\pi}{12} + i\sin\dfrac{2\pi}{12}\right) =$
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\,(\sqrt{3} + i)$.

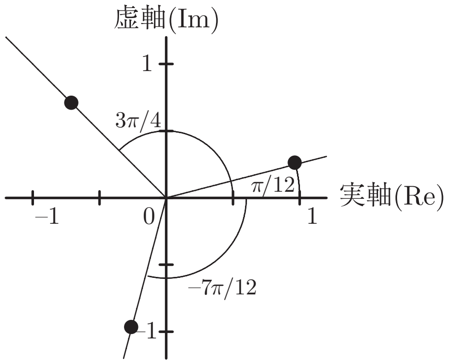
問題 2.3

例題 2.2 と同様に，$z = 1 + i = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ より $r^3 = \sqrt{2}$, $3\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{\pi + 8k\pi}{4}$.
偏角の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ だから $k = -1, 0, 1$ として $\theta = \dfrac{-7\pi}{12}$, $\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{3\pi}{4}$ とする。以上から
$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{-7+8n}{12}\pi + i\sin\dfrac{-7+8n}{12}\pi\right)$, $n = 0, 1, 2$. $\left(\theta : \dfrac{-7\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$. 図:問題 2.3 に位置を示す.

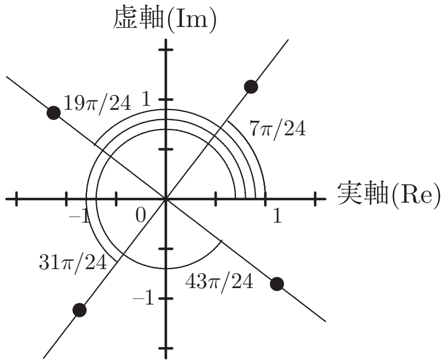
問題 2.4

$z = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 4\left\{\cos\left(\dfrac{7\pi}{6} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{6} + 2n\pi\right)\right\}$, $r^4 = 4, 4\theta = \dfrac{7\pi + 12n\pi}{6}$.

$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ より，$\sqrt[4]{z} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7+12n}{24}\pi + i\sin\dfrac{7+12n}{24}\pi\right)$, $n = 0, 1, 2, 3.$ $\left(\theta : \dfrac{7\pi}{24}, \dfrac{19\pi}{24}, \dfrac{31\pi}{24}, \dfrac{43\pi}{24}\right).$
図:問題 2.4 に位置を示す.



問題2.3



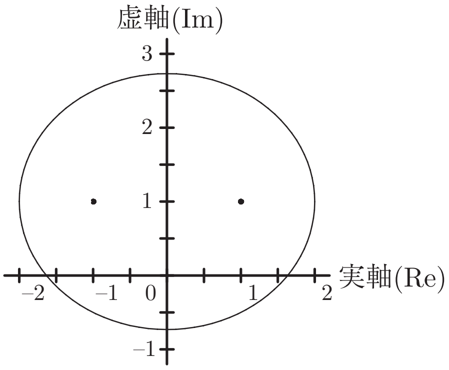
問題2.4

問題 2.5

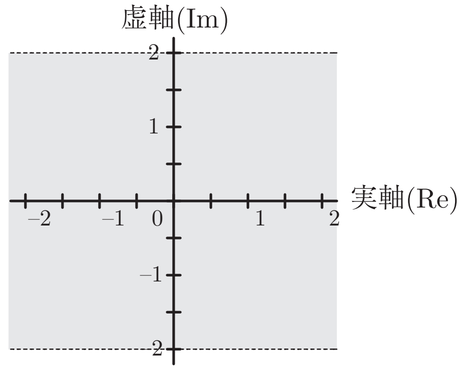
$z = 1 + i$, $z = -1 + i$ を焦点として，両焦点からの距離が 4 となる楕円上の点が範囲．楕円の長軸上両端の点は $2 + i$, $-2 + i$，短軸上両端の点は $\left(1 + \sqrt{3}\right) i$, $\left(1 - \sqrt{3}\right) i$．図:問題 2.5 に楕円を示す.

問題 2.6

図:問題 2.6 に示す x 軸に平行な帯状の範囲で，$y = 2$, $y = -2$ は含まない.



問題2.5



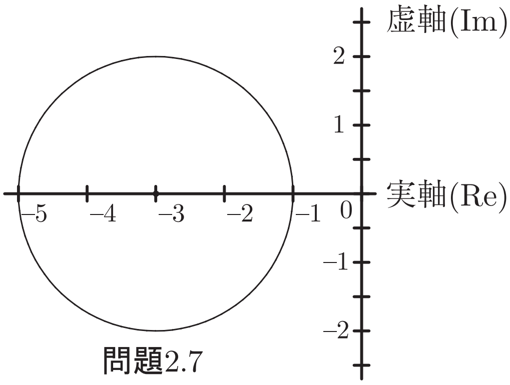
問題2.6

問題 2.7

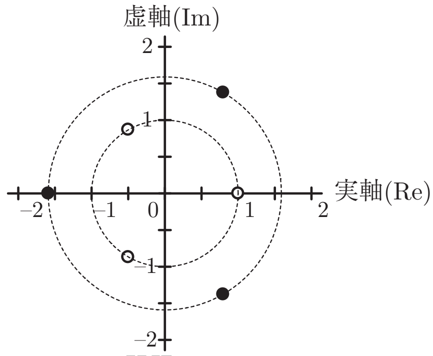
両辺を 2 乗すると $(z-1)\overline{(z-1)} = 4(z+2)\overline{(z+2)}$ より整理すると，$z\overline{z}+3z+3\overline{z}+5 = (z+3)(\overline{z}+3)-4 = |z+3|^2 - 4 = 0.$ よって $|z+3| = 2$ となるから図:問題 2.7 に示す中心 -3 で半径 2 の円周上の点.

問題 2.8

$z^6 + 3x^3 - 4 = (z^3 + 4)(z^3 - 1) = 0$ より $z^3 = -4$, $z^3 = 1$．それぞれの 3 乗根を求める.
$z = \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{\pi + 2n\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 2n\pi}{3}\right)$, $n = 0, 1, 2,$ なお $|z| \fallingdotseq 1.59$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5\pi}{3},$
$z = \cos\dfrac{2n\pi}{3} + i\sin\dfrac{2n\pi}{3}$, $n = 0, 1, 2,$ なお $|z| = 1$, $\theta = 0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$. 解の位置を図:問題 2.8 に示す。



問題2.7



問題2.8

3　複素関数

問題 3.1

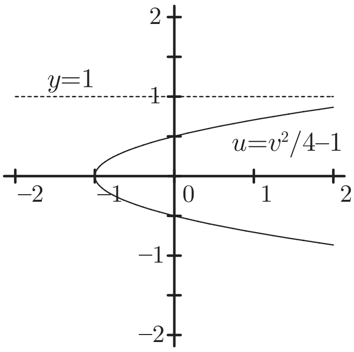
$w = \dfrac{i(x+iy)+1}{(x+iy)-2i} = \dfrac{-x+i(x^2+y^2-3y+s)}{x^2+(y-2)^2}$, $u(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+(y-2)^2}$,
$v(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-3y+s}{x^2+(y-2)^2}$，$v(x,y)$ に i をつけないこと．

問題 3.2

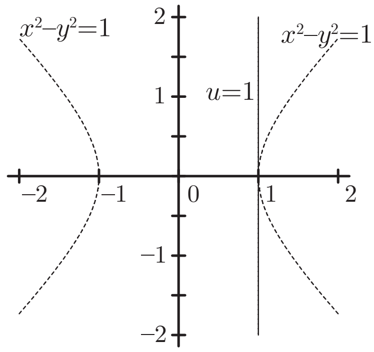
$w = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2xyi = u+iv$ に $y=1$ を代入すると $u = x^2-1, v = 2x$ より $x = \dfrac{v}{2}$ なので $u = \dfrac{v^2}{4}-1$. 図:問題 3.2 の破線は z 平面上の実軸に平行な直線 $y=1$ を，実線は w 平面の関数 w による写像を示し，実軸に対して上下対称な放物線で点 $(u,v) = (-1,0), (0,2), (0,-2)$ を通る．

問題 3.3

$w = (x+iy)^2 = z^2 = x^2-y^2+2xyi = u+iv$ に $x^2-y^2=1$ を代入すると $u=1, v=2xy$. 図:問題 3.3 で破線の双曲線は z 平面上の $x^2-y^2=1$ を，実線は w 平面の写像 $u=1$ 一定を示し，実軸に平行な直線.



