練習問題の答えと解説

第 1 章

■問題 1

最頻値：「45 点」または「40 点以上 50 点未満」など

わかること： 10 人のうち，点数が 45 点（または 40 点以上 50 点未満）であったものが最多である。

解説

最頻値の求め方： 10 人の成績点をそのまま用いて度数を数えると結果は次のようになり，「45」の度数が 2 で最大なので，最頻値は「45」となります。

得点	25	40	45	50	60	70	80	90	95
度数	1	1	2	1	1	1	1	1	1

また，成績点を 10 点刻みの階級で集計した場合には，「40 以上 50 未満」の階級の度数が 3 で最大となり，この階級が最頻値になります。

階級	度数	階級	度数
20〜30 未満	1	60〜70 未満	1
30〜40 未満	0	70〜80 未満	1
40〜50 未満	3	80〜90 未満	1
50〜60 未満	1	90〜100 未満	2

さらに，成績点を 20 点刻みの階級で集計した場合には，「40 以上 60 未満」の階級の度数が 4 で最大となり，この階級が最頻値になります。

階級	度数
20〜40 未満	1
40〜60 未満	4
60〜80 未満	2
80〜100 未満	3

このように，テストの点数のような測定値の場合には，最頻値は1つに決まらず，階級の幅をどのように設定するかによって何通りにも求まります。

最頻値からわかること： この場合，最頻値からわかることは「その値を持つ測定値がもっとも多い」ということぐらいです。また，「40点以上50点未満の学生がもっとも多い」というと全体的に試験の成績があまり良くなかったかのように感じられますが，最頻値の次に度数が大きいのは90点代の2名であり，全体的に成績が悪かったという印象は受けないのではないかと思います。つまりこの場合，最頻値はデータの特徴をあまりうまく代表できていないと言えそうです。

■問題2

中央値： 55

四分位数： 第1：45，第2：55，第3：80

四分位範囲： 35

わかること： 得点順で見たときにちょうど中間にあたる点は55（点）である。また，学生の半分は45点から80点の間の点数である。

解説

中央値の求め方： データを点数の低い順に並べると次のようになります。

$$25, 40, 45, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 95$$

測定値の数は10個で偶数なので，ちょうど真ん中に当たるところに値はありません。この場合，5番目(50)と6番目(60)の中点（$(50+60)\div 2=55$）が中央値となります。

四分位数の求め方： データを中央値で半分に分けると，下位5名の点数は25, 40, 45, 45, 50，上位5名の点数は60, 70, 80, 90, 95となり，それぞれの中央値（45と80）がそれぞれ第1四分位，第3四分位になります。なお，第2四分位は中央値の55です。

四分位範囲の求め方： 四分位範囲は第3四分位数から第1四分位数を引いた値ですので，このデータの場合には$80-45=35$です。

中央値と四分位数，四分位範囲からわかること： 中央値は測定値の順位の中間点を示す値ですから，この値よりも大きい値と小さい値が同数であるということを意味します（ただし，中央値と同じ値の測定値が複数個ある場合には

必ずしもそうなりません)。つまりこの場合，中央値と同じ点数は，良くもなく悪くもない「平凡」な得点ということになります。

四分位範囲は測定値全体の半分（50%），つまり 10 人中 5 人の得点が収まる幅です。ただし，四分位範囲が示すのは「幅の大きさ」だけですので，「どこからどこまで」が重要な場合には四分位数を示す必要があります。

■問題 3

平均値： 60

標準偏差： 21.9

平均値と標準偏差からわかること： 10 人の得点の（大きさ）を総合した場合の中心は 60 点であり，また得点の大部分はその前後 21.9 点の範囲（38.1 点〜81.9 点）に収まっている。

解説

平均値の求め方： 平均値は測定値全体を合計して測定値の個数で割った数ですので，

$$\frac{(70+95+45+45+90+40+50+80+25+60)}{10}=60$$

です。

標準偏差の求め方： 標準偏差は分散の平方根なので，まずは分散を求めます。分散は偏差の 2 乗の平均値ですので，そのためには各測定値の（平均値（60）からの）偏差，およびその 2 乗値を求める必要があります。

得点	70	95	45	45	90	40	50	80	25	60
偏差	10	35	−15	−15	30	−20	−10	20	−35	0
偏差^2	100	1225	225	225	900	400	100	400	1225	0

分散は 偏差^2 の平均値なので，

$$\frac{(100+1225+225+225+900+400+100+400+1225+0)}{10}=480$$

であり，標準偏差はその平方根なので $\sqrt{480}=21.908\ldots$ となります。

平均値と標準偏差からわかること： 平均値は全測定値の大きさのバランス点なのですが，これを言葉で具体的に説明しようとすると意外と難しいもので

す。ただ，平均値は日常的に頻繁に使用される値でもあり，多くの人は感覚的にその意味を理解できることでしょう。また，標準偏差は平均値の前後どれくらいの幅に測定値の大部分がばらついているかを示す値です。このデータの場合には，試験の得点の大半は平均値から 21.9 点の範囲，つまり 38.1 点〜81.9 点の間であるということになります。

■問題 4&5　各学生の成績の標準得点および学力偏差値は次の通り。

学生	A	B	C	D	E
得点	70	95	45	45	90
標準得点	0.46	1.60	−0.68	−0.68	1.37
学力偏差値	54.6	66.0	43.2	43.2	63.7
学生	F	G	H	I	J
得点	40	50	80	25	60
標準得点	−0.91	−0.46	0.91	−1.60	0.00
学力偏差値	40.9	45.4	59.1	34.0	50.0

解説

標準得点：　標準得点は偏差を標準偏差で割った値です。つまり，各学生の得点を次の式で変換した値が標準得点です。

$$\text{標準得点} = \frac{\text{偏差}}{\text{標準偏差}} = \frac{\text{偏差}}{21.9} = \frac{\text{試験の得点} - 60}{21.9}$$

学力偏差値：　学力偏差値は標準得点を 10 倍して 50 を加えた値です。つまり，以下の式で標準得点をさらに変換したものが学力偏差値です。

$$\text{学力偏差値} = \text{標準得点} \times 10 + 50$$

第 2 章

■問題 1-1　0.75

解説　ピアソンの相関係数の算出には，まず共分散を求める必要があります。そのために，それぞれの変数の平均値と各測定値の平均値からの偏差，そしてそれらの積を求めます。偏差の積の平均値が共分散です。

	1	2	3	4	5	平均値
自己受容	14	12	8	10	16	12
偏差	2	0	−4	−2	4	
他者許容	15	18	12	16	19	16
偏差	−1	2	−4	0	3	
偏差の積	−2	0	16	0	12	5.2

次に，それぞれの変数について標準偏差を求めます。すでに平均値からの偏差が求められているので，それらを 2 乗して平均して分散を算出します。その正の平方根が標準偏差です。

$$\text{自己受容の分散} = \frac{2^2 + 0^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 4^2}{5} = 8$$

$$\text{標準偏差} = \sqrt{8} = 2.8284\ldots$$

$$\text{他者許容の分散} = \frac{(-1)^2 + 2^2 + (-4)^2 + 0^2 + 3^2}{5} = 6$$

$$\text{標準偏差} = \sqrt{6} = 2.4494\ldots$$

最後に共分散を 2 変数の標準偏差の積で割って相関係数を求めます。

$$\text{ピアソンの相関係数}(r) = \frac{x\text{と}y\text{の共分散}}{x\text{の標準偏差} \times y\text{の標準偏差}}$$

$$= \frac{5.2}{2.83 \times 2.45} = 0.7499\ldots$$

■問題 1-2　0.70

解説　スピアマンの順位相関係数を算出するには，まず各測定値を順位に置き直す必要があります。そのうえで，各測定値の順位の差を求めます。

	1	2	3	4	5
自己受容	14	12	8	10	16
順位	4	3	1	2	5
他者許容	15	18	12	16	19
順位	2	4	1	3	5
順位の差	2	−1	0	−1	0

求めた順位の差を 2 乗して合計します。

$$(\text{順位の差})^2\text{の合計} = 2^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 6$$

最後に，次の式で順位相関係数を求めます。

$$
\begin{aligned}
\text{順位相関係数}(r_s) &= 1 - \frac{(\text{順位の差})^2\text{の合計} \times 6}{\text{測定値ペアの個数} \times (\text{測定値ペアの個数}^2 - 1)} \\
&= 1 - \frac{6 \times 6}{5 \times (5^2 - 1)} = 1 - \frac{36}{120} = 0.7
\end{aligned}
$$

■問題 1-3　ウ

解説　練習問題のデータは，ピアソンの積率相関係数もスピアマンの順位相関係数もどちらも 0.7 程度で比較的強い正の相関があります。正の相関があるということは，一方の値が大きいほどもう一方の値も大きい傾向があるということを意味しているので，選択肢「ウ」が正解です。相関係数は「x と y に関連がある」という関連の強さを示すもので，「散らばりが何倍」ということでも「y には x が必要である」ということでもありません。そのため，選択肢「ア」と「イ」は誤りです。また，相関係数の絶対値が 1 を超えることはありませんので，相関係数が 1 未満だから小さいという選択肢「エ」の記述も誤りです。

■問題 2-1　0.12

解説　φ 係数はクロス表の各セル（a〜d）の値を用いて次の式で求められます。

	理科		
	好き	嫌い	計
男子	a	b	$a+b$
女子	c	d	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \frac{a \times d - b \times c}{\sqrt{(a+b) \times (c+d) \times (a+c) \times (b+d)}} \\
&= \frac{80 \times 30 - 70 \times 20}{\sqrt{100 \times 100 \times 150 \times 50}} = \frac{1000}{\sqrt{75000000}} = \frac{1}{\sqrt{75}} = 0.1154\ldots
\end{aligned}
$$