問題3.2



問題3.3

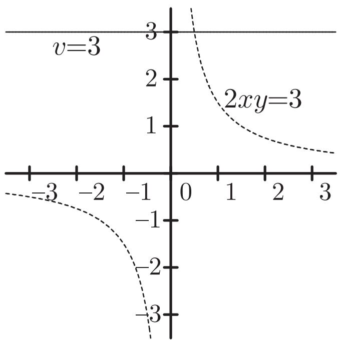
問題 3.4

$w = x^2-y^2+2xyi = u+iv$ に $2xy=3$ を代入すると $u = x^2-y^2, v=3$. 図:問題 3.4 の破線は z 平面上の曲線 $2xy=3$，実線は w 平面上の写像 $v=3$ 一定で u 軸に平行な直線.

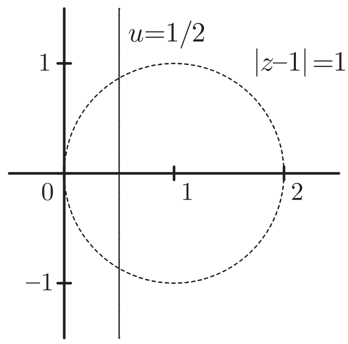
問題 3.5

$z = \dfrac{1}{w}$ を $|z-1|^2 = 1$ に代入すると $|z-1|^2 = (z-1)\overline{(z-1)} = \left(\dfrac{1}{w}-1\right)\left(\dfrac{1}{\overline{w}}-1\right) = \dfrac{(1-w)}{w}\dfrac{(1-\overline{w})}{\overline{w}} = 1$ より $w+\overline{w} = 1$. ここで $w = u+iv$，$\overline{w} = u-iv$ を代入すれば $w+\overline{w} = u+iv+u-iv = 2u = 1$ より

$u = \dfrac{1}{2}$. 図:問題 3.5 の破線は z 平面上の円 $|z-1| = 1$，実線は w 平面上の写像 $u = \dfrac{1}{2}$ 一定で v 軸に平行な直線.



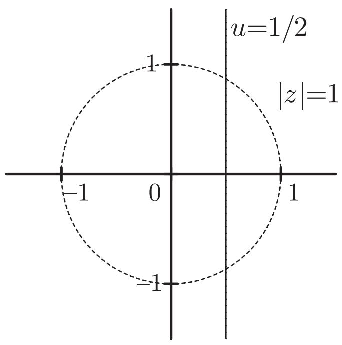
問題3.4



問題3.5

問題 3.6

例題 3.3 の答えから $z = \dfrac{w+1}{w-2}$. $|z|^2 = 1$ に代入すると $|w+1|^2 = |w-2|^2$ より，$(w+1)(\overline{w}+1) - (w-2)(\overline{w}-2) = 3w + 3\overline{w} - 3 = 0$. ここで $w = u + iv$，$\overline{w} = u - iv$ を代入すれば $2u = 1$ より $u = \dfrac{1}{2}$. 図:問題 3.6 の破線は z 平面上の円 $|z| = 1$，実線は w 平面上の写像 $u = \dfrac{1}{2}$ 一定で v 軸に平行な直線.



問題3.6

問題 3.7

式 (3.2) に値を代入すると $\dfrac{w-i}{w-0} \cdot \dfrac{1-0}{1-i} = \dfrac{z-0}{z-1} \cdot \dfrac{i-1}{i-0}$ より $1 - \dfrac{i}{w} = \dfrac{2z}{z-1}$. よって $w = i\dfrac{1-z}{z+1}$.

問題 3.8

式 (3.2) の左辺第 2 項を w_3 で割り値を代入すると $\dfrac{w-w_1}{w_2-w_1} \cdot \dfrac{w_2/w_3 - 1}{w/w_3 - 1} = \dfrac{w}{i}$，式 (3.2) の右辺は $\dfrac{z+2}{z-2}\dfrac{2i-2}{2i+2} = i\dfrac{z+2}{z-2}$ なので，$w = -\dfrac{z+2}{z-2}$.

問題 3.9

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ を z について解くと $z = \dfrac{dw-b}{-cw+a}$. ここで (3.1) 式と同様に係数の関係を求めると $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$ なので，(3.1) 式と同じなので逆変換も 1 次変換.

4　指数・三角関数

問題 4.1

(1)　$e^{1-\pi i} = e \cdot e^{-\pi i} = e\left\{\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right\} = -e.$

(2)　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - i\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}\cos i + \sin\dfrac{\pi}{2}\sin i = 0 + 1 \cdot \dfrac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{-1} - e}{2} = i\dfrac{e - e^{-1}}{2} = i\sinh 1.$

問題 4.2

(1)　指数部に $z = x + iy$ を代入すると $(1 - \pi i)z = (1 - \pi i)(x + iy) = (x + \pi y) + i(-\pi x + y)$ より，$w = e^{(x+\pi y)+i(-\pi x+y)} = e^{x+\pi y}e^{i(-\pi x+y)} = e^{x+\pi y}\cos(-\pi x+y) + ie^{x+\pi y}\sin(-\pi x+y)$. $\left(注：e^{(1-\pi i)z} \neq e^{(1-\pi i)}e^{z}\right)$

(2)　$\sin(z+1) = \dfrac{e^{i(z+1)} - e^{-i(z+1)}}{2i} = \dfrac{e^{i(x+iy+1)} - e^{-i(x+iy+1)}}{2i} = \dfrac{e^{-y+i(x+1)} - e^{y-i(x+1)}}{2i}$
$= \dfrac{e^{-y}\cos(x+1) + ie^{-y}\sin(x+1) - e^{y}\cos(x+1) + ie^{y}\sin(x+1)}{2i}$
$= \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\cos(x+1) + \dfrac{ie^{-y} + ie^{y}}{2i}\sin(x+1) = \sin(x+1)\cosh y + i\cos(x+1)\sinh y.$

(3)　$\sinh(iz) = \dfrac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2} = \dfrac{e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right)}{2} - \dfrac{e^{y}\left(\cos x - i\sin x\right)}{2} = -\cos x\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} + i\sin x\dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} = -\cos x\sinh y + i\sin x\cosh y.$

問題 4.3

(1)　$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$，$e^{iz}$ をかけて $e^{2iz} + 1 = 0$ より $e^{2iz} = -1 = e^{i(\pi+2n\pi)}$．よって $z = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$（$n$：整数，以下同じ）

(2)　$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2i$，$2e^{iz}$ をかけて $e^{2iz} - 4ie^{iz} + 1 = 0$ より $e^{iz} = \dfrac{4i \pm \sqrt{-16-4}}{2} = i\cdot(2 \pm \sqrt{5})$. $2 \pm \sqrt{5}$ を $e^{\log()}$ 形式に変換したときに log 内部が負とならないように，$\pm$ 符号が正のときは $i(\sqrt{5}+2)$，負のときは $-i(\sqrt{5}-2)$ とする. また $\pm i = e^{(\pm\pi/2+2n\pi)i}$ なので $e^{iz} = e^{(\pm\pi/2+2n\pi)i} \cdot e^{i\cdot\{-i\log(\sqrt{5}\pm 2)\}}$ より，$z = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi - i\log(\sqrt{5} \pm 2)$ （複号同順）.