■問題 2-2　理科の好き嫌いと性別の間の連関は弱い

解説　φ 係数の絶対値がいくつ以上であれば強い連関と言えるかについて明確な基準はありませんが，φ 係数の絶対値がとりうる範囲が 0〜1 であるのに

対し，このデータの φ 係数は 0.12 です。2 つの間に「まったく連関がない」とまでは言えないかもしれませんが，連関は弱いと考えるのが適当でしょう。

第 3 章

■**問題 1-1**　他者許容度 $=0.65\times$ 自己受容度 $+8.2$

解説　自己受容度と他者許容度の相関係数は 0.75，標準偏差はそれぞれ 2.83, 2.45 ですので，ここから回帰係数を求めることができます。

$$
\begin{aligned}
\text{回帰係数} &= \text{相関係数} \times \frac{\text{目的変数の標準偏差}}{\text{説明変数の標準偏差}} = 0.75 \times \frac{2.45}{2.83} = 0.75 \times 0.8657\ldots \\
&= 0.6492\ldots
\end{aligned}
$$

回帰係数が求まったら，次の式で切片を求めます。

$$
\begin{aligned}
\text{切片} &= \text{目的変数の平均値} - \text{回帰係数} \times \text{説明変数の平均値} \\
&= 16 - 0.65 \times 12 = 16 - 7.8 = 8.2
\end{aligned}
$$

■**問題 1-2**　重相関係数：0.75，決定係数：0.56

解説　重相関係数を求めるためには，まず説明変数の各測定値について回帰式による予測値を求める必要があります。

学生	自己受容度	回帰式	予測値
1	14	$0.65\times14+8.2=$	17.3
2	12	$0.65\times12+8.2=$	16.0
3	8	$0.65\times8+8.2=$	13.4
4	10	$0.65\times10+8.2=$	14.7
5	16	$0.65\times16+8.2=$	18.6

これらの値と他者許容度の実測値の間で相関係数を算出します。まずは偏差の積を平均して共分散を求めましょう。

	学生 1	学生 2	学生 3	学生 4	学生 5	平均値	標準偏差
他者許容度（実測）	15	18	12	16	19	16	2.45
偏差	−1	2	−4	0	3		
他者許容度（予測）	17.3	16	13.4	14.7	18.6	16	
偏差	1.3	0	−2.6	−1.3	2.6		
偏差の積	−1.3	0	10.4	0	7.8	3.38	← 共分散

他者許容度の実測値については標準偏差はすでにわかっているので，予測値の標準偏差を求めます。

$$
\begin{aligned}
\text{標準偏差} &= \sqrt{\text{分散}} = \sqrt{\frac{\text{偏差}^2\text{の合計}}{\text{測定値の個数}}} \\
&= \sqrt{\frac{1.3^2 + 0^2 + (-2.6)^2 + (-1.3)^2 + 2.6^2}{5}} = \sqrt{\frac{16.9}{5}} \\
&= \sqrt{3.38} = 1.8384\ldots
\end{aligned}
$$

共分散を標準偏差の積で割って重相関係数を求めます。

$$
\begin{aligned}
\text{重相関係数} &= \frac{\text{実測値と予測値の共分散}}{\text{実測値の標準偏差} \times \text{予測値の標準偏差}} \\
&= \frac{3.38}{2.45 \times 1.84} = \frac{3.38}{4.508} = 0.7497\ldots
\end{aligned}
$$

決定係数は，予測値の分散と実測値の分散の比率という定義を用いて算出することにします。予測値の標準偏差と実測値の標準偏差がすでに求められているので，これらの 2 乗値を用いれば簡単に求められます。

$$
\text{決定係数} = \frac{\text{予測値の分散}}{\text{実測値の分散}} = \frac{1.84^2}{2.45^2} = \frac{3.3856}{6.0025} = 0.5640\ldots
$$

■問題 1-2　ア

解説　回帰式の回帰係数は 0.65 で，これは説明変数（自己受容度）の値が 1 増えるごとに目的変数（他者許容度）の値が 0.65 増えることを意味します。そのため，選択肢「ア」が正解です。なお，決定係数の 0.56 は，回帰式による予測値で他者許容度得点の分散のうち 56% を説明できているということを意味します。実測値と予測値の相関は重相関係数の 0.75 です。これらのことから選択肢「イ」と「ウ」は誤りです。また，切片の値は実測値と予測値の差ではありませんので，選択肢「エ」も誤りです。

第 4 章

■問題 1-1　平均値：2 人，分散：1.8，標準偏差：1.34

解説　この問題は，結果の取りうる値が「右利き」か「左利き」かという試行を 20 回繰り返したものと解釈することができます。すると，「20 人中左利きは平均何人か」という問題は，二項分布の期待値として求められます。

$$\text{二項分布の期待値} = \text{試行数} \times \text{左利き率} = 20 \times 0.1 = 2$$

この場合の確率変数（左利きの人数）の分散は以下の通りです。

$$\text{分散} = \text{試行数} \times \text{左利き率} \times (1 - \text{左利き率}) = 20 \times 0.1 \times (1 - 0.1) = 1.8$$

また，標準偏差は分散の正の平方根ですから，$\sqrt{1.8} = 1.3416\ldots$ となります。つまり，20 人という人数であれば，平均 2 人，標準偏差を考慮すると 0.66 人〜3.34 人程度ということになります。

■問題 1-2　0.180（18.0%）
解説　ある現象について単位あたりの出現頻度がわかっているとき，その単位で対象となる現象が x 回出現する確率についてはポアソン分布の式を利用すると簡単に求められます。左利きの率は 10 人に 1 人ですから，20 人を単位とした場合には 2 人いることが期待されます（これは問題 1-1 における二項分布の期待値と同じです）。つまり，$\lambda = 2$ です。

$$\begin{aligned}\text{左利きが3人いる確率} &= \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3!}2.72^{-2} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{2.72^2} \\ &= \frac{8}{6} \times \frac{1}{7.3984} = 0.1802\ldots\end{aligned}$$

■問題 2　成績上位者の確率：0.206（20.6%），上位者の人数：41200 人
解説　（学力）偏差値は標準得点を 10 倍して 50 を加えたものですので，偏差値が 58.2 であれば，そこから 50 を引いて 10 で割った値が標準得点 z となります。したがって，$z = (58.2 - 50)/10 = 0.82$ です。

そこで，巻末の標準正規分布表から $z = 0.82$ の場合の確率を求めます。$z = 0.82$ の場合の確率は，正規分布表より 0.206 です。また，受験者の総数が 20 万人であれば，あなたよりも上位にいる可能性があるのはそのうちの 20.6%，つまり $200000 \times 0.206 = 41200$ 人ということになります。

第 5 章

■問題 1-1　オ

解説　「中学生」の心理的特徴について知りたいのですから，想定される母集団は「中学生全体」ということになります。ただし，この「中学生全体」というのが「日本国内」の中学生全体なのか，全世界の中学生（あるいはそれに相当する年代）全体なのかは，その研究の仮説などによって異なります。

■問題 2-1　母平均の推定値：0，母分散の推定値：318.5

解説　母平均の推定値には標本の平均値がそのまま使えますので，母平均の推定値は次のように求まります。

$$\text{母平均の推定値} = \text{標本平均} = \frac{13+4+(-20)+(-17)+20}{5} = 0$$

母分散の推定値には不偏分散を使用します。

$$\begin{aligned}\text{不偏分散} &= \frac{(\text{測定値}-\text{標本平均})^2\text{の合計}}{\text{標本サイズ}-1}\\ &= \frac{(13-0)^2+(4-0)^2+(-20-0)^2+(-17-0)^2+(20-0)^2}{5-1} = 318.5\end{aligned}$$

■問題 2-2　7.98

解説　母分散はわかりませんので，その代わりに不偏分散を用いて標準誤差を算出します。

$$\text{標準誤差} = \sqrt{\frac{\text{不偏分散}}{\text{標本サイズ}}} = \sqrt{\frac{318.5}{5}} = 7.9812\ldots$$

■問題 2-3　-22.15〜22.15

解説　母平均の 95% 信頼区間は，母平均の推定値の前後に標準誤差の t 倍の幅を設けたものです。計算に用いられる t は，両側確率.05 で自由度「標本サイズ -1」の値（2.776）です。

$$\begin{aligned}95\%\text{信頼区間の上限} &= \text{母平均推定値} + t \times \text{標準誤差}\\ &= 0 + 2.776 \times 7.98 = 22.15248\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}95\%\text{信頼区間の下限} &= \text{母平均推定値} - t \times \text{標準誤差}\\ &= 0 - 2.776 \times 7.98 = -22.15248\end{aligned}$$

■問題 3　母比率の推定値：0.3（30%），95% 信頼区間：0.255（25.5%）〜 0.345（34.5%）
解説　母比率の推定値には標本の比率（30%）がそのまま使えます。標準誤差は以下の式で求められます。

$$\text{標準誤差} = \sqrt{\frac{\text{比率} \times (1 - \text{比率})}{\text{標本サイズ}}} = \sqrt{\frac{0.3 \times (1 - 0.3)}{400}} = 0.0229\ldots$$

また，標本サイズが 400 人と十分に大きいため，95% 信頼区間については標準正規分布に近似させて求めることができます。その場合，信頼区間は母比率の前後に標準誤差の 1.96 倍（標準得点 z の両側確率.05（=片側確率.025）の値）の幅を設けたものになります。

$$\begin{aligned}95\%\text{信頼区間の上限} &= \text{母比率} + 1.96 \times \text{標準誤差}\\ &= 0.3 + 1.96 \times 0.0229 = 0.3448\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}95\%\text{信頼区間の下限} &= \text{母比率} - 1.96 \times \text{標準誤差}\\ &= 0.3 - 1.96 \times 0.0229 = 0.2551\ldots\end{aligned}$$

第 6 章

■問題 1.　正
解説　統計的仮説検定では，帰無仮説が正しいと仮定した場合の検定統計量の分布を求め，標本データから得られた検定統計量の値がその分布においてどの程度極端なものであるかを確かめます。(「仮説検定の手順」の「統計的仮説の設定」と「統計検定量の算出」を参照)

■問題 2.　誤

解説　有意水準（α）は，あくまでも「帰無仮説が正しい場合にそれを棄却してしまう（第 1 種の誤り）」確率であって，検定結果の正しさについての確率ではありません。検定における誤りには，有意水準で表される第 1 種の誤りの他に，「帰無仮説が誤りである場合にそれを棄却しない（第 2 種の誤り）」ものがあります。（「仮説検定の手順」の「有意水準の設定」を参照）

■問題 3.　誤

解説　検定力（$1-\beta$）は，「帰無仮説が誤りである（対立仮説が正しい）場合に帰無仮説を棄却できる（対立仮説を採択できる）」確率です。つまり，差や関連性を「見逃さない」確率であって，やはり検定の正しさそのものを示しているわけではありません。（「仮説検定の手順」の「有意水準の設定」と「仮説の採否判定」を参照）

■問題 4.　誤

解説　有意確率（p 値）は，「帰無仮説が正しい場合に仮定される検定統計量の分布」において，標本データから算出された検定統計量より極端な値が得られる割合を示す値です。「帰無仮説の正しさ」や「検定結果の正しさ」を示す値ではありません。（「仮説検定の手順」の「仮説の採否判定」を参照）

■問題 5.　誤

解説　有意確率（p 値）は「帰無仮説が正しい場合に仮定される検定統計量の分布」における極端さを示すもので，「関係の強さ」や「差の大きさ」を示すものではありません。「関係の強さ」や「差の大きさ」を示すのは**効果量**です。（「仮説検定の手順」の「検定結果の報告」および「効果量」を参照）

■問題 6.　誤

解説　「結果が有意」というのは，単に「検定において帰無仮説が棄却された」ということを示す用語（ラベル）であり，それ以上の意味はありません。検定の結果が有意であることとその結果に実質的な意味があるかどうかは別の問題です。「有意」という言葉に惑わされないようにしましょう。（「検定結果の解釈」を参照）

■問題 7.　誤

解説　検定結果が有意でない場合，帰無仮説は棄却されませんが，それは「帰無仮説が正しい」ということではなく，「帰無仮説を棄却できるだけの十分な根拠がない」ということです。（「検定結果の解釈」を参照）

■問題 8.　誤
解説　両側検定を用いるか片側検定を用いるかは，検討したい仮説の性質によって決まるものです。有意になりやすい（なりにくい）からという理由で決めるものではありません。（「片側検定と両側検定」を参照）

■問題 9.　誤
解説　パラメトリック検定とは，母集団に特定の確率分布を仮定したうえで行われる検定のことです。平均値の検定だけをパラメトリック検定というわけではありません。（「パラメトリック検定とノンパラメトリック検定」を参照）

■問題 10.　正
解説　パラメトリック検定では，母集団の分布について仮定を設けて検定を行います。そのため，それらの仮定（前提）が誤りである場合には適切な結果は得られません。（「パラメトリック検定とノンパラメトリック検定」を参照）

第 7 章

■問題 1　有意な差がある（$t(10) = 2.26,\ p < .05,\ d = 0.68$）
解説　まず帰無仮説を設定します。帰無仮説は「想定される平均値（10）との間に差はない（$\textbf{平均値} - 10 = 0$）」，対立仮説は「想定される平均値（10）との間に差がある（$\textbf{平均値} - 10 \neq 0$）」です。

次に，検定統計量を求めます。母集団の分散については正確な値がわかりませんので，ここでは統計量として t を算出します。その場合，標準誤差は次のようになります。

$$\text{標準誤差} = \sqrt{\frac{\text{不偏分散}}{\text{標本サイズ}}}$$

不偏分散は，平均値からの偏差 2 乗の合計を標本サイズ -1 で割った値です。

$$\text{不偏分散} = \frac{(9-10)^2 + (8-10)^2 + \cdots + (11-10)^2 + (12-10)^2}{11-1} = 8.6$$

ここから，t の値は次のようになります。

$$t = \frac{\text{平均値の差}}{\text{標準誤差}} = \frac{\text{平均値の差}}{\sqrt{\dfrac{\text{不偏分散}}{\text{標本サイズ}}}} = \frac{12-10}{\sqrt{\dfrac{8.6}{11}}} = 2.2619\ldots$$

この場合の t の自由度は，標本サイズ $-1 = 11 - 1 = 10$ で，この自由度における t の両側 5% の臨界値は，巻末の数値表（付表 2）から 2.228 と求まります。

算出した t の絶対値は臨界値の 2.228 より大きいので，「差がない」とする帰無仮説は棄却され，「差がある」とする対立仮説が採用されます。

効果量

コーエンの d は平均値の差の絶対値を標準偏差（不偏分散の平方根）で割った値です。

$$d = \frac{|\text{平均値の差}|}{\text{標準偏差}} = \frac{|\text{平均値の差}|}{\sqrt{\text{不偏分散}}} = \frac{|2|}{\sqrt{8.6}} = 0.6819\ldots$$

■問題 2　有意な差がある（$t(6) = 3.06,\ p < .05,\ d = 1.16$）

解説　まず帰無仮説を設定します。帰無仮説は「2 つの条件間に平均値の差はない（**競走条件 − 単独条件** $= 0$）」，対立仮説は「2 つの条件間に平均値の差がある（**競走条件 − 単独条件** $\neq 0$）」です。

次に，検定統計量を求めます。このデータは，1 人の参加者が単独条件と競走条件の両方で測定を行なっていますので，**対応あり**のデータです。そのため，対応ありの t 検定を使用します。

対応ありのデータでは，まず参加者ごとに両条件間の測定値の差を求める必要があります。

	参加者						
	1	2	3	4	5	6	7
単独	6	7	5	9	8	8	7
競争	10	14	14	15	9	6	17
競 − 単	4	7	9	6	1	−2	10

さらに，これらの差の値について，平均値と不偏分散を求めます。

$$\text{平均値} = \frac{4+7+9+6+1+(-2)+10}{7} = 5$$

$$\text{不偏分散} = \frac{(5-4)^2+(5-7)^2+\cdots+(5-(-2))^2+(5-10)^2}{7-1} = 18.6666\ldots$$

ここから，t の値は次のように算出されます。なお，この場合の標本サイズは測定値のペアの数（参加者の人数）です。

$$t = \frac{\text{差の平均値}}{\text{標準誤差}} = \frac{\text{差の平均値}}{\sqrt{\dfrac{\text{差の不偏分散}}{\text{標本サイズ}}}} = \frac{5}{\sqrt{\dfrac{18.6666}{7}}} = 3.0618\ldots$$

この場合の t の自由度は，標本サイズ $-1 = 7-1 = 6$ で，この自由度における t の両側 5% の臨界値は，巻末の数値表（付表 2）から 2.447 と求まります。

算出した t の絶対値は臨界値の 2.447 より大きいので，「差がない」とする帰無仮説は棄却され，「差がある」とする対立仮説が採用されます。

効果量

コーエンの d は差の平均値の絶対値を標準偏差（ここでは差の不偏分散の平方根）で割った値です。

$$d = \frac{|\text{差の平均値}|}{\text{標準偏差}} = \frac{|\text{差の平均値}|}{\sqrt{\text{差の不偏分散}}} = \frac{|5|}{\sqrt{18.6666}} = 1.1572\ldots$$

■問題 3　有意な差はない（$t(10) = 1.53,\ n.s.,\ d = 0.88$）

解説　まず帰無仮説を設定します。帰無仮説は「熊本と青森の平均値に差はない（**熊本** − **青森** $= 0$）」，対立仮説は「想定される平均値（10）との間に差がある（**熊本** − **青森** $\neq 0$）」です。

次に，検定統計量を求めます。熊本県出身者と青森県出身者はそれぞれ別のグループですので，この場合は**対応なし**の t 検定を用います。また，両県で分散が同じという前提ですのでスチューデントの検定を行います。

まず，共通の分散を求めます。その計算のために必要な熊本，青森の偏差 2 乗の合計は，熊本，青森の各測定値と平均値の差を 2 乗した値の合計です。

$$\text{偏差}^2_{\text{熊本}}\text{の合計} = (23-22)^2 + (25-22)^2 + \cdots + (22-22)^2 = 76$$

$$\text{偏差}^2_{\text{青森}}\text{の合計} = (20-19)^2 + (19-19)^2 + \cdots + (24-19)^2 = 40$$

したがって，共通の分散は次の値になります。

$$\text{共通の分散} = \frac{\text{偏差}^2_{\text{熊本}}\text{の合計} + \text{偏差}^2_{\text{青森}}\text{の合計}}{\text{標本サイズ}_{\text{熊本}} + \text{標本サイズ}_{\text{青森}} - 2} = \frac{76+40}{6+6-2} = 11.6$$

ここから，t の値は次の通りとなります。

$$t = \frac{\text{平均値の差}}{\text{標準誤差}} = \frac{\text{平均値}_{\text{熊本}} - \text{平均値}_{\text{青森}}}{\sqrt{\text{共通の分散} \times \left(\dfrac{1}{\text{標本サイズ}_{\text{熊本}}} + \dfrac{1}{\text{標本サイズ}_{\text{青森}}}\right)}}$$

$$= \frac{22-19}{\sqrt{11.6 \times \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}\right)}} = 1.5256\ldots$$