(3)　$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = a$，$2e^{iz}$ をかけて $e^{2iz} - 2ae^{iz} + 1 = 0$ より，$a > 1$ なので $e^{iz} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. 両辺の対数をとると $iz = \log(a \pm \sqrt{a^2-1}) + 2n\pi i$ ．よって $z = -i\log(a \pm \sqrt{a^2-1}) + 2n\pi$

(4)　$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{e^{3} + e^{-3}}{2}$，$2ie^{iz}$ をかけて $e^{2iz} - i(e^{3} + e^{-3})e^{iz} - 1 = \left(e^{iz} - ie^{-3}\right)\left(e^{iz} - ie^{3}\right) = 0$, $e^{iz} = ie^{\pm 3} = e^{i(\pi/2+2n\pi)}e^{\pm 3}$ より $z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \pm 3i$

問題 4.4

$|\cos z|^2 = \cos z\overline{\cos z}$, $z = x+iy$ とおくと $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$，$\overline{\cos z} = \cos x\cosh y + i\sin x\sinh y$. $\cos z\overline{\cos z} = \cos^2 x\cosh^2 y + (1 - \cos^2 x)\sinh^2 y = \cos^2 x(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y$

問題 4.5

$\overline{\sin z} = \dfrac{\overline{e^{iz}} - \overline{e^{-iz}}}{\overline{2i}} = \dfrac{e^{-i\overline{z}} - e^{i\overline{z}}}{-2i} = \dfrac{-e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2i} = \sin\overline{z}$

問題 4.6

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \dfrac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \dfrac{1}{2}\left\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + \right.$

$\mathrm{e}^{y}(\cos x - i\sin x)\} = \dfrac{1}{2}\cos x(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}) + \dfrac{i}{2}\sin x(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.$

$\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i} = \dfrac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix-y}-\mathrm{e}^{-ix+y}) = \dfrac{1}{2i}\{\mathrm{e}^{-y}(\cos x + i\sin x) -$

$\mathrm{e}^{y}(\cos x - i\sin x)\} = -\dfrac{i}{2}\cos x(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}) + \dfrac{1}{2}\sin x(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y.$

5　双曲線・対数・べき関数

問題 5.1

(1)　$\log \mathrm{e}^{1+i} = \log\left(\mathrm{e}^1\mathrm{e}^i\right) = \log \mathrm{e}^1 + \log \mathrm{e}^i = 1 + i + 2n\pi i = 1 + (1+2n\pi)i.$

(2)　式 (5.4) から $2^{1+i} = e^{(1+i)\log 2}$. 式 (5.2) $\log z = \log|z| + i\arg z$ に $z = 2$ を代入して実数の対数関数を ln で表すと，$\log 2 = \ln 2 + i(2n\pi)$．よって $2^{1+i} = \mathrm{e}^{(1+i)(\ln 2 + 2n\pi i)} = \mathrm{e}^{\ln 2 - 2n\pi}\mathrm{e}^{i(\ln 2 + 2n\pi)} = 2\mathrm{e}^{-2n\pi}\{\cos(\ln 2 + 2n\pi) + i\sin(\ln 2 + 2n\pi)\} = 2\mathrm{e}^{-2n\pi}\{\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)\}$.

(3)　$(1+i)^i = \mathrm{e}^{i\log(1+i)} = \mathrm{e}^{i\log\left\{\sqrt{2}\mathrm{e}^{(\pi/4+2n\pi)i}\right\}} = \mathrm{e}^{i\left\{\ln\sqrt{2} + (\pi/4+2n\pi)i\right\}} = \mathrm{e}^{-(\pi/4+2n\pi)}\mathrm{e}^{i\ln\sqrt{2}}$
$= \mathrm{e}^{-(\pi/4+2n\pi)}\left\{\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\right\}$.

(4)　$\cosh\left(2 - \dfrac{\pi}{2}i\right) = \dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{2-(\pi/2)i} + \mathrm{e}^{-2+(\pi/2)i}\right\} = \dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-(\pi/2)i} + \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{(\pi/2)i}\right\}$
$= \dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^2(-i) + \mathrm{e}^{-2}(i)\right\} = i\dfrac{-\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2}}{2} = -i\sinh 2.$

問題 5.2

(1)　$\log(z+2) = \log|z+2| + i\{\mathrm{Arg}\,(z+2) + 2n\pi\} = \ln\sqrt{(x+2)^2 + y^2}$
$+\, i\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x+2} + 2n\pi\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left\{(x+2)^2 + y^2\right\} + i\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x+2} + 2n\pi\right).$

(2)　$\sinh(iz) = \sinh(ix - y) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ix-y} - \mathrm{e}^{-ix+y}\right) = \dfrac{1}{2}\{\mathrm{e}^{-y}(\cos x + i\sin x)$
$-\mathrm{e}^{y}(\cos x - i\sin x)\} = \cos x\dfrac{\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}}{2} + i\sin x\dfrac{\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}}{2} = -\cos x\sinh y + i\sin x\cosh y.$

問題 5.3

(1)　$w = \log z$ とすると $\mathrm{e}^w = z$ だから $\log z = 1$ は $z = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

(2)　$\sinh z = \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = i$ に $2\mathrm{e}^z$ をかけると $\mathrm{e}^{2z} - 2i\mathrm{e}^z - 1 = (\mathrm{e}^z - i)^2 = 0$ より $\mathrm{e}^z = i = \mathrm{e}^{(\pi/2+2n\pi)i}$ となるから $z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i$.

問題 5.4

式 (5.4) から $z^a = \mathrm{e}^{a\log z} = \mathrm{e}^{\log z^a}$．また $\mathrm{e}^{a\log z} = \mathrm{e}^{a\log r + ia(\theta+2n\pi)}$ より両者の対数を取って等しくおくと $\log z^a = a\log r + ia(\theta + 2n\pi) + i2m\pi$．よって $(z^a)^b = \mathrm{e}^{b\log(z^a)} = \mathrm{e}^{ab\log r + iab(\theta+2n\pi) + i2bm\pi}$．一方 $z^{ab} = \mathrm{e}^{ab\log r + iab(\theta + 2\ell\pi)}$．ここで n, m, ℓ は整数．両式は bm が整数の場合のみ一致し，その他の場合は一致しない．

問題 5.5

$\overline{\log z} = \overline{\log r + i(\theta + 2n\pi)} = \log r - i(\theta + 2n\pi)$. $\log\bar{z} = \log\overline{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \log r\mathrm{e}^{-i\theta} = \log r - \log\mathrm{e}^{i\theta} = \log r - i(\theta + 2n\pi)$ となり一致.

6　正則性

問題 6.1

$(z^3)' = \lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^3-z^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{3(\Delta z)z^2+3\Delta z^2+\Delta z^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\left(3z^2+3\Delta z+\Delta z^2\right) = 3z^2.$

問題 6.2

$\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \dfrac{2(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)-(2x+iy)}{\Delta x+i\Delta y} = \dfrac{2\Delta x+i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$. $\Delta y=0$ として実軸に平行に z に近づけると $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=2$，$\Delta x=0$ として虚軸に平行に z に近づけると $\lim_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=1$. よって値が定まらず微分不可能.

問題 6.3

$\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \dfrac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z} = \dfrac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z} = z\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\overline{z}+\overline{\Delta z}$. z が実数で $y=0$ の場合は $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = x\dfrac{\overline{\Delta x}}{\Delta x}+\overline{x}+\overline{\Delta x}$ より z に近づけると $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=2x$，$z$ が虚数で $x=0$ の場合は $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = iy\dfrac{\overline{i\Delta y}}{i\Delta y}+\overline{iy}+\overline{i\Delta y}$ より z に近づけると $\lim_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=-2iy$. よって値が定まらず微分不可能.
ただし，$z=0$ においては $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\overline{\Delta z}$ だから $\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}=0$ となり値が確定するので，$z=0$ で微分可能であるが，その近傍では微分可能ではないため，正則ではない.