この場合の t の自由度は, $\text{標本サイズ}_{\text{熊本}} + \text{標本サイズ}_{\text{青森}} - 2 = 6+6-2 = 10$ で，この自由度における t の両側 5% の臨界値は，巻末の数値表（付表 2）から 2.228 と求まります。

算出した t の絶対値は臨界値の 2.228 より小さいので,「差がない」とする帰無仮説を棄却できません。そのため,「両県の間に有意な差はない」というのが検定結果となります。

効果量

コーエンの d は平均値の差の絶対値を標準偏差（ここでは共通の分散の平方根）で割った値です。

$$d = \frac{|\text{平均値}_{\text{熊本}} - \text{平均値}_{\text{青森}}|}{\text{標準偏差}} = \frac{|\text{平均値}_{\text{熊本}} - \text{平均値}_{\text{青森}}|}{\sqrt{\text{共通の分散}}}$$

$$= \frac{|22 - 19|}{\sqrt{11.6}} = 0.8808\ldots$$

第 8 章

■問題 1　　有意な差がある

分散分析：課題条件の主効果が有意（$F(2, 9) = 19.89,\ p < .05,\ \eta^2 = 0.82$）

多重比較：通常と上下左右反転，左右反転と上下左右反転の間で差が有意

効果量：通常–左右反転：$d = 1.50$，通常–上下左右反転：$d = 4.50$，左右反転–上下左右反転：$d = 2.78$

解説　まず帰無仮説を設定します。帰無仮説は「3 つの水準で平均値が同じ」，対立仮説は「3 つの水準で平均値が同じでない」です。

次に検定統計量を求めます。まず，各水準の平均値を求めます。

$$\text{通常} = \frac{2+4+1+5}{4} = 3 \qquad \text{左右反転} = \frac{3+6+8+7}{4} = 6$$

$$\text{上下左右反転} = \frac{13+14+12+9}{4} = 12$$

次に，主効果と誤差の平方和を求めます。

$$\text{主効果平方和} = \left[(\text{水準平均値} - \text{全体平均値})^2 \times \text{標本サイズ}\right] \text{の合計}$$

$$= (3-7)^2 \times 4 + (6-7)^2 \times 4 + (12-7)^2 \times 4 = 168$$

$$\text{誤差平方和} = \left[(\text{測定値} - \text{水準平均値})^2\right] \text{の合計}$$

$$= (2-3)^2 + (4-3)^2 + \cdots + (12-12)^2 + (9-12)^2$$

$$= 38$$

主効果と誤差の自由度を求めます。

$$\text{主効果自由度} = \text{水準数} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\text{誤差自由度} = (\text{全体の標本サイズ} - 1) - \text{主効果の自由度}$$

$$= (12 - 1) - 2 = 9$$

主効果と誤差の平均平方を求めます。

$$\text{主効果平均平方} = \frac{\text{主効果平方和}}{\text{主効果自由度}} = \frac{168}{2} = 84$$

$$\text{誤差平均平方} = \frac{\text{誤差平方和}}{\text{誤差自由度}} = \frac{38}{9} = 4.2222\ldots$$

最後に F を求めます。

$$F = \frac{\text{主効果平均平方}}{\text{誤差平均平方}} = \frac{84}{4.2222} = 19.8947\ldots$$

ここまでの計算結果を分散分析表にまとめると次のようになります。

要因	平方和	自由度	平均平方	F
主効果（条件）	168	2	84.00	19.89
誤差	38	9	4.22	
全体	206	11		

自由度 2，9 の F の上側 5% の臨界値は 10.107 で，算出した値はこれより大きいので帰無は仮説棄却されます。したがって，「3 つの水準で平均値が同じ」という帰無仮説は棄却され，「3 つの水準で平均値が同じでない」という対立仮説が採用されます。

効果量

一元配置分散分析の効果量 η^2 は次の通りです。

$$\eta^2 = \frac{\text{主効果平方和}}{\text{全体平方和}} = \frac{168}{168+38} = 0.8155\ldots$$

事後検定

主効果が有意であったので，多重比較を行います。通常条件を A，左右反転条件を B，上下左右反転条件を C として，多重比較では，「A–B」，「A–C」，「B–C」の 3 つの比較を行います。それぞれの比較におけるスチューデント化された範囲 q の値は次の通りです。

$$q = \frac{|\text{2 群の平均値の差}|}{\sqrt{\dfrac{\text{誤差平均平方}}{\text{標本サイズ}}}}$$

$$q_{A-B} = \frac{|3-6|}{\sqrt{\frac{4.22}{4}}} = 2.9207\ldots \qquad q_{A-C} = \frac{|3-12|}{\sqrt{\frac{4.22}{4}}} = 8.7622\ldots$$

$$q_{B-C} = \frac{|6-12|}{\sqrt{\frac{4.22}{4}}} = 5.8415\ldots$$

水準数 $k=3$，誤差の自由度 9 における有意水準 5% の q の臨界値は，付表 3 から 3.948 と求まります。算出した q のうち，これより大きいのは A–C（通常条件と上下左右反転条件），B–C（左右反転条件と上下左右反転条件）の 2 つで，この 2 つの差が有意となります。

事後検定の効果量

コーエンの d は，平均値の差の絶対値を標準偏差（ここでは「共通の分散」の平方根）で割った値です。「共通の分散」の算出方法についてはスチューデントの検定を参照してください。

$$\text{共通の分散}_{A-B} = \frac{\text{偏差}_A^2\text{の合計} + \text{偏差}_B^2\text{の合計}}{\text{標本サイズ}_A + \text{標本サイズ}_B - 2} = \frac{10+14}{4+4-2} = 4$$

$$\text{共通の分散}_{A-C} = \frac{\text{偏差}_A^2\text{の合計} + \text{偏差}_C^2\text{の合計}}{\text{標本サイズ}_A + \text{標本サイズ}_C - 2} = \frac{10+14}{4+4-2} = 4$$

$$\text{共通の分散}_{B-C} = \frac{\text{偏差}_B^2\text{の合計} + \text{偏差}_C^2\text{の合計}}{\text{標本サイズ}_B + \text{標本サイズ}_C - 2} = \frac{14+14}{4+4-2} = 4.6666\ldots$$

$$d_{A-B} = \frac{|\text{平均値}_A - \text{平均値}_B|}{\sqrt{\text{共通の分散}_{A-B}}} = \frac{|3-6|}{\sqrt{4}} = 1.5$$

$$d_{A-C} = \frac{|\text{平均値}_A - \text{平均値}_B|}{\sqrt{\text{共通の分散}_{A-C}}} = \frac{|3-12|}{\sqrt{4}} = 4.5$$

$$d_{B-C} = \frac{|\text{平均値}_A - \text{平均値}_B|}{\sqrt{\text{共通の分散}_{B-C}}} = \frac{|6-12|}{\sqrt{4.6666}} = 2.7774\ldots$$

■問題 2　有意な差がある

分散分析：「おもちゃ」の主効果と「おもちゃ × タイプ」の交互作用が有意

- タイプの主効果：$F(1,12) = 0.67,\ n.s.,\ \eta_p^2 = 0.05$
- おもちゃの主効果：$F(1,12) = 10.67,\ p < .05,\ \eta_p^2 = 0.47$
- タイプ × おもちゃの交互作用：$F(1,12) = 24.00,\ p < .05,\ \eta_p^2 = 0.67$

事後検定：車好きにおけるおもちゃの単純主効果（車好き・おもちゃ A–車好き・おもちゃ B）のみ有意差なし。残りはすべて差が有意。

効果量：

- 車好き・おもちゃ A – 車好き・おもちゃ B：$d = 1.10$
- 電車好き・おもちゃ A – 電車好き・おもちゃ B：$d = 3.40$
- 車好き・おもちゃ A – 電車好き・おもちゃ A：$d = 2.86$
- 車好き・おもちゃ B – 電車好き・おもちゃ B：$d = 2.04$

解説　まず帰無仮説を設定します。帰無仮説は，2 つの主効果と 1 つの交互作用それぞれについて設定する必要があります。

タイプの主効果

帰無仮説：$\textbf{平均値}_{\textbf{車}} = \textbf{平均値}_{\textbf{電車}}$　対立仮説：$\textbf{平均値}_{\textbf{車}} \neq \textbf{平均値}_{\textbf{電車}}$

おもちゃの主効果

帰無仮説：$\textbf{平均値}_A = \textbf{平均値}_B$　対立仮説：$\textbf{平均値}_A \neq \textbf{平均値}_B$

タイプ × おもちゃの交互作用

帰無仮説：$\textbf{交互作用} = 0$　対立仮説：$\textbf{交互作用} \neq 0$

次に，2 つの要因の各水準，およびその組み合わせについて平均値と全体平均値からの偏差を求めます。

条件：平均値（偏差）	おもちゃ	
タイプ	A($n = 8$)　：16.5 (　2)	B($n = 8$)　：12.5 (−2)
車 ($n = 8$)　：14(−0.5)	車・A($n = 8$)：　13 (−1.5)	車・B($n = 8$)：　15 (　0.5)
電車 ($n = 8$)：15(　0.5)	電・A($n = 8$)：　20 (　5.5)	電・B($n = 8$)：　10 (−4.5)

主効果（おもちゃ：お，タイプ：タ）および交互作用の平方和を求めます。

$$
\begin{aligned}
\text{主効果}_{\text{タ}} &= \left[\text{偏差}^2_{\text{タ}} \times \text{標本サイズ}\right] \text{の合計} = (-0.5)^2 \times 4 + (0.5)^2 \times 4 = 4 \\
\text{主効果}_{\text{お}} &= \left[\text{偏差}^2_{\text{お}} \times \text{標本サイズ}\right] \text{の合計} = (2)^2 \times 4 + (-2)^2 \times 4 = 64 \\
\text{交互作用}_{\text{タ}\times\text{お}} &= \left[(\text{偏差}_{\text{タ}\times\text{お}} - (\text{偏差}_{\text{お}} + \text{偏差}_{\text{タ}}))^2 \times \text{標本サイズ}\right] \text{の合計} \\
&= (-1.5 - (2 - (-0.5)))^2 \times 4 + (0.5 - (-2 - (-0.5)))^2 \times 4 \\
&\quad + (5.5 - (2 - 0.5))^2 \times 4 + (-4.5 - (-2 - 0.5))^2 \times 4 \\
&= 144
\end{aligned}
$$

主効果（タイプ，おもちゃ）および交互作用の自由度を求めます。

$$
\begin{aligned}
\text{主効果}_{\text{タ}} &= \text{水準数} - 1 = 2 - 1 = 1 \\
\text{主効果}_{\text{お}} &= \text{水準数} - 1 = 2 - 1 = 1 \\
\text{交互作用}_{\text{タ}\times\text{お}} &= \text{主効果}_{\text{お}}\text{の自由度} \times \text{主効果}_{\text{タ}}\text{の自由度} = 1 \times 1 = 1 \\
\text{誤差} &= (\text{全標本サイズ} - 1) - (\text{主効果}_{\text{お}} + \text{主効果}_{\text{タ}} + \text{交互作用}_{\text{タ}\times\text{お}}) \\
&= (16 - 1) - (1 + 1 + 1) = 12
\end{aligned}
$$

主効果（おもちゃ，タイプ）および交互作用の平均平方を求めます。

$$
\text{主効果}_{\text{タ}} = \frac{\text{平方和}}{\text{自由度}} = \frac{4}{1} = 4 \quad \text{主効果}_{\text{お}} = \frac{64}{1} = 64
$$

$$
\text{交互作用}_{\text{タ}\times\text{お}} = \frac{144}{1} = 144 \qquad \text{誤差} = \frac{72}{12} = 6
$$

最後に F を求めます。

$$
F_{\text{タ}} = \frac{\text{主効果平均平方}}{\text{誤差平均平方}} = \frac{4}{6} = 0.6666\ldots \quad F_{\text{お}} = \frac{64}{6} = 10.6666\ldots
$$

$$
F_{\text{タ}\times\text{お}} = \frac{\text{交互作用平均平方}}{\text{誤差平均平方}} = \frac{144}{6} = 24
$$

ここまでの計算結果を分散分析表にまとめると次のようになります。

要因	平方和	自由度	平均平方	F
主効果（タイプ）	4	1	4	0.67
主効果（おもちゃ）	64	1	64	10.67
交互作用（タ × お）	144	1	144	24.00
誤差	72	12	6	
全体	284	15		

自由度 1，12 の F の上側 5% の臨界値は 11.754 で，「おもちゃ」の主効果と「タイプ × おもちゃ」の交互作用では算出した F が臨界値より大きいので帰無仮説は棄却されます。タイプの主効果では算出した F が臨界値より小さいので帰無仮説を棄却できません。したがって，「おもちゃ」の主効果と「タイプ × おもちゃ」の交互作用が有意という結果になります。

効果量

主効果および交互作用の効果量 η_p^2 は，主効果または交互作用の平方和と誤差の平方和から算出されます。

$$\text{タイプの主効果}\ \eta_p^2 = \frac{\text{主効果平方和}}{\text{主効果平方和} + \text{誤差平方和}} = \frac{4}{4+72} = 0.0526\ldots$$

$$\text{おもちゃの主効果}\ \eta_p^2 = \frac{64}{64+72} = 0.4705\ldots \qquad \text{交互作用}\ \eta_p^2 = \frac{144}{144+72} = 0.6666\ldots$$

事後検定

おもちゃの主効果が有意ですが，おもちゃの要因には 2 水準しかないので事後検定は不要です。事後検定は，おもちゃ × タイプの交互作用についてのみ行います。

単純主効果の検定を用いて事後検定を行う場合，次の 4 つの単純主効果の検定が必要になります。

- おもちゃ A におけるタイプの単純主効果
- おもちゃ B におけるタイプの単純主効果
- 車好きにおけるおもちゃの単純主効果
- 電車好きにおけるおもちゃの単純主効果

おもちゃ A におけるタイプの単純主効果　おもちゃ A におけるタイプの単純主効果では，おもちゃ A の 8 つの測定値を用いてタイプを要因とする一元配

置分散分析を行います。ただし，誤差の情報は二元配置分散分析のものを用いるので，算出するのは主効果に関する値のみです。

まず平方和を求めます。

$$\begin{aligned}\text{平方和} &= \left[(\text{水準平均値} - \text{おもちゃ A の平均値})^2 \times \text{標本サイズ}\right] \text{の合計} \\ &= (13 - 16.5)^2 \times 4 + (20 - 16.5)^2 \times 4 = 98\end{aligned}$$

次に自由度を求めます。

$$\text{自由度} = \text{水準数} - 1 = 2 - 1 = 1$$

平均平方を求めます。

$$\text{平均平方} = \frac{98}{1} = 98$$

求めた平均平方を二元配置分散分析の誤差の平均平方で割って F を求めます。

$$F = \frac{98}{6} = 16.3333\ldots$$

同様にして，残りの単純主効果についても計算を行います。

おもちゃ B におけるタイプの単純主効果

$$\begin{aligned}\text{平方和} &= \left[(\text{水準平均値} - \text{おもちゃ B の平均値})^2 \times \text{標本サイズ}\right] \text{の合計} \\ &= (15 - 12.5)^2 \times 4 + (10 - 12.5)^2 \times 4 = 50\end{aligned}$$

$$\text{自由度} = 2 - 1 = 1 \quad \text{平均平方} = \frac{50}{1} = 50 \quad F = \frac{50}{6} = 8.3333\ldots$$

車好きにおけるおもちゃの単純主効果

$$\begin{aligned}\text{平方和} &= \left[(\text{水準平均値} - \text{車好きの平均値})^2 \times \text{標本サイズ}\right] \text{の合計} \\ &= (13 - 14)^2 \times 4 + (15 - 14)^2 \times 4 = 8\end{aligned}$$

$$\text{自由度} = 2 - 1 = 1 \quad \text{平均平方} = \frac{8}{1} = 8 \quad F = \frac{8}{6} = 1.3333\ldots$$

電車好きにおけるおもちゃの単純主効果

$$\begin{aligned}\text{平方和} &= \left[(\text{水準平均値} - \text{電車好きの平均値})^2 \times \text{標本サイズ}\right] \text{の合計} \\ &= (20-15)^2 \times 4 + (10-15)^2 \times 4 = 200\end{aligned}$$

$$\text{自由度} = 2-1 = 1 \quad \text{平均平方} = \frac{200}{1} = 200 \quad F = \frac{200}{6} = 33.3333\ldots$$

いずれの単純主効果も，自由度 1, 12 における 5% 水準の F の臨界値（4.747）で仮説の採否を判断します。算出した 4 つの F のうち，「車好きにおけるおもちゃの単純主効果」以外の 3 つはすべて臨界値を超えていますので，これらの 3 つの単純主効果が有意ということになります。

多重比較を用いた事後検定

交互作用の事後検定を多重比較を用いて行う場合，次の 4 つのペアについて検定が必要になります。

- 車好き・おもちゃ A–車好き・おもちゃ B
- 電車好き・おもちゃ A–電車好き・おもちゃ B
- 車好き・おもちゃ A–電車好き・おもちゃ A
- 車好き・おもちゃ B–電車好き・おもちゃ B

$$q = \frac{|2\text{ 群の平均値の差}|}{\sqrt{\dfrac{\text{誤差平均平方}}{\text{標本サイズ}}}}$$

$$q_{\text{車}\cdot A-\text{車}\cdot B} = \frac{|13-15|}{\sqrt{\dfrac{6}{4}}} = 1.6329\ldots \quad q_{\text{電}\cdot A-\text{電}\cdot B} = \frac{|20-10|}{\sqrt{\dfrac{6}{4}}} = 8.1649\ldots$$

$$q_{\text{車}\cdot A-\text{電}\cdot A} = \frac{|13-20|}{\sqrt{\dfrac{6}{4}}} = 5.7154\ldots \quad q_{\text{車}\cdot B-\text{電}\cdot B} = \frac{|15-10|}{\sqrt{\dfrac{6}{4}}} = 4.0824\ldots$$

この場合の調整済みの k の値は $k = 3$ となるので，$k = 3$，誤差の自由度 12 の q の臨界値（3.773）を基準に判断を行います。

算出した q の値は,「車好き・おもちゃ A–車好き・おもちゃ B」以外はすべて臨界値を超えていますので,「車好き・おもちゃ A–車好き・おもちゃ B」を除く 3 つの場合で差が有意ということになります。