問題 6.4

(1)　$\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i} = \dfrac{\mathrm{e}^{ix-y}-\mathrm{e}^{-ix+y}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left\{\mathrm{e}^{-y}(\cos x+i\sin x)-\mathrm{e}^{y}(\cos x-i\sin x)\right\} = \dfrac{1}{2}\sin x(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})+i\dfrac{1}{2}\cos x(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}) = u+iv$. コーシー・リーマンの方程式（以下 C.R. 方程式）は，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\cos x(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\cos x(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\sin x(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y})$，$-\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\sin x(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y})$，より成り立つので正則. 導関数は $\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\cos x(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})-i\dfrac{1}{2}\sin x(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y})$
$=\dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{-y}(\cos x+i\sin x)+\mathrm{e}^{y}(\cos x-i\sin x)\right\} = \dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{y}\mathrm{e}^{-ix}\right\} = \dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{i(x+iy)}+\mathrm{e}^{-i(x+iy)}\right\}$
$=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2}=\cos z.$

(2)　$\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{ix-y}+\mathrm{e}^{-ix+y}}{2} = \dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{-y}(\cos x+i\sin x)+\mathrm{e}^{y}(\cos x-i\sin x)\right\} = \dfrac{1}{2}\cos x(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})+i\dfrac{1}{2}\sin x(-\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}) = u+iv$. C.R. 方程式は，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{2}\sin x(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\sin x(-\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y})=-\dfrac{1}{2}\sin x(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\cos x(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y})$，$-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{2}\cos x(-\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})=\dfrac{1}{2}\cos x(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y})$ より成り立つので正則. 導関数は $\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\left\{-\sin x(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})+i\cos x(-\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{i\mathrm{e}^{-y}(\cos x+i\sin x)-i\mathrm{e}^{y}(\cos x-\right.$
$\dfrac{-i}{2}\left\{-\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{y}\mathrm{e}^{-ix}\right\}=\dfrac{1}{2i}\left\{-\mathrm{e}^{i(x+iy)}+\mathrm{e}^{-i(x+iy)}\right\}=\dfrac{-\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2i}=-\sin z.$

(3)　$z=r\mathrm{e}^{i\theta}$ として極形式の C.R. 方程式 (6.5) を使う. $\log z=\log r+i\theta=u+iv$. $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}$，$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}=\dfrac{1}{r}$，$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=0$，$-\dfrac{\partial v}{\partial r}=0$ より成り立つので正則. 導関数は $\mathrm{e}^{-i\theta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+i\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)=\dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}=\dfrac{1}{r\mathrm{e}^{i\theta}}=\dfrac{1}{z}.$

(4)　$\cos iz=\dfrac{\mathrm{e}^{iiz}+\mathrm{e}^{-iiz}}{2}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-z}+\mathrm{e}^{z})=\cosh z=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-iy}+\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{iy})=\dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{-x}(\cos y-i\sin y)+\mathrm{e}^{x}(\cos y+i\sin y)\right\}=\dfrac{1}{2}\cos y(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x})+\dfrac{i}{2}\sin y(-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x})$. より $u=\dfrac{1}{2}\cos y(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$, $v=\dfrac{1}{2}\sin y(\mathrm{e}^{x}-$

e^{-x}). C.R. 方程式は, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\cos y(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\cos y(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}\sin y(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$, $-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{2}\sin y(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$ より成り立つので正則. 導関数は $\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\left\{\cos y(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})+i\sin y(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y)-\mathrm{e}^{-x}(\cos y-i\sin y)\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-iy}\right\}=\dfrac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2}=\sinh z$.

問題 6.5

$u=x^2+ay^2$, $v=bxy$. C.R. 方程式が成り立つためには, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x=\dfrac{\partial v}{\partial y}=bx$ より $2x=bx$ から $b=2$. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2ay=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-by$ より $2ay=-by$ から $a=-\dfrac{b}{2}=-1$. 以上より $a=-1$, $b=2$.

問題 6.6

$x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ を代入すると $x^2-y^2+i2xy=\dfrac{1}{4}\left(z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2\right)-\dfrac{1}{-4}\left(z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2\right)+2i\dfrac{z^2-\bar{z}^2}{4i}=\dfrac{1}{4}\left(2z^2+2\bar{z}^2+2z^2-2\bar{z}^2\right)=z^2$ だから $\dfrac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}=0$ となり正則.

問題 6.7

極形式の C.R. 方程式を導く過程で $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-r\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial y}$ とあるので両式から $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を消去すると $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$. 同様に $\dfrac{\partial v}{\partial r}=\cos\theta\dfrac{\partial v}{\partial x}+\sin\theta\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}=-r\sin\theta\dfrac{\partial v}{\partial x}+r\cos\theta\dfrac{\partial v}{\partial y}$ から $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ を消去すると $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial v}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$. 導関数の式 (6.4) に代入すると $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\sin\theta\left(-r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)+i\cos\theta\dfrac{\partial v}{\partial r}-i\dfrac{1}{r}\sin\theta\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)=(\cos\theta-i\sin\theta)\dfrac{\partial u}{\partial r}+(\sin\theta+i\cos\theta)\dfrac{\partial v}{\partial r}=\mathrm{e}^{-i\theta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+i\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)$.

7　複素関数の微分

問題 7.1

(1)　$\left\{(1+iz^2)^3\right\}'=(1+3iz^2-3z^4-iz^6)'=6iz-12z^3-6iz^5$. 微分公式 (4) より $\left\{\dfrac{(1+iz^2)^3}{z}\right\}'=\dfrac{1}{z^2}\left\{(6iz-12z^3-6iz^5)\cdot z-(1+3iz^2-3z^4-iz^6)\right\}=\dfrac{1}{z^2}\left\{-12z^4-1+3z^4+i(6z^2-6z^6-3z^2+z^6)\right\}=-\dfrac{9z^4+1}{z^2}-i(5z^4-3)$.

(2)　$(\sin z)'=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i}\right)'=\dfrac{i\mathrm{e}^{iz}+i\mathrm{e}^{-iz}}{2i}=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2}=\cos z$.

(3)　$(\tan z)'=\left(\dfrac{\sin z}{\cos z}\right)'=\dfrac{\cos z\cos z+\sin z\sin z}{\cos^2 z}=\dfrac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\cos^2 z}=\dfrac{1}{\cos^2 z}$.

(4)　$(\sinh z)'=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}\right)'=\dfrac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}=\cosh z$.

(5)　$(\tanh z)'=\left(\dfrac{\sinh z}{\cosh z}\right)'=\dfrac{\cosh z\cosh z-\sinh z\sinh z}{\cosh^2 z}=\dfrac{1}{\cosh^2 z}$. 例題 5.1 下の公式 (3) 使用.

問題 7.2

(1)　$u=x^3-3xy^2$ なので, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-6xy$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x$ より $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ なので調和関数. 式 (7.3) から $v=\displaystyle\int\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+c(x)=3x^2y-y^3+c(x)$. 以上の結果を C.R. 方程式

に代入すると $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -6xy - c'(x)$ より $c'(x) = 0$ より $c(x) = k_1$（定数）．よって $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + k_1) = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + ik_1 = (x+iy)^3 + ik_1 = z^3 + k$. ここで $ik_1 = k$ とした（以後同様）.

(2)　$u = x^2 - y^2 - y$ なので，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$ より調和関数. $v = \displaystyle\int \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y = 2xy + c(x)$. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y - c'(x)$ より $c'(x) = 1, c(x) = x + k_1$（定数）．よって $f(z) = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + k_1) = (x+iy)^2 + i(x+iy) + ik_1 = z^2 + iz + k$.

(3)　$u = \cos x \cosh y$ なので，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos x \cosh y, \dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh y, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos x \cosh y$ より調和関数. $v = \displaystyle\int \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y = -\sin x \sinh y + c(x)$. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \cos x \sinh y - c'(x)$ より $c'(x) = 0, c(x) = k_1$（定数）．よって $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y + ik_1 = \cos z + k$. 式 (4.6) を使った.

(4)　$u = \mathrm{e}^x \cos y$ なので，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{e}^x \cos y, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\mathrm{e}^x \cos y$ より調和関数. $v = \displaystyle\int \dfrac{\partial u}{\partial x}dy = \mathrm{e}^x \sin y + c(x)$. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\mathrm{e}^x \sin y - c'(x)$ より $c'(x) = 0, c(x) = k_1$（定数）．よって $f(z) = \mathrm{e}^x \cos y + i\mathrm{e}^x \sin y + ik_1 = \mathrm{e}^x \left(\dfrac{\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy}}{2} + i\dfrac{\mathrm{e}^{iy} - \mathrm{e}^{-iy}}{2i} \right) + ik_1 = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} + ik_1 = \mathrm{e}^z + k$.

問題 7.3

電荷がない自由空間を考えると，電位 Φ（=静電ポテンシャル）は 2 次元ラプラスの方程式 $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ を満足する．図 7.1 の平行平板を考えると電位は x のみの関数となる．$\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$ を 2 回積分すると $\Phi = ax + b$ とおける．共役調和関数 Ψ は $\Psi = \displaystyle\int \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}y = ay + c(x)$. $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = c'(x)$ より $c(x) = c$（定数）．複素ポテンシャルは $F(z) = \Phi + i\Psi = ax + b + i(ay + c) = az + k$ となる．ここで $b + ic = k$ とした．図 7.1 の平板電極の電位を Φ_0, Φ_1 とすると $\Phi(x) = (\Phi_1 - \Phi_0)\, x + \Phi_0$. なお Φ 一定は y 軸と平行な等電位線，Ψ 一定は x 軸と平行な電気力線を表す.

8　複素積分と積分路

問題 8.1

(1)　$\displaystyle\int_0^{1+i} z^3 \mathrm{d}z = \left[\frac{1}{4}z^4\right]_0^{1+i} = \frac{1}{4}(1+i)^4 = \frac{1}{4}(2i)(2i) = -1.$

(2)　$\displaystyle\int_0^{1+i} \mathrm{e}^{(\pi z)} \mathrm{d}z = \left[\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\pi z}\right]_0^{1+i} = \frac{1}{\pi}\left\{\mathrm{e}^{\pi(1+i)} - \mathrm{e}^0\right\} = \frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi}\mathrm{e}^{\pi i} - 1) = -\frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi} + 1).$

(3)　$\displaystyle\int_0^{2+i} \cos(\pi z) \mathrm{d}z = \frac{1}{\pi}\left[\sin(\pi z)\right]_0^{2+i} = \frac{1}{\pi}\left\{\sin(2\pi + \pi i) - 0\right\} = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{i(2\pi+\pi i)} - \mathrm{e}^{-i(2\pi+\pi i)}}{2i}$
$\displaystyle= \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i}\mathrm{e}^{i(\pi i)} - \mathrm{e}^{-2\pi i}\mathrm{e}^{-i(\pi i)}}{2i} = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\pi} - \mathrm{e}^{\pi}}{2i} = \frac{i}{\pi}\sinh \pi.$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi i}^{3\pi i} \mathrm{e}^{(z/2)}\mathrm{d}z = \left[2\mathrm{e}^{(z/2)}\right]_{-\pi i}^{3\pi i} = 2\left\{\mathrm{e}^{(3\pi/2)i} - \mathrm{e}^{(-\pi/2)i}\right\} = 2(-i+i) = 0.$ （$\mathrm{e}^{(z/2)}$は 2π の周期性をもつため）

問題 8.2

C_2 は $z(t) = t\ (0 \le t \le 1)$ と $z(t) = (1+it)\ (0 \le t \le 1)$ と $z(t) = (1+it)\ (0 \le t \le 1)$ に分割．それぞれ $z^2 = t^2$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ と $z^2 = (1+it)^2$, $\mathrm{d}z = i\mathrm{d}t$ なので $\displaystyle\int_{C_2} z^2\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t + \int_0^1 (1+it)^2 i\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 + \int_0^1 (i - 2t - it^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \left[it - t^2 - \frac{i}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \left(i - 1 - \frac{i}{3}\right) = \frac{2}{3}(i-1).$

C_3 は $z(t) = t\ (0 \le t \le \sqrt{2})$ と $z(t) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{it}\ (0 \le t \le \pi/4)$ に分割．それぞれ $z^2 = t^2$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ と $z^2 = 2\mathrm{e}^{i2t}$, $dz = i\sqrt{2}\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t$ なので $\displaystyle\int_{C_3} z^2\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{2}} t^2\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} 2\mathrm{e}^{i2t}\cdot i\sqrt{2}\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}} + i2\sqrt{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{3it}}{3i}\right]_0^{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = \frac{2}{3}(i-1).$ 積分値は同じ．

問題 8.3

C_1 は $z(t) = (1+i)t\ (0 \le t \le 1)$ で $\bar{z} = (1-i)t$, $\mathrm{d}z = (1+i)\mathrm{d}t$． $\displaystyle\int_{C_1} \bar{z}\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-i)t\cdot(1+i)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1.$ C_2 は問題 8.2 と同じで $z(t) = t\ (0 \le t \le 1)$ と $z(t) = (1+it)\ (0 \le t \le 1)$ に分割．それぞれ $\bar{z} = t$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ と $\bar{z} = (1-it)$, $\mathrm{d}z = i\mathrm{d}t$ なので $\displaystyle\int_{C_2} \bar{z}\mathrm{d}t = \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-it)i\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[it + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} = 1 + i.$ 積分値は異なる.$\bar{z}$ は正則でないため．

問題 8.4

積分路 C は $z(t) = \left(1 + \frac{1}{2}i\right)t + (1+i)\ (0 \le t \le 2)$ で，$\mathrm{Re}z = t+1$, $\mathrm{d}z = \left(1 + \frac{1}{2}i\right)\mathrm{d}t$． $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}z\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (t+1)\left(1 + \frac{1}{2}i\right)\mathrm{d}t = \left(1 + \frac{1}{2}i\right)\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^2 = \left(1 + \frac{1}{2}i\right)(2+2) = 4 + 2i.$

問題 8.5

実積分が実軸に沿って関数値を細分化して和をとるのに対して，複素積分は z 平面上の 2 次元積分路を媒介変数でたとえば $z(t)$ と表示し，関数値 $f\{z(t)\}$ を細分化して和をとる点が異なる．

問題 8.6

たとえば線分は $z = at + b$, $(0 \le t \le 1)$，円弧は $z = \mathrm{e}^{it}$, $(0 \le t \le \pi)$ など．

9 コーシーの積分定理

問題 9.1

両辺に $(z+i)(z-2i)$ をかけると $z = a(z-2i) + b(z+i) = (a+b)z + i(-2a+b)$ より $a+b = 1$, $-2a+b = 0$. よって $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$.

問題 9.2

(1) $\dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{z}{(z+i)(z-i)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}\right)$. $C:|z-1+i|=2$ は中心が $z=1-i$ で半径 2 の円で，円内部の正則でない点は $z=-i$ なので $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^2+1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_C\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\int_C\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}2\pi i+0=\pi i.$

(2) $\dfrac{1}{(z+i)(z-2i)}=\dfrac{i}{3}\left(\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{2}{z-2i}\right)$. $C:|z-i|+|z+i|=6$ 内の点は $z=-i$ と $z=2i$ なので $\displaystyle\int_C\frac{1}{(z+i)(z-2i)}\mathrm{d}z=\frac{i}{3}\int_C\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z-\frac{i}{3}\int_C\frac{1}{z-2i}\mathrm{d}z=2\pi i-2\pi i=0.$

(3) $\dfrac{z}{(z+2)(z-4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{2}{z-4}\right)$. $C:|z+1-i|=2$ 内の点は $z=-2$ なので $\displaystyle\int_C\frac{z}{(z+2)(z-4)}\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\int_C\frac{1}{z+2}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{3}.$

(4) $\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{z+2}$. $C:|z+1|+|z+3|=3$ 内の点は $z=-1$ と $z=-2$ なので $\displaystyle\int_C\frac{1}{(z+1)(z+2)}\mathrm{d}z=\int_C\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z-\int_C\frac{1}{z+2}\mathrm{d}z=2\pi i-2\pi i=0.$

(5) $\dfrac{2z}{(z+2)(z+2i)}=\dfrac{2}{1-i}\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{-2i}{1-i}\dfrac{1}{z+2i}$. $C:|z|=3$ 内の点は $z=-2$ と $z=-2i$ なので $\displaystyle\int_C\frac{2z}{(z+2)(z+2i)}\mathrm{d}z\frac{2}{1-i}\int_C\frac{1}{z+2}\mathrm{d}z=+\frac{-2i}{1-i}\int_C\frac{1}{z+2i}=2\pi i\left(\frac{2}{1-i}+\frac{-2i}{1-i}\right)=2\pi i\frac{2-2i}{1-i}=4\pi i.$

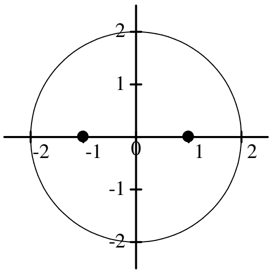
(6) $\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}=\dfrac{2z+1}{(z+2)(z-1)}=\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{1}{z-1}$. $C:|z-1|=2$ 内の点は $z=1$ なので $\displaystyle\int_C\frac{2z+1}{z^2+z-2}\mathrm{d}z=\int_C\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi i.$

問題 9.3

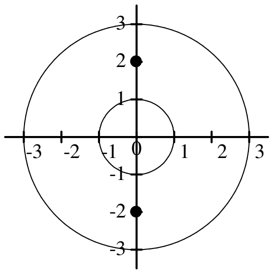
(1) $\dfrac{2z}{z^2-1}=\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{z-1}$. 積分値は $4\pi i$ より点 $z=\pm1$ をともに含む，図:問題 9.3(1) の積分路 $C:|z|=2$ など.