事後検定の効果量

コーエンの d は，平均値の差の絶対値を標準偏差（ここでは共通の分散の平方根）で割った値です。「共通の分散」の算出方法についてはスチューデントの検定を参照してください。

$$\text{共通の分散} = \frac{\text{偏差}^2_A\text{の合計} + \text{偏差}^2_B\text{の合計}}{\text{標本サイズ}_A + \text{標本サイズ}_B - 2}$$

$$\text{共通の分散}_{\text{車}\cdot A-\text{車}\cdot B} = \frac{10+10}{4+4-2} = 3.3333\ldots$$

$$\text{共通の分散}_{\text{電}\cdot A-\text{電}\cdot B} = \frac{26+26}{4+4-2} = 8.6666\ldots$$

$$\text{共通の分散}_{\text{車}\cdot A-\text{電}\cdot A} = \frac{10+26}{4+4-2} = 6$$

$$\text{共通の分散}_{\text{車}\cdot B-\text{電}\cdot B} = \frac{10+26}{4+4-2} = 6$$

$$d_{\text{車}\cdot A-\text{車}\cdot B} = \frac{|\text{平均値}_{\text{車・A}} - \text{平均値}_{\text{車・B}}|}{\sqrt{\text{共通の分散}_{\text{車}\cdot A-\text{車}\cdot B}}} = \frac{|13-15|}{\sqrt{3.3333}} = 1.0954\ldots$$

$$d_{\text{電}\cdot A-\text{電}\cdot B} = \frac{|\text{平均値}_{\text{電・A}} - \text{平均値}_{\text{電・B}}|}{\sqrt{\text{共通の分散}_{\text{電}\cdot A-\text{電}\cdot B}}} = \frac{|20-10|}{\sqrt{8.6666}} = 3.3968\ldots$$

$$d_{\text{車}\cdot A-\text{電}\cdot A} = \frac{|\text{平均値}_{\text{車・A}} - \text{平均値}_{\text{電・A}}|}{\sqrt{\text{共通の分散}_{\text{車}\cdot A-\text{電}\cdot A}}} = \frac{|13-20|}{\sqrt{6}} = 2.8577\ldots$$

$$d_{\text{車}\cdot B-\text{電}\cdot B} = \frac{|\text{平均値}_{\text{車・B}} - \text{平均値}_{\text{電・B}}|}{\sqrt{\text{共通の分散}_{\text{車}\cdot B-\text{電}\cdot B}}} = \frac{|15-10|}{\sqrt{6}} = 2.0412\ldots$$

第 9 章

■問題 1　有意な差がある（$W=1,\ n=7,\ p<.05,\ r=0.77$）

解説　問題のデータは対応ありのデータなので，ウィルコクソンの符号順位検定を用います。まず, 帰無仮説を設定しましょう。帰無仮説は「**差の中央値** $=0$」，対立仮説は「**差の中央値** $\neq 0$」です。

次に，検定統計量を求めます。そのために，まずペアになる測定値の間で差を求めます。

	参加者						
	1	2	3	4	5	6	7
単独	6	7	5	9	8	8	7
競争	10	14	14	15	9	6	17
競 − 単	4	7	9	6	1	−2	10

差の絶対値を求め，絶対値が小さい順に順位をつけます。

	参加者						
	1	2	3	4	5	6	7
競 − 単	4	7	9	6	1	−2	10
絶対値	4	7	9	6	1	2	10
順位	3	5	6	4	1	2	7

差の符号がプラスの場合とマイナスの場合のそれぞれで，順位の値を合計します。順位の値を合計します。

$$\text{プラスの場合の順位合計} = 3+5+6+4+1+7$$

$$\text{マイナスの場合の順位合計} = 2$$

この 2 つのうち，値の小さい方 (2) が検定統計量 W です。また，標本サイズが 7 の場合の両側 5% の W 臨界値は数値表（付表 7）から 2 で，これ以下（同じ値を含む）の場合に帰無仮説が棄却されます。したがって，$W=2$ という算出結果から，「差の中央値 $=0$」とする帰無仮説を棄却し，「差の中央値 $\neq 0$」とする対立仮説を採用します。

効果量

ここでは効果量として r を算出しましょう。W から r を算出するには，まず W を z に変換する必要があります。そのために，この場合の期待値と分散

を求めます。

$$\text{期待値} = \frac{\text{標本サイズ} \times (\text{標本サイズ} + 1)}{4} = \frac{7 \times (7+1)}{4} = 14$$

$$\begin{aligned}\text{分散} &= \frac{\text{標本サイズ} \times (\text{標本サイズ} + 1) \times (\text{標本サイズ} \times 2 + 1)}{24} \\ &= \frac{7 \times (7+1) \times (7 \times 2 + 1)}{24} = \frac{840}{24} = 35\end{aligned}$$

ここから，z の値を求めます。

$$z = \frac{W - \text{期待値}}{\sqrt{\text{分散}}} = \frac{2 - 14}{\sqrt{35}} = -2.1974\ldots$$

さらに，z の値を r に変換します。

$$r = \frac{|z|}{\sqrt{\text{標本サイズ}}} = \frac{|-2.0283|}{\sqrt{7}} = 0.7666\ldots$$

■問題 2　有意な差はない（$U = 9,\ n_1 = n_2 = 6,\ n.s.,\ r = 0.42$）
解説　このデータは対応なしの 2 つの標本なので，マン=ホイットニーの U 検定を用いて検定します。マン=ホイットニーの U 検定における帰無仮説は「**2 つのグループで母集団の分布が同じ**」，対立仮説は「**2 つのグループで母集団の分布が同じでない**」です。

2 つの標本に含まれる測定値の間で大小比較をするために，縦方向に「熊本」，横方向に「青森」の測定値を並べた表を作成します。このとき，それぞれの標本で測定値を大きさの順に並べ替えておくと比較や計算が楽になります。ここでは，「熊本」の測定値の方が値が大きい場合を「+」，そうでない場合を「−」として示します。

		青森					
		15	21	22	23	25	26
熊本	16	+	−	−	−	−	−
	17	+	−	−	−	−	−
	18	+	−	−	−	−	−
	19	+	−	−	−	−	−
	20	+	−	−	−	−	−
	24	+	+	+	+	−	−

「+」と「−」の個数をそれぞれ数えます。「+」の個数は「9」，「−」の個数は「27」で，この 2 つのうち小さい方の値（9）が検定統計量 U です。

巻末の数値表（付表 6）から，2 つの標本の標本サイズが 6 と 6 の場合の両側 5% の臨界値は 6 と求まります。マン=ホイットニーの U 検定の場合，算出した U の値がこの値以下の場合に帰無仮説が棄却されますが，算出した値は 9 なので，「分布が同じ」とする帰無仮説は棄却されません。

効果量

ここでは，効果量として r を求めましょう。U から r を算出するには，まず U を z に変換する必要があります。そのために，この場合の期待値と分散を求めます。

$$\text{期待値} = \frac{\text{標本サイズ}_A \times \text{標本サイズ}_B}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$

$$\begin{aligned}\text{分散} &= \frac{\text{標本サイズ}_A \times \text{標本サイズ}_B \times (\text{標本サイズ}_A + \text{標本サイズ}_B + 1)}{12} \\ &= \frac{6 \times 6 \times (6+6+1)}{12} = 39\end{aligned}$$

ここから，z の値を求めます。

$$z = \frac{U - \text{期待値}}{\sqrt{\text{分散}}} = \frac{9-18}{\sqrt{39}} = -1.4411\ldots$$

さらに，z の値を r に変換します。

$$r = \frac{|z|}{\sqrt{\text{標本サイズ}_A + \text{標本サイズ}_B}} = \frac{|-1.4411|}{\sqrt{6+6}} = 0.4160\ldots$$

■問題 3

クラスカル=ウォリス検定：有意な差がある（$\chi^2(2,\ N=12) = 8.77,\ p < .05,\ \eta^2 = 0.75$）

多重比較：いずれのグループ間にも有意差なし（通常–左右反転：$r = 0.22$，通常–上下左右反転：$r = 0.29$，左右反転–上下左右反転：$r = 0.29$）

解説　このデータにはグループが 3 つあるので，クラスカル=ウォリス検定を使用します。クラスカル=ウォリス検定における帰無仮説は「**すべてのグループで母集団の分布が同じ**」，対立仮説は「**すべてのグループで母集団の分布が同じとは言えない**」です。

まず，グループの違いに関係なく，すべての測定値に測定値全体での順位をつけます。

通常		左右		上下左右		
測定値	順位	測定値	順位	測定値	順位	
2	2	3	3	13	11	
4	4	6	6	14	12	
1	1	8	8	12	10	
5	5	7	7	9	9	全体
順位平均	3	順位平均	6	順位平均	10.5	6.5

ここから，主効果（グループの違い）の平方和を求めます。

$$
\begin{aligned}
\text{主効果平方和} &= (\text{平均}_{\text{通常}} - \text{平均}_{\text{全体}})^2 \times \text{標本サイズ}_{\text{通常}} \\
&\quad + (\text{平均}_{\text{左右}} - \text{平均}_{\text{全体}})^2 \times \text{標本サイズ}_{\text{左右}} \\
&\quad + (\text{平均}_{\text{上下左右}} - \text{平均}_{\text{全体}})^2 \times \text{標本サイズ}_{\text{上下左右}} \\
&= (3 - 6.5)^2 \times 4 + (6 - 6.5)^2 \times 4 + (10.5 - 6.5)^2 \times 4 \\
&= 114
\end{aligned}
$$

次に全体の平方和を求めます。

$$
\begin{aligned}
\text{全体平方和} &= (\text{各測定値の順位} - \text{全体の順位平均値})^2 \text{の合計} \\
&= (2 - 6.5)^2 + (4 - 6.5)^2 + \cdots + (10 - 6.5)^2 + (9 - 6.5)^2 \\
&= 143
\end{aligned}
$$

最後に H の値を求めます。

$$
H = (\text{総標本サイズ} - 1) \times \frac{\text{主効果平方和}}{\text{全体平方和}} = (12 - 1) \times \frac{114}{143} = 8.7692\ldots
$$