(2) $\dfrac{1}{z^2+4}=\dfrac{1}{4i}\left(\dfrac{1}{z-2i}-\dfrac{1}{z+2i}\right)$. 積分値は 0 より 点 $z=\pm2i$ をともに含まない，図:問題 9.3(2) の積分路 $C:|z|=1$, あるいは点 $z=\pm2i$ をともに含む積分路 $C:|z|=3$ など.

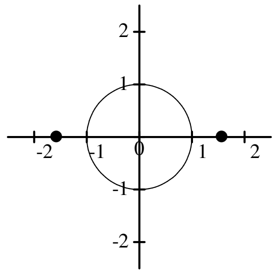
(3) $\cos z=0$ となる $z=\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\cdots$ などの点を含まない図:問題 9.3(3) の積分路 $C:|z|=1$ など.



問題9.3(1)



問題9.3(2)



問題9.3(3)

10　コーシーの積分公式

問題 10.1

(1) $\dfrac{3z}{2z+1} = \dfrac{3z}{2(z+1/2)}$. $z = -\dfrac{1}{2}$ は $C: |z+1| = 1$ 内の点なのでコーシーの積分定理を使うと（以下省略），$f(z) = \dfrac{3}{2}z$ より積分値は $2\pi i f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2\pi i \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3\pi}{2}i$.

(2) $\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$ で $z = -1$, $z = -2$ は $C : |z+1| + |z+3| = 3$ 内の点．それぞれに対して $f(z) = \dfrac{1}{z+2}$，$f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ となるので積分値は $2\pi i \dfrac{1}{-1+2} + 2\pi i \dfrac{1}{-2+1} = 2\pi i - 2\pi i = 0$.

(3) $\dfrac{\cos z}{z-\pi}$ で $z = \pi$ は $C: |z-3| = 1$ 内の点．$f(z) = \cos z$ で $f(\pi) = -1$ より積分値は $2\pi i(-1) = -2\pi i$.

(4) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2+1} = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z+i)(z-i)}$ で $z = -i, z = i$ は $C: |z| = 2$ 内の点．それぞれに対して $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z-i}$, $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z+i}$ なので積分値は $2\pi i\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-i}}{-i-i} + \dfrac{\mathrm{e}^i}{i+i}\right) = 2\pi i\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-i}}{-2i} + \dfrac{\mathrm{e}^i}{2i}\right) = \pi\left(\mathrm{e}^i - \mathrm{e}^{-i}\right)$.

(5) $\dfrac{z+1}{(z-4)(z-1)^2}$ で $z = 4$ は $C: |z| = 2$ 外の点，$z = 1$ は C 内の点なので $f(z) = \dfrac{z+1}{z-4}$ としてグルサの公式を使う．$f'(z) = \dfrac{(z-4)-(z+1)}{(z-4)^2} = \dfrac{-5}{(z-4)^2}$ より $f'(1) = \dfrac{-5}{9}$．積分値は $2\pi i \dfrac{-5}{9} = -\dfrac{10}{9}\pi i$.

(6) $\dfrac{1}{(z+1)^2(z+3)^2}$ で $z = -1$ は $C: |z+3| = 1$ 外の点，$z = -3$ は C 内の点なので $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$ としてグルサの公式を使う．$f'(z) = \dfrac{-2}{(z+1)^3}$ で $f'(-3) = \dfrac{-2}{(-2)^3} = \dfrac{1}{4}$ より積分値は $2\pi i \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\pi i$.

(7) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^4}$ で $z = 1$ は $C: |z| = 2$ 内の点なので $f(z) = \mathrm{e}^z$ としてグルサの公式を使う．$f'(z) = f''(z) = f'''(z) = \mathrm{e}^z$ で $f'''(1) = \mathrm{e}$ より積分値は $2\pi i \dfrac{1}{3!}\mathrm{e} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}\pi i$.

(8) $\dfrac{\cos z}{(z-\pi/2)^2}$ で $z = \dfrac{\pi}{2}$ が正則でない。$C: |z-i| = 2$ が実軸と交差する点は $\pm\sqrt{3}$ だから $\dfrac{\pi}{2} \simeq 1.570$ は C 内の点．$f(z) = \cos z$ としてグルサの公式を使う．$f'(z) = -\sin z$ より $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ だから積分値は $2\pi i(-1) = -2\pi i$.

(9) $\dfrac{\sinh z}{z^3}$ で $z = 0$ は $C: |z| = 2$ 内の点．$f(z) = \sinh z$ としてグルサの公式を使う．$f'(z) = \cosh z$, $f''(z) = \sinh z$ より $f''(0) = 0$ なので積分値は $2\pi i \dfrac{1}{2!}0 = 0$.

(10) $\dfrac{\cos z}{\mathrm{e}^z z^2}$ で $z = 0$ は $C : |z| = 1$ 内の点．$f(z) = \cos z\mathrm{e}^{-z}$ としてグルサの公式を使う．$f'(z) = -\sin z\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{e}^{-z}\cos z = -\mathrm{e}^{-z}(\sin z + \cos z)$ より $f'(0) = -1$ なので積分値は $2\pi i(-1) = -2\pi i$.

問題 10.2

コーシーの積分定理では一般に被積分関数を部分分数展開し，各項について定理の適用を考える．コーシーの積分公式では非積分関数から，非正則となる項 $(z-a)$ を除いた関数をくくり出して直接積分値

を求める．

11　級数展開

問題 11.1

(1)　$\{i^n\} = 1,\, i,\, -1,\, -i,\, 1,\, \cdots$ だから収束しない．

(2)　$\{(-1)^n\} = 1,\, -1,\, 1,\, -1,\, \cdots$ だから収束しない．

(3)　$1 - \dfrac{1}{n} + i\left(1 + 1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 + 2i + \dfrac{1}{n}(i-1)$. $n \to \infty$ で $\dfrac{1}{n} \to 0$ だから収束し，極限は $1 + 2i$.

問題 11.2

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ より $a_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+1/n}$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$ なので収束しない．

(2)　$\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ より $a_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3}\right)$, $a_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right)$, $a_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\right)$, $\cdots$
なので級数の和 $Sn = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\right) \cdots \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right)$
より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$ なので収束する．

問題 11.3

式 (1.5)$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ より $|z_n| = |(z_n + z) + (-z)| \leq |(z_n + z)| + |(-z)|$ より $|z_n| - |z| \leq |z_n + z|$.
z_n と z を入れ替えると $-(|z_n| - |z|) \leq |z_n + z|$ より $||z_n| - |z|| \leq |z_n + z|$. z のかわりに $-z$ とおくと
$||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|$ となるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |z_n| \to |z|$.

問題 11.4

(1)　$\dfrac{1}{R} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ より $R = \infty$.

(2)　$\dfrac{1}{R} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{3^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3(1+1/n)}{1+2/n}\right| = 3$, $R = \dfrac{1}{3}$.

(3)　$n^2 + 4n + 3 = (n+3)(n+1)$, $\dfrac{1}{R} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+4)(n+2)}{(n+3)(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(1+4/n)(1+2/n)}{(1+3/n)(1+1/n)}\right| = 1$, $R = 1$.

(4)　$\dfrac{1}{R} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right| = \frac{1}{2}$, $R = 2$.

(5)　$\dfrac{1}{R} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)+i}{\{2(n+1)\}!} \cdot \frac{(2n)!}{n+i}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1+i}{n+i} \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\right| = 0$, $R = \infty$.

12　べき級数とテーラー展開

問題 12.1

(1)　$f(z) = \dfrac{1}{z+1}$, $f'(z) = \dfrac{-1}{(z+1)^2}$, $f''(z) = \dfrac{(-1)^2 \cdot 2}{(z+1)^3}$ より $f^{(n)}(z) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(z+1)^{n+1}}$. 展開の中心 $z = 1$

を代入すると，$f(1)=\dfrac{1}{1+1}$，$f'(1)=\dfrac{-1}{2^2}$，$f''(1)=\dfrac{(-1)^2\cdot 2}{2^3}$ より $f^{(n)}(1)=\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{2^{n+1}}$．よって $a_n=\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}=\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ だから $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$．$\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1+1}}\cdot\dfrac{2^{n+1}}{(-1)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{-1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$, $R=2$. なお収束半径は展開の中心（$z=1$）から最も近い $f(z)$ の特異点（$z=-1$）までの距離.

(2)　$f(z)=\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{2+(z-1)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+(z-1)/2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+u}$，$u=\dfrac{z-1}{2}$ である．$|u|<1$ とすれば式 (12.8) より $f(z)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$ と (1) と同じ結果が得られる．

問題 12.2

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$，$f'(z)=\dfrac{-2}{z^3}$, $f''(z)=\dfrac{(-1)^2 3\cdot 2}{z^4}$，$f'''(z)=\dfrac{(-1)^3 4\cdot 3\cdot 2}{z^5}$　$f^{(n)}(z)=\dfrac{(-1)^n\cdot(n+1)!}{z^{n+2}}$．展開の中心 $z=1$ を代入すると，$f(1)=1$，$f'(1)=-2$，$f''(1)=(-1)^2 3!$ より $f^{(n)}(1)=(-1)^n\cdot(n+1)!$. よって $a_n=\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}=\dfrac{(-1)^n(n+1)!}{n!}=(-1)^n(n+1)$ だから $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n$．$\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}(n+2)}{(-1)^n(n+1)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|-\dfrac{1+2/n}{1+1/n}\right|=1$, $R=1$.

問題 12.3

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$，$f'(z)=\dfrac{-2}{z^3}$, $f''(z)=\dfrac{(-1)^2 3\cdot 2}{z^4}$，$f'''(z)=\dfrac{(-1)^3 4\cdot 3\cdot 2}{z^5}$，$f^{(n)}(z)=\dfrac{(-1)^n\cdot(n+1)!}{z^{n+2}}$．展開の中心 $z=i$ を代入すると, $f(i)=\dfrac{1}{i^2}$，$f'(i)=\dfrac{-2}{i^3}$，$f''(i)=\dfrac{(-1)^2 3!}{i^4}$ より $f^{(n)}(i)=\dfrac{(-1)^n\cdot(n+1)!}{i^{n+2}}$．よって $a_n=\dfrac{f^{(n)}(i)}{n!}=\dfrac{(-1)^n(n+1)}{i^{n+2}}$ だから $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{i^{n+2}}(n+1)(z-i)^n$．$\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}(n+2)}{i^{n+3}}\cdot\dfrac{i^{n+2}}{(-1)^n(n+1)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{-1}{i}\dfrac{1+2/n}{1+1/n}\right|=1$, $R=1$.

問題 12.4

$f(z)=\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{1-z/2}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$.

問題 12.5

$f(z)=\dfrac{1}{z^3+i}=\dfrac{1}{i}\dfrac{1}{1-iz^3}=\dfrac{1}{i}\dfrac{1}{1+(iz)^3}=\dfrac{1}{i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{(iz)^3\right\}^n=\dfrac{1}{i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{3n}z^{3n}=\dfrac{1}{i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-i)^n z^{3n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}i^{n-1}z^{3n}$.

問題 12.6

$z=\pi i$ を中心に展開するため $z-\pi i=u$ とおくと $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{u+\pi i}=\mathrm{e}^{\pi i}\cdot\mathrm{e}^u=-\mathrm{e}^u$．$\mathrm{e}^u$ を式 (12.4) で展開して z に戻すと $\mathrm{e}^z=-\mathrm{e}^u=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{u^n}{n!}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-\pi i)^n}{n!}$.

問題 12.7

$z=1$ を中心に展開するため $z-1=u$ とおくと $z^2-2z+2=(u^2+2u+1)-2(u+1)+2=1+u^2$ だから $f(z)=f(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$．式 (12.8) を使うと $\dfrac{1}{1+u^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(u^2)^n$ なので z に戻すと $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{2n}$.

問題 12.8

$f(z)=\dfrac{z}{1-2z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-2z}$ と変型して分子の次数を下げる．$z-1=u$ とおいて式 (12.8) を使うと

$$f(z)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-2(1+u)}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+2u}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2u)^n=-\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{n-1}(z-1)^n.$$

13　ローラン展開と留数

問題 13.1

$f(z)=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z+1}$. 展開の中心は $z=1$ なので展開の中心を含まない項 $\dfrac{1}{z+1}$ を展開する. $|z-1|>2$ より $\left|\dfrac{-2}{z-1}\right|<1$ とできるので $\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{-2}{z-1}\right)}=\dfrac{1}{z-1}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}$.

よって $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}$.

問題 13.2

$z-\pi=u$ とおいて式 (12.6) を使うと $\sin z=\sin(u+\pi)=-\sin u=-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}u^{2n+1}$. よって $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\pi}=\dfrac{-\sin u}{u}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}u^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n}$.

問題 13.3

(1)　$|z|<2$ では $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$ で展開の中心は $z=0$ だから式 (12.8) を使うと, $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)}=\dfrac{1}{z}\dfrac{1/2}{1+z/2}=\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2z}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}$.

(2)　$|z|>2$ では $\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$ で展開の中心は $z=0$ だから式 (12.8) を使うと, $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)}=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{2+z}=\dfrac{1}{z^2}\dfrac{1}{1+2/z}=\dfrac{1}{z^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+2}}$.

問題 13.4

特異点は $z=0$. 式 (12.5) より $\cos\dfrac{1}{z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}$ だから $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z}$ は主要部が無限個あるので真性特異点.

問題 13.5

特異点は $z=\dfrac{3}{2}$ で 2 位の極.

問題 13.6

特異点は $z=0$ だが, $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\left\{1-\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\cdots\right)\right\}=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}-\cdots$ より除去可能.

問題 13.7

$z=1$, $z=2$ はともに 1 位の極だから, $\mathrm{Res}(f,1)=\displaystyle\lim_{z\to1}\{(z-1)f(z)\}=\lim_{z\to1}\left\{\frac{\mathrm{e}^z}{z-2}\right\}=-\mathrm{e}$, $\mathrm{Res}(f,2)=\displaystyle\lim_{z\to2}\{(z-2)f(z)\}=\lim_{z\to2}\left\{\frac{\mathrm{e}^z}{z-1}\right\}=\mathrm{e}^2$.

問題 13.8

$\dfrac{\mathrm{Log}(1+z)}{z^3}=\dfrac{1}{z^3}\left(z-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{z^4}{4}+\cdots\right)=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{z}{4}+\cdots$ より, $\mathrm{Res}(f,0)=-\dfrac{1}{2}$.

問題 13.9
$\dfrac{e^{i\pi z}}{z^3-4z} = \dfrac{e^{i\pi z}}{z(z+2)(z-2)}$ より特異点は $z = 0,\ 2,\ -2$ でそれぞれ 1 位の極. $\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}\{zf(z)\} = \lim_{z\to 0}\left\{\dfrac{e^{i\pi z}}{z^2-4}\right\} = -\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2}\{(z-2)f(z)\} = \lim_{z\to 2}\left\{\dfrac{e^{i\pi z}}{z(z+2)}\right\} = \dfrac{1}{8}$,
$\mathrm{Res}(f,-2) = \lim_{z\to -2}\{(z+2)f(z)\} = \lim_{z\to -2}\left\{\dfrac{e^{i\pi z}}{z(z-2)}\right\} = \dfrac{1}{8}$.