なお，一般的な計算式を用いて計算する場合には，H の値は次のようにして求められます。式中の N はデータ全体の標本サイズです。

$$H = \frac{12}{N \times (N+1)} \times \left[\text{順位平均}_i^2 \times n_i\right] \text{の合計} - 3 \times (N+1)$$
$$= \frac{12}{12 \times (12+1)} \times (3^2 \times 4 + 6^2 \times 4 + 10.5^2 \times 4) - 3 \times (12+1)$$
$$= \frac{12}{12 \times 13} \times 621 - 3 \times 13 = \frac{621}{13} - 39 = 8.7692\ldots$$

効果量

効果量は次のように求められます。

$$\eta^2 = \frac{H - \text{グループの個数} + 1}{\text{総標本サイズ} - \text{グループの個数}} = \frac{8.77 - 3 + 1}{12 - 3} = \frac{6.77}{9} = 0.7522\ldots$$

事後検定

グループ間の差が有意だったので，事後検定として多重比較を行います。3つの条件があるので，比較すべきペアは次の3つになります。

通常 – 左右反転　　通常 – 上下左右反転　　左右反転 – 上下左右反転

この3つ多重比較について，マン=ホイットニーの U 検定とスティール=ドゥワス検定の両方の手順を見ておきましょう。なお，ここでは説明のため2通りの方法で多重比較を行いますが，実際の場面ではどちらか一方のみを行います。両方行ってはいけません。また，その際は，分析結果を見てから検定方法を決めるのではなく，どちらの方法を用いるのかを事前に決めておく必要があります。

まずはボンフェロニ法による調整を用いた方法で多重比較を行っています。各ペアについて，マン=ホイットニーの U を算出します。

	B			
通常	3	6	7	8
1	−	−	−	−
2	−	−	−	−
4	+	−	−	−
5	+	−	−	−

	上下左右			
通常	9	12	13	14
1	−	−	−	−
2	−	−	−	−
4	−	−	−	−
5	−	−	−	−

	上下左右			
左右	9	12	13	14
3	−	−	−	−
6	−	−	−	−
7	−	−	−	−
8	−	−	−	−

「通常–左右反転」のペアでは $U = 2$,「通常–左右上下反転」,「左右反転–左右上下反転」のペアでは $U = 0$ です。

巻末の数値表（付表 6）からは有意確率 $5\%/3 \fallingdotseq 1.66\%$ の U の臨界値を求めることはできませんので，それぞれの U の値を z に変換して検定を行います。

$$\text{期待値} = \frac{n_1 \times n_2}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

$$\text{分散} = \frac{n_1 \times n_2 \times (n_1 + n_2 + 1)}{12} = \frac{4 \times 4 \times (4 + 4 + 1)}{12} = 12$$

「通常–左右反転」のペアでは，z の値は次のようになります。

$$z = \frac{U - \text{期待値}}{\sqrt{\text{分散}}} = \frac{2 - 8}{\sqrt{12}} = -1.7320\ldots$$

残り 2 つのペアはどちらも $U = 0$ なので，z の値は次のようになります。

$$z = \frac{0 - 8}{\sqrt{12}} = -2.3094\ldots$$

両側確率 $5\%/3 \fallingdotseq 1.66\%$ の z の臨界値は，付表 2 の自由度無限大の t の値から 2.394 と求まります。3 つのペアについて算出した z の絶対値はいずれもこの値より小さいので，どのペアについても有意な差があるとは言えません。

次に，スティール=ドゥワス検定でも多重比較を行ってみます。まず，期待値と分散はすべてのペアで共通なので，それらを先に求めておきましょう。

$$\text{期待値} = \frac{\text{標本サイズ} \times (\text{標本サイズ} \times 2 + 1)}{2} = \frac{4 \times (4 \times 2 + 1)}{2} = 18$$

$$\text{分散} = \frac{\text{標本サイズ}^2 \times (\text{標本サイズ} \times 2 + 1)}{12} = \frac{4^2 \times (4 \times 2 + 1)}{12} = 12$$

次に，各ペアで順位合計を求め，q を算出します。なお，グループ数 k=3，誤差の自由度無限大の q の臨界値は，付表 4 から 3.314 と求まりますので，算出した q がこれより大きければ差が有意となります。

通常		左右反転	
測定値	順位	測定値	順位
2	2	3	3
4	4	6	6
1	1	8	8
5	5	7	7
順位合計	12		

通常		上下左右反転	
測定値	順位	測定値	順位
2	2	13	7
4	3	14	8
1	1	12	6
5	4	9	5
順位合計	10		

左右反転		上下左右反転	
測定値	順位	測定値	順位
3	1	13	7
6	2	14	8
8	4	12	6
7	3	9	5
順位合計	10		

$$q = \frac{|\text{片方の群の順位合計} - \text{期待値}| \times \sqrt{2}}{\sqrt{\text{分散}}}$$

$$\text{通常–左右の}q = \frac{|12 - 18| \times \sqrt{2}}{\sqrt{12}} = 2.4494\ldots$$

$$\text{通常–上下左右の}q = \frac{|10 - 18| \times \sqrt{2}}{\sqrt{12}} = 3.2659\ldots$$

$$\text{左右–上下左右の}q = \frac{|10 - 18| \times \sqrt{2}}{\sqrt{12}} = 3.2659\ldots$$

3 つのペアいずれにおいても算出した q の値が臨界値を下回りましたので，先ほどの場合と同様，いずれのペアにおいても有意差なしという結果になりました。

この場合は標本サイズが小さすぎることが原因ですが，実際の分析でも，クラスカル=ウォリス検定（あるいは分散分析）で有意という結果が得られたのに，多重比較ではどこにも有意差がないということはあり得ます。そのような場合，「全体としては違いがあるけれども，個別の条件間の差ははっきりしない」という判断になります。

事後検定の効果量

マン=ホイットニーの U 検定による多重比較で算出した z をもとに，効果量 r を算出すると次のようになります[*1]。

$$\text{通常–左右反転の} r = \frac{|z|}{\sqrt{n_1 + n_2}} = \frac{|-1.73|}{\sqrt{4+4}} = 0.6116\ldots$$

$$\text{残りの 2 つのペア} r = \frac{|-2.31|}{\sqrt{4+4}} = 0.8167\ldots$$

第 10 章

■問題 1

χ^2 **検定**：有意な差がある（$\chi^2(2,\ N = 120) = 6.95,\ p < .05, w = 0.24$）

事後検定：グーが有意に少ない（グー：$h = 0.24$，チョキ：$h = 0.05$，パー：$h = 0.17$）

解説　まず帰無仮説を立てます。帰無仮説は「**グー ＝ チョキ ＝ パー ＝ 1/3**」，対立仮説は「**グー ＝ チョキ ＝ パー ＝ 1/3 でない**」です。帰無仮説が正しいならば，グー，チョキ，パーの度数は 120 回中それぞれ 40 回ずつになるはずです。この期待度数と観測度数，そして観測度数と期待度数の差を表にまとめると次のようになります。

	グー	チョキ	パー
期待度数	40	40	40
観測度数	27	43	50
度数の差	−13	3	10

このデータでは，グー，チョキ，パーの 3 種類の値があるので，χ^2 による適合度検定を行います。その場合，検定統計量は度数の差の 2 乗を期待度数で割ったものの合計です。また，自由度はカテゴリ数 $-1 = 3 - 1 = 2$ です。

$$\chi^2 = \frac{(\text{観測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}} \text{の合計} = \frac{(-13)^2}{40} + \frac{3^2}{40} + \frac{10^2}{40} = 6.95$$

[*1] スティール=ドゥワス検定の場合も z の値は同じですので，r の値はどちらの場合も共通です。

自由度 2 の有意確率 5% の χ^2 の臨界値は，巻末の数値表（付表 5）から 5.991 と求まります。算出した χ^2 の値は 6.95 でこれより大きいので帰無仮説は棄却されます。したがって，「**グー = チョキ = パー = 1/3 でない**」とする対立仮説が採用されます。

効果量

この場合の効果量は，クラメールの V もコーエンの w も同じ値になります。

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{\text{総度数} \times (\text{行数} - 1)}} = \sqrt{\frac{6.95}{120 \times (2 - 1)}} = 0.2406 \ldots$$

$$w = V \times \sqrt{\text{行数} - 1} = 0.2406 \times \sqrt{2 - 1} = 0.2406$$

事後検定

グー，チョキ，パーのどれが 1/3 と有意に異なるのかを確かめるため，事後検定として二項検定を実施します。いずれのカテゴリーも度数が 20 以上あるので，ここでは z に近似して検定を行います。この場合はいずれも成功率 1/3 の二項分布を用いるので，分散は次のようになります。なお，二項分布の期待値は期待度数と同じです。

$$\text{分散} = \text{試行数} \times \text{成功率} \times (1 - \text{成功率}) = 120 \times \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{3}) = 26.6666 \ldots$$

$$\text{グーの}z = \frac{\text{グーの度数} - \text{期待値}}{\sqrt{\text{分散}}} = \frac{27 - 40}{\sqrt{26.6666}} = -2.5174 \ldots$$

$$\text{チョキの}z = \frac{\text{チョキの度数} - \text{期待値}}{\sqrt{\text{分散}}} = \frac{43 - 40}{\sqrt{26.6666}} = 0.5809 \ldots$$

$$\text{パーの}z = \frac{\text{パーの度数} - \text{期待値}}{\sqrt{\text{分散}}} = \frac{50 - 40}{\sqrt{26.6666}} = 1.9364 \ldots$$