問題 13.10
2.2 節の 4 乗根を指数で求めると $z^4 = 1 = e^{i2n\pi}$ より $z = e^{i2n\pi/4}$, $n = 0,1,2,3$. 特異点は $z = e^0,\ e^{\pi i/2},\ e^{\pi i},\ e^{3\pi i/2}\ (= 1,\ i,\ -1,\ -i)$ であり，すべて 1 位の極. なお $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$ より $e^{\pi i/2} = i$ の留数は, $\mathrm{Res}(f, e^{\pi i/2}) = \lim_{z\to i}\{(z-i)f(z)\} = \lim_{z\to i}\left\{\dfrac{1}{(z-1)(z+1)(z+i)}\right\} = \dfrac{i}{4}$.
次に式 (13.6) を使う. $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)} = \dfrac{1}{z^4-1}$ とおくと $g(z) = z^4-1$ だから $g(i) = 0$. $g'(z) = 4z^3$ より $g'(i) = 4(-i) \neq 0$. 式 (13.6) から $\mathrm{Res}(f,i) = \dfrac{h(i)}{g'(i)} = \dfrac{1}{-4i} = \dfrac{i}{4}$.

14　留数による実積分

問題 14.1
(1)　$z = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ とし，単位円 $|z| = 1$ を積分路 C として式 (14.2) を使う. $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$ より $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta} = \int_C \frac{1}{3+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \int_C \frac{-2i}{z^2+6z+1}dz$. 特異点は $-3 \pm 2\sqrt{2}$ で C 内部にあるのは $z_1 = -3+2\sqrt{2}$ で 1 位の極. $\mathrm{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_1}\dfrac{-2i}{z-(-3-2\sqrt{2})} = \dfrac{-2i}{4\sqrt{2}}$. 積分値は $2\pi i\dfrac{-2i}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(2)　前問と同様にして式 (14.2) を使う. $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ より $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \int_C \frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2\frac{dz}{iz} = \int_C \frac{1}{4}\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right)\frac{dz}{iz} = \int_C \frac{1}{4i}\left(z+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^3}\right)dz$. 留数は $\dfrac{1}{z}$ の係数だから積分値は $2\pi i\dfrac{1}{2i} = \pi$.

(3)　式 (14.2) を使う. $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$, $5+4\sin\theta = \dfrac{1}{i}\left(5i+2z-\dfrac{2}{z}\right)$ より $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\sin\theta} = \int_C \frac{1}{\frac{1}{i}\left(5i+2z-\frac{2}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \int_C \frac{dz}{5zi+2z^2-2} = \int_C \frac{dz}{2(z+i/2)(z+2i)}$. 特異点は $-2i$, $\dfrac{-i}{2}$ で C 内にあるのは $z_1 = \dfrac{-i}{2}$ で 1 位の極. $\mathrm{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_1}\dfrac{1}{2(z+2i)} = \dfrac{1}{-i+4i} = \dfrac{1}{3i}$. 積分値は $2\pi i\dfrac{1}{3i} = \dfrac{2\pi}{3}$.

(4)　特異点は前問と同じ $z_1 = \dfrac{-i}{2}$ だが 2 位の極. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5+4\sin\theta)^2} = \int_C \frac{1}{\left\{\frac{1}{i}\left(5i+2z-\frac{2}{z}\right)\right\}^2}\frac{dz}{iz} = \int_C \frac{iz}{4(z+i/2)^2(z+2i)^2}dz$. $\mathrm{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_1}\dfrac{d}{dz}\left\{(z-z_1)^2 f(z)\right\} = \lim_{z\to z_1}\dfrac{d}{dz}\left\{\dfrac{iz}{4(z+2i)^2}\right\} = \lim_{z\to z_1}\dfrac{i}{4}\dfrac{-z+2i}{(z+2i)^3} = \dfrac{i}{4}\dfrac{-20}{27} = i\dfrac{-5}{27}$. 積分値は $2\pi i\cdot i\dfrac{-5}{27} = \dfrac{10\pi}{27}$.

(5)　$f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$ は上半面に 2 つ 1 位の極 $z_1=\mathrm{e}^{\pi i/4}$, $z_2=\mathrm{e}^{3\pi i/4}$ をもつ．$g(z)=z^4+1$, $g'(z)=4z^3$, $h(z)=z^2$ として式 (13.6) を使う．$g'(z_{1,2})\neq 0$ より $\mathrm{Res}(f,z_1)=\dfrac{h(z_1)}{g'(z_1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{2\pi i/4}}{4\mathrm{e}^{3\pi i/4}}=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\pi i/4}$, $\mathrm{Res}(f,z_2)=\dfrac{\mathrm{e}^{6\pi i/4}}{4\mathrm{e}^{9\pi i/4}}=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-3\pi i/4}$. よって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=2\pi i\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-\pi i/4}+\mathrm{e}^{-3\pi i/4}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(6)　$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ は上半面に 2 位の極 i をもつ．$\mathrm{Res}(f,i)=\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{(z-i)^2\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right\}=\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{1}{(z+i)^2}\right\}=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=\frac{1}{4i}$. よって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=2\pi i\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}$.

15　複素積分の応用

問題 15.1

積分路内に e^{-z^2} の極はないため，$\displaystyle\int_C \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+i\int_0^b \mathrm{e}^{-(R+iy)^2}\mathrm{d}y+\int_R^{-R}\mathrm{e}^{-(x+ib)^2}\mathrm{d}x+i\int_b^0 \mathrm{e}^{-(-R+iy)^2}\mathrm{d}y=\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_R^{-R}\mathrm{e}^{-x^2+b^2-2ibx}\mathrm{d}x+i\int_0^b \mathrm{e}^{-R^2+y^2-2iRy}\mathrm{d}y+i\int_b^0 \mathrm{e}^{-R^2+y^2+2iRy}\mathrm{d}y$
$=0$. $R\to\infty$ とすると上式第 3,4 項の積分は 0 となるから，
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{b^2}\mathrm{e}^{-x^2}\left\{\cos(2bx)-i\sin(2bx)\right\}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}-\mathrm{e}^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(2bx)\mathrm{d}x=0.$
よって求める積分は $\mathrm{e}^{-b^2}\sqrt{\pi}$.

問題 15.2

上半面に積分路をとる．$z=R\mathrm{e}^{i\theta}$ として $\displaystyle\int_{大半円}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z-a}\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{iR\cos\theta}\cdot\mathrm{e}^{-R\sin\theta}}{R\mathrm{e}^{i\theta}-a}iR\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ を考える．上半面だから積分路は $\theta:\ 0\to\pi$ で，このとき $-R\sin\theta<0$. よって $R\to\infty$ で $\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\to 0$. また $\left|\mathrm{e}^{iR\cos\theta}\right|=1$ だから $R\to\infty$ で $\displaystyle\int_{大半円}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z-a}dz\to 0$ となる．$z=a+r\mathrm{e}^{i\theta}$ として小半円の積分は $\displaystyle\int_{\pi}^{0}\frac{\mathrm{e}^{i(a+r\mathrm{e}^{i\theta})}}{r\mathrm{e}^{i\theta}}ir\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ よって $r\to 0$ で積分値は $-\pi i\mathrm{e}^{ia}$. 積分路となる閉曲線内に極はないから式 (15.2) を使って $\displaystyle P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x-a}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{ia}\pi i$.

問題 15.3

$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$ とおくと，積分路となる閉曲線内に特異点はないので $\displaystyle\int_{-R}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x+\int_r\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x+\int_R\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0$. x を $-x$ で置き換えて 1 番目と 3 番目の積分を合わせると $\displaystyle\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{x}\mathrm{d}x+\int_r\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_R\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0$，$\displaystyle 2i\int_r^R\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\int_r\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z-\int_R\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z$. ここで $r\to 0$，$R\to\infty$ とすると $\left|\mathrm{e}^{iz}\right|=1$ より右辺第 2 項の積分は 0. $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$ とすると $\displaystyle-\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{\mathrm{e}^{ir\mathrm{e}^{i\theta}}}{r\mathrm{e}^{i\theta}}ir\mathrm{e}^{i\theta}d\theta=-\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0}i\mathrm{e}^{ir\mathrm{e}^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=\pi i$. よって $\displaystyle\lim_{R\to\infty,r\to 0}2i\int_r^R\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi i$. または $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

問題 15.4

$z_1=\mathrm{e}^{i0}=1$, $z_2=\mathrm{e}^{i2\pi}=1$ より $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2}z^{1/2}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i\theta/2}i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i3\theta/2}i\mathrm{d}\theta=\left[i\cdot\frac{2}{3i}\mathrm{e}^{i3\theta/2}\right]_0^{2\pi}=-\frac{4}{3}$.