検定を 3 回繰り返すので，有意水準は 5%/3 に設定します。その場合の z の臨界値は，巻末の t 分布表（付表 2）における両側確率 5%/3 の自由度無限大の値（2.394）を使用します。

算出した 3 つの z のうち，臨界値より値が大きいのはグーの場合だけですので，グーの場合のみ期待比率 1/3 との間に有意な差があると言えます。

事後検定の効果量

二項検定の効果量としてコーエンの h を求めておきます。コーエンの h は，角変換した比率の差の絶対値です。期待比率とグー，チョキ，パーのそれぞれの観測比率を角変換すると次のようになります。なお，$\sin^{-1}\sqrt{1/3}$ の値は，Excel を使うのであれば Excel の数式バーに`=ASIN(SQRT(1/3))`と入力することで求められます。

$$\text{期待比率の}\varphi = 2 \times \sin^{-1}\sqrt{1/3} = 1.2309\ldots$$

$$\text{グー比率の}\varphi = 2 \times \sin^{-1}\sqrt{27/120} = 0.9884\ldots$$

$$\text{チョキ比率の}\varphi = 2 \times \sin^{-1}\sqrt{43/120} = 1.2835\ldots$$

$$\text{グー比率の}\varphi = 2 \times \sin^{-1}\sqrt{50/120} = 1.4033\ldots$$

ここから，それぞれの h の値は次の通り求まります。

$$\text{グーの}h = |\varphi_{\text{グー}} - \varphi_{\text{期待}}| = |1.2309 - 0.9884| = 0.2425$$

$$\text{チョキの}h = |\varphi_{\text{チョキ}} - \varphi_{\text{期待}}| = |1.2309 - 1.2835| = 0.0526$$

$$\text{パーの}h = |\varphi_{\text{パー}} - \varphi_{\text{期待}}| = |1.2309 - 1.4033| = 0.1724$$

■問題 2　有意な差はない（$p = 0.14$, $n.s.$, $\varphi = 0.46$）

解説　アウトドア派でネコ好きのセルの度数 1 なので，ここを基準にすると考えやすいでしょう。このデータと周辺度数が同じクロス表の数は，アウトドア・ネコ好きの度数が 0〜6 までの全部で 7 通りです。

まず，データと同じアウトドア・ネコ好きの度数が 1 の場合の確率（P_1）は次の通りです。

$$P_1 = \frac{6! \times 8! \times 8! \times 6!}{14! \times 5! \times 1! \times 3! \times 5!} = 0.1118\ldots$$

残りの組み合わせについても確率を求めます。

$$P_0 = \frac{6! \times 8! \times 8! \times 6!}{14! \times 6! \times 0! \times 2! \times 6!} = 0.0093\ldots \quad P_2 = \frac{6! \times 8! \times 8! \times 6!}{14! \times 4! \times 2! \times 4! \times 4!} = 0.3496\ldots$$

$$P_3 = \frac{6! \times 8! \times 8! \times 6!}{14! \times 3! \times 3! \times 5! \times 3!} = 0.3729\ldots \quad P_4 = \frac{6! \times 8! \times 8! \times 6!}{14! \times 2! \times 4! \times 6! \times 2!} = 0.1398\ldots$$

$$P_5 = \frac{6! \times 8! \times 8! \times 6!}{14! \times 1! \times 5! \times 7! \times 1!} = 0.0159\ldots \quad P_6 = \frac{6! \times 8! \times 8! \times 6!}{14! \times 0! \times 6! \times 8! \times 0!} = 0.0003\ldots$$

このデータと同じかそれより極端な場合のクロス表は，アウトドア・ネコ好きの度数が 0，1，5，6 の場合の 4 つで，この 4 つの値の合計が求める確率です。

$$p = P_0 + P_1 + P_5 + P_6 = 0.1375\ldots$$

効果量

このクロス表の効果量 φ は連関係数 φ の絶対値です。

$$\varphi = \frac{|5 \times 5 - 1 \times 3|}{\sqrt{6 \times 8 \times 8 \times 6}} = 0.4583\ldots$$

また，この場合のオッズ比は次のようになります。

$$\text{オッズ比} = \frac{5 \times 5}{1 \times 3} = 8.3333\ldots \quad \text{または} \quad \frac{1 \times 3}{5 \times 5} = 0.12$$

■問題 3

χ^2 **検定**：有意な差はない（$\chi^2(2,\ N = 180) = 6.45,\ p < .05,\ w = 0.19$）

残差分析：B クラスで有意に合格者が少なく，C クラスで有意に合格者が多い

解説　この場合の帰無仮説は「**クラスと合格率は独立**」（クラスによって合格率が違わない）で，対立仮説は「**クラスと合格率は独立でない**」（クラスによって合格率が違う）です。

まず，このクロス表の期待度数を求めます。

$$\text{期待度数} = \frac{\text{行合計} \times \text{列合計}}{\text{総度数}}$$

	A クラス	B クラス	C クラス	計
合　格	40	40	40	120
不合格	20	20	20	60
計	60	60	60	180

ここから，観測度数と期待度数の差を求め，χ^2 を算出します。

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(\text{観測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}}\text{の合計}\\ &= \frac{(41-40)^2}{40} + \frac{(33-40)^2}{40} + \frac{(46-40)^2}{40} +\\ &\quad \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(27-20)^2}{20} + \frac{(14-20)^2}{20} = 6.45\end{aligned}$$

また, この場合の χ^2 の自由度は, $(\text{行数}-1)\times(\text{列数}-1) = (2-1)\times(3-1) = 2$ です。

巻末の数値表（付表 5）から，有意確率 5% で自由度 2 の χ^2 の臨界値は 5.991 と求まります。算出した χ^2 の値はこの臨界値より大きいので帰無仮説は棄却され,「クラスと合格率は独立でない」（クラスによって合格率が異なる）という対立仮説が採用されます。

効果量

クロス表は 2 行 3 列なので k の値は 2 となり，この場合のクラメールの V とコーエンの w は同じ値になります。

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{\text{総度数} \times (k-1)}} = \sqrt{\frac{6.45}{180 \times (2-1)}} = 0.1892\ldots$$

$$w = V \times \sqrt{k-1} = 0.1892 \times \sqrt{2-1} = 0.1892$$

残差分析

調整済み標準化残差を求め残差分析を行います。そのために，まずクロス表の各セルについて残差分散を求めます。

$$\text{残差分散} = \left(1 - \frac{\text{行合計}}{\text{総度数}}\right) \times \left(1 - \frac{\text{列合計}}{\text{総度数}}\right)$$

なお，残差分散は期待度数が同じセルについては同じ値になるので，ここで求めるべき残差分散の値は次の 2 種類のみです。

$$\text{合格行の残差分散} = \left(1 - \frac{120}{180}\right) \times \left(1 - \frac{60}{180}\right) = 0.2222\ldots$$

$$\text{不合格行の残差分散} = \left(1 - \frac{60}{180}\right) \times \left(1 - \frac{60}{180}\right) = 0.4444\ldots$$

この残差分散を用いて各セルの調整済み標準化残差を算出します。調整済み標準化残差が有意に大きいかどうかは，両側 5% の z の臨界値（1.96）を基準に判断します。

$$\text{調整済み標準化残差} = \frac{\text{観測度数} - \text{期待度数}}{\sqrt{\text{期待度数} \times \text{残差分散}}}$$

$$\text{A クラス・合格} = \frac{41 - 40}{\sqrt{40 \times 0.2222}} = 0.3354\ldots$$

$$\text{B クラス・合格} = \frac{33 - 40}{\sqrt{40 \times 0.2222}} = -2.3479\ldots$$

$$\text{C クラス・合格} = \frac{46 - 40}{\sqrt{40 \times 0.2222}} = 2.0125\ldots$$

$$\text{A クラス・不合格} = \frac{19 - 20}{\sqrt{20 \times 0.4444}} = -0.3354\ldots$$

$$\text{B クラス・不合格} = \frac{27 - 20}{\sqrt{20 \times 0.4444}} = 2.3479\ldots$$

$$\text{C クラス・不合格} = \frac{14 - 20}{\sqrt{20 \times 0.4444}} = -2.0125\ldots$$

この結果から，B クラスでは合格者が期待度数よりも有意に少なく，C クラスでは有意に多いことがわかります。

■問題 4　有意な変化がある（$\chi^2(1,\ N = 200) = 25.19,\ p < .05,\ g = 0.22$）
解説　同じ対象者の前後の変化を見る必要があるので，この場合にはマクネマー検定を用います。マクネマー検定の帰無仮説は「**前後で変化がない**」，対立仮説は「**前後で変化がある**」です。

マクネマー検定における χ^2 は次の式で算出できます。

$$\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c} \qquad \text{※ } b,\ c \text{ は前後で意見が変化したセルの度数}$$
$$= \frac{(93-36)^2}{93+36} = 25.1860\ldots$$

マクネマー検定の χ^2 の自由度は 1 で，巻末の数値表（付表 5）から，有意確率 5% で自由度 1 の χ^2 の臨界値は 3.841 と求まります。算出した χ^2 の値はこの臨界値より大きいので，「前後で変化がない」とする帰無仮説は棄却され，「前後で変化がある」とする対立仮説が採用されます。

効果量

マクネマー検定の場合の効果量としてコーエンの g を用いる場合には，次の式を用います。

$$g = \frac{b\text{と}c\text{の大きい方の値}}{b+c} - 0.5 = \frac{93}{93+36} - 0.5 = 0.2209\ldots$$

また，オッズ比を用いる場合には次の通りとなります。

$$\text{オッズ比} = \frac{b}{c} = \frac{93}{36} = 2.5833\ldots \quad \text{または} \quad \frac{c}{b} = \frac{36}{93} = 0.3870\ldots$$